

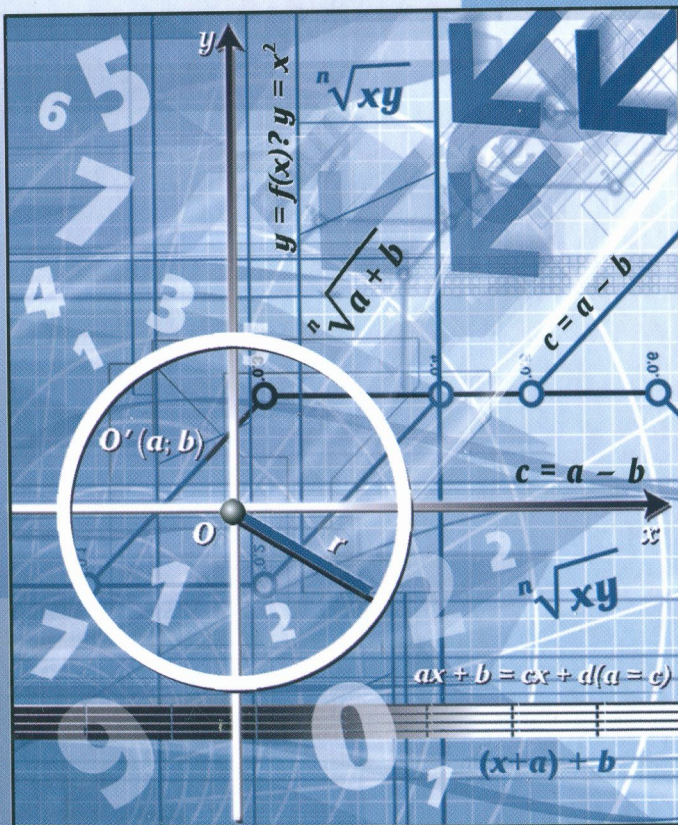
Алгебра

Углублённый уровень

9

часть

2



ИЗДАТЕЛЬСТВО



МНОГОЛІТНА

**А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев
П. В. Семенов**

Антропо

9
часть
2



$$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$$

$$a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1} + d, \quad n \geq 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$\div\div b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = q$$

$$(b_1 \neq 0, q \neq 0)$$

$$b_1 = b, \quad b_n = b_{n-1} \cdot q, \quad n \geq 2$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев
П. В. Семенов

КОНТРОЛЬНЫЙ
ЭКЗАМЕН

Алгебра

9

часть

2

УЧЕБНИК

для общеобразовательных
организаций
(углублённый уровень)

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

15-е издание, стереотипное



Москва 2021

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+ 22.141я721.6
А45

На учебник получены положительные заключения по результатам трёх экспертиз:
научной (Российская академия наук, № 004948 от 19.12.2016),
педагогической (Российская академия наук, № 005055 от 19.12.2016)
и общественной (РШБА, № 03/16-0383 от 26.12.2016)

Авторы:

*А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев, Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский,
Л. А. Александрова, П. В. Семенов*

**Алгебра. 9 класс. Учебник для общеобразовательных ор-
А45 ганизаций (углублённый уровень). В 2 ч. Ч. 2 / [А. Г. Морд-
кович и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. — 15-е изд., стер. —
М.: Мнемозина, 2021. — 287 с.: ил.**

ISBN 978-5-346-04597-7

Учебник написан в соответствии с требованиями Федерального госу-
дарственного образовательного стандарта и Примерной образовательной
программы основного общего образования, в нём реализованы принципы
проблемного, развивающего и опережающего обучения.

Вторая часть учебника содержит практический материал. Подбор
и последовательность разноуровневых упражнений и их значительный
объём позволят школьнику освоить предмет как на базовом, так и на углу-
блённом уровне, а учителю построить индивидуальную образовательную
траекторию обучения для каждого учащегося.

Итоговое повторение обеспечит полноценную подготовку к Основному
государственному экзамену.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+ 22.141я721.6

ISBN 978-5-346-04595-3 (общ.)
ISBN 978-5-346-04597-7 (ч. 2)

© «Мнемозина», 1999
© «Мнемозина», 2017, с изменениями
© «Мнемозина», 2021
© Оформление. «Мнемозина», 2021
Все права защищены



ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие девятиклассники!

Вы держите в руках вторую часть учебника для изучения алгебры в 9-м классе. Обе части неотделимы друг от друга:

— нельзя изучить курс, пользуясь только первой (теоретической) частью и не решая задачи из второй;

— нельзя изучить курс, пользуясь только второй (практической) частью, не читая часть первую.

Во всех параграфах представлены упражнения трёх уровней сложности. Первый уровень — устные и полуустные упражнения; второй — задания средней трудности (слева от номеров таких заданий поставлен значок ); третий — задания повышенной трудности (слева от номеров таких заданий помещён значок ). К большинству упражнений второго уровня и ко всем упражнениям третьего уровня приведены ответы.

Прежде чем решать упражнения из того или иного параграфа второй части, откройте первую часть и прочитайте материал соответствующего параграфа. А ещё лучше — положите первую часть учебника рядом с собой и посматривайте в неё в случае возникших затруднений, тем более что в ряде мест даны непосредственные ссылки на те фрагменты учебника, которые следует прочитать, чтобы решать соответствующие задания. Значок укажет на номер нужной страницы первой части учебника.

Наш учебник рассчитан на учеников классов, изучающих математику на углублённом уровне. Поэтому вам встретится очень много упражнений, при решении которых надо проявить смекалку, осуществить какие-то нестандартные шаги. Естественно, что в таких случаях далеко не всегда в первой части учебника вы сможете найти подсказки, будьте к этому готовы.

Желаем вам успехов!

1 НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

ГЛАВА

§1

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

4

Прочитайте пп. 1 и 2 в § 1 учебника*.

Решите неравенство:

1.1

а) $x^2 + 4x + 3 \leq 0$;

в) $-x^2 - 10 \leq 7x$;

б) $8 - 2x \geq x^2$;

г) $x^2 - 6x + 5 \geq 0$.

1.2

а) $x^2 + 6x + 9 > 0$;

в) $49x^2 + 14x + 1 \leq 0$;

б) $-4x^2 + 20x > 25$;

г) $-x^2 + 8x \geq 16$.

1.3

а) $4x^2 + x + 1 > 0$;

в) $3x^2 + 4 < x$;

б) $7x^2 + 3 \leq 2x$;

г) $5x^2 + 6x + 13 \geq 0$.

1.4

а) $-2x^2 + x - 3 < 0$;

в) $-6x^2 + 5x - 8 > 0$;

б) $-4x^2 + x - 1 \geq 0$;

г) $-3x^2 + 4x - 5 \leq 0$.

10

Прочитайте п. 3 в § 1 учебника

Решите неравенство:

1.5

а) $(x + 2)(x + 3) > 0$;

в) $\left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 4) > 0$;

б) $(x + 3)(x - 0,5) < 0$;

г) $\left(x - \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0$.

* Часть 1 (здесь и далее).

1.6

а) $t(t-1) < 0$;

в) $t(t+3) > 0$;

б) $t\left(t - \frac{1}{4}\right)(t-12) \geq 0$;

г) $t(t+8)(t-1,2) \leq 0$.

1.7

а) $(x+2)(x+4)(x-1) > 0$;

в) $(x-2)(x+3)(x+1) < 0$;

б) $(x-3)(5x-6)(x+6) < 0$;

г) $(x+5)(4x+1)(x-3) > 0$.

1.8

а) $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$;

в) $(3x-2)(x-4)(3-2x) < 0$;

б) $(2x+3)(1-2x)(x-1) \leq 0$;

г) $(x+7)(4x+3)(5-2x) \geq 0$.

1.9

а) $x^2 - x > 0$;

в) $x^2 - 3x \geq 0$;

б) $2x + x^2 \leq 0$;

г) $5x + x^2 < 0$.

1.10

а) $x^2 - 4 > 0$;

в) $x^2 - 25 \geq 0$;

б) $x(x^2 - 9) \leq 0$;

г) $x(x^2 - 64) < 0$.

1.11

а) $a^2 > 225$;

б) $\frac{1}{9}z^2 < 0$;

в) $b^2 \leq 16$;

г) $\frac{1}{4}c^2 \geq 1$.

1.12

а) $(x-4)(3x^2+x) > 0$;

в) $(x+5)(2x^2-x) \geq 0$;

б) $(2x+3)(x^2-1) \leq 0$;

г) $(4x-1)(x^2-4) < 0$.

1.13

а) $(2-3x)(3x+2)(5+3x)(2x-3) > 0$;

б) $(2x+1)(1-2x)(x-1)(2-3x) > 0$;

в) $(3x-2)(5-x)(x+1)(2-x) < 0$;

г) $(2x+5)(4x+3)(7-2x)(x-3) < 0$.

1.14

а) $x^3 - 64x > 0$;

в) $x^3 \geq x$;

б) $x^3 \leq 2x$;

г) $x^3 - 10x < 0$.

1.15

а) $(x-1)(x^2-3x+8) < 0$;

в) $(x-7)(-x^2-3x-18) > 0$;

б) $(x+5)(x^2+x+6) \geq 0$;

г) $(x+1,2)(x^2+5x+14) \leq 0$.

1.16

а) $(x^2+x+2)(x-4) < 0$;

б) $(2x^2-5x+2)(x^2-x+1) \geq 0$;

в) $(x+8)(x^2+2x+5) > 0$;

г) $(3x^2+10x+3)(x^2+3x+4) \leq 0$.

Прочитайте п. 4 в § 1 учебника

12

Решите неравенство:

1.17

а) $\frac{x(x-2)}{x+3} > 0$;

в) $\frac{x(x+1)}{x-9} > 0$;

б) $\frac{x^2+6x}{x-2} \leq 0$;

г) $\frac{x-5}{x^2+7x} \leq 0$.

1.18 ○

а) $\frac{(x-1)(3x-2)}{5-2x} > 0;$

б) $\frac{(2x+3)(2x+1)}{(x-1)(x-4)} \geq 0;$

в) $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)} \leq 0;$

г) $\frac{7-x}{(3x-2)(2x+1)(x-4)} < 0.$

1.19 ○

а) $\frac{3x-2}{2x-3} > 3;$

б) $\frac{x+3}{x-2} < 1;$

в) $\frac{7x-4}{x+2} \geq 1;$

г) $\frac{7x-5}{x+5} < 7.$

1.20 ○

а) $x + \frac{8}{x} \leq 6;$

б) $x + \frac{2}{x} \geq 3;$

в) $x + \frac{3}{x} \leq -4;$

г) $x - \frac{8}{x} > 2.$

1.21 ○

а) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35} > 0;$

б) $\frac{x^2-4x+12}{9-x^2} < 0;$

в) $\frac{x^2-2x+3}{x^2+9x+8} < 0;$

г) $\frac{x^2+7x+12}{25-x^2} > 0.$

1.22 ○

а) $\frac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8} > 2;$

б) $\frac{2x^2+x-16}{x^2+x} \leq 1;$

в) $\frac{1-x^2}{x^2+2x-8} \geq -1;$

г) $\frac{x^2+3x+10}{x^2-9} < 2.$

1.23 ○

а) $\frac{x^2+x+1}{x+7} < 0;$

б) $\frac{9-4x^2}{2x^2+x+1} \leq 0;$

в) $\frac{6-x}{x^2+2x+5} \geq 0;$

г) $\frac{3x^2-2x+1}{5x^2-x} \leq 0.$

1.24 ○

а) $\frac{x^3+x^2+x}{9x^2-25} \geq 0;$

б) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leq 0;$

в) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0;$

г) $\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+x+1} < 0.$

17

Прочитайте п. 5 в § 1 учебника

Решите неравенство:

1.25 ○

а) $\frac{x^2-4}{x^2-9} > 0;$

б) $\frac{x^2(x^2-16)}{x^2-9} \leq 0;$

в) $\frac{x^2-169}{x^2-100} \leq 0;$

г) $\frac{x^2-49}{x^2(x^2-144)} > 0.$

1.26



а) $x^2(x - 9) > 0$;

б) $(x + 2)^2(x + 4) \leq 0$;

в) $x^2(x + 3) > 0$;

г) $(x - 1)^2(x - 5) \geq 0$.

1.27



а) $(x - 1)^2(x^2 + 4x - 12) < 0$;

б) $(x + 2)(x^2 - 6x - 16) > 0$;

в) $(x + 3)^2(x^2 - 10x + 21) \geq 0$;

г) $(x - 1)(x^2 - 7x + 6) \geq 0$.

1.28



а) $(x^2 + 4x + 4)(6x - x^2 + 7) < 0$;

б) $(x + 3)^3(3x - 2 - x^2) \geq 0$;

в) $(x^2 - 6x + 9)(6 - 5x - x^2) > 0$;

г) $(x - 4)^3(7x - x^2 - 10) \leq 0$.

1.29



а) $\frac{x^2 - 14x + 49}{5x^2 - 15x} \leq 0$;

б) $\frac{16 - 9x^2}{4x^2 - 4x + 1} \geq 0$;

в) $\frac{3x^2 + 12x}{x^2 + 10x + 25} \geq 0$;

г) $\frac{9x^2 + 6x + 1}{25 - x^2} \leq 0$.

1.30

При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{\frac{2x + 4}{x^2 + 8x - 48}}$;

в) $\sqrt{\frac{x^2 + 7x + 10}{6 - x}}$;

б) $\sqrt{\frac{14 - x^2 + 5x}{x + 2}}$;

г) $\sqrt{\frac{x - 3}{x^2 + 5x - 24}}$?

1.31



Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}}$;

в) $\sqrt{\frac{2 - x - x^2}{x^2 - 4}}$;

б) $\sqrt{\frac{2x^2 - 5x + 2}{5x - 6 - x^2}}$;

г) $\sqrt{\frac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + 8x + 15}}$.

Решите неравенство:

1.32



а) $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 3} > \frac{3}{x + 2}$;

в) $\frac{x + 1}{x - 2} > \frac{-3}{x - 2} - \frac{1}{2}$;

б) $\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} > -3$;

г) $\frac{x - 4}{x - 3} > \frac{x - 3}{x - 4}$.

1.33



а) $(16 - x^2)(x^2 + 4)(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 12) \leq 0$;

б) $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x - 1} \leq \frac{1 - 2x}{x^2 - 1}$;

в) $(x^2 + 12x + 35)(2x + 10)(x^2 + 14x + 49) > 0$;

г) $4 - \frac{x}{5 - x} + \frac{3x}{x^2 - 25} < 4$.

1.34 ○ Укажите целые решения неравенства:

- а) $-4x^2 + 15x + 4 > 0$; в) $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$;
 б) $\frac{2x+7}{x-1} \leq 0$; г) $\frac{x+2}{22-4x} > 0$.

1.35 ○ Дано выражение $f(x) = x(x-2)^2(x+1)^3(x+5)$. Найдите значения переменной, при которых:

- а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$; в) $f(x) \geq 0$; г) $f(x) \leq 0$.

1.36 ○ Дано выражение $f(x) = x^{10}(x+1)^{11}(x-5)(x+2)$. Найдите значения переменной, при которых:

- а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geq 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leq 0$.

1.37 ○ Дано выражение $f(x) = \frac{(x+2)^2(x-1)(2x+3)}{x(2x+1)}$. Найдите значения переменной, при которых:

- а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$; в) $f(x) \geq 0$; г) $f(x) \leq 0$.

1.38 ○ Дано выражение $f(x) = \frac{x^2(x+1)}{(x-3)(x+2)}$. Найдите значения переменной, при которых:

- а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geq 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leq 0$.

1.39 ○ Дано выражение $f(x) = \frac{x(x+1)}{(x-3)(x+2)^2}$. Найдите значения переменной, при которых:

- а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \geq 0$; в) $f(x) < 0$; г) $f(x) \leq 0$.

1.40 ○ Пусть $f(x) = \frac{x^2(x+1)}{(x-3)(x+2)}$. Решите неравенство:

- а) $f(2x) < 0$; в) $f(x-5) < 0$;
 б) $f(-x) < 0$; г) $f(3-2x) < 0$.

1.41 ○ Пусть $f(x) = \frac{3x - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{x^2 - 3x + 2}$. Решите неравенство:

- а) $f(x) > 0$; в) $f(-x) > 0$;
 б) $f(x-5) > 0$; г) $f(3-x) > 0$.

1.42 ○ Не выполняя построения, найдите абсциссы точек графика функции $y = g(x)$, расположенных выше оси абсцисс, если:

- а) $g(x) = x^2 - x^3$; в) $g(x) = x^2 - x^4$;
 б) $g(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 9)$; г) $g(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 16)$.

1.43 ○ Не выполняя построения, найдите абсциссы точек графика функции $y = g(x)$, расположенных ниже оси абсцисс:

а) $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$; в) $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x - 4}$;

б) $g(x) = \frac{x^4 - x^3}{1 - x^2}$; г) $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{1 - x^2}$.

1.44 ○ Не выполняя построения, найдите абсциссы точек графика функции $y = g(x)$, расположенных ниже соответствующих точек графика функции $y = f(x)$:

а) $g(x) = 2x^3$; $f(x) = x$; в) $g(x) = x^4 - x^3$; $f(x) = 5x^4 + x^3$;

б) $g(x) = \frac{2}{x}$; $f(x) = \frac{1}{x-1}$; г) $g(x) = \frac{1}{x}$; $f(x) = 2 - x$.

1.45 ● Куплено некоторое количество одинаковых карандашей и некоторое количество одинаковых тетрадей. За тетради уплачено 17 р. 82 к., а за карандаши — 1 р. 82 к. Сколько куплено тетрадей, если тетрадь не менее чем на 2 р. дороже карандаша и тетрадей было на 4 больше, чем карандашей?

1.46 ○ Найдите, при каких значениях параметра p уравнение

$$3x^2 - 2px - p + 6 = 0:$$

а) имеет два различных корня;

б) имеет один корень;

в) не имеет корней;

г) имеет хотя бы один корень.

1.47 ● Найдите, при каких значениях параметра p уравнение

$$(p + 4)x^2 + 2px + 2 = 0 \text{ имеет:}$$

а) один корень;

в) хотя бы один корень;

б) два корня;

г) не более одного корня.

1.48 ● Найдите такое целочисленное значение параметра p , при котором множество решений неравенства $(x + 2)(p - x) \geq 0$ содержит:

а) ровно четыре целых числа;

в) ровно два целых числа;

б) ровно два натуральных числа;

г) ровно одно целое число.

1.49 ● Найдите такое натуральное значение параметра p , при котором множество решений неравенства $(7 - x)(p - x) < 0$:

а) содержит ровно три натуральных числа;

б) не содержит ни одного целого числа.

1.50

Найдите такое натуральное значение параметра p , при котором множество решений неравенства $(x - 8)(p + x) \leq 0$ содержит:

- а) ровно десять целых чисел;
- б) ровно два отрицательных целых числа;
- в) ровно четыре целых неположительных числа;
- г) только положительные целые числа.

1.51

Найдите все целочисленные значения параметра p , при каждом из которых множество решений неравенства $x^2(x + 2)(p - x) \geq 0$ содержит:

- а) ровно два целых числа;
- б) ровно четыре целых числа;
- в) ровно три целых числа;
- г) ровно пять целых чисел.

§2

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

21

Прочитайте п. 1 в § 2 учебника

2.1

Задайте множество, перечислив его элементы, если словесное описание множества следующее:

- а) цифры, которые больше 5;
- б) целые отрицательные числа, которые больше -7 ;
- в) четыре последние буквы русского алфавита;
- г) различные цифры года рождения и года гибели М. Ю. Лермонтова.

2.2

Множество задано перечислением элементов. Приведите какое-нибудь словесное описание этого множества:

- а) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$;
- б) $\{2, 3, 5, 7\}$;
- в) $\{3, 6, 9, \dots, 27, 30\}$;
- г) $\{A, B, C, D, \dots, X, Y, Z\}$.

2.3

Верно ли, что:

- а) $-5 \in \mathbb{N}$;
- б) $-5 \in \mathbb{Z}$;
- в) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$;
- г) $2,(45) \in \mathbb{Q}$?

2.4

Какие из указанных множеств являются конечными, а какие бесконечными:

- а) множество всех целых чисел промежутка $(-3; 11]$;
- б) множество всех рациональных чисел промежутка $(-3; 11]$;
- в) множество тех чисел промежутка $(-3; 11]$, квадрат которых целое число;
- г) множество всех действительных чисел промежутка $(-3; 11]$?

2.5

Запишите в виде числового промежутка множество:

- а) $\{x \mid -13 - 3x \geq 0\}$;
- б) $\left\{x \mid \frac{5-x}{1+x} > 1\right\}$;
- в) $\{x \mid x^2 - 1 < 0\}$;
- г) $\left\{x \mid \frac{(x^2 - 6x + 10)(x + 2)}{(x^2 + 1)(4 - x)} \geq 0\right\}$.

2.6

Докажите, что заданное множество состоит из одного числа (элемента), и найдите это число:

- а) $\{x \mid x^2 \leq 0\}$;
- б) $\{x \mid x^2 + 18x \leq -81\}$;
- в) $\{x \mid 41\sqrt{x} \leq 0\}$;
- г) $\{x \mid x^2 + 16 \leq 8x\}$.

2.7

Верно ли, что:

- а) $0,7 \in \{x \mid x^2 - 1 < 0\}$;
- б) $-7 \in \{x \mid x^2 + 16x \leq -64\}$;
- в) $-0,999 \in \left\{x \mid \frac{5-x}{1+x} > 1\right\}$;
- г) $1,001 \in \left\{x \mid \frac{x^2 - 6x + 5}{4 - x} \leq 0\right\}$?

Найдите множество корней уравнения:

2.8

- а) $(3x^2 + 7x - 10)(x^2 + 8x - 9) = 0$;
- б) $(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16) = 0$;
- в) $(x^2 - 3x + 11)(x^2 + 2x + 7) = 0$;
- г) $(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7) = 0$.

2.9

- а) $(\sqrt{x})^2 - 1 = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$;
- б) $((x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16))^2 + ((x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7))^2 = 0$;
- в) $(\sqrt{x})^2 + 1 = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;
- г) $\frac{(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7)}{(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16)} = 0$.

Пусть A — множество корней уравнения

$$(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16) = 0,$$

а B — множество корней уравнения

$$(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7) = 0.$$

Выразите через A и B множество корней уравнения:

2.10



а) $(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16)(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7) = 0;$

б) $((x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16))^2 + ((x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7))^2 = 0.$

2.11



а) $\frac{(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16)}{(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7)} = 0;$

б) $\frac{(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 7)}{(x^2 - 1)(x^2 + 6x - 16)} = 0.$

2.12



Найдите множество решений неравенства:

а) $5 - 7x < 12;$

в) $\frac{x^2 - 9}{x^2} \leq 0;$

б) $x^2 - 9 \geq 0;$

г) $|x^2 - 4| + |x^2 + x - 6| \leq 0.$

2.13



Найдите:

а) при каких значениях p пересечение множества решений уравнения $x^2 + 3x = 4$ и уравнения $x^3 = p$ пустое;

б) при каких значениях m пересечение множества решений неравенства $x^2 - 25 < 0$ и неравенства $x > m$ содержит ровно одно целое число;

в) при каких значениях p пересечение множества решений уравнения $x^2 - 5x = 6$ и уравнения $\sqrt{x} = p$ содержит ровно один элемент;

г) при каких значениях m пересечение множества решений неравенств $x^2 - 25 \leq 0$ и неравенства $x \leq m$ представляет из себя отрезок длиной 7.

2.14

Изобразите на координатной плоскости множество G точек с координатами $(x; y)$ и дайте его словесное описание, если:

а) $G: x = y;$

б) $G: |x| = |y|;$

в) $G: x = |y|;$

г) $G: |x| = y$

2.15

Дано множество $\{-8, 1; \sqrt{2}; \frac{17}{7}\}$. Перечислите все его подмножества, состоящие из двух чисел:

а) разного знака;

б) положительных;

в) рациональных;

г) среди которых есть иррациональное число.

2.16

Дано множество $A = \{к, л, w\}$. Перечислите все его подмножества, состоящие:

- а) из одного элемента;
- б) из двух элементов;
- в) более чем из одного элемента;
- г) из элементов, среди которых есть буквы как русского, так и латинского алфавита.

2.17

Даны три множества: $A = \{1, 2, 3, \dots, 37\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, $C = \{4, 8, 12, 16, \dots, 36\}$. Верно ли, что:

- а) $A \subset B$;
- б) $B \subset C$;
- в) $C \subset A$;
- г) $C \subset B$?

2.18

На числовой прямой изобразите следующие промежутки:

$$A = (-\sqrt{2}; 1), B = [0; 1,9), C = \left[-1,5; \frac{200}{101}\right].$$

Верно ли, что:

- а) $A \subset B$;
- б) $B \subset C$;
- в) $C \subset A$;
- г) $A \subset C$?

Прочитайте пп. 2 и 3 в § 2 учебника

25

2.19

Найдите пересечение $A \cap B$ множеств A и B , если:

- а) A — множество всех натуральных чисел, кратных 10, $B = \{1, 2, 3, \dots, 41\}$;
- б) A — множество всех нечётных целых чисел, $B = \{0, 3, 6, 9, \dots, 21\}$;
- в) $A = \{-11, -10, -9, \dots, -1, 0, 1, \dots, 9\}$, B — множество целых чисел, кратных 10;
- г) A — множество чётных чисел, B — множество простых чисел.

Даны числовые промежутки: $A = (0; 1)$, $B = [-0,5; 0,9]$, $C = [-1; 1]$, $D = (0,1; 1,1]$. Изобразите на числовой прямой множества:

2.20

- а) $A \cap B$;
- б) $B \cap C$;
- в) $A \cap B \cap D$;
- г) $A \cap B \cap C \cap D$.

2.21

- а) $A \cup B$;
- б) $A \cup D$;
- в) $B \cup D$;
- г) $A \cup B \cup C \cup D$.

2.22

Даны три числовых промежутка:

$$A = (7,7; 11), B = [\sqrt{97}; \sqrt{167}], C = (\sqrt{101}; 13].$$

Найдите множества:

- а) $(A \cap B) \cap C$;
- б) $(A \cap B) \cup C$;
- в) $(A \cup B) \cap C$;
- г) $(A \cup B) \cup C$.

- Найдите все натуральные числа, кубы которых — трёхзначные числа.
- Запишите множество M таких трёхзначных чисел, перечислив их в порядке убывания.
- Запишите множество A последних цифр элементов множества M , перечислив их в порядке возрастания.
- Сколькими способами можно перечислить различные между собой вторые цифры чисел из множества M ?

- В записи «* ∈ {4, Δ, 9}» вместо значков * и Δ можно поставить любое число из множества {0, 1, 2}. Получатся различные утверждения: 0 ∈ {4, 0, 9}, 1 ∈ {4, 2, 9} и т. п.
- Сколько получится утверждений, в которых на первом месте стоит число 2?
 - Сколько получится утверждений, в которых на месте Δ стоит положительное число?
 - Сколько всего утверждений получится?
 - Какую часть из всех утверждений составляют верные утверждения?

- Известно, что a, b, c, d — попарно различные числа. В записи « $\square \{ \Delta, c, d \}$ » вместо $*$ и Δ можно поставить числа a или b , а вместо \square — знак \in или знак \notin . Получатся различные утверждения.
- Сколько получится утверждений, в которых нет числа b ?
 - Сколько получится утверждений, в которых использован знак \notin ?
 - Сколько всего утверждений получится?
 - Какую часть из всех утверждений составляют неверные утверждения, начинающиеся с числа a ?

- Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены для всех действительных значений аргумента, M — множество корней уравнения $f(x) = 0$, а N — множество корней уравнения $g(x) = 0$. Найдите множество корней уравнения:

a) $f(x)g(x) = 0$;

$$\text{B) } (f(x))^2 + (g(x))^2 = 0;$$

$$6) \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

$$\Gamma) \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

○

- Пусть M — множество решений уравнения $f(x) = 0$, N — множество решений уравнения $g(x) = 0$. Верно ли утверждение:
а) множество решений уравнения $f(x)g(x) = 0$ есть объединение множеств M и N ;

б) множество решений уравнения $|f(x)| + |g(x)| = 0$ есть пересечение множеств M и N ?

Если утверждение верно, то доказите его, если неверно — приведите пример.

2.28 ○ Докажите утверждение:

а) множество решений уравнения

$$|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)|$$

совпадает с множеством решений неравенства $f(x) \cdot g(x) \geq 0$;

б) множество решений неравенства

$$|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$$

совпадает с множеством решений неравенства $f(x) \cdot g(x) < 0$.

Рассмотрите решение примера 5 в § 2 учебника

28

2.29 ○ Множество A состоит из 99 элементов, множество B — из 199 элементов, а множество $A \cap B$ — из 73 элементов. Сколько элементов:

- а) принадлежит множеству A , но не принадлежит множеству B ;
- б) принадлежит множеству B , но не принадлежит множеству A ;
- в) принадлежит множеству $A \cup B$?

2.30 ● По плану застройки участок площадью 1500 м^2 состоит из двух пересекающихся прямоугольников, их пересечение отведено под гараж. Площадь первого прямоугольника равна 900 м^2 , площадь второго — 700 м^2 . Найдите площадь:

- а) участка, отведённого под гараж;
- б) части первого прямоугольника, не отведённого под гараж;
- в) части второго прямоугольника, не отведённого под гараж;
- г) части застройки без учёта гаража.

2.31 ● Каждый из учеников 9-го класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, посмотрев спектакли A , B или C . При этом спектакли A , B , C видели соответственно 25, 12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе?

§3

СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

31

Прочитайте п. 1 в § 3 учебника

3.1

а) Какое из чисел -2 ; 0 ; 5 ; 6 является решением системы нера-

$$\text{венств } \begin{cases} 3x - 22 < 0, \\ 2x - 1 > 3? \end{cases}$$

б) Какое из чисел -3 ; $1,5$; $4,8$ является решением системы нера-

$$\text{венств } \begin{cases} 4x - 7 < 0, \\ 3x + 2 > 5? \end{cases}$$

Решите систему неравенств:

3.2

$$\text{а) } \begin{cases} x \geq 0, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq -5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x < 8, \\ x \geq 12; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x < 0, \\ x > 4. \end{cases}$$

3.3



$$\text{а) } \begin{cases} x > 3,14, \\ x > \pi; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x > \frac{1457}{7541}, \\ x > \frac{1453}{7547}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x > 1\frac{5}{9}, \\ x > \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x > 1 + \sqrt{3}, \\ x > \sqrt{5}. \end{cases}$$

3.4



$$\text{а) } \begin{cases} x < \sqrt{10}, \\ x < \pi; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x < \frac{6457}{1541}, \\ x < \frac{6453}{1547}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x < 1234^2, \\ x < 1233 \cdot 1235; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x < \sqrt{71} + \sqrt{31}, \\ x < \sqrt{72} + \sqrt{30}. \end{cases}$$

3.5



- а) $\begin{cases} 7x + 3 \geq 5(x - 4) + 1, \\ 4x + 1 \leq 43 - 3(7 + x); \end{cases}$
- б) $\begin{cases} 3(x + 8) \geq 4(7 - x), \\ (x + 2)(x - 5) > (x + 3)(x - 4); \end{cases}$
- в) $\begin{cases} 5(x + 1) - x > 2x + 2, \\ 4(x + 1) - 2 \leq 2(2x + 1) - x; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} (x + 2)(x - 6) \leq (x + 2)(x + 1) + 4, \\ 2(6x - 1) \geq 7(2x - 4). \end{cases}$

3.6



- а) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{4} < 7, \\ 1 - \frac{x}{6} > 0; \end{cases}$
- б) $\begin{cases} x - \frac{x}{4} \geq 2, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} > 1; \end{cases}$

- в) $\begin{cases} 1 - \frac{x}{4} > x, \\ x - \frac{x-4}{5} > 1; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} x - \frac{x-1}{2} > 1, \\ \frac{x}{3} < 5. \end{cases}$

3.7



- а) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \geq \frac{x-3}{4} - x, \\ 1 - x > 0,5x - 4; \end{cases}$
- б) $\begin{cases} \frac{2x-1}{6} + \frac{x+2}{3} - \frac{x-8}{2} > x-1, \\ 2-2x > 0,5 + 0,5x; \end{cases}$

- в) $\begin{cases} \frac{5x+7}{6} - \frac{3x}{4} < \frac{11x-7}{12}, \\ \frac{1-3x}{2} - \frac{1-4x}{3} \geq \frac{x}{6} - 1; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} \frac{8x+1}{3} > \frac{4x+9}{2} - \frac{x-1}{3}, \\ \frac{5x-2}{3} < \frac{2x+13}{2} - \frac{x+2}{3}. \end{cases}$

3.8



- а) $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 < 0; \end{cases}$
- б) $\begin{cases} 5x - 10 > 15, \\ x^2 + x - 6 \leq 0; \end{cases}$

- в) $\begin{cases} 3x - 1 < 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} 3x - 10 > 5x - 5, \\ x^2 + 5x + 6 < 0. \end{cases}$

3.9



- а) $\begin{cases} 7x^2 - x + 3 \leq 0, \\ 2x + 3 > 7; \end{cases}$
- б) $\begin{cases} -3x^2 + 2x - 1 \leq 0, \\ 6x > 3(x + 1) - 1; \end{cases}$

- в) $\begin{cases} 5x^2 - 2x + 1 \leq 0, \\ 2(x + 3) - (x - 8) < 4; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} -2x^2 + 3x - 2 < 0, \\ -3(6x - 1) - 2x < x. \end{cases}$

3.10



а)
$$\begin{cases} 3x^2 + x + 2 > 0, \\ x^2 < 9; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2x^2 + 5x + 10 > 0, \\ x^2 \geq 16; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} -7x^2 + 5x - 2 > 0, \\ x^2 \leq 25; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} -5x^2 + x - 1 > 0, \\ x^2 > 81. \end{cases}$$

3.11



а)
$$\begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x} \geq 0, \\ 2x - 1 \geq 0; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \frac{25 - x^2}{x} \leq 0, \\ 5x - 10 \geq 35; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{(x + 5)(x - 1)}{x} \geq 0, \\ 10x - 1 < 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x(x + 7)} < 0, \\ 20x \geq 20. \end{cases}$$

3.12



а)
$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 < 0, \\ x^2 - 36 \geq 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 9x^2 - 1 < 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 49x^2 - 1 < 0, \\ x^2 + 5x + 6 \geq 0. \end{cases}$$

3.13



а)
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0, \\ 2x^2 - 5x + 2 \leq 0; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 > 0, \\ x^2 - 7x - 8 \leq 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq 0, \\ 2x^2 + 5x < 0. \end{cases}$$

3.14



Решите двойное неравенство:

а) $-8 < 3x + 4 < 1;$

в) $-5 < 3 - 4x \leq 3;$

б) $-1 \leq \frac{6 - 2x}{4} \leq 0;$

г) $-3 < \frac{5x + 2}{2} < 1.$

3.15

При каких значениях x :а) значения двучлена $3 - 5x$ принадлежат интервалу $(-6; 6)$;б) значения дроби $\frac{2x + 1}{3}$ принадлежат отрезку $[-4; 0]$?

3.16

а) Решите двойное неравенство $0 < 1 + 4x < 17$ и укажите наименьшее и наибольшее целые числа, которые являются его решениями.б) Решите двойное неравенство $0 < 1 - 5x < 13$ и укажите наименьшее и наибольшее целые числа, которые являются его решениями.

Решите систему неравенств:

3.17 O

$$a) \begin{cases} \frac{2x+1}{x-2} < 1, \\ \frac{3x+2}{2x-3} > 2; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{3x-2}{3-x} < 2, \\ \frac{5x+1}{4x-5} > 3; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{7-3x}{2-5x} \leq 2, \\ \frac{2x+1}{3x-3} > 4; \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} \frac{x+3}{3x-1} < 1, \\ \frac{2x+5}{x-4} \geq 2. \end{cases}$$

3.18 O

$$a) \begin{cases} \frac{3x-4}{5-x} \geq \frac{1}{2}, \\ x^2 \geq 16; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x-1}{3-2x} \geq \frac{1}{2}, \\ x^2 \leq 25; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x^2 \leq 49, \\ \frac{2x+5}{1-6x} > 1; \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} \frac{4x-1}{2x+5} \geq \frac{3}{2}, \\ 4x^2 \geq 81. \end{cases}$$

3.19 O

$$a) \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{2x} \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0, \\ \frac{(x+2)(x+4)}{5x} \leq 0; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \leq 0, \\ \frac{(x+3)(x-2)}{2x} \geq 0; \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} x^2 - 12x + 20 < 0, \\ \frac{(x-3)(x+1)}{3x} \leq 0. \end{cases}$$

3.20 O

$$a) \begin{cases} \frac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8} > 2, \\ x + \frac{8}{x} \leq 6; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x^3-x^2+x-1}{2x+3} \leq 0, \\ \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + \frac{3}{x} \leq -4, \\ \frac{x-4}{x-3} > \frac{x-3}{x-4}; \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} \frac{x^3+x^2+x}{9x^2-25} \geq 0, \\ \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} \leq \frac{1-2x}{x^2-1}. \end{cases}$$

Найдите область определения выражения:

3.21 O

$$a) \sqrt{12-3x} + \sqrt{x+2};$$

$$b) \sqrt{15x-30} + \sqrt{4-x};$$

$$b) \sqrt{15-3x} + \sqrt{4+x};$$

$$r) \sqrt{6x-18} + \sqrt{x+1}.$$

3.22 ○ а) $\sqrt{(x-3)(x-5)} + \sqrt{(1-x)(7-x)}$;

б) $\sqrt{\frac{3x+2}{5-x}} + \sqrt{\frac{4-x}{7-2x}}$;

в) $\sqrt{(x-2)(x-3)} + \sqrt{(5-x)(6-x)}$;

г) $\sqrt{\frac{4x+1}{x+2}} + \sqrt{\frac{2x+1}{x-7}}$.

3.23 ○ а) $\sqrt{x^2-16} + \sqrt{7x-x^2}$;

б) $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{9-x^2}$;

в) $\sqrt{x^2-5x+6} + \sqrt{x^2-1}$;

г) $\sqrt{x^2+8x+7} + \sqrt{25-x^2}$.

3.24 ○ а) $\sqrt{(2x-5)(x+4)}$;

б) $\sqrt{(2x-5)} \cdot \sqrt{x+4}$;

в) $\sqrt{\frac{3x+2}{x-5}}$;

г) $\frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x-5}}$.

3.25 ○ а) $\frac{1+\sqrt{36-x^2}}{6x+30}$;

б) $\frac{\sqrt{3x+1}}{x^2-3x+2}$;

в) $\frac{4-\sqrt{2-5x}}{x^2+x}$;

г) $\frac{1+\sqrt{4x-x^2}}{3x-9}$.

3.26 ○ а) $\frac{\sqrt{2x-13}}{\sqrt{27-x-2}}$;

б) $\frac{1+\sqrt{x^2-3x}}{2-\sqrt{1-x}}$;

в) $\frac{5-\sqrt{2x+3}}{1-\sqrt{4-x}}$;

г) $\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{x+3-3}}$.

3.27 ○ а) $\frac{1+\sqrt{x^2-7x}}{x+\sqrt{x+1}}$;

б) $\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x+2-x}}$;

в) $\frac{1+\sqrt{5x^2-3x}}{x+\sqrt{x}}$;

г) $\frac{5+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{2x-1-x}}$.

3.28 ○ а) Докажите, что $\max\{f(x), g(x)\} < p(x)$ тогда и только тогда,

когда $\begin{cases} f(x) < p(x), \\ g(x) < p(x). \end{cases}$

б) Докажите, что $\min\{f(x), g(x)\} > p(x)$ тогда и только тогда,

когда $\begin{cases} f(x) > p(x), \\ g(x) > p(x). \end{cases}$

Решите неравенство:

3.29

а) $\max\{3x - 1; 11 - x^2\} \leq 2;$

б) $\max\left\{\frac{1}{x}; 6x - x^2\right\} < x;$

в) $\max\{-3x^2 + 12x; -8x + x^2\} \leq 33;$

г) $\max\left\{\frac{x}{x-1}; \frac{4x-x^2}{2}\right\} < \frac{x}{3}.$

3.30

а) $\min\{5 - 2x; x - x^2\} \geq 0;$ в) $\min\{3x - 1; 11 - x^2\} \geq 2;$

б) $\min\left\{\frac{2}{x}; \frac{2}{x^2}\right\} > x + 1;$ г) $\min\left\{\frac{1}{x}; 6x - x^2\right\} > x.$

3.31

При каких значениях параметра p система неравенств:

а) $\begin{cases} x < 3, \\ x > p; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \leq 7, \\ x \geq p; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leq 5, \\ x > p; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x \leq p, \\ x \geq 2 \end{cases}$

имеет решения; не имеет решений?

Решите двойное неравенство:

3.32

а) $-1 < \frac{3x-1}{2x+5} < 3;$

в) $1 < \frac{x^2-3}{x-2} \leq 2;$

б) $6 \leq 3x^2 - x + 6 \leq 10;$

г) $-5 \leq \frac{2+x}{x^2} < 1.$

3.33

а) $\frac{x^3}{x+1} < x^2 - 3 \leq 141;$

б) $\frac{4}{x-3} < x^2 - 3 \leq \frac{2}{x}.$

Решите систему неравенств:

3.34

а) $\begin{cases} \frac{x+3}{2+x} \geq 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 \leq 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x+3}{2+x} \geq 0, \\ x^4 + 7x^3 + 12x^2 > 0. \end{cases}$

3.35

а) $\begin{cases} 9 - 3x > 1, \\ \frac{1}{x+2} \leq 1, \\ x^2 > 2x - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 9x - x^3 > 0, \\ \frac{6}{x+2} \leq x + 1, \\ x^2 > 4x - 4. \end{cases}$

3.36 ● Решите тройное неравенство:

а) $1 - 2x \leq x^2 - 4x \leq 7 + 2x < x^2 + 5$;

б) $\frac{x^3}{x+1} \leq x^2 + 3x \leq 4 \leq x^2 + 6$.

Решите неравенство:

3.37 ● а) $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 12 < 0$; б) $4x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{1}{x} - 8 \leq 0$.

3.38 ● а) $x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 9x + 1 < 0$;
б) $25x^4 - 50x^3 + 14x^2 + 10x + 1 \leq 0$.

3.39 ● а) $(3x - 2)^2 - 3(3x - 2)(7 - 5x) + 2(5x - 7)^2 < 0$;
б) $(3 - x)^2 - 3(3 - x)(10x - 1) + 2(10x - 1)^2 \leq 0$.

3.40 ○ Найдите все значения параметра a , при которых система неравенств:

а) $\begin{cases} x < a, \\ 2x > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leq a, \\ 2x \geq 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leq a, \\ 2x < 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \geq a, \\ 2x \leq 1 + a \end{cases}$

имеет решения; не имеет решений; имеет единственное решение.

3.41 ○ Укажите все значения параметра p , при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x > 3, \\ x > p \end{cases}$ является промежуток:

а) $(5; +\infty)$; б) $[3; +\infty)$; в) $(3; +\infty)$; г) $[2; +\infty)$.

3.42 ● Найдите все значения x , не удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{3x-1}{x^2} < 2, \\ (x^2 - 5x + 3)^2 \geq (x^2 + 11x - 3)^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 \geq 0, \\ (x^2 + 3x - 1)^5 < (x^2 - 7x - 5)^5. \end{cases}$

3.43 ○ Найдите все значения x , не удовлетворяющие ни одному из неравенств $x^2 - 5x + 4 > 0$ и $x^2 - 83x + 240 \leq 0$.

3.44 ○ Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству $\frac{x-3}{x+5} \geq \frac{1}{2x+1}$ и не удовлетворяющие неравенству $x^2 > 50$.

3.45 ○ При каких значениях параметра p неравенство

$$(p-2)x^2 - (p-4)x + (3p-2) > 0:$$

а) не имеет решений;

б) выполняется при всех значениях x ?

3.46 ○ Пусть $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$. Найдите все значения x , для которых

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) > 0. \end{cases}$$

3.47 ○ Пусть $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$. Решите систему неравенств $\begin{cases} f(x+2) \leq 0, \\ f\left(\frac{1}{x+2}\right) \geq 0. \end{cases}$

3.48 ○ Пусть $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^3(1-x)}$. Решите систему неравенств $\begin{cases} f(x+1) \leq 0, \\ f\left(\frac{1}{x+1}\right) \geq 0. \end{cases}$

3.49 ○ Пусть $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^3(7-x)}$. Решите систему неравенств $\begin{cases} f(x+1) \leq 0, \\ f\left(\frac{1}{x-3}\right) \geq 0. \end{cases}$

Прочитайте п. 2 в § 3 учебника

35

3.50 ○ Если группу спортсменов построить в шеренгу по 8 человек в ряду, то один ряд окажется неполным, а если их построить по 7 человек в ряду, то рядов будет на 2 больше и все они будут заполнены. Если же выполнить построение по 5 человек в ряду, то рядов будет ещё на 7 больше, а один ряд окажется неполным. Сколько было спортсменов в этой группе?

3.51 ○ Путь от A до B плот проплывает за 24 ч. Катер тратит на путь от A до B и обратно не менее 10 ч. Если бы собственную скорость катера увеличили на 40%, то на путь от A до B и обратно было бы потрачено не более 7 ч. Сколько времени тратит катер на путь от A до B и на путь от B до A ?

§4

СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

4.1

а) Из чисел $-5, -1, 0, 10$ выберите те, которые являются решением

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

б) Из чисел $-8, -3, 2, 7$ выберите те, которые являются решением

$$\begin{cases} 2x + 8 < 0, \\ 5 - x < 0. \end{cases}$$

Изобразите на числовой прямой решение совокупности неравенств и запишите ответ в виде числовых промежутков:

4.2

$$\text{а) } \begin{cases} x > 3, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x < -1, \\ x > -4; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x > 1, \\ x < 1. \end{cases}$$

4.3

$$\text{а) } \begin{cases} -2 < x < 3, \\ -3 < x < 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -1 < x < 1, \\ 2 < x < 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -4 \leq x \leq 0, \\ 0 < x < \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 1 \leq x \leq 9, \\ 1 < x < 10. \end{cases}$$

4.4

$$\text{а) } \begin{cases} x > 2, \\ -2 < x < 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -5 \leq x \leq 1, \\ x > 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x \leq -1, \\ -8 < x < -4; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 0 < x < 4, \\ x > 4. \end{cases}$$

Решите совокупность неравенств:

4.5

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 1 > 0, \\ 2x + 7 > 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 4x - 10 \leq 0, \\ 3x + 2 < 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x + 4 < 0, \\ 2 - x < 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 6 - 2x \geq 0, \\ 3x - 20 \geq 0. \end{cases}$$

4.6

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0, \\ 2 - x < 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + 4 > 1, \\ -x^2 - x + 6 > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0, \\ 25 - x^2 < 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} -x^2 + x + 12 \leq 0, \\ x^2 - 7x > 0. \end{cases}$$

4.7

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x-2}{x+3} \leq 0, \\ x^2 < 16; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{3-x}{x+5} \geq 0, \\ x^2 > 36; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + 6x > 0, \\ \frac{x-1}{x+1} < 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x - x^2 < 0, \\ \frac{3x-1}{x+1} \leq 0. \end{cases}$$

4.8

$$\text{а) } \begin{cases} 12x^2 - 4x - 1 \leq 0, \\ 25x^2 - 5x - 2 < 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0, \\ x^2 + 2\pi x - 3\pi^2 < 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \leq 0, \\ -12x^2 + 25x + 22 < 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 12x^2 - (4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})x + \sqrt{6} \leq 0, \\ 8x^2 - (4\sqrt{3} + \sqrt{8})x + \sqrt{6} > 0. \end{cases}$$

4.9

Докажите, что $\max\{f(x), g(x)\} > p(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(x) > p(x), \\ g(x) > p(x). \end{cases}$$

4.10

Решите неравенство:

$$\text{а) } \max\{3x - 1; 11 - x^2\} > 2;$$

$$\text{б) } \max\left\{\frac{x}{x-1}; \frac{4x-x^2}{2}\right\} \geq \frac{x}{3};$$

$$\text{в) } \max\{12x - 3x^2; -14x + x^2\} \geq 32;$$

$$\text{г) } \max\left\{\frac{1}{x}; \frac{2}{x^2}\right\} \geq x + 1.$$

4.11 ○ Докажите, что $\min\{f(x), g(x)\} < p(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(x) < p(x), \\ g(x) < p(x). \end{cases}$$

4.12 ○ Решите неравенство:

а) $\min\{3x - 1; 11 - x^2\} < 2;$

б) $\min\left\{\frac{x}{x-1}; \frac{4x-x^2}{2}\right\} < \frac{x}{3};$

в) $\min\{12x - 3x^2; -14x + x^2\} \leq 32;$

г) $\min\left\{\frac{1}{x}; \frac{2}{x^2}\right\} < x + 1.$

4.13 ● Докажите, что все значения x , не удовлетворяющие условию

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 > 0, \\ 3x^2 - 17x - 20 \leq 0, \end{cases} \text{ удовлетворяют условию } \begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0, \\ 3x^2 - 17x - 20 > 0 \end{cases}$$

и, наоборот, все значения x , удовлетворяющие условию

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0, \\ 3x^2 - 17x - 20 > 0, \end{cases} \text{ не удовлетворяют условию } \begin{cases} x^2 - 7x + 6 > 0, \\ 3x^2 - 17x - 20 \leq 0. \end{cases}$$

4.14 ● Докажите, что все значения x , удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0, \end{cases}$$

не удовлетворяют совокупности неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

и, наоборот, все значения x , удовлетворяющие совокупности неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

не удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Рассмотрите решение примера 3 в § 4 учебника

Решите совокупность систем неравенств:

4.15 ○ а) $\begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - x \geq x^2, \\ x \geq 0; \end{cases}$

$$\text{б) } \begin{cases} (2+x)(1+x) \geq 0, \\ x+2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (2+x)(1+x) \geq (x+2)^2, \\ x+2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3-2x > 2, \\ x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x-3 < 0, \\ x \geq 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3x^2+4x-20 \geq 0, \\ x-2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2+4x-20 \geq (x-2)^2, \\ x+2 \geq 0. \end{cases}$$

4.16



$$\text{а) } \begin{cases} x < 0, \\ \frac{x+1}{x-2} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x+1}{x-2} > -x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x+3 < 0, \\ \frac{3+x}{x} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ \frac{3+x}{x} \geq (x+3)^2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x < 2, \\ \frac{2x-4}{x} \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ \frac{2x-4}{x} \leq -x-1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x-1 > 0, \\ \frac{x-5}{3x-2} \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 < 0, \\ \frac{x-5}{3x-2} \leq -\frac{4}{x}. \end{cases}$$

§5

НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

Прочитайте п. 1 в § 5 учебника

41

Решите графически неравенство:

5.1

$$\text{а) } |x| < 3; \quad \text{б) } |x-1| \geq 3; \quad \text{в) } |x| > 5; \quad \text{г) } |x+2| \leq 5.$$

5.2

$$\begin{array}{ll} \text{а) } |x|-2 \leq 0; & \text{в) } -|x|+3 < 0; \\ \text{б) } |x-2|-2 > 0; & \text{г) } -|x|+3 > 1. \end{array}$$

Решите неравенство:

5.3

а) $|x| < 9$; б) $2|x| < 8$; в) $|x| \leq 0$; г) $|x| < 0$.

5.4

а) $|x| < 5$; б) $|x - 2| \leq 3$; в) $|7x| \leq 21$; г) $|x + 3| < 4$.

5.5

а) $|2x - 4| < 8$; б) $|3x + 1| - 10 \leq 0$; в) $|0,5x + 2| < 4$; г) $\left|\frac{1}{3}x - 5\right| - 2 \leq 0$.

5.6

а) $|4x + 3| > 5$; б) $\left|\frac{2}{3}x + 1\right| - 3 \geq 0$; в) $|0,4x + 5| \geq 3$; г) $|6x - 1| - 7 > 0$.

5.7

а) $|-2 - x| \leq 4$; б) $|6 - 3x| < 9$; в) $|-5 - x| < 7$; г) $|1 - 0,5x| \leq 3$.

5.8

а) $|1 - x| > 2$; б) $|3 - 2x| \geq 9$; в) $|3 - x| \geq 3$; г) $|2 - 0,1x| > 1$.

5.9

а) $6 - |3x + 1| > 0$; б) $4 - |2 - x| > 6$; в) $4 - |3 + 2x| \leq 0$; г) $5 - |3 - 4x| \geq 9$.

Решите графически неравенство:

5.10

а) $|2x + 3| > x - 1,7$; б) $|2x + 3| \leq x - 1,7$.

5.11

а) $|\sqrt{x} - 2| \geq 4 - x$; б) $|\sqrt{x} - 2| < 4 - x$.

5.12

а) $|x^2 - 4| < 5$; б) $|x^2 - 4| \geq 5$.

5.13

а) $|x^2 - 4x| < 5$; б) $x^2 - 4|x| < 5$; в) $|x^2 - 4x| \geq 5$; г) $x^2 - 4|x| \geq 5$.

Решите неравенство:

5.14

а) $|x^2 - 7x + 3| \leq 3$; б) $|x^2 - 4x| \geq 5$; в) $|x^2 + 5x + 2| > 2$; г) $|x^2 + x| < 6$.

5.15

а) $|3x^2 + x + 1| < 5$; б) $|2x^2 + 4x + 5| > 3$; в) $|4x^2 - 5x + 3| \geq 1$; г) $|3x^2 - 8x + 1| \leq 3$.

5.16

а) $\left|\frac{x-2}{x}\right| < 2$; б) $\left|\frac{x}{3x-2}\right| > 3$; в) $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 1$; г) $\left|\frac{1-x}{4x}\right| \geq 2$.

5.17

а) $\left|1 + \frac{2}{x}\right| \leq 2;$

в) $\left|2 - \frac{1}{x-1}\right| > 4;$

б) $\left|\frac{1}{2x} - 3\right| > 1;$

г) $\left|3 + \frac{x}{x+1}\right| < 3.$

5.18

а) $\left|\frac{x^2 - 4}{x}\right| < 3;$

в) $\left|\frac{x^2 + 2}{x}\right| \leq 3;$

б) $\left|x - \frac{3}{x}\right| > 2;$

г) $\left|x + \frac{4}{x}\right| > 4.$

5.19

Пусть $f(x) = \frac{|x+1|}{x^2 - 3x + 2}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0;$

б) $f(x) \geq 0;$

в) $f(x) < 0;$

г) $f(x) \leq 0.$

5.20

Пусть $f(x) = \frac{x+1}{|x^2 - 3x + 2|}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0;$

б) $f(x) \geq 0;$

в) $f(x) < 0;$

г) $f(x) \leq 0.$

5.21

Пусть $f(x) = \frac{|x|(x+1)^3}{|x-3|^5(x+2)^2}$. Решите неравенство:

а) $f(x) > 0;$

б) $f(x) \geq 0;$

в) $f(x) < 0;$

г) $f(x) \leq 0.$

5.22

Пусть $f(x) = \frac{x(x-2)^2}{|x^2 - 4x - 77|}$. Решите неравенство:

а) $f(x) \leq 0;$

в) $f(|2-x|) \leq 0;$

б) $f(|x|) \leq 0;$

г) $f(|4x-5|) \leq 0.$

5.23

Докажите, что множество решений неравенства $|f(x)| \leq |g(x)|$ совпадает с множеством решений любого из неравенств:

а) $f^2(x) \leq g^2(x);$

б) $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0.$

Решите неравенство:

5.24

а) $|5x+3| < |2x-1|;$

в) $|9x+1| > |5-9x|;$

б) $|3-7x| \leq |x+5|;$

г) $|x-3| \geq |2x+3|.$

5.25

а) $|x^2 - 7x + 3| < |2x^2 + 5x - 10|;$

б) $|3x^2 - x - 1| \leq |x^2 - x - 1|;$

в) $|x^2 + 3x - 5| \geq |x^2 - 7x + 5|;$

г) $|2x^2 + 3x - 1| \geq |x^2 + x - 1|.$

5.26 ○ а) $|x^3 - 12x + 12| \leq |x^3 + 12x + 4|$;

б) $\left| \frac{1-x}{1+3x} \right| > |1+x|$;

в) $|x^3 - 2x^2 + 12| \leq |x^3 + 2x^2 + 4|$;

г) $\left| 1 - \frac{1}{x} \right| \leq \left| 2 + \frac{5}{x} \right|$.

5.27 ○ а) $\left| \frac{x}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} \right| < 2$;

в) $\left| \frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x-1} \right| < 3$;

б) $\left| x - \frac{4}{x} \right| \cdot \left| \frac{x}{x-2} \right| < 7$;

г) $\left| 1 + \frac{3}{x} \right| \cdot \left| \frac{3x}{9-x^2} \right| \leq 6$.

5.28 ○ а) $|x-3| \cdot \left| \frac{3x}{x-3} \right| > 2$;

б) $\left| \frac{x-4}{x-5} \right| \cdot \left| \frac{2x}{x-4} \right| \geq 1$.

Решите неравенство графическим и аналитическим методами

5.29 ○ а) $|x^2 - 4| > x + 2$;

б) $|x^2 - 1| \leq 1 - x$.

5.30 ○ а) $|5x + 7| < 8x - 11$;

в) $|5 - 4x| < 8x + 17$;

б) $|5x + 7| \leq 4x^2 - 2$;

г) $|5 - 4x| \leq 11 - 10x^2$.

5.31 ○ а) $\left| 5x - \frac{1}{x} \right| < 4x$;

в) $\left| 13x - \frac{4}{x} \right| \leq 12x$;

б) $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| \leq \frac{x-2}{x}$;

г) $\left| \frac{x+4}{x-4} \right| \leq \frac{x+4}{2x}$.

Прочитайте пп. 2 и 3 в § 5 учебника

Решите неравенство:

5.32 ○ а) $|7x - 11| > 3x + 5$;

в) $|4 - x| > -3x - 2$;

б) $|5x + 7| \geq 3x^2 + 11x - 2$;

г) $|5 - 4x| \geq 5 + 3x - 3x^2$.

5.33 ○ а) $|x^2 - x - 2| \leq -2x - 2$;

в) $|x^2 + 2x - 5| < -x + 5$;

б) $|x^2 - 2x + 1| \geq -x + 1$;

г) $|3 - 4x - x^2| > 3 - x$.

5.34 ○ а) $|5 - 4x - x^2| > 2 - x - x^2$;

в) $|-2x^2 + 5x + 7| \geq 2x^2 - 6x + 7$;

б) $|5 - 4x - x^2| \leq 2 - x - x^2$;

г) $|-x^2 + 5x + 1| \leq x^2 + 6x +$

Прочитайте п. 4 в § 5 учебника

47

5.35 ● Решите неравенство:

- а) $3|x+2| + |x-2| < 4(x+3)$;
 б) $6|x+1| - 3|x| + 3|x-1| > 3(x+2)$;
 в) $3|x+2| + |2x-2| \geq 3x+12$;
 г) $6|x+1| - 3|x| + 3|x-1| \leq 6x+3$.

5.36 ● Докажите, что неравенство $|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$ равносильно неравенству $f(x) \cdot g(x) < 0$.**5.37** ● Решите неравенство:

- а) $|2x+12| + |x^2-x-30| > |x^2+x-18|$;
 б) $\left|x - \frac{1}{x}\right| + \left|x + \frac{1}{x-2}\right| > \left|\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x}\right|$;
 в) $|x^2-x-12| + |15-3x| > |x^2-4x+3|$;
 г) $\left|x^2 - \frac{1}{x}\right| + \left|x^2 + \frac{5}{x^2-3}\right| > \left|\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2-3}\right|$.

5.38 ● Докажите, что неравенство $|f(x)| + |g(x)| \leq |f(x) + g(x)|$ равносильно неравенству $f(x) \cdot g(x) \geq 0$.

Решите неравенство:

- 5.39** ● а) $|3x+5| + |x^2-7| \leq |x^2+3x-2|$;
 б) $\left|x^2 - \frac{1}{x}\right| + \left|x^2 + \frac{5}{x^2-3}\right| \leq \left|\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2-3}\right|$;
 в) $|3x+12| + |x^2-16| \leq |x^2+3x-4|$;
 г) $|x| + |2x+1| + |3x+2| + |4x+3| \leq |10x+6|$.

- 5.40** ○ а) $x^2 - 4|x| + 3 > 0$;
 б) $(x^2 - 3x)^2 + |3x - x^2| - 20 \leq 0$;
 в) $(x-2)^2 - 4|x-2| - 96 < 0$;
 г) $(x^2 - 5x)^2 - 5|5x - x^2| - 6 \geq 0$.

- 5.41** ● а) $x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left|x + \frac{1}{x}\right| - 3 \leq 0$; в) $x^2 + \frac{4}{x^2} + \left|x + \frac{2}{x}\right| - 8 < 0$;
 б) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left|x - \frac{1}{x}\right| - 10 > 0$; г) $x^2 + \frac{9}{x^2} - 4\left|x - \frac{3}{x}\right| - 2 \leq 0$.

5.42

$$a) \frac{|x+1|-2}{|x+1|+1} < \frac{2|x+1|-5}{4|x+1|-8};$$

$$b) \frac{|x-2|+1}{|x-2|-2} \geq \frac{3|x-2|-5}{3|x-2|-2};$$

$$b) \frac{|2x+1|-2|x+4|}{|3x-1|-|1+3x|} \leq 0;$$

$$r) \frac{|x+1|-2|x-4|}{|x-1|-|1-3x|} \leq 0.$$

5.43

Постройте график функции:

$$a) y = |x+2| + |x-1|;$$

$$b) y = |2x-1| - |x+1|;$$

$$b) y = |x-3| - |x|;$$

$$r) y = |x-2| + |2x+3|.$$

5.44

a) При каких значениях параметра t неравенство $|x+2| + |x-7| \geq t$ выполняется при любых значениях x ?

б) Найдите множество значений выражения $|x+2| + |x-7|$.

5.45

a) При каких значениях параметра t неравенство $|x+2| + |x-7| + |x+4| \geq t$ выполняется при любых значениях x ?

б) Найдите множество значений выражения $|x+2| + |x-7| + |x+4|$.

5.46

Найдите наименьшее значение функции $y = f(x)$, если:

$$a) f(x) = |x-1| + |x-2| + \dots + |x-10|;$$

$$b) f(x) = |x-1| + |x-2| + \dots + |x-9|.$$

§6

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

49

Прочитайте пп. 1 и 2 в § 6 учебника

Решите неравенство:

6.1

$$a) \sqrt{x} > 2;$$

$$b) \sqrt{x-4} \geq 4;$$

$$b) \sqrt{2x} > 3;$$

$$r) \sqrt{2x+7} \leq 1.$$

6.2

$$a) \sqrt{-x} > 0;$$

$$b) \sqrt{1-x} \geq 2;$$

$$b) \sqrt{-0,5x} \geq 1;$$

$$r) \sqrt{1-2x} \leq 1.$$

6.3

$$a) \sqrt{x} \leq 2;$$

$$b) \sqrt{-x} < 1;$$

$$b) \sqrt{3x} < 6;$$

$$r) \sqrt{-0,2x} \leq 4.$$

0.4

а) $\sqrt{x-3} < 5$;

в) $\sqrt{x+7} < 4$;

б) $\sqrt{8x+1} \leq 11$;

г) $\sqrt{3x-7} < 8$.

0.5

а) $\sqrt{2-x} \leq 3$;

в) $\sqrt{-x-1} < 7$;

б) $\sqrt{9-5x} \leq 3$;

г) $\sqrt{11-5x} < 6$.

0.6

а) $\sqrt{x^2-3x} > 2$;

в) $\sqrt{5-x^2} \geq 1$;

б) $\sqrt{4+7x-x^2} > 2$;

г) $\sqrt{x^2+x-3} > 3$.

0.7

а) $\sqrt{x^2-15x} < 4$;

в) $\sqrt{25-4x^2} < 3$;

б) $\sqrt{2-4x^2-7x} \leq 3$;

г) $\sqrt{4x^2+3x+3} < 2$.

0.8

а) $\sqrt{x^2-10x+25} < 5$;

в) $\sqrt{x^2-4x+4} < 2$;

б) $\sqrt{x^2+6x+9} \geq 1$;

г) $\sqrt{x^2-8x+16} > 3$.

0.9

а) $\sqrt{\frac{x-1}{x}} > 2$;

в) $\sqrt{\frac{2x}{x-2}} \geq 4$;

б) $\sqrt{\frac{x+16}{x^2-x}} \geq 3$;

г) $\sqrt{\frac{x^2-3x}{x+2}} > 2$.

0.10

а) $\sqrt{\frac{3x}{x-2}} \leq 1$;

в) $\sqrt{\frac{x+4}{4x}} \leq 3$;

б) $\sqrt{\frac{9-x^2}{2x}} \leq 2$;

г) $\sqrt{\frac{9x^2+6x}{x-1}} < 4$.

0.11

а) $\sqrt{3x-4} < -2$;

в) $\sqrt{15-5x} > -1$;

б) $\sqrt{x^2+3x} \leq 0$;

г) $\sqrt{5-2x+x^2} > 0$.

0.12

а) $\sqrt{2x+3} \leq x$;

в) $\sqrt{3x+4} < -x$;

б) $\sqrt{-x} < x+2$;

г) $\sqrt{x} \leq x-2$.

0.13

а) $\sqrt{x+2} > x$;

в) $\sqrt{x+12} \geq -x$;

б) $\sqrt{-x} \geq x+6$;

г) $\sqrt{4x} > x-3$.

0.14

а) $\sqrt{3x-8} \leq x-4$;

в) $\sqrt{x+13} < x+7$;

б) $\sqrt{1-x} > x+5$;

г) $\sqrt{8-x} \geq x-6$.

6.15 ○

- а) $\sqrt{x^2 - 12x + 20} < x$;
 б) $\sqrt{-x^2 + 4x + 5} < 1 - 2x$;
 в) $\sqrt{x^2 + 6x + 8} \leq -x$;
 г) $\sqrt{-x^2 + 8x + 9} \leq 3 - x$.

6.16 ○

- а) $\sqrt{x^2 + 5x - 6} \geq 6 + x$;
 б) $\sqrt{5 - 4x - x^2} \geq 1 - x$;

- в) $\sqrt{x^2 + x - 6} \geq 6 + x$;
 г) $\sqrt{6 + x - x^2} > 1 - x$.

6.17 ○

- а) $\sqrt{3x - 5} > \left| \frac{x}{2} \right|$;
 б) $\sqrt{x + 5} \leq \frac{|x + 1|}{3}$;

- в) $\sqrt{4x + 9} < \frac{5}{4}|x|$;
 г) $\sqrt{5x - 6} \geq 2,5|x - 1|$.

6.18 ○

- а) $\sqrt{5x - 1} > \sqrt{3x + 2}$;
 б) $\sqrt{8x - 5} \leq \sqrt{7x + 11}$;

- в) $\sqrt{5 - x} < \sqrt{2x + 7}$;
 г) $\sqrt{3 - x} > \sqrt{1 - x}$.

6.19 ○

- а) $\sqrt{x^2 - 12x + 8} > \sqrt{-12x + 8}$;
 б) $\sqrt{-x^2 + 4x + 5} > \sqrt{4x + 1}$;

- в) $\sqrt{x^2 - 12x + 11} \geq \sqrt{x - 1}$;
 г) $\sqrt{-x^2 + 8x + 1} \geq \sqrt{2x + 10}$.

6.20 ○

- а) $\sqrt{x^2 - 7x + 3} > \sqrt{x^2 - 6x + 11}$;
 б) $\sqrt{x^2 - 7x + 3} > \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;
 в) $\sqrt{x^2 - 7x + 3} > \sqrt{x^2 - 6x + 8}$;
 г) $\sqrt{x^2 - 7x + 3} > \sqrt{-x^2 + 14x - 49}$.

51

Прочитайте п. 3 в § 6 учебника

Решите неравенство:

6.21 ○

- а) $(x - 3)\sqrt{x} > 0$;
 б) $(x + 3)\sqrt{-x} > 0$;

- в) $(x + 3)\sqrt{x} > 0$;
 г) $(x - 3)\sqrt{-x} \geq 0$.

6.22 ○

- а) $(x^2 - 1)\sqrt{x} < 0$;
 б) $(1 - x^2)\sqrt{-x} < 0$;

- в) $(x^2 - 1)\sqrt{x} \leq 0$;
 г) $(x^2 - 1)\sqrt{-x} \leq 0$.

0.23 ○ а) $(x^2 - 2x)\sqrt{x+1} \leq 0$;
 б) $(x^2 + 7x + 12)\sqrt{3-x} > 0$;

0.24 ○ а) $(3x-1)\sqrt{5x-7} \geq \sqrt{5x-7}$;
 б) $(2x-3)\sqrt{x+1} < 2x-3$;

0.25 ○ а) $x - 3\sqrt{x} + 2 \leq 0$;
 б) $x - 5\sqrt{x} + 4 \geq 0$;

0.26 ○ а) $x - 3\sqrt{x+4} + 6 \leq 0$;
 б) $x - 5\sqrt{3-x} + 11 \geq 0$;

0.27 ○ а) $|\sqrt{x} - 3| < 1$;
 б) $|\sqrt{x+1} - 3| \leq 3$;

0.28 ○ а) $\frac{4 - \sqrt{2x-11}}{\sqrt{2x-11}} \geq \frac{1}{3}$;
 б) $\frac{3\sqrt{2-3x}-10}{\sqrt{2-3x}-2} < 2$;

0.29 ○ а) $\frac{2}{5\sqrt{x}-4} \leq \frac{1}{x-1}$;
 б) $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1} \geq \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$;

в) $(x^2 + 7x)\sqrt{x-2} > 0$;
 г) $(4-3x-x^2)\sqrt{-2-x} \leq 0$.

в) $(5x-7)\sqrt{3x-1} < \sqrt{3x-1}$;
 г) $(3x+2)\sqrt{x+5} \geq 6x+4$.

в) $x - 5\sqrt{x} + 100 > 0$;
 г) $x + 6\sqrt{x} + 9 \leq 0$.

в) $x - 5\sqrt{-6-x} + 132 > 0$;
 г) $x + 4\sqrt{3-x} - 9 \leq 0$.

в) $|\sqrt{2-x} - 3| > 2$;
 г) $|\sqrt{7-3x} - 5| \geq 7$.

в) $\frac{2\sqrt{2+7x}}{\sqrt{2+7x}+3} < \frac{1}{2}$;
 г) $\frac{2+5\sqrt{3-x}}{2-\sqrt{3-x}} \leq 1$.

в) $\frac{2}{\sqrt{x}-x} \geq \frac{1}{\sqrt{x}-3}$;
 г) $\frac{x-7\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}-1} < \frac{6-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

Решите двойное неравенство:

0.30 ○ а) $1 < \sqrt{3x+1} \leq 7$;
 б) $0 \leq \sqrt{5-7x} \leq 2$;

в) $-2 < \sqrt{2x-1} \leq 7$;
 г) $-1 < \sqrt{3-7x} \leq 0$.

0.31 ○ а) $0 < \sqrt{x^2-5x+4} \leq 2$;
 б) $7 \leq \sqrt{-x^2+16x} < 8$;

в) $4 < \sqrt{x^2-4x+20} \leq 5$;
 г) $5 \leq \sqrt{-x^2-2x+24} < 6$.

0.32 ○ а) $1 < \sqrt{\frac{1}{x}} \leq 2$;
 б) $2 < \sqrt{x + \frac{4}{x}} \leq \sqrt{5}$;

в) $\sqrt{3} \leq \sqrt{x - \frac{4}{x}} \leq 2$;
 г) $\sqrt{2} \leq \sqrt{x + \frac{3}{x^2}} \leq 2$.

Решите неравенство:

6.33 а) $\frac{1}{\sqrt{x+10}} > \frac{1}{2-x}$;

в) $\frac{2}{3-x} < \frac{3}{\sqrt{4x+5}}$;

б) $\frac{1}{1+x} \leq \frac{4}{\sqrt{3-2x}}$;

г) $\frac{1}{2+x} > \frac{1}{\sqrt{-1-2x}}$.

6.34 а) $\frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x} < 1$;

в) $\frac{\sqrt{1-x^2}+3x}{3x+1} > 1$;

б) $\frac{1-\sqrt{4x-2x^2-1}}{1-x} \leq 1$;

г) $\frac{\sqrt{4x-x^2-3}-6+3x}{3x-5} \geq 1$.

6.35 ○ Найдите середину отрезка числовой прямой, являющегося решением неравенства:

а) $\sqrt{5x-7} \leq 2$;

б) $4\sqrt{8+2x-x^2} \geq 12-3x$.

6.36 ○ Найдите длину отрезка числовой прямой, являющегося решением неравенства:

а) $x\sqrt{x}+5 \leq 5\sqrt{x}+x$;

б) $2x\sqrt{x}-3 \leq 6\sqrt{x}-x$.

6.37 ○ Найдите отношение длины отрезка, являющегося областью определения функции $y = \sqrt{5-x} - \sqrt{2x-1}$, к длине отрезка, на котором эта функция неотрицательна.

§7

НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

7.1 ○ Для каждого значения параметра a решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > -3, \\ x > a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x > -3, \\ x < a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x < -3, \\ x \leq a; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x \leq -3, \\ x > a. \end{cases}$

Для каждого значения параметра a решите неравенство:

7.2 ○ а) $(x-3)(x-a) \leq 0$;

в) $(x+2)(x-a) > 0$;

б) $\frac{x-3}{x-a} \leq 0$;

г) $\frac{x-a}{x+4} > 0$.

7.3 ○ а) $(x-2a)(x-a) \geq 0$;

в) $(2x-a)(x-a) < 0$;

б) $\frac{x-a}{x-2a} > 0$;

г) $\frac{2x-4a}{x-a} < 0$.

7.4 ○ а) $(x^2 + 2x)(x - a) \leq 0$; в) $(x^2 - 9)(x - a) > 0$;
 б) $(1 - x^2)(x - a) \geq 0$; г) $(3x - x^2)(x - a) > 0$.

7.5 ○ а) $\frac{x^2 - 4}{x - a} \geq 0$; в) $\frac{x^2 - x - 6}{x - a} > 0$;
 б) $\frac{x^2 - 4x}{a - x} > 0$; г) $\frac{x^2 + 6x - 7}{a - x} > 0$.

7.6 ● а) $(x^2 - a^2)(x - 4) \leq 0$; в) $(x^2 - a^2)(3 + x) > 0$;
 б) $\frac{a^2 - x^2}{x + 5} < 0$; г) $\frac{2 - x}{x^2 - a^2} \geq 0$.

7.7 ○ а) $\frac{1}{x} > a$; б) $\frac{a}{x} < 1$; в) $\frac{a}{x} \geq a$; г) $\frac{1}{ax} \leq 1$.

Для каждого значения параметра a решите систему неравенств:

7.8 ○ а) $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 \leq 9, \\ x \leq a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 \geq 9, \\ x > a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 > 9, \\ x \leq a. \end{cases}$

7.9 ○ а) $\begin{cases} 3x^2 - 7x - 26 \leq 0, \\ x < a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2 - 7x - 26 \geq 0, \\ x \geq a; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 5x^2 + 7x - 34 \leq 0, \\ x > a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x^2 + 7x - 34 \geq 0, \\ x \leq a. \end{cases}$

7.10 ● а) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ x < a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ x \geq a; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} x^2 - (a + 1)x + a \leq 0, \\ x \leq 2a + 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + (a + 1)x + a \leq 0, \\ ax \geq 1. \end{cases}$

7.11 ● а) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ (x - 1)(x - a) \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ (x + 1)(x + a) \leq 0; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} x^2 - (a + 1)x + a \leq 0, \\ x^2 + 3ax + 2a^2 < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - (a + 1)x + a \leq 0, \\ x^2 + 3ax + 2a^2 \geq 0. \end{cases}$

7.12 ● Дано неравенство $(x + 2)(x - a) \leq 0$. При каких значениях параметра a :

- а) решением неравенства является отрезок $[-2; 7]$;
- б) для всех точек отрезка $[-2; 7]$ выполняется данное неравенство;
- в) данное неравенство выполняется хотя бы для одной точки отрезка $[-2; 7]$;
- г) на отрезке $[-2; 7]$ находятся все решения данного неравенства?

7.13 ● Дано неравенство $\frac{x - a}{x + 2} < 0$. При каких значениях параметра a :

- а) решением неравенства является интервал $(-2; 7)$;
- б) для всех точек интервала $(-2; 7)$ выполняется данное неравенство;
- в) данное неравенство выполняется хотя бы для одной точки интервала $(-2; 7)$;
- г) данное неравенство имеет решения и все эти решения находятся на интервале $(-2; 7)$?

7.14 ● Дано неравенство $(x + 2a - 3)(x - a) \leq 0$. При каких значениях параметра a :

- а) решением неравенства является отрезок $[-2; 7]$;
- б) для всех точек отрезка $[-2; 7]$ данное неравенство выполняется;
- в) данное неравенство выполняется хотя бы для одной точки отрезка $[-2; 7]$;
- г) на отрезке $[-2; 7]$ находятся все решения данного неравенства?

7.15 а) При каких значениях параметра b неравенство

$$x^2 + 2bx - (b - 6) > 0$$

верно для всех значений x ?

б) При каких значениях параметра b неравенство

$$x^2 + 2bx + (b + 12) \geq 0$$

верно для всех значений x ?

7.16 а) При каких значениях параметра b неравенство

$$x^2 + 2bx + 9b - 20 < 0$$

не имеет решений?

б) При каких значениях параметра b неравенство

$$x^2 + 2bx - b + 30 \leq 0$$

не имеет решений?

- 7.17 ○ а) При каких значениях параметра a неравенство $(a - 1)x^2 + 2ax + 4a > 0$

верно при всех значениях x ?

- б) При каких значениях параметра a неравенство

$$(a + 2)x^2 + 2ax - 6a < 0$$

верно для всех значений x ?

- 7.18 ○ а) При каких значениях параметра a неравенство

$$(a - 3)x^2 - 2ax - 4 > 0$$

не имеет решений?

- б) При каких значениях параметра a неравенство

$$(a + 4)x^2 + 2ax + 3a \leq 0$$

не имеет решений?

- 7.19 ○ а) При каких значениях параметра b неравенство $\frac{x+2}{x^2+5} < b$ выполняется при всех значениях x ?

- б) При каких значениях параметра b неравенство $\frac{x+7}{x^2+b} < 5$ выполняется при всех значениях x ?

- 7.20 ○ Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + x + a - a^2 = 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- а) имеет ровно два решения;
б) имеет единственное решение;
в) не имеет решений.

- 7.21 ○ Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + x + a - a^2 = 0, \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- а) имеет ровно два решения;
б) имеет единственное решение;
в) имеет хотя бы одно решение;
г) не имеет решений.

- 7.22 ○ Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + ax + a = 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- а) имеет ровно два решения;
 б) имеет единственное решение;
 в) не имеет решений.

7.23 ● Найдите все значения параметра c , при которых система уравнений $\begin{cases} (x+c)(cx+2c-3) \geq 0, \\ cx \leq -4 \end{cases}$ не имеет решений.

7.24 ○ Для каждого значения параметра a решите совокупность уравнений:

- а) $\begin{cases} 3x + a > 0, \\ 2x + 7 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - a < 0, \\ 3x + 4 > 0; \end{cases}$
- б) $\begin{cases} 3x - 10 < 5, \\ x^2 > a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x}{a} - 5 > 1, \\ x^2 - 7x < 0. \end{cases}$

Для каждого значения параметра a решите неравенство:

- 7.25** ○ а) $(\sqrt{x} + 3)(x - a) < 0;$ в) $(\sqrt{x} + 3)(x - a) > 0;$
 б) $\frac{x+3}{\sqrt{x}-a} > 0;$ г) $\frac{x+3}{\sqrt{x}-a} < 0.$

- 7.26** ○ а) $\frac{x-13}{\sqrt{x}-a} < 0;$ в) $\frac{x-13}{\sqrt{x}-a} > 0;$
 б) $\frac{\sqrt{x}-3}{x-a} \geq 0;$ г) $\frac{\sqrt{x}-3}{x-a} < 0.$

- 7.27** ● а) $\frac{\sqrt{x}-a}{x^2-3x+2} > 0;$ б) $\frac{\sqrt{x}-a}{x^2-3x+2} \leq 0.$

- 7.28** ○ а) $\sqrt{x-3} < 5+a;$ б) $\sqrt{x-3} > 5+a.$

7.29 ○ При каких значениях параметра a неравенство имеет решения? Для каждого такого значения параметра a решите неравенств:

- а) $\sqrt{x-3} + 5\sqrt{9-3x} + a > 5;$
 б) $\sqrt{x-a} - a\sqrt{a-x} + 2x \geq a^2;$
 в) $\sqrt{x-5} + 2\sqrt{10-2x} + 2x > a;$
 г) $\sqrt{2x-a} + x\sqrt{a-2x} - 4x < a^2.$

7.30 ○ При каких значениях параметра a неравенство

$$x - (2a + 1) \cdot \sqrt{x} + a^2 + a \leq 0$$

имеет более одного решения? Для каждого такого значения параметра a решите данное неравенство.

Решите неравенство с параметром a :

7.31 ○ а) $x\sqrt{x-a} < 0$;

в) $x\sqrt{x-a} > 0$;

б) $x\sqrt{x-a} \leq 0$;

г) $x\sqrt{x-a} \geq 0$.

7.32 ● $\frac{x + (a-3) \cdot \sqrt{x} - 3a}{x^2 - a} \geq 0$.

7.33 а) $|x-a| < 2$;

в) $|x-a| < -2$;

б) $|x-a| \geq 2$;

г) $|x-a| \leq 0$.

7.34 а) $|x-a| > 5$;

в) $|x-a| > -5$;

б) $|x-a| \leq 5$;

г) $|x-a| > 0$.

7.35 а) $|x-7| < a$;

в) $|x-a| \geq a$;

б) $|x-a| \leq x$;

г) $|x-a| > x$.

7.36 ○ а) $|x-a| < x-1$;

в) $|x-a| > x-1$;

б) $|x-a| \leq -2x$;

г) $|x-a| \geq -2x$.

7.37 ○ а) $|x-a| < |2x|$;

в) $|x-a| \geq |-3x|$;

б) $|x-a| > |3x-a|$;

г) $|2x-3a| \leq |3x-2a|$.

7.38 ● а) $|x-3| + |x+5| > a$;

б) $|2x-1| + |x-6| \leq a$.

7.39 ○ При каких значениях параметра a данному неравенству удовлетворяет ровно 9 целых чисел:

а) $|x-7| < a$;

в) $|x-7,4| < a$;

б) $|x-7| \leq a$;

г) $|x-\sqrt{7}| \leq a$?

7.40 ● При каких целочисленных значениях параметра c неравенство

$$\frac{x-c}{x+3c-12} \leq 0 \text{ имеет:}$$

а) ровно 16 целочисленных решений;

б) не более 16 целочисленных решений?

7.41

При каких целочисленных значениях параметра c неравенство

$$\frac{x+c}{x+3-11c} < 0 \text{ имеет:}$$

- а) ровно 20 целочисленных решений;
б) не более 20 целочисленных решений?

Решите неравенство с параметром a :

7.42

а) $|2x^2 - x - a + 2| \geq |2x^2 - 3x + a - 1|$;

б) $|3x - a - 2a^2| \geq |x + a - 2a^2|$.

7.43

$|x + 2a| \leq \frac{1}{x}.$

7.44

$\frac{x-a}{|x-3| - |x+5|} \leq 0.$

7.45

Найдите сумму всех целочисленных значений параметра b , при которых неравенство $|x+b| + x^2 < 2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

7.46

При каких целочисленных значениях параметра b неравенство $3 - x^2 > |x - b|$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $(-\infty)$?

7.47

а) При каких значениях параметра a для всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - (a^3 + a)x + a^4 < 0$, выполняется неравенство $x^2 + 4x + 3 < 0$?б) При каких значениях параметра a все числа, не удовлетворяющие неравенству $x^2 + 4x + 3 < 0$, не удовлетворяют и неравенству $x^2 - (a^3 + a)x + a^4 < 0$?

7.48

При каких значениях x неравенство $\frac{b+x+7}{2b-x} > \frac{1}{2}$ выполняется при всех значениях b , лежащих на отрезке $[1; 2]$?

7.49

При каких значениях x неравенство $\frac{2b+x+1}{1+b-x^2} > 0$ выполняется при всех значениях b , лежащих на интервале $(0; 1)$?

7.50

При каких значениях x неравенство $3x^2 + bx + x - b < 4$ выполняется при всех значениях b , лежащих на отрезке $[-2; 1]$?

7.51

При каких значениях параметра c все значения функции $y = x^2 + 2x$ на промежутке $(-2; c]$ не превышают числа 8?

- 7.52 ● При каких значениях параметра a множество значений функции $y = \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1}$ содержится в промежутке $(-\infty; 2)$?
- 7.53 ● При каких значениях параметра a множество значений функции $y = \frac{-x^2 + x + a}{x^2 - x + 1}$ содержит хотя бы одно число, не лежащее на отрезке $[-1; 1]$?
- 7.54 ● При каких значениях параметра a график функции $y = \frac{ax^2 + x + 2}{x^2 + 1}$ располагается между прямыми $y = -1$ и $y = 3$ и не имеет с этими прямыми общих точек?

2 СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА

§8

УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

60

Прочитайте пп. 1 и 2 в § 8 учебника.

8.1

Является ли пара чисел (3; 1) решением уравнения:

а) $3x + y = 10$;

в) $5x^3 - y = 134$;

б) $x^2 - 2y = 1$;

г) $\frac{x}{y} + 2 = -5y$?

8.2

Какая из следующих пар чисел является решением уравнения $2x^2 - y^2 = 1$:

а) (1; 1);

б) $(2; \sqrt{7})$;

в) $(\frac{1}{2}; 4)$;

г) $(\sqrt{3}; \sqrt{5})$?

8.3

Укажите уравнение, равносильное уравнению $3x - 4y = 7x + 7$:

1) $10x = 6y$;

3) $-4x = 6y$;

2) $4x - 2y = 0$;

4) $y = -1,5x$.

8.4

Укажите уравнение, равносильное уравнению $x^2 - 5xy - 24y^2 = 0$:

1) $(x + 8y)(x - 3y) = 0$;

3) $(x - 8)(y + 3) = 0$;

2) $(x + 3y)(x - 8y) = 0$;

4) $(8x - y)(3x - y) = 0$.

8.5

Укажите уравнение, равносильное уравнению

$$5x + 3y - 1 = -4(x - y):$$

1) $5x - y = 1 - 4y$;

3) $9x + 7y = 1$;

2) $y = 9x - 1$;

4) $18x - 2y - 2 = 0$.

8.6

Укажите уравнение, неравносильное уравнению $4x^2 - 4xy + y^2 = 0$:

- 1) $(2x - y)^2 = 0$; 3) $3(2x - y)^{10} = 0$;
 2) $y - 2x = 0$; 4) $\frac{2x - y}{y} = 0$.

8.7

Укажите уравнение, неравносильное уравнению

$$\frac{2x^2 + 5xy}{x + 2y} = -\frac{2y^2}{x + 2y};$$

- 1) $\frac{2x^2 + 5xy + 2y^2}{x + 2y} = 0$; 3) $2x + y = 0$;
 2) $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0$; 4) $\frac{2x^2 + 2y^2}{x + 2y} = -\frac{5xy}{x + 2y}$.

8.8

Из данных многочленов вида $p(x; y)$ выберите однородные и назовите степень каждого из них:

- 1) $p(x; y) = x^2y + 5x^3 - 4y^3$; 3) $p(x; y) = x^2 - 7xy + 2y$;
 2) $p(x; y) = x + 7y$; 4) $p(x; y) = x^2 + xy - 3y^2$.

8.9

Назовите однородные уравнения и укажите степень каждого из них:

- 1) $x^3 + 8y^3 = 0$; 3) $4x^2 + 3xy - y^2 = 0$;
 2) $2x + 4y = -5$; 4) $x^2y - xy^2 + 7y = 0$.

Решите уравнение:

8.10

- а) $4x - 5y = 0$; в) $7y + 21x = 0$;
 б) $y^2 - 2xy + 3y^2 = 0$; г) $x^2 + 4xy + 3y^2 = 0$.

8.11

- а) $x^2y - xy^2 = 0$; в) $8x^3y + y^4 = 0$;
 б) $2x^3y - 8xy^3 = 0$; г) $25x^3 - xy^2 = 0$.

Прочитайте п. 4 в § 8 учебника

69

Постройте график уравнения:

8.12

- а) $|x| = 4$; б) $y^2 = 4$; в) $|y| = 3$; г) $x^2 = 9$.

8.13

- а) $x^2 - 2x + 1 = 0$; в) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
 б) $y^2 - y - 2 = 0$; г) $y^2 - 8y + 16 = 0$.

8.14

а) $2x + 3y = 6$;
 б) $x + y - 4 = 0$;

в) $y - 2x = 0$;
 г) $6x - y = 12$.

8.15 ○

а) $x^2 - 3xy = 0$;
 б) $xy + 3x - y - 3 = 0$;

в) $xy + 2y^2 = 0$;
 г) $xy - 5x + y = 5$.

8.16 ○

а) $|x| + y = 0$;
 б) $y - |x - 4| = 0$;

в) $x - |y| = 0$;
 г) $|x| + 4 - y = 0$.

8.17 ○

а) $|x| = y + x$; б) $xy = |y|$;

в) $|y| = x + y$; г) $xy = |x|$

8.18

а) $x^2 - 2y = 0$;
 б) $\frac{1}{x} - \frac{y}{4} = 0$;

в) $2x^2 + y = 0$;
 г) $xy + 3 = 0$.

8.19 ○

а) $x^4 - y^2 = 0$;
 б) $x^2y^2 - 4 = 0$;

в) $x^4 - (y + 2)^2 = 0$;
 г) $(x + 1)^2y^2 + 3 = 0$.

8.20 ○

а) $xy = 2$; б) $|x|y = 2$;

в) $x|y| = 2$; г) $|x| \cdot |y| = 2$.

8.21

а) $y - \sqrt{x} = 0$;
 б) $y - \sqrt{-x} = 0$;

в) $y + \sqrt{x} = 0$;
 г) $y + \sqrt{-x} = 0$.

8.22 ○

а) $y - \sqrt{|x|} = 0$;
 б) $\sqrt{x} - |y| = 1$;

в) $y + \sqrt{|x|} = 1$;
 г) $\sqrt{x + 2} + |y| = 3$.

8.23

а) $(3x + y + 9)(5x + y - 5) = 0$;
 б) $(xy - 4)(x + 2y) = 0$;
 в) $(4x + 3y - 12)(2x - 9y + 18) = 0$;
 г) $(x - 5y)(2y - x^2) = 0$.

71

Прочитайте п. 5 в § 8 учебника

8.24

Найдите расстояние между точками A и B координатной плоскости:

а) A(1; 1), B(4; 5);
 б) A(-5; 0), B(0; 12);

в) A(-1; -2), B(3; 1);
 г) A(0; 6), B(-8; -9).

8.25

Постройте график уравнения:

а) $x^2 + y^2 = 25$;

в) $x^2 + y^2 = 4$;

б) $x^2 + y^2 = 9$;

г) $x^2 + y^2 = 1$.

8.26

Найдите координаты центра и радиус окружности:

а) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$;

в) $(x - 10)^2 + (y + 1)^2 = 16$;

б) $(x + 5)^2 + (y + 7)^2 = 1$;

г) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 144$.

Постройте график уравнения:

8.27

а) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$;

в) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$;

б) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$;

г) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

8.28

а) $x^2 + (y - 3)^2 = 36$;

в) $x^2 + (y + 6)^2 = 4$;

б) $(x + 2)^2 + y^2 = 9$;

г) $(x - 4)^2 + y^2 = 25$.

8.29

Напишите уравнение окружности с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом:

а) 5; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

8.30

Напишите уравнение окружности:

а) с центром в точке $A(1; 2)$ и радиусом 3;

б) с центром в точке $B(-3; 8)$ и радиусом 11;

в) с центром в точке $C(0; -10)$ и радиусом 7;

г) с центром в точке $D(-5; -2)$ и радиусом 4.

8.31

Составьте уравнение окружности, изображённой:

а) на рис. 1;

б) рис. 2;

в) рис. 3;

г) рис. 4.

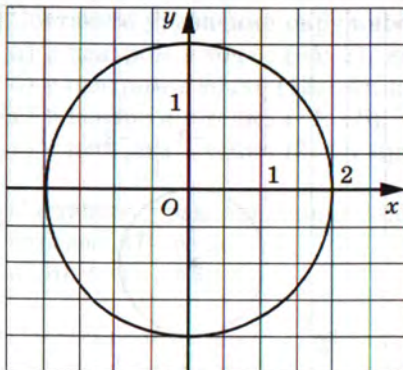


Рис. 1

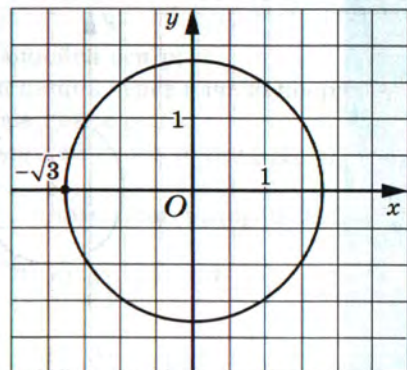


Рис. 2

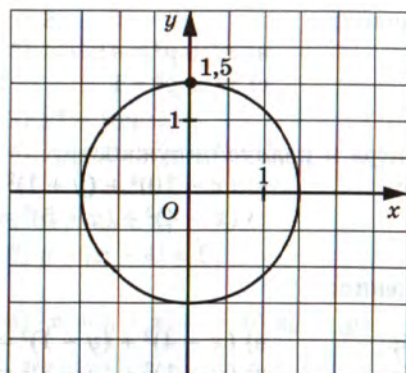


Рис. 3

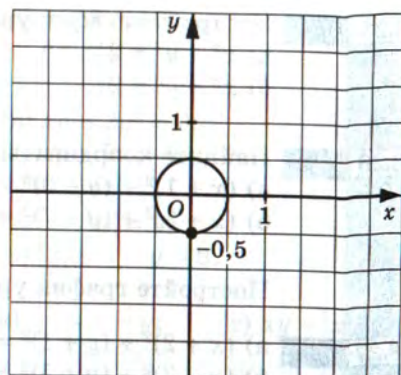


Рис. 4

Составьте уравнение окружности, изображённой:

8.32

а) На рис. 5; б) рис. 6; в) рис. 7; г) рис. 8.

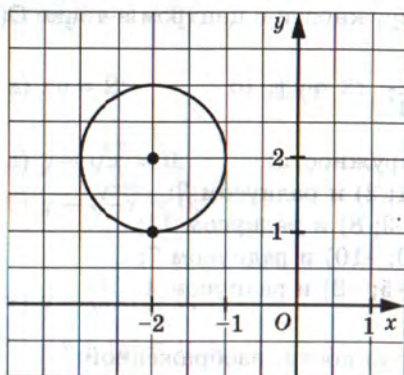


Рис. 5

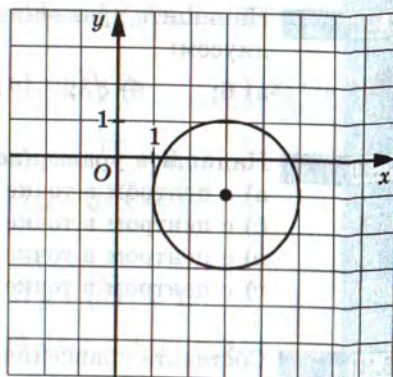


Рис. 6

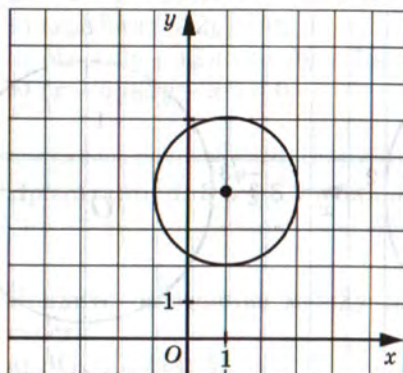


Рис. 7

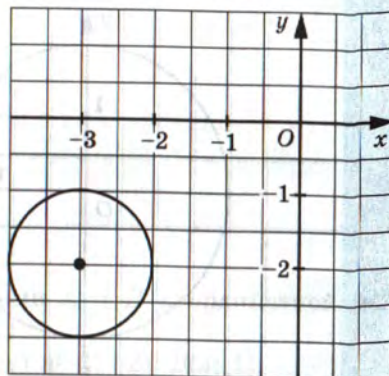


Рис. 8

8.33

- а) На рис. 9; б) рис. 10; в) рис. 11; г) рис. 12.

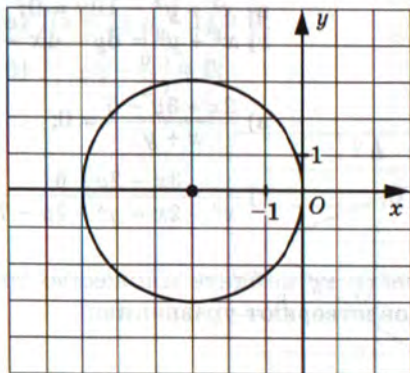


Рис. 9

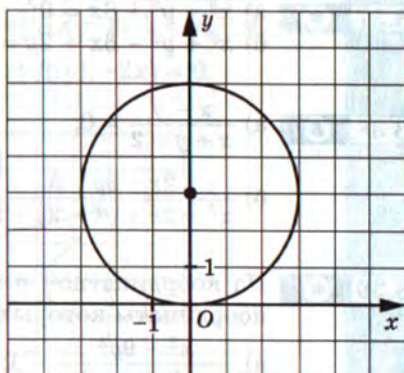


Рис. 10

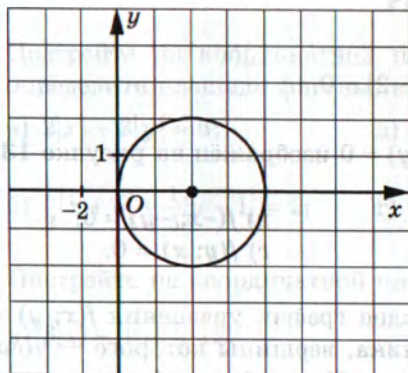


Рис. 11

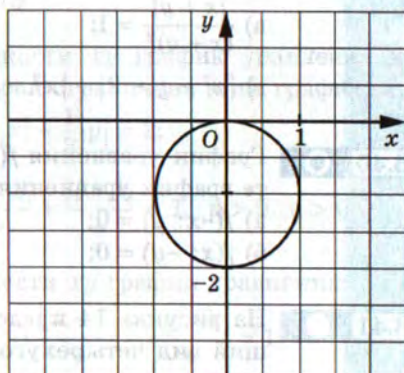


Рис. 12

8.34



Составьте уравнение окружности:

- а) с центром в точке $(-5; 2)$, касающейся оси y ;
 б) с центром в точке $(12; -5)$, проходящей через начало координат;
 в) с центром в точке $(-4; -6)$, касающейся оси x ;
 г) с центром в точке $(2; 1)$, проходящей через точку $(-4; -7)$.

8.35



Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB , если:

- а) $A(-4; 7)$, $B(6; -3)$; б) $A(-1; -6)$, $B(7; 0)$.

8.36



Составьте уравнение окружности:

- а) с центром на оси x , проходящей через точки $(-4; 4)$ и $(-2; 0)$;
 б) с центром на оси y , проходящей через точки $(8; 0)$ и $(-6; 2)$.

Постройте график уравнения:

8.37



а) $x^2 + y^2 + 8x = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 10y = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 6$;

г) $x^2 + y^2 = 6y - 4x - 4$.

8.38



а) $\frac{x - y}{x + y - 2} = 0$;

в) $\frac{2x + 3y - 5}{x + y} = 0$;

б) $\frac{2x + 3y - 5}{x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2} = 0$;

г) $\frac{3x - 2y - 6}{x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7} = 0$.

8.39



На координатной плоскости xy найдите множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $\frac{x^2 - 9y^2}{(x - 3y)(x + 3y)} = 1$;

б) $(x + 3y - 1)^2 + (x^2 - 3xy - 4y^2) = 0$;

в) $\frac{|x + y|}{(x + y)^2} = 1$;

г) $|x^2 - y - 2| + |x^2 + y^2 - 2| = 0$.

8.40



График уравнения $f(x; y) = 0$ изображён на рисунке 13. Постройте график уравнения:

а) $f(-x; y) = 0$;

в) $f(-x; -y) = 0$;

б) $f(x; -y) = 0$;

г) $f(y; x) = 0$.

8.41



На рисунке 14 представлен график уравнения $f(x; y) = 0$, имеющий вид четырёхугольника, вершины которого — точки с целочисленными координатами. Постройте график уравнения:

а) $f(|x|; y) = 0$;

в) $f(x; |y|) = 0$;

б) $f(y; |x|) = 0$;

г) $f(|y|; x) = 0$.

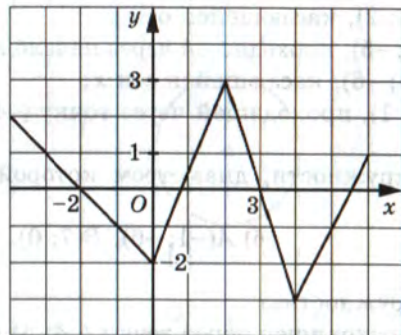


Рис. 13

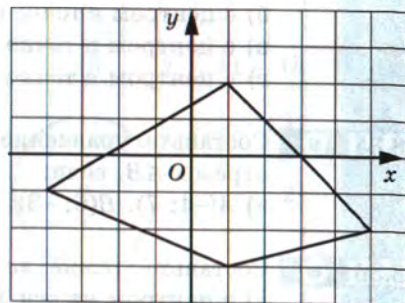


Рис. 14

8.42 ● График уравнения $f(x; y) = 0$, изображённый на рисунке 15, имеет вид многоугольника. Постройте график уравнения:

а) $f(x+1; y-1) = 0$; в) $f(2-x; 1+y) = 0$;

б) $f\left(|x|; -\frac{y}{2}\right) = 0$; г) $f(|y|; -2x) = 0$.

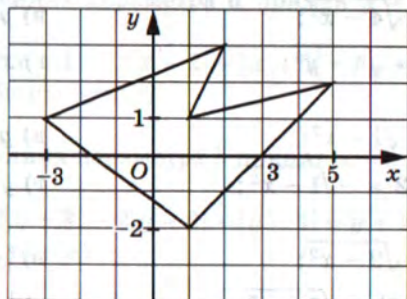


Рис. 15

8.43 ○ Постройте на координатной плоскости xy график уравнения и определите площадь фигуры, которая ограничена этим графиком:

а) $2|x| + 3|y| = 6$; в) $0,5|x| + \frac{1}{3}|y| = 2$;

б) $\frac{1}{3}|x+5| + \frac{1}{5}|y-1| = 2$; г) $\frac{|x-a|}{p} + \frac{|y-b|}{q} = 1, p > 0, q > 0$.

8.44 ○ Постройте на координатной плоскости xy график уравнения:

а) $3|x| - 4|y| = 12$; в) $\frac{|x-1|}{3} - \frac{|y+1|}{4} = 1$;

б) $3|x-1| - 4|y+2| = 12$; г) $\frac{|x-a|}{p} - \frac{|y-b|}{q} = 1, p > q > 1$.

8.45 ● Постройте на координатной плоскости xa график уравнения:

а) $(x-3)(a-1) = 2$; в) $(a-3)(|x|-1) = 2$;

б) $(|a|-3)(x-1) = 2$; г) $(|x|-3)(|a|-1) = 2$.

8.46 ● Постройте на координатной плоскости xa график уравнения и определите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет на заданном промежутке хотя бы одно решение относительно переменной x :

а) $(x-3)(a-1) = 2, x \in (5; +\infty)$;

б) $(|a|-1)(x-3) = 2, x \in [-1; 1)$;

в) $(a-1)(|x|-3) = 2, x \in (-1; 1)$;

г) $(|x|-3)(|a|-1) = 2, x \in (3; 5)$.

8.47 ○ Постройте на координатной плоскости xu график уравнения:

- а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$; в) $(x-1)^2 + (|y|-2)^2 = 16$;
 б) $(|x|-1)^2 + (y-2)^2 = 16$; г) $(|x|-1)^2 + (|y|-2)^2 = 16$.

Постройте график уравнения:

- 8.48** ○ а) $y = \sqrt{4-x^2}$; в) $y = -\sqrt{4-x^2}$;
 б) $-x = \sqrt{4-y^2}$; г) $x = \sqrt{4-y^2}$.

- 8.49** ○ а) $y = \sqrt{1-x^2}$; в) $y = -\sqrt{1-(x-1)^2}$;
 б) $y+2 = -\sqrt{1-x^2}$; г) $y = -\sqrt{1-x^2} + 3$.

- 8.50** ● а) $y = \sqrt{9-x^2}$; в) $|x| = -\sqrt{9-y^2}$;
 б) $|y+2| = \sqrt{9-x^2}$; г) $|y|+2 = \sqrt{9-x^2}$.

8.51 ● Постройте на координатной плоскости xa график уравнения:

- а) $a = \sqrt{-x^2+4x}$; в) $a = \sqrt{-x^2+4|x|}$;
 б) $|x| = \sqrt{-a^2+4a}$; г) $|a| = \sqrt{-x^2+4|x|}$.

8.52 ● Постройте множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{1}{3}|x+5| + \frac{1}{5}|y-1| = 2$, и определите, при каких значениях a среди этих точек найдётся хотя бы одна, координаты которой удовлетворяют уравнению:

- а) $x = a$; б) $x + y = a$; в) $y = a$; г) $y - x = a$.

8.53 ○ Найдите решения уравнения:

- а) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 0$; в) $(3x-4)^2 + y^2 = 0$;
 б) $\sqrt{2x-1} + |2y+3| = 0$; г) $\sqrt{|x|-2} + \sqrt{2x+y-3} = 0$.

Прочитайте п. 3 в § 8 учебника

Найдите целочисленные решения уравнения:

- 8.54** ● а) $2x - 3y = 7$; в) $5x + 3y = 13$;
 б) $2x + 3y = 1$; г) $4y - 5x = 19$.

- 8.55** ● а) $9x^2 - 4y^2 = 5$; в) $x^2 - 9y^2 = 7$;
 б) $xy = 2x + y$; г) $2x^2 + xy - y^2 = 5$.

8.56



а) Найдите двузначное число, которое в 6 раз больше суммы своих цифр.

б) Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых в 4 раза меньше самого числа.

8.57



При каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с графиком уравнения

$$2|x + 1| - 2|x - 2| + |x - 6| = 3y + x$$

единственную общую точку?

8.58



При каких значениях параметра b прямая $x = b$ имеет с графиком уравнения

$$2|y + 3| - 2|y - 2| + |y - 4| = y + 2x$$

ровно две общие точки?

§ 9

НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Постройте множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих условию:

9.1

а) $x \leq 5$;

б) $y \geq -3$;

в) $x > -4$;

г) $y < 2$.

9.2

а) $x - 3 \leq 0$;

в) $y + 2 \geq 0$;

б) $2x + 5 > 0$;

г) $0,2y - 1 < 0$.

9.3

а) $x + y < 0$;

в) $x + y > 0$;

б) $x - 2y < 0$;

г) $2x + y > 0$.

9.4

а) $x - y > -4$;

в) $x + 2y \leq 3$;

б) $3x + 2y \geq -5$;

г) $2x - 3y > 6$.

Решите графически неравенство:

9.5

а) $y - x^2 > 0$;

в) $x^2 - 2y > 0$;

б) $y \leq 2x^2$;

г) $x^2 + y \geq 0$.

9.6

а) $xy > 0$;

б) $xy \leq 1$;

в) $xy \leq 0$;

г) $xy > 2$.

9.7

Не выполняя построений, докажите, что точки $A(-1; 2)$ и $B(2; 3)$ лежат по одну сторону от прямой $13x + 7y + 6 = 0$, а точки A и $C(-13; -11)$ — по разные стороны.

9.8

Укажите на координатной плоскости xu множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x^2 + y^2 \leq 4$;

в) $x^2 + y^2 \geq 9$;

б) $(x - 2)^2 + y^2 > 4$;

г) $x^2 + (y + 3)^2 \leq 9$.

9.9

Решите графически неравенство:

а) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 < 4$;

в) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 25$;

б) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 \geq 9$;

г) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 > 16$.

9.10

Изобразите на координатной плоскости xu множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$;

в) $(x - 3)^2 + (|y| - 2)^2 > 1$;

б) $(|x| - 3)^2 + (y - 2)^2 \geq 1$;

г) $(|x| - 3)^2 + (|y| - 2)^2 \leq 1$.

9.11

При каких значениях параметра c точки $A(-1; 7)$ и $B(2; 11)$ лежат:

а) по одну сторону относительно прямой $3x + cy = 5$;б) по разные стороны относительно прямой $5x - 4y = c$?

Постройте график уравнения:

9.12

а) $\sqrt{3x - y - 1} = \sqrt{2x + y - 1}$;

б) $\sqrt{x + y - 1} = \sqrt{2x - y}$.

9.13

а) $\sqrt{1 - y} = \sqrt{1 - 2x^2}$;

б) $\sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{2x - 1}$.

9.14

а) $\sqrt{y + 1} = x$;

в) $\sqrt{2xy + y^2} = x + y$;

б) $\sqrt{-2x - y - 1} = -x$;

г) $\sqrt{2xy + x^2} = x - y$.

9.15

а) $|x^2 - y| = x^2 + x$;

в) $|y + x^2| = -x^2 + 4$;

б) $|2|x| - y| = x^2 + 2x$;

г) $|y - 2|x|| = x^2$.

9.16

Укажите на координатной плоскости xa множество точек $(x; a)$, координаты которых удовлетворяют неравенству, и определите все значения a , при которых данное неравенство имеет хотя бы одно решение:

а) $|x| + |a| \leq 4$;

в) $2|x| + 3|a| \leq 6$;

б) $|a - 3| + |x + 1| \geq 5$;

г) $\frac{|x - 3|}{2} + \frac{|a + 1|}{5} \geq 5$.

9.17

Найдите площадь фигуры, заданной неравенством:

а) $x^2 + y^2 \leq 2(|x| + |\sqrt{3} \cdot y|)$;

б) $8|x| + 6|y| \geq x^2 + y^2$.

9.18 ● Для всех точек $(x; y)$, удовлетворяющих условию $|x - 1| + 3|x - 3| + y \leq 1$, найдите наибольшее значение выражения $y + 2x$.

9.19 ● Найдите наименьшее значение выражения $x + y$, если $y \geq |5x + 2| + |5x - 3|$.

9.20 ● Найдите наибольшее значение выражения $5x + y$, если $y \leq -(4x - 8) + |16 - 4x|$.

9.21 ● Постройте график уравнения $|2y + x| - 1 + 3y = |y|$. Среди полученных точек найдите точку с наибольшей ординатой.

9.22 ● Найдите целочисленные решения неравенства:

а) $2\sqrt{x - y + 3} + \sqrt{2x - 4y + 1} \leq 1,8$;

б) $3\sqrt{3x + y - 2} + 2\sqrt{x + y - 4} \leq 2,6$.

§ 10

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Прочитайте п. 1 в § 10 учебника

81

10.1 ● Является ли пара чисел $(2; 3)$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 2x + y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 3y = 13, \\ y + x = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ 3x - 1 = y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 5x - 2y = 4? \end{cases}$

10.2 ● Какая из следующих пар чисел является решением системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - 2x = 1: \end{cases}$

а) $(0; 1)$;

б) $(-1; -1)$;

в) $(1; 0)$;

г) $(1; 1)$?

Решите графически систему уравнений:

10.3



а) $\begin{cases} x = -1, \\ x^2 + y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y = 3, \\ y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

10.4



а) $\begin{cases} y = -\frac{3}{x}, \\ y + x = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = -\frac{8}{x}, \\ x = 2 - y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 4, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$

10.5



Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1, \\ y = \sqrt{x + 1}; \end{cases}$

Решите графически систему уравнений:

10.6



а) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4, \\ y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9, \\ y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 1, \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16, \\ x = 2. \end{cases}$

10.7



а) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9, \\ y + 1 = x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 0,5x^2 + 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 16, \\ x + y = 1. \end{cases}$

10.8



а) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y = 3 - 2x, \\ y = |x + 1| - 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x| - 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = |x| - 3. \end{cases}$

10.9 ○ При каком значении параметра p пара чисел $(1; -2)$ является решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} p^2x + y = 2, \\ x^2 + y^2 = p + 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} p^2x + 2py = 5, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2p + 3? \end{cases}$$

10.10 ○ При каком значении параметра p система уравнений имеет единственное решение:

$$\text{а) } \begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y + px = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y - px + 3 = 0, \\ y = (x-1)^2 - 3? \end{cases}$$

10.11 ○ При каком значении параметра p система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - x^2 = p \end{cases} \text{ имеет:}$$

- а) три решения; б) одно решение?

Являются ли равносильными системы уравнений:

10.12 а) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 10x - y = 9, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 6x - 4y = 2? \end{cases}$

10.13 ○ а) $\begin{cases} xy = 1, \\ x + y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 0, \\ x + y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2y^2 = 0, \\ x + y = 5? \end{cases}$

10.14 ○ а) $\begin{cases} xy = 0, \\ x + y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25, \\ x + y = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 5? \end{cases}$

10.15 ○ а) $\begin{cases} |x| + |y| = xy, \\ |x + y| = x \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = xy, \\ x + y = x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^2 - 1, \\ |x + y| = 1 - x^2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 = 1, \\ x + y = 0? \end{cases}$

10.16

Найдите все значения параметра a , при которых являются равносильными системы уравнений

$$\begin{cases} x + ay = 3, \\ 3x - y = 2a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 3a, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$$

85

Прочитайте п. 2 в § 10 учебника

10.17

Постройте на координатной плоскости xu множество точек, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{cases} |x| < 3, \\ |y| < 3; \end{cases} & \text{б)} \quad & \begin{cases} x^2 \geq 4, \\ y^2 \geq 9; \end{cases} & \text{в)} \quad & \begin{cases} |x| \geq 2, \\ |y| \leq 1; \end{cases} & \text{г)} \quad & \begin{cases} x^2 < 1, \\ y^2 \geq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Решите графически систему неравенств:

10.18

$$\text{а)} \quad \begin{cases} y - x \leq 1, \\ 2x + y \geq 4; \end{cases} \quad \text{в)} \quad \begin{cases} y < -x - 2, \\ y > 3x + 6; \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} y > x + 1, \\ y < 3x - 1; \end{cases} \quad \text{г)} \quad \begin{cases} y + 1 \leq x, \\ 2x + y \leq 2. \end{cases}$$

10.19

$$\text{а)} \quad \begin{cases} x - y \geq 1, \\ x + y \leq 1, \\ x \leq 2y; \end{cases} \quad \text{б)} \quad \begin{cases} x - y \geq 2x, \\ x + y \leq 3y, \\ 5x \leq 2y - 7. \end{cases}$$

10.20

$$\text{а)} \quad \begin{cases} x^2 + y < 0, \\ y - 2x > 0; \end{cases} \quad \text{в)} \quad \begin{cases} x^2 - 4x \leq y - 3, \\ x - y > 1; \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} y - \sqrt{x} \geq 0, \\ x - 2y > 0; \end{cases} \quad \text{г)} \quad \begin{cases} y - \sqrt{-x} < 0, \\ 2x - y + 3 < 0. \end{cases}$$

10.21

$$\text{а)} \quad \begin{cases} xy \leq 4, \\ y - x \geq 0; \end{cases} \quad \text{в)} \quad \begin{cases} xy + 3 > 0, \\ 3x + y < 0; \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 \leq 4, \\ |x| - y \leq 1; \end{cases} \quad \text{г)} \quad \begin{cases} |y| - x > 1, \\ (x - 2)^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

10.22 ● Постройте на координатной плоскости xy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $\frac{4 - x^2}{2x + 3y - 6} > 0;$

в) $\frac{3x - 2y + 6}{y^2 - 9} < 0;$

б) $\frac{x^2 + y^2 - 4}{|x| + |y| - 2} < 0;$

г) $\frac{x^2 + y^2 - 25}{|x||y| - 12} > 0.$

10.23 ○ Найдите площадь треугольника, заданного системой неравенств:

а) $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ 2x + 5y \leq 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leq 2, \\ 3y - x \leq 4, \\ y \geq -x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y \leq 12, \\ y - x \leq 12, \\ y \geq 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2y \leq 8, \\ y - 3x \leq 4, \\ 5y + 8 \geq x. \end{cases}$

10.24 ○ Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств:

а) $\begin{cases} |x| \leq 2, \\ |y| \leq 2, \\ x^2 + y^2 \geq 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x| \geq 4, \\ |y| \geq 3, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$

10.25 ● Найдите площадь фигуры, заданной неравенством:

а) $(x^2 + y^2 - 16)(|x| + |y| - 4) \leq 0;$

б) $(4|x| + 3|y| - 12)\left(x^2 + y^2 - \frac{36}{25}\right) \leq 0.$

10.26 ● Постройте множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x - 3y)(2x + y) < 0$, и укажите все значения y , при которых любое значение x из промежутка $[1; 4]$ удовлетворяет данному неравенству.

10.27 ● Постройте график уравнения $2y + \left|y - \frac{3}{x}\right| = 4 - \left|\frac{3}{x} - 1\right|$. Среди полученных точек найдите все точки с наибольшей ординатой и укажите их абсциссы и ординату.

10.28 ● Найдите целочисленные решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} \sqrt{x - 2y + 5} < \sqrt{3} - 1, \\ \frac{1}{(2x + y)^2 + 2} > \frac{2}{5}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x + 2y + 2} < \sqrt{20} - 2, \\ \frac{1}{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} > \frac{2}{3}. \end{cases}$

10.29

В двух группах более 52 студентов. Известно, что число студентов первой группы превышает число студентов второй группы, уменьшенное на 21, более чем в 2 раза, а число студентов второй группы более чем в 5 раз превышает число студентов первой группы, уменьшенное на 16. Сколько студентов в каждой из групп?

§ 11

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

88

Прочитайте п. 1 в § 11 учебника

Решите систему уравнений методом подстановки:

11.1



а)
$$\begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - 2y = 26; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x = y + 3, \\ y^2 - 2x = 9; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x = y^2, \\ x + y = 6; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} y = x^2, \\ x - y = -6. \end{cases}$$

11.2



а)
$$\begin{cases} xy = -2, \\ x + y = 1; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x + 3y = 11, \\ 2x + y^2 = 14; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 5x^2 + 2y = -3, \\ x - y = 5; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 12. \end{cases}$$

11.3



а)
$$\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ 3y - x = 10; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2x^2 - xy = 33, \\ 4x - y = 17; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 32, \\ 2x - y = 8; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ 2y - x = -7. \end{cases}$$

11.4



а)
$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x^2 + xy - x - y = 2, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} xy + y^2 + x - 3y = 15, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

11.5 а)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ 2y - x = 1; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \\ x - 2y = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{12}{xy} + \frac{4}{y} = 2, \\ x - y - 3 = 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{12}{xy} + \frac{3}{y} = 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

11.6 а)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 5, \\ x^2 - 3xy - y^2 = 36; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \frac{y}{x} = -3, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -56; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{x+3y}{3x-y} = 1, \\ x^2 + xy - 5y^2 = 1; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \frac{7x+3y}{3x+2y} = 2, \\ x + xy - y = 1. \end{cases}$$

Прочитайте п. 3 в § 11 учебника

93

Решите систему уравнений методом алгебраического сложения:

11.7 а)
$$\begin{cases} a + b = 3, \\ a - b = 1; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2a + 3b = 3, \\ 2a - 3b = 9; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} a + 2b = 5, \\ -a + 7b = 13; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 3a + 5b = 8, \\ -3a + b = -2. \end{cases}$$

11.8 а)
$$\begin{cases} 40m + 3n = -10, \\ 20m - 7n = -5; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 5m + 2n = 1, \\ 15m + 3n = 3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3m + 2n = 0,5, \\ 2m + 5n = 4; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 4m + 7n = 11, \\ 5m - 2n = 3. \end{cases}$$

11.9 а)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 22, \\ x^2 + 3y^2 = 28; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 41, \\ 2x^2 + y^2 = 59; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14, \\ x^2 + 2y^2 = 18. \end{cases}$$

11.10 ○

$$a) \begin{cases} xy + y^2 = 1, \\ xy + 2y^2 - 2y = 9; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x^2 + xy + y^2 = 3, \\ x^2 + xy + y^2 + 4x = 5. \end{cases}$$

11.11 ○

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 3, \\ x^2 + y^2 + 10x - 2y = 10; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 6, \\ 2x^2 + y^2 + 3x - 2y = 2. \end{cases}$$

11.12 ○

$$a) \begin{cases} 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 2y - 2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - x - y = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y + 2 = 0, \\ 3x^2 - 6xy + 2y^2 - 3x - 2y + 8 = 0. \end{cases}$$

11.13 ○

$$a) \begin{cases} x^2 = x - 2y, \\ y^2 = 2x - y; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + y^2 = 2x - y, \\ y + x^2 = 2y - x. \end{cases}$$

11.14 ○

$$a) \begin{cases} x^2 + 4y = 28, \\ y^2 + 12x = -68; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2, \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 34 \end{cases}$$

94

Прочитайте п. 4 в § 11 учебника

Решите систему уравнений методом замены переменных:

11.15 ○

$$a) \begin{cases} x^2y^2 + xy = 2, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 5 \cdot \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 14, \\ 5x + 3y = 13; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3(x-y) - 2(x-y)^2 = -2, \\ 2x + 7y = -5; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 4(x+y)^2 - 7(x+y) = 15, \\ 5x - 2y = 1. \end{cases}$$

11.16 ○

$$a) \begin{cases} xy(x+y) = 6, \\ xy + (x+y) = 5; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 5(x+y) + 4xy = 32, \\ xy(x+y) = 12; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3(x-y)^2 + 2(x+2y)^2 = 5, \\ 2(x+2y) - x + y = 1; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 2(x+y)^2 + 3(x+2y) = 5, \\ 3(x+2y) - 2x - 2y = 5. \end{cases}$$

11.17 ○

$$a) \begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{2x}{y} = 3, \\ \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} = 5; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{6y}{x} = 5, \\ x^2 + xy - y^2 = 41. \end{cases}$$

Решите систему уравнений:

11.18 ○

а)
$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

11.19 ○

а)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^4 - y^4 = 15; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 15, \\ x^4 - y^4 = 80; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1, \\ x^4 + 3y^4 = 129; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^4 + y^4 = 82. \end{cases}$$

11.20 ○

а)
$$\begin{cases} (x + y)(x - 2) = 0, \\ x - 2y = -1; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} (x + y)(x^2 - 25) = 0, \\ x - 3y = 8; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (x - y)(x - 2y) = 0, \\ x^2 - 4y^2 + 27 = 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x + y = 0, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

11.21 ○

а)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ xy = 20; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} xy = 2, \\ 9x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 34, \\ xy = 20. \end{cases}$$

11.22 ○

а)
$$\begin{cases} x^2 - 2y = 3, \\ x^2y = 27; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x + y^2 = 2, \\ 2y^2 + x^2 = 3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + y = 10, \\ x^4 + x^2y = 90; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x^2 + y^4 = 5, \\ xy^2 = 2. \end{cases}$$

11.23 ○

а)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x + y = 2, \\ 5y^2 + 5x^2 + x + 5y = 36; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 31, \\ x^2 + y^2 - 2x - y = 15; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 3x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6. \end{cases}$$

11.24

O

$$\text{a) } \begin{cases} (x+y)^2 - (x-y) - 8 = 0, \\ (x+y)^2 + (x-y) - 10 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \\ x - y = 6; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x + y + (x - 2y)^2 = 3, \\ x^2 - 4xy + 4y^2 = 9 - 3(2x + y); \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{17}{4}, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

11.25

O

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 3x - 2y = 4, \\ x^2 + x - 3y = 18; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} xy + x = 56, \\ xy + y = 54; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + 2x + 3y = 3, \\ x^2 + x + 2y = 4; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3x - xy = 10, \\ y + xy = 6. \end{cases}$$

11.26

O

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 1 - xy; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x^2 - 4xy + y^2 = 2x + 3y; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = x - y, \\ x - 3y = -1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x + 2y = 2, \\ x^2 + 4y + 4y^2 = 2y + 4x. \end{cases}$$

11.27

O

$$\text{a) } \begin{cases} xy - 2x + 3y = 6, \\ 2xy - 3x + 5y = 11; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y^2 + 3x - y = 1, \\ y^2 + 6x - 2y = 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20, \\ x^2 - 2x + y = -5; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x + xy + y = 5, \\ xy - 2x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

11.28

O

$$\text{a) } \begin{cases} (x-2)(y-3) = 1, \\ \frac{x-2}{y-3} = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x-3)(y-2) = 3, \\ \frac{y-2}{x-3} = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x+1}{y-3} = 1, \\ (x+1)(y-3) = 4; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} (x+3)(y-1) = 8, \\ \frac{x+3}{y-1} = 2. \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} (x+2y)^2 + (y-2x)^2 = 90, \\ (x+2y) + (y-2x) = 12; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 9, \\ \frac{(x+y)x}{y} = 20; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 15, \\ \frac{(x+y)x}{y} = 56; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 16. \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} (x+y)^2 + 2x = 35 - 2y, \\ (x-y)^2 - 2y = 3 - 2x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 12(x+y)^2 + x = 2,5 - y, \\ 6(x-y)^2 + x = 0,125 + y. \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5}{x^2 - xy} + \frac{4}{y^2 - xy} = -\frac{1}{6}, \\ \frac{7}{x^2 - xy} - \frac{3}{y^2 - xy} = \frac{6}{5}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} + \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} + \frac{7}{5} = 0. \end{cases}$$

Составьте уравнение окружности, проходящей через точки:

а) $A(3; 13)$, $B(-7; -11)$, $C(10; 6)$;

б) $A(7; -7)$, $B(-2; -4)$, $C(6; 0)$.

Прочитайте п. 5 в § 11 учебника

97

Решите систему уравнений, используя метод почленного умножения или деления:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 y^5 = 1, \\ x^5 y^2 = 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x^2 y^6 = 1, \\ x^6 y^2 = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x+y)(2x-y) = 8, \\ (x+y)(2x+y) = 24; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} (x-y)^2(x+2y) = 4, \\ (x-y)(x+2y)^2 = 16. \end{cases}$$

Прочитайте п. 2 в § 11 учебника

91

Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x - 2y = 2, \\ -x + 2y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x - 2y = 2, \\ -x + y = 1. \end{cases}$$

11.35 ○

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 3, \\ y + z = 4, \\ z + x = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2y + 3z = 4, \\ 3z + x = 5. \end{cases}$$

11.36 ●

$$\text{а) } \begin{cases} x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z = \frac{11}{6}, \\ \frac{1}{3}x + y - \frac{1}{6}z = \frac{5}{2}, \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y + z = -\frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3}x - y - z = \frac{5}{3}, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}z = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

99

Рассмотрите решение примера 11 в § 11 учебника

Решите систему уравнений:

11.37 ○

$$\text{а) } \begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} xy^2 = 4, \\ y^2z = 16, \\ z^2x = 16. \end{cases}$$

11.38 ●

Сорок девятиклассников отвечали на вопрос о том, читали ли они книги A , B , C . Результаты выглядят так: кто-то не читал ни одну из этих книг, книгу A прочитали 25 учеников, книгу B — 22 ученика, книгу C — 22 ученика; хотя бы одну из книг A или B прочитали 33 ученика, хотя бы одну из книг A или C прочитали 32 ученика, хотя бы одну из книг B или C — 31 ученик. Все три книги прочитали 10 учеников. Сколько учеников:

- прочитали только по одной книге;
- прочитали ровно две книги;
- не читали ни одной из указанных книг?

11.39 ○

При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

- имеет единственное решение;
- не имеет решений;
- имеет бесконечное множество решений?

11.40 ○

При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 2ax - y = 2 \end{cases}$

- имеет единственное решение;

- б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.41 ○ При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases} ax - 2y = a, \\ 2x - ay = 2 \end{cases}$$

- а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.42 ○ При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases} (3a - 3)x + 2ay = 6a - 1, \\ x + (a - 2)y = -3 \end{cases}$$

- а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.43 ● Для каждого значения параметра a решите систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + (2a - 1)y = 3a - 1, \\ (a + 1)x + 2y = a + 3. \end{cases}$$

11.44 ○ При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x - 2y = 2, \\ -x + ay = 1 \end{cases}$$

- а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.45 ○ При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x - 2y = a, \\ -x + ay = 1 \end{cases}$$

- а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

11.46 ○ Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = 2a - 4 \end{cases}$$

- а) имеет единственное решение;
б) имеет ровно два решения;
в) не имеет решений.

11.47 ○ Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ 3xy = a - 1 \end{cases}$$

- а) имеет единственное решение;
 б) имеет ровно два решения;
 в) не имеет решений.

11.48 ● Найдите все значения a , при которых система уравнений имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} x^2 + xy + x - y = a + 4, \\ x + y = a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2 - 1, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy + ax + y = -6, \\ y^2 + xy + x + ay = -6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} axy + x - y = -1,5, \\ xy + x + 2y = -1. \end{cases}$

11.49 ● Найдите целочисленные решения уравнения:

а) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3;$

б) $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4.$

§12

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ. СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Прочитайте п. 1 в § 12 учебника

Решите однородную систему уравнений:

12.1 ○ а) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 0, \\ x^2 + y^2 = xy + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2 - xy = 0, \\ x^2 - y^2 + 2xy = 4. \end{cases}$

12.2 ○ а) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 5y^2 = 0, \\ 4x^2 - xy + y^2 = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - y^2 + xy = 4. \end{cases}$

12.3 ○ а) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y^2 = 3, \\ x^2 - y^2 - 2xy = -7. \end{cases}$

Прочитайте п. 2 в § 12 учебника

103

Решите систему симметрических уравнений:

а)
$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x + y + xy = 9, \\ x^2 + y^2 = 17; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy(x + y) = 6; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x + y + 4xy = 6, \\ xy(x + y) = 2. \end{cases}$$

а)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4, \\ xy(x + y) = 2. \end{cases}$$

а)
$$\begin{cases} xy - 3x - 3y = -8, \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y = -12; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} xy - x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

а)
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ xy(x^2 + y^2) = 2; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x + y + xy = -7, \\ (x - y)^2 + x + y = 22; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^4 + y^4 = 17; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^3 + y^3 = 19. \end{cases}$$

Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 - xy + 2x + 2y = 5, \\ xy + x + y = 3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} (x + 2y)(x + 3y) - 2x - 5y = 1, \\ (x + 2y)^2 + (x + 3y)^2 = 13. \end{cases}$$

а)
$$\begin{cases} x^2 + x(y - 1) - 2(y - 1)^2 = 0, \\ x^2 + xy + y = 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + x(y - 1) - 2(y - 1)^2 = 0, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

12.10

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{3}{2x-y} + \frac{2}{x+y} = \frac{4}{x}, \\ x^2 + 2y^2 = 72; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{x+1} + \frac{2}{y+1} = \frac{10}{x+y+2}, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 - 2xy - 5y = 4. \end{cases}$$

12.11

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5}{x^2-xy} + \frac{4}{y^2-xy} = \frac{13}{6}, \\ \frac{8}{x^2-xy} - \frac{1}{y^2-xy} = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{2x^2+6xy} + \frac{3}{4y^2-4xy} = \frac{25}{14}, \\ \frac{3}{4x^2+12xy} - \frac{1}{2y^2-2xy} = -\frac{4}{7}. \end{cases}$$

12.12

○ Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение. Найдите это решение:

$$\text{а) } \begin{cases} x+y=2a, \\ x+y+4xy=2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} xy=8a, \\ (x+y)xy=2. \end{cases}$$

12.13

● Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + y = xy \end{cases}$ имеет ровно три решения.

§13

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.
СИСТЕМЫ С МОДУЛЯМИ

105

Прочитайте п. 1 в § 13 учебника

Решите систему уравнений:

13.1

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \sqrt{x+2y} = 2, \\ x-2y = 6; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \sqrt{x-y} = 1, \\ 3x-y = 5; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \sqrt{x^2-3x} = 2, \\ 2x-3y = 5; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \sqrt{x^2-5x} = 6, \\ x+2y = 1. \end{cases} \end{array}$$

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x+2y} = 5, \\ \sqrt{x-y} = 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{x-4y} = 1, \\ \sqrt{3x+2y-1} = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{xy+1} = 4, \\ \sqrt{x+y+1} = 3; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{xy-3} = 3, \\ \sqrt{x-y} = 2. \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x+2y-4} = \sqrt{x}, \\ x^2 - y^2 = 3x; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{y+3xy-6} = \sqrt{y}, \\ 2x^2 - y^2 = 2y; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y-2}, \\ x-y+2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{y-2} = 0, \\ y-x = 7. \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x^2-y+1} = \sqrt{y}, \\ 2y-x^2 = 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{x+y-4} = \sqrt{x+y^2-4}, \\ x^2+xy = 30; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{-x-y} = \sqrt{4x-y}, \\ y^2+xy+5y = 6; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{3x-y+1} = \sqrt{x+2y+1}, \\ 2x^2+6xy+3y = 8. \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{2x-y} = x, \\ \sqrt{x-y+4} = 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{x^2+xy} = 2x, \\ \sqrt{6x+y} = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{x+5y} = 3y, \\ \sqrt{x+y-1} = 2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{5y^2-xy} = 3y, \\ \sqrt{4x-y} = 5. \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{2xy+6y^2} = x-y, \\ 3x+y = 6; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{16x^2+3xy} = 2x+y, \\ 2y-x = 10; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x+2y = 2, \\ \sqrt{x^2+1} + y = 2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x-y^2 = 2, \\ \sqrt{y^2+4x} + x = 3. \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = 5, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{1-y} = 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x+3\sqrt{y} = 18, \\ y+3\sqrt{x} = 18; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{2x-y} + \sqrt{2x+y} = 5, \\ \sqrt{4x^2-y^2} = 6; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{x+4y} + 2\sqrt{x-4y} = 5, \\ \sqrt{x^2-16y^2} = 2. \end{cases}$$

13.8

а)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3}, \\ x - y = 4; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \frac{17}{4}, \\ 2x + y = 17; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2 + xy + y = 1; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x+y}{x-y}} + 2\sqrt{\frac{x-y}{2x+y}} = 3, \\ x - xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

13.9

а)
$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sqrt{x+2y} - \sqrt{x+5y} = 1, \\ \sqrt{x+5y} + x - y = 8. \end{cases}$$

13.10

а) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = x-y, \\ x+5y = 8. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 - y_0$.

б) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+y+2} = x-y, \\ x+5y = 2. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $2x_0 + y_0$.

13.11

а) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = \sqrt{3x-y-4}, \\ x^2 + xy = 12. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_0 + 2y_0$.

б) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y-1} = \sqrt{6x-y-3}, \\ 2x^2 + xy - x = 6. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $5x_0y_0$.

13.12

а) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{4x-y-9} = \sqrt{12x+y-27}, \\ 4x^2 - xy - 17x + 2y = -15. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $4x_0 + 3y_0$.

б) Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y-6} = \sqrt{-2x+3y-30}, \\ y^2 + 2xy - 14y - 16x = -36. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $2x_0 + y_0$.

Найдите все значения параметра a , при которых система уравне-

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = a, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

- а) имеет единственное решение;
б) имеет ровно два решения;
в) не имеет решений.

Найдите все значения параметра a , при которых система уравне-

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ x + y = a \end{cases}$$

- а) не имеет решений;
б) имеет единственное решение;
в) имеет ровно два решения.

Прочитайте п. 2 в § 13 учебника

107

Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} |x| + 3y = 1, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 0,5x - |y - 1| = -1, \\ y - x = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} |2x + 3y| + 2x = 6, \\ 0,8x + 0,6y = 1,2; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} |x - y| - y = -1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

а)
$$\begin{cases} |x| + y = 1, \\ x - 2|y| = 1; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} |x + 2| - y = 2, \\ x + 3|y| = 4; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} |x + 2| - y = -2, \\ x + 3|y - 4| = -1; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} |x + 2| - y = -2, \\ x + 3|y - 6| = 4. \end{cases}$$

а)
$$\begin{cases} |x - y| - y = -1, \\ x - 2|y| = -1; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} |x + y| - 2x = -3, \\ 3|x| + 2y = 5; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} |x + y - 1| + y = 1, \\ x + 2|y| = 2; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} |x + y - 2| - 2y = 3, \\ 2|x| - 3y = 11. \end{cases}$$

13.18

$$\text{а) } \begin{cases} y - |x| = 1,5, \\ |x| - |y - 1,5| = 1,5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x + |y| = 3, \\ |x + 3| - |y| = -3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} |2x - y| + |x + 2y| = 3, \\ 3x + y = \pi; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} |x - 3y| - |2x + y| = 2, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$$

13.19

$$\text{а) } \begin{cases} xy = 3, \\ x - |y| = -4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} |x|y = 7, \\ x + |y| = 1,5. \end{cases}$$

13.20

Для каждого значения параметра a найдите число решений системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} |x + 2| - y = -2, \\ ax + 3y = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} |x + a| - y = -2, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$$

13.21

Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + |x| = a \end{cases} \text{ имеет ровно четыре решения.}$$

§14

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

Задачи с числами

14.1



Разность двух натуральных чисел равна 16, а произведение на 553 меньше суммы их квадратов. Найдите эти числа.

14.2



Сумма двух натуральных чисел равна 50, а произведение на 11 меньше, чем разность их квадратов. Найдите эти числа.

14.3



Какое двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр и в 3 раза больше произведения цифр?

14.4



Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к заданному числу прибавить 36, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

- 14.6** ▢ Если к числителю и знаменателю обыкновенной дроби прибавить по 1, то дробь станет равна $\frac{1}{2}$, а если сложить квадраты числителя и знаменателя исходной дроби, то получится 146. Найдите исходную дробь.
- 14.7** ▢ Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.
- 14.8** ▢ Если задуманное двузначное число умножить на цифру его единиц, то получится 376, а если из задуманного числа вычесть двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 45. Какое число задумано?
- 14.9** ▢ Задуманы два натуральных числа, произведение которых равно 720. Если первое число разделить на второе, то в частном получится 3 и в остатке 3. Какие числа задуманы?
- 14.10** ▢ При умножении двух натуральных чисел, разность которых равна 7, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 4. При делении полученного (неверного) произведения на меньший множитель получилось в частном 52 и в остатке 26. Найдите исходные числа.
- 14.11** ▢ Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если это же двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке число, равное сумме цифр исходного числа. Найдите исходное число.

Задачи геометрического содержания

- 14.11** ○ Диагональ прямоугольника равна 10 см, а его периметр равен 28 см. Найдите стороны прямоугольника.
- 14.12** ○ Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 49 м, а его гипотенуза равна 41 м. Найдите площадь треугольника.
- 14.13** ○ Разность катетов прямоугольного треугольника равна 23 дм, а его гипотенуза равна 37 дм. Найдите периметр треугольника.
- 14.14** ○ Площадь прямоугольного треугольника равна 210 см^2 , гипотенуза равна 37 см. Найдите периметр этого треугольника.

111

Рассмотрите решение примера 1 в § 14 учебника

- 14.15** ○ В первом зрительном зале 350 мест, а во втором — 480. Во втором зале на 5 рядов меньше, чем в первом, но в каждом ряду на 10 мест больше, чем в каждом ряду первого зала. Сколько мест в ряду в каждом зале?
- 14.16** ○ В красном зале кинотеатра 320 мест, а в синем — 360. В красном зале на 2 ряда больше, чем в синем, но в каждом ряду на 4 места меньше, чем в каждом ряду синего зала. Сколько рядов в каждом зале кинотеатра?
- 14.17** ○ В треугольник со сторонами 13, 11 и 20 вписана окружность. Найдите длины отрезков, на которые каждая из сторон разделена точками касания.

Задачи на движение

113

Рассмотрите решение примера 2 в § 14 учебника

- 14.18** ○ Расстояние между двумя пунктами по реке равно 14 км. Лодка проходит этот путь по течению за 2 ч, а против течения за 2 ч 48 мин. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.
- 14.19** ○ Моторная лодка против течения реки проплыла 10 км, а по течению 9 км, при этом по течению она шла 45 мин, а против течения — 1 ч 15 мин. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.
- 14.20** ○ Турист проплыл на лодке по реке из города A в город B и обратно за 7 ч. Найдите скорость течения реки, если известно, что турист проплывал 2 км против течения за то же время, что и 5 км по течению, а расстояние между городами равно 20 км.
- 14.21** ○ Из двух городов, расстояние между которыми 700 км, одновременно навстречу друг другу отправляются два поезда и встречаются через 5 ч. Если второй поезд отправится на 7 ч раньше первого, то они встретятся через 2 ч после отправления первого поезда. Найдите скорость каждого поезда.
- 14.22** ○ Расстояние между двумя посёлками, равное 24 км, первый пешеход преодолел на 2 ч быстрее второго. Если скорость движения

первого увеличить на 2 км/ч, а второго на 1 км/ч, то и в этом случае весь путь первый преодолеет на 2 ч быстрее второго. Найдите первоначальные скорости пешеходов.

14.23 ○ Велосипедист за каждую минуту проезжает на 600 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь длиной 120 км он затрачивает времени на 3 ч больше, чем мотоциклист. Найдите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

14.24 ○ Если велосипедист увеличит скорость на 10 км/ч, то при прохождении некоторого пути получит выигрыш во времени, равный 5 мин. Если же он уменьшит свою скорость на 5 км/ч, то на том же участке потеряет 4 мин. Определите скорость велосипедиста и длину пути.

14.25 ○ Расстояние между городами A и B равно 900 км. Два поезда отправляются одновременно, один из A в B , а другой из B в A . Они встречаются в некотором пункте C . Первый поезд прибывает в город B через 4 ч после встречи со вторым, а второй в город A через 16 ч после встречи. Определите скорость поездов и расстояние AC .

14.26 ○ На перегоне от пункта A до пункта B поезд шёл со скоростью на 10 км/ч меньше намеченной, поэтому он пришёл в пункт B на 15 мин позже расписания. Перегон от B до C , который на 60 км длиннее перегона от A до B , поезд прошёл со скоростью, указанной в расписании, и прибыл в C через 2,5 ч после выхода из B . За какое время состав должен был пройти перегон AB по расписанию?

14.27 ○ Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B , расстояние между которыми 1764 км. В пункт C , расположенный на расстоянии 900 км от A , второй автомобиль прибыл на 1 ч раньше первого. С какой скоростью двигались автомобили, если известно, что второй автомобиль может ликвидировать отставание в 60 км от первого автомобиля за 10 ч?

14.28 ○ Две машины одновременно вышли из пунктов A и B , при этом до пункта C первая машина должна проехать 216 км, а вторая — 252 км. Известно, что в пункт C первая машина пришла на 1 ч позже второй, а на весь путь от A до B первая машина затратила на 4 ч 20 мин больше, чем вторая на путь от B до A . С какой скоростью двигались машины?

14.29 ○ Автомобиль выезжает из пункта A в пункт B и, доехав до B , сразу же возвращается обратно в пункт A . Через 3 ч после выезда автомобиль находился на расстоянии 50 км от B , а ещё через 1 ч — в 80 км от пункта A . Найдите скорость автомобиля, если известно, что на весь путь было затрачено менее 5 ч.

- 14.30** ● Автомобили двух моделей выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, причём автомобиль первой модели вышел из A на 15 с раньше. Пройдя расстояние AB , равное 600 м, каждый сразу повернул обратно и вернулся к месту старта. Найдите скорость каждого автомобиля, если первая встреча между ними произошла через 21 с, а вторая — через 45 с после выхода автомобиля первой модели.
- 14.31** ● Из пункта A в одном и том же направлении вышли два лыжника, причём второй стартовал на 6 мин позже первого и догнал первого в 3 км от старта. Дойдя до отметки 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого в 4,6 км от старта. Найдите скорости лыжников.
- 14.32** ● Из пункта A в пункт B , находящийся на расстоянии 70 км от пункта A , выехал велосипедист, а через некоторое время — мотоциклист со скоростью движения 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста в 20 км от пункта A . Прибыв в B , мотоциклист через 36 мин выехал обратно и встретился с велосипедистом спустя 3 ч 20 мин после выезда велосипедиста из A . Найдите скорость велосипедиста.
- 14.33** ● Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B . Каждый идёт с постоянной скоростью без остановок и, придя в конечный пункт, тут же поворачивает обратно. Когда пешеходы встретились во второй раз, оказалось, что первый прошёл на 4 км больше, чем второй. После второй встречи первый прибыл в A через час, а второй в B — через 2,5 ч. Найдите скорости пешеходов.
- 14.34** ● Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Если поезд из A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из B , то встреча произойдёт на середине пути. Если поезда выйдут одновременно, то они встретятся через 3 ч 45 мин. Найдите скорость поездов и расстояние между A и B , если известно, что скорость одного поезда на 40 км/ч больше скорости другого.
- 14.35** ● Турист проплыл по реке на лодке 90 км и прошёл пешком 10 км. При этом на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шёл пешком столько времени, сколько на самом деле он плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько на самом деле шёл пешком, то соответствующие расстояния были бы равны. Сколько времени он шёл пешком и сколько времени он плыл по реке?

- 14.36** ○ Из пункта A в пункт B одновременно выезжают три автомобиля. Скорость первого автомобиля на 5 км/ч больше скорости второго и на 6 км/ч меньше скорости третьего. При этом третий автомобиль затрачивает на путь от A до B на полчаса меньше, чем первый, и на 1 ч меньше, чем второй. Найдите расстояние между пунктами A и B .
- 14.37** ○ Дорога от пункта A до пункта B длиной 11,5 км идёт вначале в гору, потом по ровному участку и затем под гору. Пешеход, следуя из A в B , прошёл всю дорогу за 2 ч 54 мин, а на обратную дорогу затратил 3 ч 6 мин. Скорость его подъёма в гору — 3 км/ч, по ровному участку — 4 км/ч, под гору — 5 км/ч. На каком протяжении дорога идёт по ровному участку?
- 14.38** ○ По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадение точек происходит каждый раз через 1 мин. Определите скорости движения точек.

Задачи на работу

Рассмотрите решение примера 3 в § 14 учебника

115

- 14.39** ○ Два комбайна, работая совместно, могут выполнить задание за 6 ч. Первый комбайн, работая один, может выполнить это задание на 5 ч скорее, чем второй комбайн. За сколько времени может выполнить задание первый комбайн, работая один?
- 14.40** ○ Две бригады, работая вместе, могут выполнить задание за 8 ч. Первая бригада, работая одна, могла бы выполнить задание на 12 ч быстрее, чем вторая бригада. За сколько часов могла бы выполнить задание первая бригада, если бы она работала одна?
- 14.41** ○ Два экскаватора, работая одновременно, выполняют некоторый объём земляных работ за 3 ч 45 мин. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить этот объём работ на 4 ч быстрее, чем другой. Сколько времени требуется каждому экскаватору в отдельности для выполнения того же объёма земляных работ?
- 14.42** ○ Чан наполняется двумя кранами одновременно за 1 ч. Наполнение чана только через первый кран длится вдвое дольше, чем через второй кран. За какой промежуток времени каждый кран, работая отдельно, может наполнить чан?

- 14.43** ○ Аквариум объёмом 54 м^3 заполняется при помощи двух кранов. При этом первый кран работает 3 ч, а второй — 2 ч. Какова пропускная способность первого крана, если 1 м^3 он заполняет на 1 мин медленнее, чем второй?
- 14.44** ○ Два тракториста, работая совместно, вспахали поле за 48 ч. Если бы половину поля вспахал один из них, а затем оставшуюся половину другой, то работа была бы выполнена за 100 ч. За сколько часов мог бы вспахать поле каждый тракторист, работая отдельно?
- 14.45** ○ Двое рабочих вместе могут справиться с заданием за 2 ч. Если один из них делает 40% задания, а затем второй — оставшуюся часть работы, то на выполнение задания понадобится 4 ч. За какое время сможет выполнить всё задание каждый рабочий, действуя в одиночку, если известно, что производительность труда у них различная?
- 14.46** ○ Две наборщицы напечатали текст рукописи за 6 ч. Если сначала первая наборщица напечатает половину рукописи, а затем вторая — оставшуюся часть, то на всю работу будет затрачено 12,5 ч. За какое время может выполнить всю работу каждая наборщица?
- 14.47** ○ Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 ч быстрее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то будет выполнено только 60% всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения задания?
- 14.48** ○ Две бригады, работая вместе, должны отремонтировать участок шоссеиной дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала первая бригада, а заканчивала ремонт участка дороги вторая бригада, работающая не более чем в два раза быстрее первой. В результате ремонт участка дороги продолжался 40 дней, причём первая бригада в своё рабочее время выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько дней был бы отремонтирован участок дороги каждой бригадой отдельно?
- 14.49** ○ Мастер, работая с учеником, обрабатывает деталь за 2 ч 24 мин. Если мастер будет работать 2 ч, а ученик — 1 ч, то будет выпол-

нено $\frac{2}{3}$ всей работы. Сколько времени потребуется мастеру и ученику в отдельности на обработку детали?

14.50 ○ В бассейн проведены две трубы разного сечения. Одна равномерно подаёт, а вторая равномерно отводит воду, причём через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $\frac{1}{3}$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, работая отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

14.51 ○ Двое рабочих получили задание. Второй приступил к выполнению на один час позже первого. Через 3 ч после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить $\frac{9}{20}$ всего задания. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину задания. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить всё задание?

14.52 ○ Одна снегоочистительная машина может убрать улицу за 1 ч, а другая — за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины работали вместе 20 мин, после чего первая машина сломалась и прекратила работу. Сколько нужно времени, чтобы вторая машина одна закончила работу?

14.53 ○ Два экскаватора, работая вместе, выроют котлован за 5 ч. Если бы производительность первого экскаватора была в 2 раза меньше, а второго — в 2 раза больше первоначальной, то котлован был бы вырыт за 4 ч. За сколько часов каждый экскаватор, работая отдельно с первоначальной скоростью, выроет котлован?

14.54 ● Два крана, действуя один после другого, наполнили пустой бассейн водой. Первый был открыт в течение $\frac{5}{6}$ того времени, за которое второй, действуя один, мог бы наполнить весь бассейн. Если оба крана одновременно были бы открыты, то бассейн наполнился бы на 8 ч 30 мин раньше и через первый кран прошло бы $\frac{3}{4}$ того количества воды, которое на самом деле прошло через второй кран. За сколько часов каждый кран, действуя отдельно, мог бы наполнить бассейн?

Разные задачи

- 14.55** ○ При смешивании 40%-го раствора соли с 10%-м раствором получили 800 г раствора с концентрацией соли 21,25%. Сколько граммов каждого раствора было для этого взято?
- 14.56** ● Имеются два раствора соли в воде, первый — 40%-й, второй — 60%-й. Их смешали, добавили 5 л воды и получили 20%-й раствор. Если бы вместо 5 л воды добавили 5 л 80%-го раствора соли, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 40%-го и сколько 60%-го раствора?
- 14.57** ● Имеется три слитка. Масса первого равна 5 кг, масса второго 3 кг, и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди. Если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Каким будет процентное содержание меди в сплаве из всех трёх слитков?
- 14.58** ○ Один сплав меди с оловом содержит эти металлы в отношении 2 : 3, другой — в отношении 3 : 7. В каком количестве надо взять эти сплавы, чтобы получить 12 кг нового сплава, в котором медь и олово были бы в отношении 3 : 5?
- 14.59** ○ В январе 2014 г. на счёт в банке была положена некоторая сумма денег. В конце 2014 г. проценты по вкладу составили 2000 р. Добавив в январе 2015 г. на свой счёт ещё 18 000 р., вкладчик пришёл в банк закрыть счёт в декабре 2015 г. и получил 44 000 р. Какая сумма была положена на счёт первоначально и сколько процентов в год начисляет банк?
- 14.60** ● У старшего брата было вдвое больше денег, чем у младшего. Они положили свои деньги на год на счета в разные банки, причём младший брат нашёл банк, который даёт на 5% годовых больше, чем банк, в который обратился старший брат. Сняв свои деньги со счетов через год, старший брат получил 42 000 р., а младший — 22 000 р. Сколько денег было бы у братьев в сумме, если бы они с самого начала поменяли банки?
- 14.61** ● Торговая фирма получила две партии некоторого товара. Если продавать весь товар по цене 80 р. за 1 кг, то выручка от продаж будет на 15% ниже выручки, которую фирма получила бы, продав первую партию по названной цене, а вторую — по цене, превышающей её на 25%. Какую часть (по массе) составляет первая партия товара в общем количестве товара этих двух партий?

3 ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

ГЛАВА

§ 15

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Прочитайте п. 1 в § 15 учебника.

123

Найдите область определения функции*:

15.1

а) $y = x^2$;

б) $y = \sqrt{x}$;

в) $y = \frac{1}{x}$;

г) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

15.2

а) $y = x^2 + 8$;

в) $y = x^2 + 2x - 4$;

б) $y = \frac{4x-1}{5}$;

г) $y = x^3 - x^2 + 3x + 1$.

15.3

а) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$;

в) $y = \frac{3x}{x^2 - 2x + 5}$;

б) $y = \frac{6x+3}{2x^2+0,5}$;

г) $y = \frac{-5}{x^4 + x^2 + 1}$.

* В таких заданиях речь идёт об отыскании *естественной* области определения функции.

15.4 а) $y = \frac{1}{x-7};$

в) $y = \frac{10}{3+x};$

б) $y = \frac{4}{4x+1};$

г) $y = \frac{6}{8+5x}.$

15.5 а) $y = \frac{2}{(x-2)^2};$

в) $y = \frac{1-5x}{(3-x)^2};$

б) $y = \frac{3x}{(2x+1)^2};$

г) $y = \frac{1}{(2+3x)^2}.$

15.6 а) $y = \frac{2x+1}{x(x+1)};$

в) $y = \frac{10x^2}{x(7-x)};$

б) $y = \frac{3+x^2}{x^2(x-5)};$

г) $y = \frac{8-3x}{x^2(6+x)}.$

15.7 а) $y = \frac{10x}{(x-1)(x+2)};$

в) $y = \frac{x}{(x+12)(6x-3)};$

б) $y = \frac{12-5x}{(x+50)(2x+7)};$

г) $y = \frac{19x-12}{(5x-4)(x-13)}.$

15.8 а) $y = \frac{x^2-4x-3}{x^2-5x+4};$

в) $y = \frac{x-1}{x^2+2x+3};$

б) $y = \frac{x+3}{2x^2-9x+7};$

г) $y = \frac{2x^2-5x+2}{3x^2-x+10}.$

15.9 а) $y = \sqrt{x-3};$

в) $y = \sqrt{x+4};$

б) $y = \sqrt{11-x};$

г) $y = \sqrt{2-x}.$

15.10 а) $y = \sqrt{x^2+13};$

в) $y = \sqrt{x^2+24};$

б) $y = \sqrt{x^2+x^4};$

г) $y = \sqrt{2x^6+x^2}.$

15.11 а) $y = \sqrt{x^2-9};$

в) $y = \sqrt{x^2-144};$

б) $y = \sqrt{7-x^2};$

г) $y = \sqrt{20-x^2}.$

15.12 а) $y = \sqrt{2x-x^2};$

в) $y = \sqrt{x^2-5x};$

б) $y = \sqrt{\frac{1}{3}x^2-3};$

г) $y = \sqrt{5-\frac{1}{5}x^2}.$

15.13 а) $y = \sqrt{x^2-6x+5};$

в) $y = \sqrt{x^2-5x+6};$

б) $y = \sqrt{-x^2+3x+4};$

г) $y = \sqrt{-2+x+x^2}.$

$$15.14 \quad \text{а) } y = \frac{1}{\sqrt{x-2}};$$

$$\text{в) } y = \frac{5}{\sqrt{x+3}};$$

$$\text{б) } y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}};$$

$$\text{г) } y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}.$$

$$15.15 \quad \text{а) } y = 3x\sqrt{(3x-5)^{-1}};$$

$$\text{в) } y = -\sqrt{(20-5x)^{-1}};$$

$$\text{б) } y = -2x\sqrt{(x^2 - 11x - 12)^{-1}};$$

$$\text{г) } y = \frac{x^2}{4}\sqrt{(-x^2 + 7x - 12)^{-1}}.$$

$$15.16 \quad \text{а) } y = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}};$$

$$\text{в) } y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}};$$

$$\text{б) } y = \frac{\sqrt{4x+6}}{\sqrt{3x+4}};$$

$$\text{г) } y = \frac{\sqrt{5-3x}}{\sqrt{4x+8}}.$$

$$15.17 \quad \text{а) } y = \sqrt{\frac{2-x}{3x+2}};$$

$$\text{в) } y = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}};$$

$$\text{б) } y = \sqrt{\frac{3x+6}{2x+1}};$$

$$\text{г) } y = \sqrt{\frac{5-3x}{2x+8}}.$$

$$15.18 \quad \text{а) } y = \frac{\sqrt{x^2 - 7x - 8}}{x^2 - 2x};$$

$$\text{б) } y = \frac{\sqrt{x^2 - 7x - 8}}{x^2 - 12x}.$$

$$15.19 \quad \text{а) } y = \frac{1 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x+9}};$$

$$\text{в) } y = \frac{x - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x+3}};$$

$$\text{б) } y = \frac{1 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 - \sqrt{x+9}};$$

$$\text{г) } y = \frac{x - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 - \sqrt{x+3}}.$$

$$15.20 \quad \text{Пусть } f(x) = 2 - \sqrt{1-x}; \quad g(x) = \frac{1+2x}{3+x}; \quad p(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}.$$

Найдите область определения функции:

$$\text{а) } y = f(x) + g(x);$$

$$\text{в) } y = p(x) - g(x);$$

$$\text{б) } y = f(x) - p(x);$$

$$\text{г) } y = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

$$15.21 \quad \text{Пусть } f(x) = x^2 - 3x - 4; \quad g(x) = 5x - x^2. \text{ Найдите область определения функции:}$$

$$\text{а) } y = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)};$$

$$\text{в) } y = \sqrt{f(x) \cdot g(x)};$$

$$\text{б) } y = \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}};$$

$$\text{г) } y = \sqrt{x^2 \cdot g(x)}.$$

Придумайте функцию с указанной областью определения:

15.22 ○ а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)$; г) $(-10; +\infty)$.

15.23 ○ а) $(1; 3)$; б) $[-1; 6]$; в) $[0; 3]$; г) $[-5; -2]$.

127

Прочитайте п. 2 в § 15 учебника

Найдите область значений функции, изображённой:

15.24 а) На рис. 16; б) рис. 17; в) рис. 18; г) рис. 19.

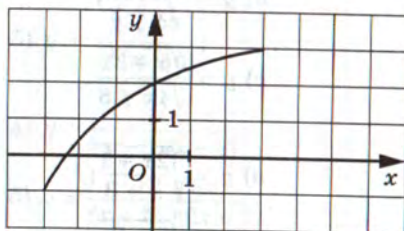


Рис. 16

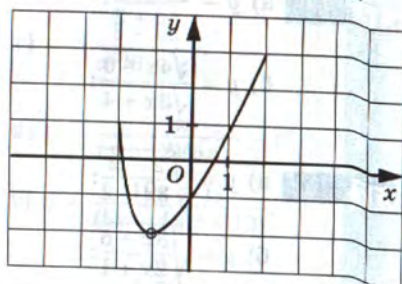


Рис. 17

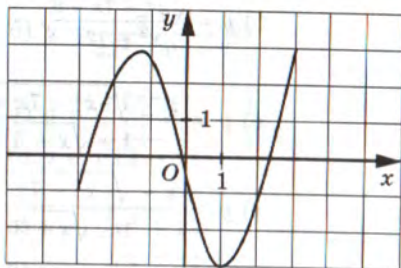


Рис. 18

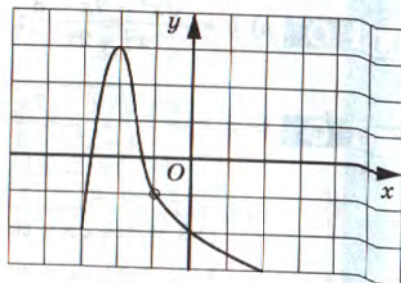


Рис. 19

15.25 а) На рис. 20; б) рис. 21; в) рис. 22; г) рис. 23.

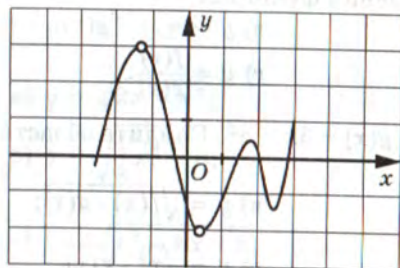


Рис. 20

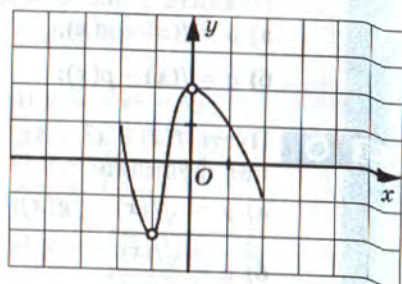


Рис. 21

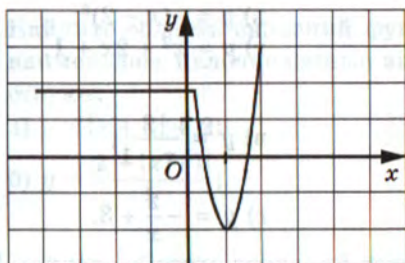


Рис. 22

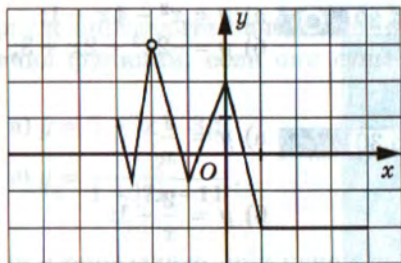


Рис. 23

15.26

а) На рис. 24; б) рис. 25; в) рис. 26; г) рис. 27.

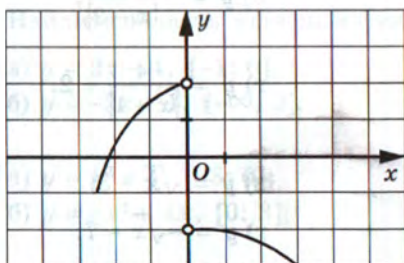


Рис. 24

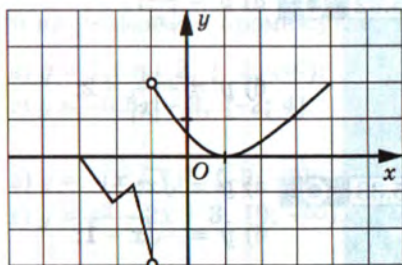


Рис. 25

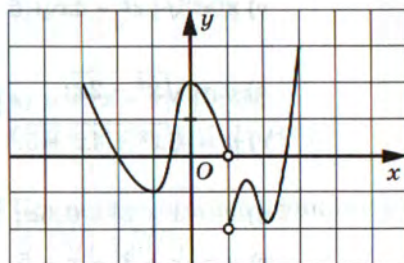


Рис. 26

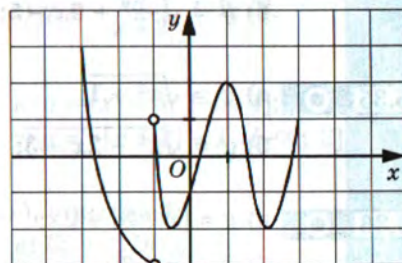


Рис. 27

Найдите область значений функции:

15.27

а) $y = x + 5$;

в) $y = -2x - 1$;

б) $y = \frac{3x + 2}{4}$;

г) $y = -\frac{x}{2}$.

15.28

а) $y = x^2$;

в) $y = -2x^2$;

б) $y = x^2 - 3$;

г) $y = -2x^2 + 4$.

15.29 ○ а) $y = x^2 - 4x + 1$;
б) $y = -2x^2 + 2x + 3$;

в) $y = -(x - 2)^2$;
г) $y = x^2 + 2x + 1$.

15.30 а) $y = \frac{2}{x}$;
б) $y = \frac{2}{x} - 1$;

в) $y = \frac{2}{x - 1}$;
г) $y = -\frac{2}{x} + 3$.

15.31 ○ а) $y = |x|$;
б) $y = -|x + 1|$;

в) $y = -|x| + 3$;
г) $y = |x - 2| - 1$.

15.32 ○ а) $y = \frac{4}{|x|}$;
б) $y = -\frac{4}{|x|} - 2$;

в) $y = -\frac{4}{|x - 2|}$;
г) $y = \frac{4}{|x + 1|} - 2$.

15.33 ○ а) $y = \sqrt{x}$;
б) $y = -\sqrt{x - 1}$;

в) $y = \sqrt{x} + 3$;
г) $y = -\sqrt{x} - 7$.

15.34 ○ а) $y = \sqrt{4 - x^2}$;
б) $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$;

в) $y = \sqrt{9 - x^2}$;
г) $y = \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$.

15.35 ○ а) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;
б) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$;
г) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

15.36 ○ а) $y = |x + 3| + 2x$;
б) $y = |x + 3| - x$;

в) $y = |x + 3| + 0,5x$;
г) $y = |x + 3| + x - 5$.

15.37 ○ а) $y = \frac{1}{x^2 + 4}$;
б) $y = \frac{1}{2x - x^2 - 7}$;

в) $y = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 4}$;
г) $y = \frac{x^2 - 2x + 8}{2x - x^2 - 7}$.

15.38 ● а) $y = 5 - \sqrt{x^2 - 6x + 10}$;
б) $y = 5 - 4\sqrt{16 - x^2}$;

в) $y = 5 - 3\sqrt{x^2 + 8x + 41}$;
г) $y = 5 + 2\sqrt{3 - 2x - x^2}$.

- 15.40** ○ Найдите область значений функции и определите наибольшее и наименьшее целочисленные значения функции, если они существуют:

а) $y = |x + 3| + 2$;

в) $y = 5 - |x + 3|$;

б) $y = \frac{2 - |x - 1|}{5}$;

г) $y = \frac{2}{1 + |7x - 11|}$.

- 15.41** ○ Найдите область значений функции и определите, при каком целом значении x значение функции наиболее близко к числу a , если:

а) $y = \sqrt{x}$, $a = 3,1$;

б) $y = 2 - 3\sqrt{x}$, $a = -2,35$.

Найдите область значений функции на указанном промежутке:

15.42 а) $y = 2x - 4$, $[-1; 0]$;

в) $y = 1,5x + 2$, $[-2; +\infty)$;

б) $y = -2x + 1$, $(-\infty; 0]$;

г) $y = -0,5x - 3$, $[-2; 4]$.

15.43 а) $y = x^2 + 1$, $[-3; 0]$;

в) $y = -(x + 1)^2$, $[-3; -2]$;

б) $y = -x^2 + 4x$, $[0; 3]$;

г) $y = x^2 - 2x + 3$, $[0; +\infty)$.

15.44 а) $y = \frac{3}{x}$, $[1; 6]$;

в) $y = \frac{3}{x - 1}$, $[-2; 0]$;

б) $y = -\frac{6}{x}$, $[-3; 0]$;

г) $y = -\frac{6}{x + 2}$, $(-2; 0]$.

15.45 а) $y = |x - 4|$, $[0; 3]$;

в) $y = |x| - 3$, $[-3; 4]$;

б) $y = -|x| + 4$, $[-1; +\infty)$;

г) $y = -|x - 2| - 1$, $(-\infty; 2]$.

- 15.46** ○ Приведите пример функции $y = f(x)$, у которой:

а) $D(f) = E(f)$;

в) $E(f) \subset D(f)$;

б) $D(f) \subset E(f)$;

г) $D(f) \not\subset E(f)$ и $E(f) \not\subset D(f)$.

- 15.47** ○ Начертите график какой-либо функции $y = f(x)$, для которой:

а) $D(f) = [-2; 4]$, $E(f) = [-3; 3]$;

в) $D(f) = (0; 7)$, $E(f) = [-1; 6]$;

б) $D(f) = (-5; 3)$, $E(f) = [2; 6]$;

г) $D(f) = [-4; 0]$, $E(f) = [1; 4]$.

- 15.48** ○ Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите область значений функции:

а) $y = f(x + 2)$;

в) $y = -f(x - 2)$;

б) $y = 2 + f(x)$;

г) $y = 2 - f(x - 2)$.

15.48 ○ Пусть область значений функции $y = f(x - 7)$ есть отрезок $[-1; 10]$.
Найдите область значений функции:

а) $y = f(x)$;

в) $y = 2 + 3f(x)$;

б) $y = 3f(x)$;

г) $y = -f(x - 2)$.

15.49 ○ Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$.
Найдите область значений функции:

а) $y = \frac{3 + 4f(x)}{5}$;

б) $y = \frac{8 - 3f(x)}{7}$.

15.50 ● Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$.
Найдите все целочисленные значения функции:

а) $y = \frac{7}{5 + f(x)}$;

в) $y = \frac{8 + f(x)}{7 + f(x)}$;

б) $y = \frac{15}{7 - f(x)}$;

г) $y = \frac{f(x)}{6 - f(x)}$.

15.51 ○ Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$.
Найдите область значений функции:

а) $y = (f(x))^2$;

в) $y = |f(x)|$;

б) $y = (f(x))^3$;

г) $y = \sqrt{4 + f(x)}$.

15.52 ● Найдите область значений функции:

а) $y = x^2 - 6x + 2|x| - 8$;

в) $y = x^2 - 6|x| + 2x - 8$;

б) $y = |x|(x - 6) - 2$;

г) $y = x|x - 6| - 2$.

15.53 ○ Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x \leq -1; \\ x - 1, & \text{если } -1 < x \leq 3. \end{cases}$

а) Укажите $D(f)$.

б) Вычислите: $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(7)$.

в) Постройте график функции.

г) Найдите $E(f)$.

15.54 ○ Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{если } x < 0; \\ -3x^2 + 6x - 4, & \text{если } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

а) Укажите $D(f)$.

б) Вычислите: $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(5)$.

в) Постройте график функции.

г) Найдите $E(f)$.

15.55

Является ли корректным задание построить график функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 1; \\ x + 1, & \text{если } 0 < x < 3; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } 0 \leq x \leq 4; \\ x^2, & \text{если } x \geq 4; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 0; \\ x + 1, & \text{если } 1 \leq x \leq 3; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } 0 \leq x \leq 4; \\ \frac{x^2}{8}, & \text{если } x \geq 4; \end{cases}$

15.56

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0; \\ x^2, & \text{если } 0 < x < 2; \\ 4, & \text{если } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$

а) Укажите $D(f)$.

б) Вычислите: $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$.

в) Постройте график функции.

г) Найдите $E(f)$.

15.57

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x + 1, & \text{если } x \leq 2; \\ -3(x - 2)^2 + 1, & \text{если } 2 < x \leq 3. \end{cases}$

а) Укажите $D(f)$.

б) Вычислите: $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$.

в) Постройте график функции.

г) Найдите $E(f)$.

15.58

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } -3 \leq x \leq 0; \\ x^2 - 4x + 1, & \text{если } 0 < x \leq 2; \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

а) Укажите $D(f)$.

б) Вычислите: $f(-5)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$.

в) Постройте график функции.

г) Найдите $E(f)$.

15.59

а) При каких значениях параметра a функция $y = 3 - \sqrt{x - a}$ определена во всех точках промежутка $[-11; 7]$?

б) При каких значениях параметра a функция $y = 3 - \sqrt{x-3}$ определена во всех точках промежутка $[a-1; a+1]$?

15.60 ○ Найдите область определения функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{ax-4}$.

§ 16 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

132

Прочитайте п. 1 в § 16 учебника.

Является ли графическим заданием какой-либо функции фигура, изображённая:

16.1 а) На рис. 28; б) рис. 29; в) рис. 30; г) рис. 31?

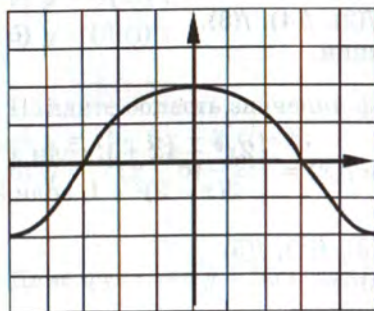


Рис. 28

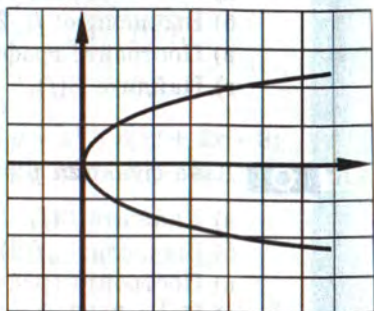


Рис. 29

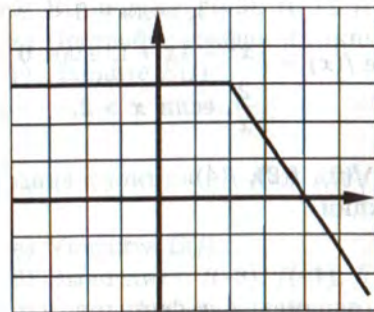


Рис. 30

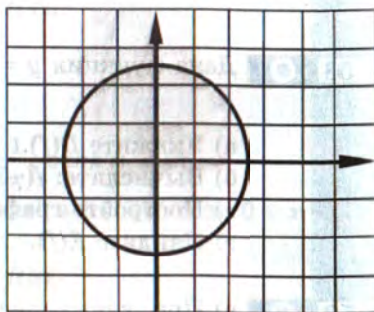


Рис. 31

а) На рис. 32;

б) рис. 33;

в) рис. 34;

г) рис. 35?

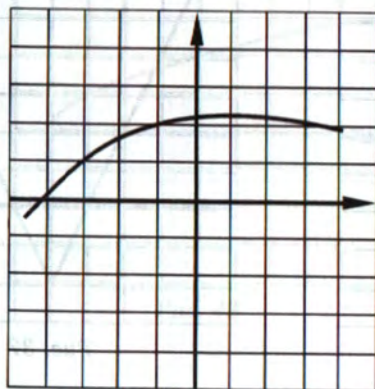


Рис. 32

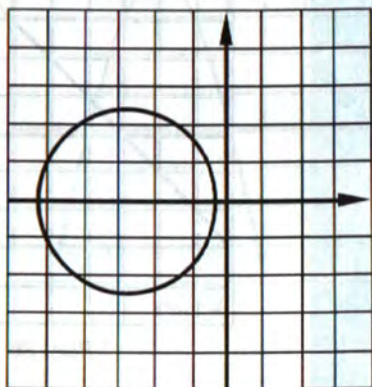


Рис. 33

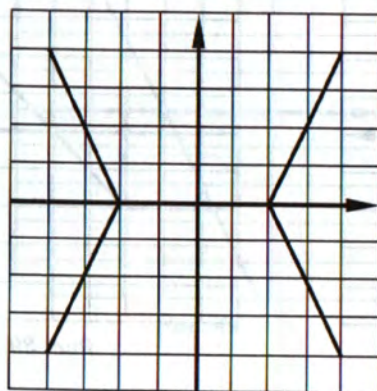


Рис. 34

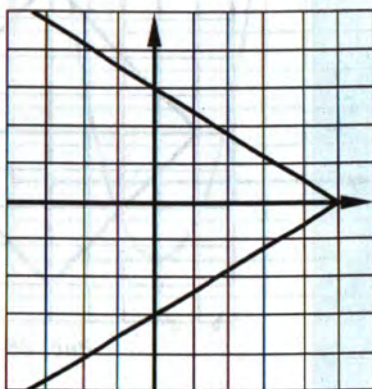


Рис. 35

Является ли графиком какой-либо функции линия, изображённая на заданном рисунке? Если да, то задайте эту функцию аналитически (придумайте возможный вариант), учитывая, что на рис. 36—51 изображены прямые, параболы (или ветви парабол) и гиперболы.

10.3

а) Рис. 36;

б) рис. 37;

в) рис. 38;

г) рис. 39.

10.4

а) Рис. 40;

б) рис. 41;

в) рис. 42;

г) рис. 43.

10.5

а) Рис. 44;

б) рис. 45;

в) рис. 46;

г) рис. 47.

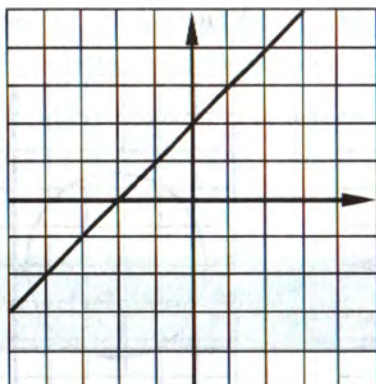


Рис. 36

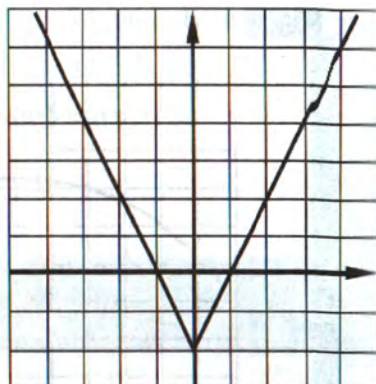


Рис. 37

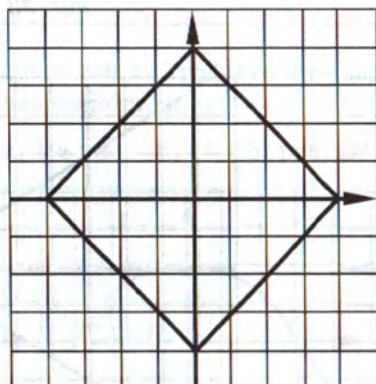


Рис. 38

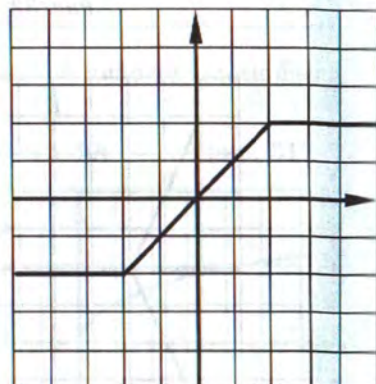


Рис. 39

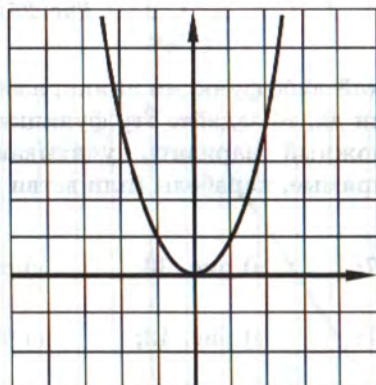


Рис. 40

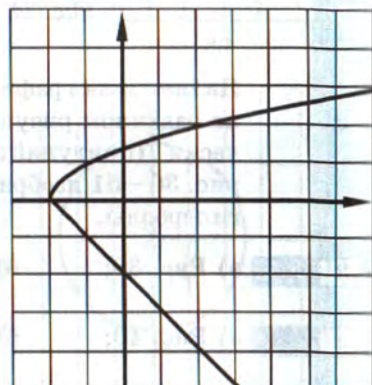


Рис. 41

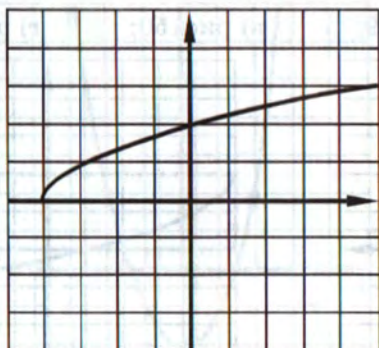


Рис. 42

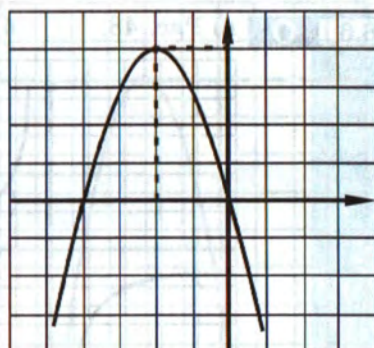


Рис. 43

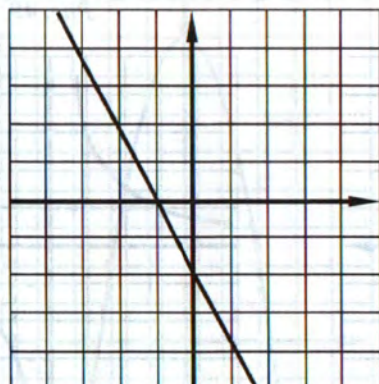


Рис. 44

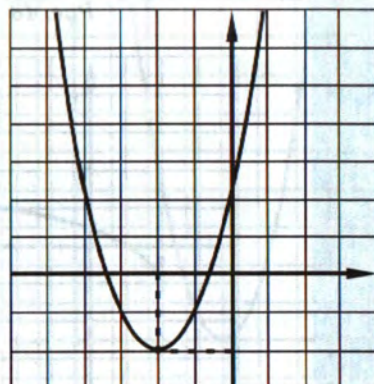


Рис. 45

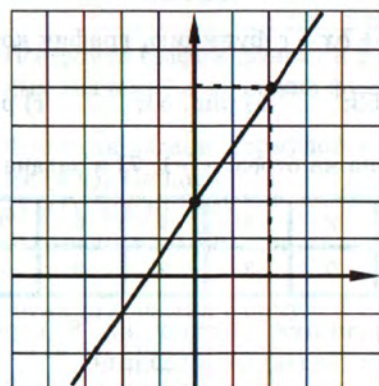


Рис. 46

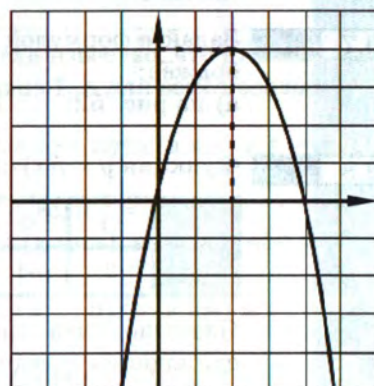


Рис. 47

- 16.6 ○ а) Рис. 48; б) рис. 49; в) рис. 50; г) рис. 51.

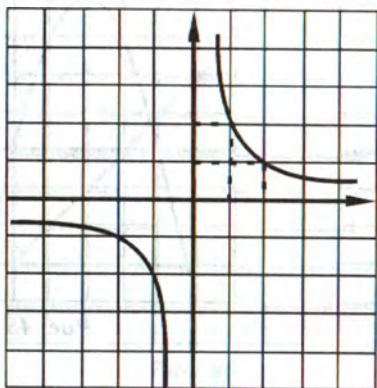


Рис. 48

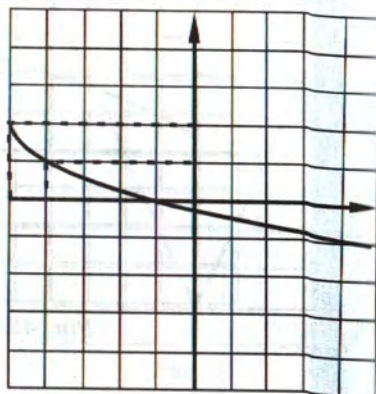


Рис. 49

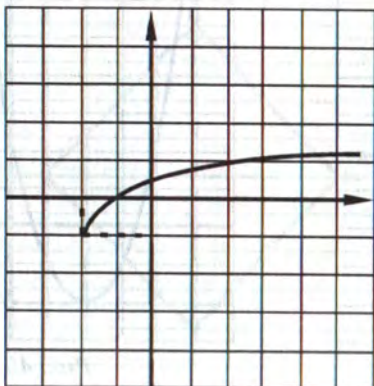


Рис. 50

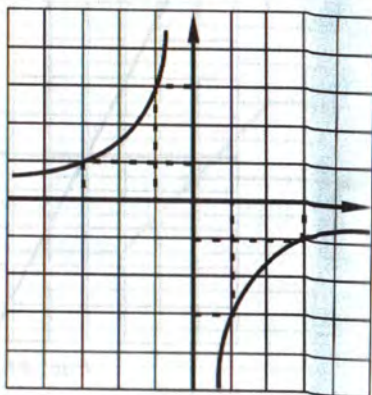


Рис. 51

- 16.7 Задайте формулой $y = ax^2 + bx + c$ функцию, график которой изображён:

- а) на рис. 52; б) рис. 53; в) рис. 54; г) рис. 55.

- 16.8 Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-1; 7]$ и задана таблицей:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	2	-1	5	0	3	2	2	-5	-6

Известно, что график функции состоит из 8 отрезков, соединяющих соседние точки, заданные в таблице.

- а) Постройте график функции.
б) Найдите множество значений данной функции.

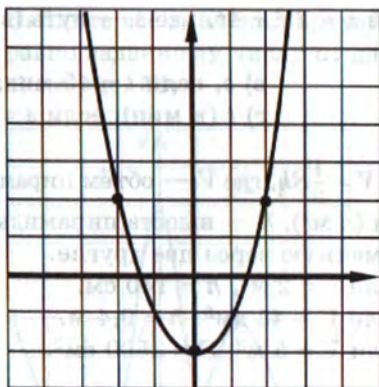


Рис. 52

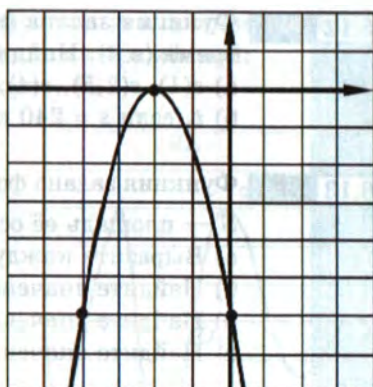


Рис. 53

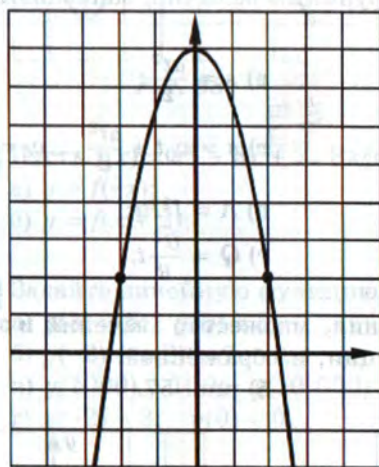


Рис. 54

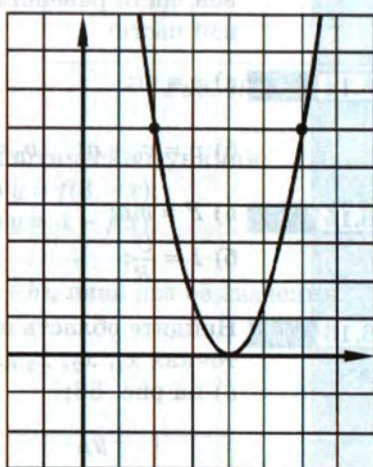


Рис. 55

10.9 Постройте график функции $y = f(x)$, если известно, что для всех целых значений x значение функции равно 1, а для всех нецелых -1 .

10.10 Функция задана формулой $s = 90t$, где s — путь (в км) и t — время (в ч). Найдите:

а) $s(1)$, $s(2,5)$, $s(4)$;

в) s , если $t = 15$ мин;

б) t , если $s = 1800$ км;

г) t (в мин), если $s = 450$ м.

10.11 Функция задана формулой $t = \frac{s}{12}$, где s — путь (в км) и t — время (в ч). Найдите:

а) $t(36)$, $t(2,7)$, $t(144)$;

в) t , если $s = 150$ м;

б) s , если $t = 4,5$ ч;

г) s (в м), если $t = 45$ с.

16.12 Функция задана формулой $s = 2t^2 + 4t$, где s — путь (в км) и t — время (в ч). Найдите:

а) $s(1)$, $s(2,5)$, $s(4)$;

б) t , если $s = 240$ км;

в) s , если $t = 45$ мин;

г) t (в мин), если $s = 645$ м.

16.13 Функция задана формулой $V = \frac{1}{3}Sh$, где V — объём пирамиды (в м³), S — площадь её основания (в м²), h — высота пирамиды (в м).

а) Выразите каждую переменную через две другие.

б) Найдите значение V , если $s = 2$ м², $h = 140$ см.

в) Найдите значение S , если $V = 45$ дм³, $h = 0,4$ м.

г) Найдите значение h , если $V = 5$ м³, $S = 2500$ см².

Выразите, если это возможно, каждую величину, стоящую в правой части равенства, как функцию величин, записанных в его левой части:

16.14 а) $s = vt$;

в) $s = \frac{at^2}{2}$;

б) $v = v_0 + at$, $v_0 = \text{const}$;

г) $s = v_0t + \frac{at^2}{2}$, $v_0 = \text{const}$.

16.15 а) $F = ma$;

в) $A = I^2Rt$;

б) $I = \frac{U}{R}$;

г) $Q = \frac{U^2}{R}t$.

16.16 Найдите область определения, множество значений и значения в точках x_1 , x_2 , x_3 для функции, изображённой:

а) на рис. 56;

б) рис. 57.

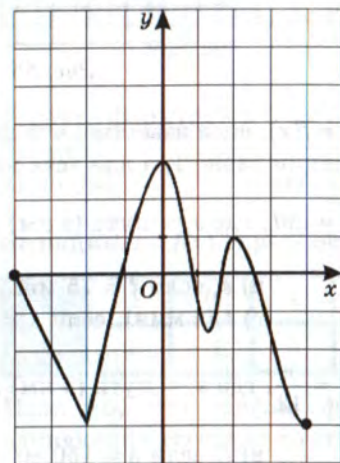


Рис. 56

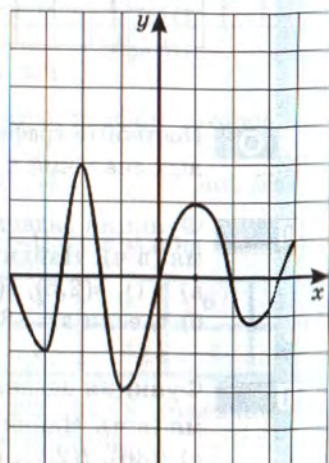


Рис. 57

Найдите все значения аргумента, при которых значение функции равно заданному числу a , для функции, изображённой:

а) на рис. 58;

б) рис. 59.

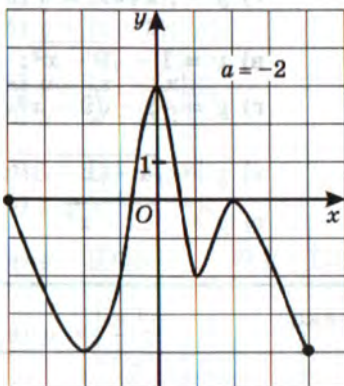


Рис. 58

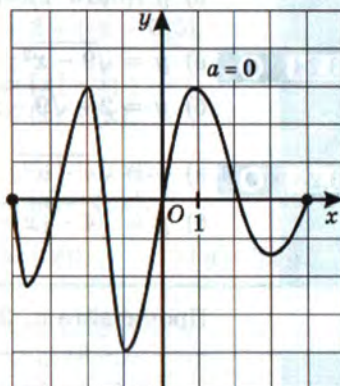


Рис. 59

Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Задайте аналитически функции:

а) $y = f(-x)$;

в) $y = f(3 - x)$;

б) $y = f(x + 2)$;

г) $y = 4 - f(x)$.

Задайте линейную функцию ($y = kx + b$), зная два её значения:

а) $y(3) = 5$; $y(5) = 3$;

б) $y(-2) = y(2) = 7$;

в) $y(1000) = 100$; $y(10\,000) = 1000$;

г) $y(-2) = 3$; $y(0) = 0$.

Задайте (если это возможно) квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), зная три её значения:

а) $y(3) = 31$; $y(-1) = 3$; $y(0) = 1$;

в) $y(-4) = y(4) = 5$; $y(1) = 20$;

б) $y(-2) = y(2) = 7$; $y(1) = 5$;

г) $y(-2) = -2$; $y(2) = 2$; $y(1) = 1$.

Пусть для любых значений аргумента функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию $f(x) + 10f(3 - x) = 11$. Найдите:

а) $f(1,5)$;

б) $f(3)$;

в) $f(x)$.

Пусть для любых значений аргумента, отличных от нуля, функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию $f(x) + 2f\left(\frac{4}{x}\right) = x - \frac{5}{x}$. Найдите:

а) $f(2)$;

б) $f(-2)$;

в) $f(1)$;

г) $f(x)$.

Постройте график функции:

- | | | |
|----------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 16.23 ○ | а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; | в) $y = 0,5\sqrt{1 - 4x^2}$; |
| | б) $y = \sqrt{16 - x^2}$; | г) $y = -2\sqrt{9 - x^2}$. |
| 16.24 ○ | а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; | в) $y = 1 - \sqrt{9 - x^2}$; |
| | б) $y = 2 + \sqrt{9 - x^2}$; | г) $y = -1 - \sqrt{9 - x^2}$. |
| 16.25 ○ | а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; | в) $y = \sqrt{4 - (x + 3)^2}$; |
| | б) $y = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$; | г) $y = \sqrt{4x - x^2}$. |

136

Прочитайте п. 2 в § 16 учебника

- 16.26** ○ Вершина A треугольника ABC лежит на параболе $y = x^2 - 2x + 2$, $B(0; 1)$, $C(0; 2)$. Задайте площадь треугольника ABC как функцию $S(x)$ абсциссы x точки A и определите, для каких точек площадь треугольника равна 2.
- 16.27** ○ Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех натуральных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие целая часть квадратного корня из числа x . Найдите:
а) $f(1)$; б) $f(8)$; в) $f(15)$; г) $f(22)$.
- 16.28** ○ Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех целых чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие цифра единиц квадрата числа x . Найдите:
а) $f(73)$; б) $f(-6)$; в) $f(-3)$; г) $f(12)$.
- 16.29** ○ Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех целых чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие цифра единиц квадрата числа x . Найдите область значений этой функции.

Постройте график функции*:

- | | | |
|----------------|--------------------|-----------------------------|
| 16.30 ● | а) $y = [x]$; | в) $y = 5 - [x]$; |
| | б) $y = [x] - 3$; | г) $y = 0,5 + [-x]$. |
| 16.31 ● | а) $y = [x - 1]$; | в) $y = [x + 0,5]$; |
| | б) $y = [x + 3]$; | г) $y = 0,5 + [-x - 0,3]$. |

* $[x]$ — целая часть числа x , $\{x\}$ — дробная часть числа x .

- 10.32 Д а) $y = \{x\}$; в) $y = 3 - \{x\}$;
 б) $y = \{x\} - 2$; г) $y = 2,5 + \{-x\}$.
- 10.33 Д а) $y = \{x - 1\}$; в) $y = \{x - 0,5\}$;
 б) $y = \{x + 3\}$; г) $y = 2 + \{-x - 0,5\}$.
- 10.34 Д а) $y = [x] + \{x\}$; в) $y = [x] - x$;
 б) $y = x - \{x\}$; г) $y = \{x\} - [x]$.
- 10.35 Д а) $y = [x] + [-x]$; в) $y = \{x\} + \{-x\}$;
 б) $y = [x] - [-x]$; г) $y = \{x\} - \{-x\}$.
- 10.36 Д а) $y = [[x]]$; б) $y = [\{x\}]$; в) $y = \{\{x\}\}$; г) $y = \{\{x\}\}$.
- 10.37 Д а) $y = \left[\frac{x}{5}\right]$; в) $y = \left[\frac{x+5}{2}\right]$;
 б) $y = \{5x\}$; г) $y = \left\{\frac{4-x}{2}\right\}$.
- 10.38 Д а) $y = \sqrt{[x]}$; в) $y = \sqrt{1 - [x]^2}$;
 б) $y = [\sqrt{x}]$; г) $y = \sqrt{1 - \{x\}^2}$.

10.39 ● Решите уравнение:

а) $x = [x]$; б) $x = \{x\}$; в) $[x] = \{x\}$; г) $\left[\frac{x}{2}\right] = x - 1$.

10.40 ○ Найдите значения функции Дирихле:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число;} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$$

при следующих значениях x : 0; 0,5; 0,7(14); π ; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{48}}{\sqrt{12}}$.

10.41 ○ Функция Римана определена на отрезке $[0; 1]$ следующим образом:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \text{ — рациональное число и выражается} \\ & \text{несократимой дробью } \frac{m}{n}; \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Найдите значение функции при следующих значениях x :

0; 0,5; 0,(3); 0,(6); 0,(72); 0,7(14); 0,0(012); $\frac{1}{\pi}$; $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5} + \sqrt{80}}$.

- 16.42** ○ Для функции Римана $y = R(x)$ (см. задачу 16.41) найдите все значения x , при которых $R(x) = 0,25$.
- 16.43** ○ Пусть для любого натурального числа n число $\pi(n)$ равно количеству простых чисел, не превосходящих натуральное число n .
- а) Найдите значение $\pi(n)$ для следующих значений n :
1; 2; 3; 4; 5; 29.
- б) Найдите все такие натуральные числа n , для которых выполнено неравенство $1 < \pi(n) < 7$.
- 16.44** ○ Пусть для любого натурального числа n число $\varphi(n)$ равно количеству чисел ряда 1; 2; 3; ...; $n - 1$, взаимно простых с n .
- а) Найдите значение функции $y = \varphi(n)$ для следующих значений n : 1; 2; 3; 4; 5; 29; 50.
- б) Проверьте, что $\varphi(24) = \varphi(3) \cdot \varphi(8)$. (Функцию $y = \varphi(n)$ называют функцией Эйлера.)

§17

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Монотонность

140

Прочитайте п. 1 в § 17 учебника

17.1 Определите промежутки монотонности функции, изображённой:

- а) на рис. 60; б) рис. 61; в) рис. 62; г) рис. 63.

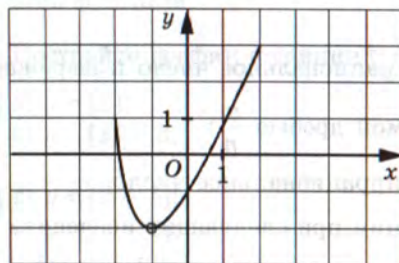


Рис. 60

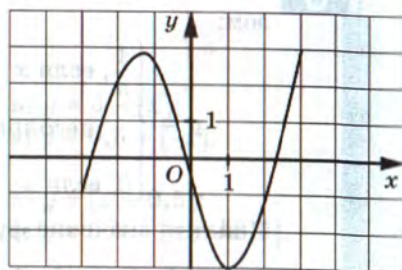


Рис. 61

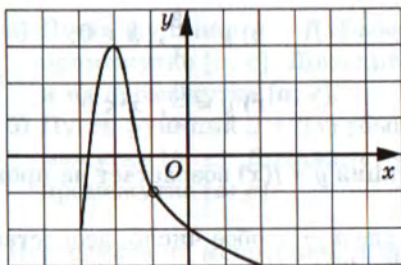


Рис. 62

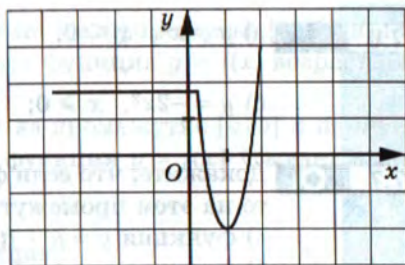


Рис. 63

17.2

Постройте график какой-либо непрерывной функции, заданной на промежутке так, что:

- а) на отрезке $[-5; -3]$ функция убывает, на отрезке $[-3; 0]$ возрастает, на отрезке $[0; 7]$ убывает и проходит через точки:

x	-5	-4	-3	-2	0	3	7
y	4	1	0	8	12	0	-5

- б) на отрезке $[-10; -2]$ функция постоянна, на отрезке $[-2; 1]$ убывает, на отрезке $[1; 8]$ постоянна и проходит через точки:

x	-9	-1	0	6
y	5	4	-1	-5

Используя свойства числовых неравенств, докажите, что заданная функция возрастает:

17.3

а) $y = 2x - 3$;

в) $y = \frac{x}{2} + 4$;

б) $y = x^3 + 1$;

г) $y = 2x^3$.

17.4

а) $y = x^2, x \geq 0$;

в) $y = -\frac{1}{x}, x > 0$;

б) $y = -\frac{1}{x}, x < 0$;

г) $y = -3x^2, x \leq 0$.

Используя свойства числовых неравенств, докажите, что заданная функция убывает:

17.5

а) $y = 5 - 2x$;

в) $y = 4 - \frac{x}{3}$;

б) $y = -3x^3$;

г) $y = -\frac{x^3}{5}$.

17.6

а) $y = x^2, x \leq 0$;

в) $y = \frac{3}{x}, x > 0$;

б) $y = -2x^2, x \geq 0$;

г) $y = \frac{3}{x}, x < 0$.

17.7



Докажите, что если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке I , то на этом промежутке:

а) функция $y = a + f(x)$, где a — любое число, возрастает;б) функция $y = k \cdot f(x)$ ($k > 0$) возрастает;в) функция $y = -f(x)$ убывает;г) функция $y = k \cdot f(x)$ ($k < 0$) убывает.

17.8



Докажите, что если функция $y = f(x)$ убывает на промежутке I , то на этом промежутке:

а) функция $y = a + f(x)$ убывает;б) функция $y = k \cdot f(x)$ ($k > 0$) убывает;в) функция $y = -f(x)$ возрастает;г) функция $y = k \cdot f(x)$ ($k < 0$) возрастает.

17.9



Используя доказанные в предыдущих номерах факты, исследуйте на монотонность функции:

а) $y = x^2 + 2$;

в) $y = 2x^3 - 3,7$;

б) $y = 2 + \frac{1}{t}$;

г) $y = 2 - \sqrt{u}$.

17.10



Докажите, что функция:

а) $y = ax^2$ ($a > 0$) убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$;б) $y = a(x - m)^2 + p$ ($a > 0$) убывает на $(-\infty; m]$ и возрастает на $[m; +\infty)$;

в) $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) убывает на $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

17.11



Докажите, что функция:

а) $y = ax^2$ ($a < 0$) возрастает на $(-\infty; 0]$ и убывает на $[0; +\infty)$;б) $y = a(x - m)^2 + p$ ($a < 0$) возрастает на $(-\infty; m]$ и убывает на $[m; +\infty)$;

в) $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) возрастает на $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

- IV.12** ○ а) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[a; b]$ и на промежутке $[b; c]$. Докажите, что функция $y = f(x)$ возрастает и на промежутке $[a; c]$.
 б) Пусть функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $[a; b]$ и на промежутке $[b; c]$. Докажите, что функция $y = f(x)$ убывает и на промежутке $[a; c]$.

IV.13 ○ Исследуйте на монотонность функцию:

$$\text{а) } y = \begin{cases} -x^2 + 10, & x \leq -3; \\ 4 + x, & x > -3; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \leq -1; \\ \sqrt{3-x} - 3, & x > -1. \end{cases}$$

- IV.14** а) Докажите, что если функции $y = g(x)$ и $y = f(x)$ возрастают на одном и том же промежутке I , то и функция $y = g(x) + f(x)$ возрастает на этом промежутке.
 б) Докажите, что если функции $y = g(x)$ и $y = f(x)$ убывают на одном и том же промежутке I , то и функция $y = g(x) + f(x)$ убывает на этом промежутке.

Докажите, что функция возрастает:

$$\text{IV.15 } \begin{array}{ll} \text{○ а) } y = x^3 + 3x; & \text{в) } y = 2x^3 + x; \\ \text{б) } y = x^4 + 3x, \quad x \geq 0; & \text{г) } y = 2x^4 + x, \quad x \geq 0. \end{array}$$

$$\text{IV.16 } \begin{array}{ll} \text{○ а) } y = \frac{x-5}{x+3}, \quad x > -3; & \text{в) } y = \frac{x+3}{1-x}, \quad x > 1; \\ \text{б) } y = \frac{3-2x}{1-x}, \quad x < 1; & \text{г) } y = \frac{6-4x}{2-x}, \quad x < 2. \end{array}$$

IV.17 ○ Докажите, что функция убывает:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = -x^3 - 2x; & \text{в) } y = x^4 - 5x, \quad x \leq 0; \\ \text{б) } y = x^6 - 0,5x, \quad x \leq 0; & \text{г) } y = -3x^5 - x. \end{array}$$

IV.18 ○ Найдите промежутки монотонности функции $y = f(x)$ и сравните $f(a)$ и $f(b)$, если:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = 3,7x^2 - 7,4x - 9, \quad a = 2,9, \quad b = 3,1; \\ \text{б) } f(x) = -4,1x^2 - 16,4x + 3, \quad a = -1,8, \quad b = -1,3; \\ \text{в) } f(x) = 1,9x^2 + 5,7x + 4, \quad a = -5,2, \quad b = -2,2; \\ \text{г) } f(x) = -3,3x^2 + 3,3x, \quad a = 0,55, \quad b = 0,53. \end{array}$$

IV.19 ○ Найдите промежутки монотонности функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = 2x^2 - 3x + 4; & \text{в) } y = \sqrt{1-x}; \\ \text{б) } y = \frac{x+4}{x-2}; & \text{г) } y = \frac{x-4}{x+2}. \end{array}$$

17.20 ○

- а) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на J и принимает на J только положительные значения. Докажите, что функция $y = \frac{1}{f(x)}$ убывает на J .
- б) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на J и принимает на J только отрицательные значения. Докажите, что функция $y = \frac{1}{f(x)}$ возрастает на J .
- в) Пусть функция $y = f(x)$ убывает на J и принимает на J только положительные значения. Докажите, что функция $y = \frac{1}{f(x)}$ возрастает на J .
- г) Пусть функция $y = f(x)$ убывает на J и принимает на J только отрицательные значения. Докажите, что функция $y = \frac{1}{f(x)}$ убывает на J .

Найдите промежутки монотонности функции:

17.21 ○

а) $y = \frac{1}{x^4 + 1}$;

в) $y = \frac{1}{x^3 - 1}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$;

г) $y = \frac{1}{x^2 - 4x - 12}$.

17.22 ○

а) $y = x^2 + 6x + 10$;

в) $y = 1 - \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$;

б) $y = \frac{6}{x^2 + 6x + 10}$;

г) $y = \frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 + 6x + 10}$.

17.23 ○

а) $y = 1 + \sqrt{x + 1}$;

в) $y = \frac{\sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt{x + 1}}$;

б) $y = \frac{2}{1 + \sqrt{x + 1}}$;

г) $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x + 1}}$.

17.24 ○

- а) Докажите, что если функции $y = g(x)$ и $y = f(x)$ возрастают и положительны на одном и том же промежутке I , то и функция $y = g(x) \cdot f(x)$ возрастает на этом же промежутке.
- б) Докажите, что если функции $y = g(x)$ и $y = f(x)$ убывают и положительны на одном и том же промежутке I , то и функция $y = g(x) \cdot f(x)$ убывает на этом же промежутке.

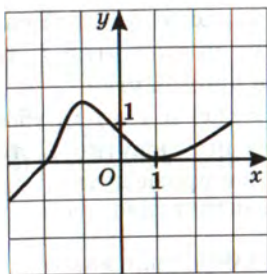


Рис. 66

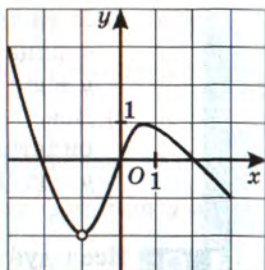


Рис. 67

17.29

Найдите промежутки монотонности функции $y = \frac{1}{f(x)}$, если график функции $y = f(x)$ изображён:

а) на рис. 68; б) рис. 69; в) рис. 70; г) рис. 71.

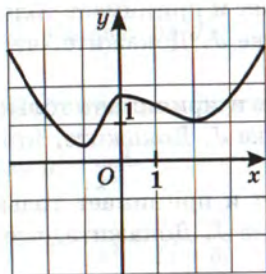


Рис. 68

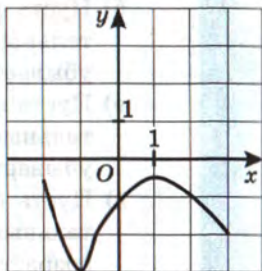


Рис. 69

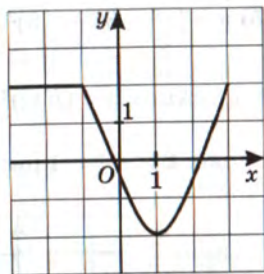


Рис. 70

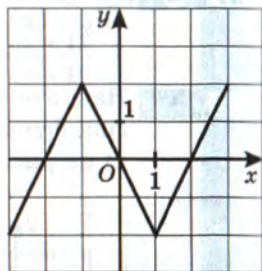


Рис. 71

17.30



а) Докажите, что если функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$ и для некоторого числа c из промежутка $(a; b)$ значение функции $f(c) = C$, то: 1) для всех x из промежутка $[a; c)$ верно неравенство $f(x) < C$; 2) для всех x из промежутка $(c; b]$ верно неравенство $f(x) > C$.

б) Докажите, что если функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$ и для некоторого числа c из промежутка $(a; b)$ значение функции $f(c) = C$, то: 1) для всех x из промежутка $[a; c)$ верно неравенство $f(x) > C$; 2) для всех x из промежутка $(c; b]$ верно неравенство $f(x) < C$.

17.31 ○ а) Докажите, что если функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$ и уравнение $f(x) = m$ имеет на этом отрезке корень x_0 , то других корней на этом отрезке уравнение $f(x) = m$ не имеет.

б) Докажите, что если функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$ и уравнение $f(x) = m$ имеет на этом отрезке корень x_0 , то других корней на этом отрезке уравнение $f(x) = m$ не имеет.

17.32 ○ Докажите, что если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке J , а функция $y = g(x)$ убывает на промежутке J , то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на J не более одного корня.

17.33 ○ Решите уравнение, используя свойство монотонности:

а) $x^3 + 5x = 18$;

в) $x^3 + 3x = 5\sqrt{2}$;

б) $x^2 + \sqrt{x} = 9 + \sqrt{3}$;

г) $\frac{1}{x} - 3x = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

17.34 ○ Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 23 - 2x$;

в) $\frac{17}{x^2 + 1} = 32\sqrt{x}$;

б) $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 43 - 6x - x^2$;

г) $(x^2 + 4x + 9)\sqrt{4x+1} = 9$.

Ограниченность

Прочитайте п. 1 в § 17 учебника.

140

Для данной функции установите, является ли она ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной:

17.35 а) $y = 7x + 2$;

в) $y = 4x + 1, x > 0$;

б) $y = -3x + 1, x < 0$;

г) $y = -2x + 5, 0 \leq x \leq 5$.

17.36 а) $y = x^2$;

в) $y = \sqrt{x}$;

б) $y = \frac{1}{x}, x > 0$;

г) $y = |x|, -4 \leq x \leq 8$.

17.37 а) $y = -x^2 + 4x - 5, x \geq 0$;

в) $y = 2x^2 - 6x + 3, x \geq 0$;

б) $y = x^2 - 4x + 1, x \leq 0$;

г) $y = -3x^2 + 6x + 2, x \leq 0$.

17.38 ○ Докажите ограниченность функции:

а) $y = \sqrt{15 - x^2}$;

б) $y = -\sqrt{16 - x^4}$.

17.39 ○ Исследуйте функцию на ограниченность:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$;

в) $y = \sqrt{3 - x^2 - 2x}$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$;

г) $y = \frac{-1}{\sqrt{3 - x^2 - 2x}}$.

Наибольшее и наименьшее значения

143

Прочитайте п. 2 в § 17 учебника

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

17.40

а) $y = 2x + 3$, $x \in [0; 1]$;

в) $y = -4x + 1$, $x \in (-\infty; 0]$;

б) $y = -2x^2$, $x \in [-1; 1]$;

г) $y = \frac{1}{2}x^2$, $x \in (0; 2]$.

17.41

$y = \sqrt{x}$, если:

а) $x \in [0; +\infty)$;

в) $x \in [1; 4]$;

б) $x \in [0; 3]$;

г) $x \in (0; 2]$.

17.42

а) $y = \sqrt{x - 4}$;

в) $y = \sqrt{x} + 2$;

б) $y = 3 - \sqrt{x}$;

г) $y = 4 - \sqrt{x}$.

17.43

а) $y = x^2 + 4x - 3$;

в) $y = 9x^2 + 6x - 5$;

б) $y = -4x^2 - 12x + 1$;

г) $y = -x^2 + 8x - 12$.

17.44

а) $y = |x| + 3$, $x \in [-5; 1]$;

в) $y = -|2x| - 1$, $x \in [-1; 1]$;

б) $y = -|4x| + 1$, $x \in (-6; 2]$;

г) $y = |x| + 3$, $x \in [-5; 1]$.

17.45

а) Докажите, что если функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, то наименьшее значение функции на этом отрезке равно $f(a)$, а наибольшее равно $f(b)$.

б) Докажите, что если функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$, то наименьшее значение функции на этом отрезке равно $f(b)$, а наибольшее равно $f(a)$.

17.46

а) Докажите, что если функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$ и убывает на отрезке $[b; c]$, то своего наибольшего значения на отрезке $[a; c]$ функция достигает в точке b .

б) Докажите, что если функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$ и возрастает на отрезке $[b; c]$, то своего наименьшего значения на отрезке $[a; c]$ функция достигает в точке b .

17.47 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 - 4x - 1$$

на данном промежутке:

- а) $[-3; 1]$; б) $[2; 5]$; в) $[-2; 3]$; г) $[0; 5]$.

17.48 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -2x^2 - x$

на данном промежутке:

- а) $[-3; -1]$; б) $[-1; 7]$; в) $[0; 3]$; г) $[-3; 5]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

17.49 а) $y = x^3 + 2x + 3$ на отрезке $[-1; 3]$;

б) $y = \sqrt{10 - x} - x^3 - 2x + 3$ на отрезке $[1; 3]$.

17.50 $y = \frac{1}{a - x}$ на отрезке $[a + 1; a + 4]$.

Для каждого значения параметра a найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

17.51 а) $y = x^2 + 4x + 5a$ на отрезке $[-1; 1]$;

б) $y = -x^2 + 4x - a$ на отрезке $[-1; 3]$.

17.52 а) $y = x^2 - 4x$ на отрезке $[-1; a]$;

б) $y = -x^2 + 2x - 3$ на отрезке $[a; 3]$.

17.53 а) $y = x^2 - 4ax$ на отрезке $[-1; 2]$;

б) $y = -x^2 - 4ax + 7$ на отрезке $[-2; 3]$.

Экстремумы

Прочитайте п. 3 в § 17 учебника.

146

17.54 Назовите точки максимума и минимума функции, график которой изображён:

- а) на рис. 72; б) рис. 73; в) рис. 74; г) рис. 75.

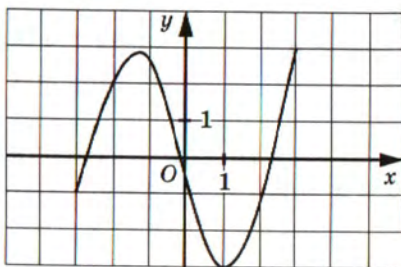


Рис. 72

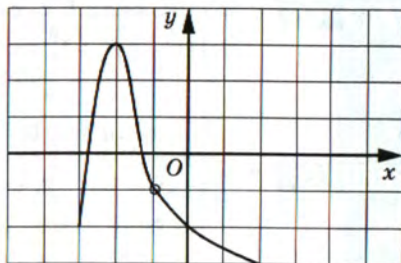


Рис. 73

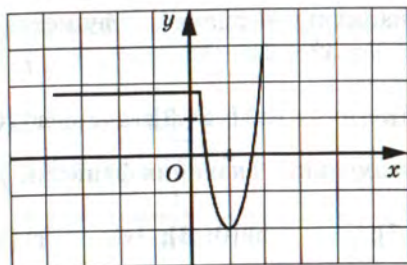


Рис. 74

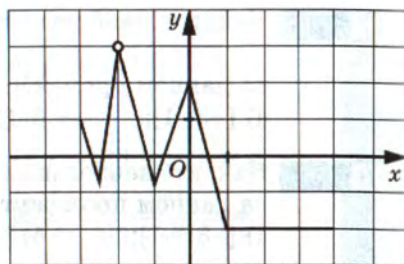


Рис. 75

Постройте и прочитайте график функции, укажите точки экстремума:

17.55 ○ $y = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{если } x < -1; \\ \sqrt{x+1} - 2, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$

17.56 ○ $y = \begin{cases} 4 - 2x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ x + 1, & \text{если } 1 < x \leq 3. \end{cases}$

17.57 ○ Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 2, & \text{если } -2 \leq x \leq 0; \\ x + 2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

- а) Найдите: $f(-3)$; $f(0)$; $f(5)$.
 б) Постройте график функции $y = f(x)$.
 в) Перечислите свойства функции.

17.58 ○ Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } -2 \leq x \leq 0; \\ 2x^2 + 4x - 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

- а) Найдите: $f(-2)$; $f(0)$; $f(5)$.
 б) Постройте график функции $y = f(x)$.
 в) Перечислите свойства функции.

Постройте и прочитайте график функции:

17.59 ○ $y = \begin{cases} 2, & \text{если } -3 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x}, & \text{если } 1 < x \leq 4; \\ (x-5)^2 + 1, & \text{если } 4 < x \leq 6. \end{cases}$

17.60 ○ $y = \begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{если } x < 0; \\ -x^2 + 2x + 2, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ x, & \text{если } 2 < x \leq 4. \end{cases}$

§ 18

ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ФУНКЦИИ

Прочитайте пп. 1 и 2 в § 18 учебника

158

Является ли симметричным заданное множество:

18.1 а) $[-3; 3]$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[-4; 1]$; г) $[0; +\infty)$?

18.2 а) $[-6; 2]$; б) $(-\infty; 4]$; в) $(-12; 12]$; г) $(-\infty; 0)$?

18.3 Докажите, что функция является чётной:

а) $y = 3x^2 + x^4$;

в) $y = 2x^8 - x^6$;

б) $y = 4x^6 - x^2$;

г) $y = 5x^2 + x^{10}$.

18.4 Докажите, что функция является нечётной:

а) $y = x^2(2x - x^3)$;

в) $y = x(5 - x^2)$;

б) $y = \frac{x^4 + 1}{2x^3}$;

г) $y = \frac{3x}{x^6 + 2}$.

18.5 Докажите, что функция $y = x^2 + x$ не является ни чётной, ни нечётной.

Исследуйте на чётность функцию:

18.6 а) $y = x^2$; б) $y = x^7$; в) $y = x^6$; г) $y = x^3$.

18.7 а) $y = |x|$, $x \in [-1; 1]$; в) $y = |x|$, $x \in [-2; 2]$;

б) $y = x^5$, $x \in [-3; 3]$; г) $y = x^5$, $x \in [-4; 4]$.

18.8 а) $y = 2x^3$, $x \in [-2; 2]$; в) $y = -x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

б) $y = -x^2$, $x \in [-1; 0]$; г) $y = 2x^3$, $x \in [-3; 3]$.

Исследуйте на чётность функцию:

18.9 а) $y = \sqrt{x+1}$; в) $y = \sqrt{x-5}$;

б) $y = \frac{x-2}{x^2-1}$; г) $y = \frac{x+2}{x^2-16}$.

18.10 а) $y = 4x - 2x^3 + 6x^5$; в) $y = \sqrt{x}$;

б) $y = \frac{x-2}{x^2+4}$; г) $y = \frac{x^2+8}{x^2-9}$.

161

Прочитайте п. 3 в § 18 учебника

Исследуйте на чётность функцию, график которой изображён:

18.11

а) На рис. 76; б) рис. 77; в) рис. 78; г) рис. 79.

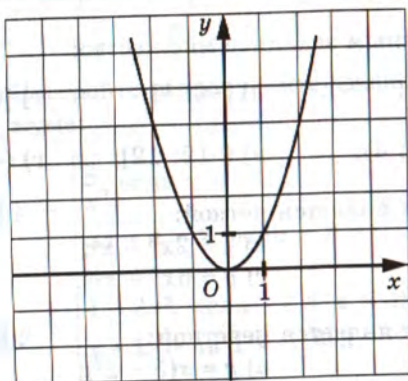


Рис. 76

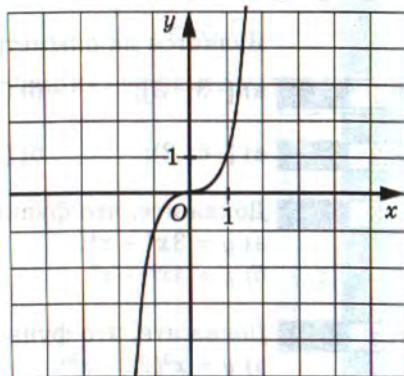


Рис. 77

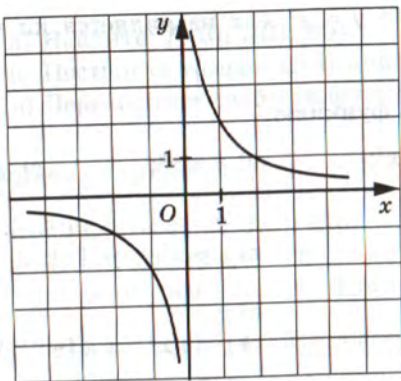


Рис. 78

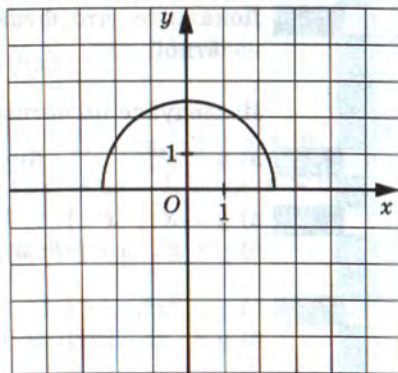


Рис. 79

18.12

а) На рис. 80; б) рис. 81; в) рис. 82; г) рис. 83.

18.13

На рисунке построена ветвь графика функции $y = f(x)$. Постройте весь график этой функции, если известно, что она:

- а) чётная (рис. 84);
 б) нечётная (рис. 85);
 в) нечётная (рис. 86);
 г) чётная (рис. 87).

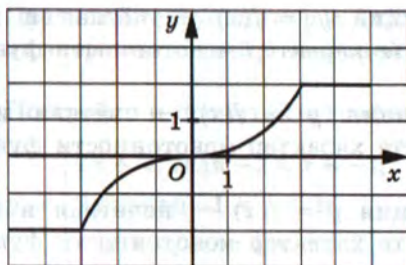


Рис. 80

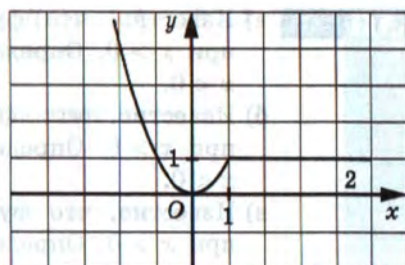


Рис. 81

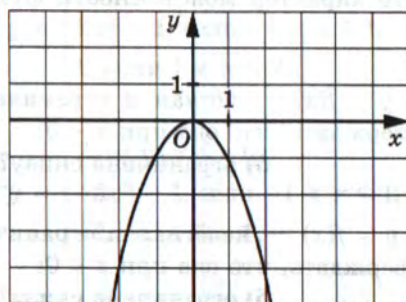


Рис. 82

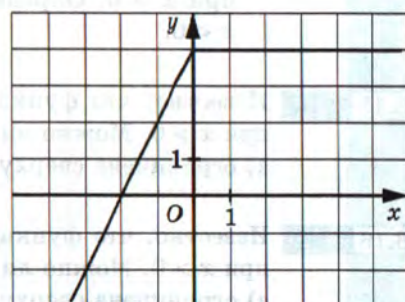


Рис. 83

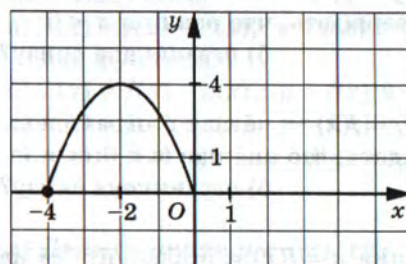


Рис. 84

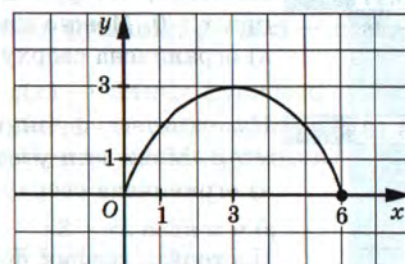


Рис. 85

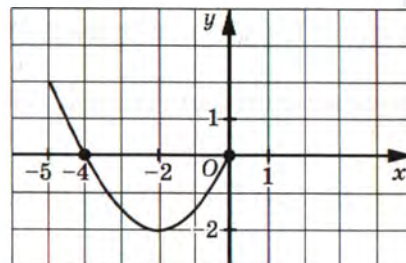


Рис. 86

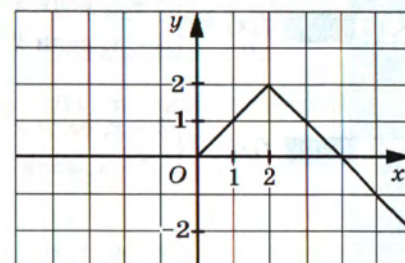


Рис. 87

- 18.14** а) Известно, что функция $y = f(x)$ — чётная и возрастает при $x > 0$. Определите характер монотонности функции при $x < 0$.
б) Известно, что функция $y = f(x)$ — чётная и убывает при $x > 0$. Определите характер монотонности функции при $x < 0$.
в) Известно, что функция $y = f(x)$ — нечётная и возрастает при $x > 0$. Определите характер монотонности функции при $x < 0$.
г) Известно, что функция $y = f(x)$ — нечётная и убывает при $x > 0$. Определите характер монотонности функции при $x < 0$.

- 18.15** Известно, что функция $y = f(x)$ — чётная и ограничена сверху при $x > 0$. Можно ли утверждать, что она при $x < 0$:
а) ограничена сверху; б) ограничена снизу?

- 18.16** Известно, что функция $y = f(x)$ — нечётная и ограничена снизу при $x > 0$. Можно ли утверждать, что она при $x < 0$:
а) ограничена сверху; б) ограничена снизу?

- 18.17** Известно, что функция $y = f(x)$ — нечётная и ограничена сверху при $x > 0$. Можно ли утверждать, что она при $x < 0$:
а) ограничена сверху; б) ограничена снизу?

- 18.18** Известно, что функция $y = f(x)$ — чётная и ограничена снизу при $x > 0$. Можно ли утверждать, что она при $x < 0$:
а) ограничена сверху; б) ограничена снизу?

Постройте график функции $y = f(x)$ и исследуйте её на чётность, если:

18.19
$$f(x) = \begin{cases} 3 + x, & \text{если } x < 0; \\ 3 - x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

18.20
$$f(x) = \begin{cases} 2 + x, & \text{если } x < 0; \\ -2 - x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

18.21
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0; \\ -x^2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

- 18.22** ○ Представьте функцию $y = f(x)$, где $f(x) = 4x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 5$ в виде суммы чётной и нечётной функций.

18.23 ○ Постройте и прочитайте график функции:

$$y = \begin{cases} 2x + 4, & \text{если } -2 \leq x \leq -1; \\ 2x^2, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ -2x + 4, & \text{если } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } -2 \leq x \leq -1; \\ 2x^2 - 1, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ 1, & \text{если } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq -1; \\ -2x^3 - 1, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ -2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

- 18.26** ○ Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены на множестве всех действительных чисел. Является ли функция $y = h(x)$ чётной или нечётной, если:

- $h(x) = f(x) \cdot g^2(x)$, $y = f(x)$ — чётная функция, $y = g(x)$ — нечётная функция;
- $h(x) = f(x) - g(x)$, $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — чётные функции;
- $h(x) = f(x) + g(x)$, $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — нечётные функции;
- $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — нечётные функции?

- 18.27** ○ а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ h(x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Задайте $h(x)$ так, чтобы функция $y = f(x)$ являлась чётной.

- б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 4 + 3x^2, & \text{если } x > 0; \\ h(x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Задайте $h(x)$ так, чтобы функция $y = f(x)$ являлась нечётной.

- 18.28** ○ Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2, & \text{если } x > 0; \\ h(x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Задайте $h(x)$ так, чтобы функция $y = f(x)$:

- являлась чётной;
- являлась нечётной.

- 18.29** ○ Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{если } x \leq 0; \\ h(x), & \text{если } x > 0. \end{cases}$

Задайте, если это возможно, $h(x)$ так, чтобы функция $y = f(x)$:

- а) являлась чётной; б) являлась нечётной.

Исследуйте функцию на чётность и постройте её график:

18.30 ○ а) $y = x^2 + 2|x| - 1$;

в) $y = -x^2 - 3|x| + 4$;

б) $y = \frac{3}{|x|}$;

г) $y = -\frac{4}{|x|}$.

18.31 ○ а) $y = -x|x|$;

в) $y = 2x|x|$;

б) $y = \frac{2x^3}{|x|}$;

г) $y = -\frac{0,5x^5}{|x^3|}$.

18.32 ○ а) $y = \sqrt{|x|}$;

в) $y = -\sqrt{|x|}$;

б) $y = -\sqrt{|x|} + 2$;

г) $y = \sqrt{|x|} - 3$.

18.33 ○ а) $y = \sqrt{(|x| - 3)^2} - 4$;

б) $y = 2 - \sqrt{(|x| - 1)^2}$.

- 18.34** ○ а) Пусть нечётная функция $y = f(x)$ определена в точке 0. Чему может равняться $f(0)$?

- б) Пусть чётная функция $y = f(x)$ определена в точке 0. Чему может равняться $f(0)$?

- 18.35** ○ График нечётной функции пересекает ось абсцисс в 10 точках. Докажите, что эта функция не определена в точке 0.

- 18.36** ○ График чётной функции пересекает ось абсцисс в 171 точке. Найдите:

- а) сумму абсцисс этих точек;
б) произведение абсцисс этих точек.

- 18.37** ○ График нечётной функции пересекает ось абсцисс в 1111 точках. Найдите:

- а) сумму абсцисс этих точек;
б) произведение абсцисс этих точек.

- 18.38** ○ Функция $y = f(x)$ определена на отрезке, симметричном относительно точки $x = 0$, и является чётной. Постройте график функции (рис. 88). Найдите $f(2) - f(3) \cdot f(1)$.

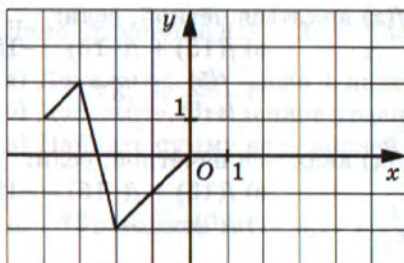


Рис. 88

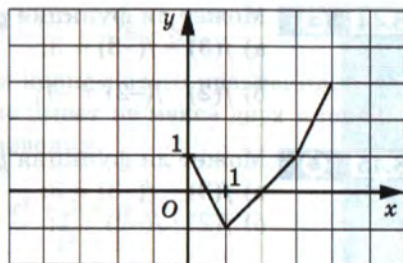


Рис. 89

18.39 Функция $y = f(x)$ определена на отрезке, симметричном относительно точки $x = 0$, и является чётной. Постройте график функции (рис. 89). Найдите $(f(-3) - f(-1)) \cdot f(-4)$.

18.40 Функция $y = f(x)$ определена на отрезке, симметричном относительно точки $x = 0$, и является нечётной. Постройте график функции (рис. 90). Найдите $f(-4) + f(-2) - f(-1)$.

18.41 Функция $y = f(x)$ определена на отрезке, симметричном относительно точки $x = 0$, и является нечётной. Постройте график функции (рис. 91). Найдите $f(-4) - f(3) : f(-0,5)$.

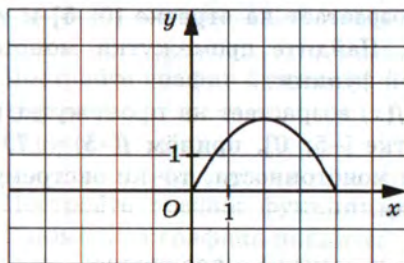


Рис. 90

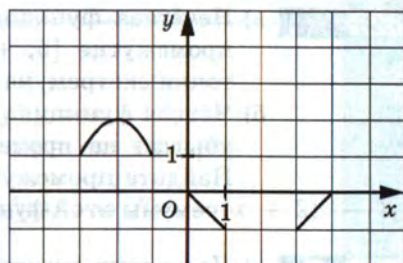


Рис. 91

18.42 ○ Известно, что $y = f(x)$ — чётная функция и $f(3) + f(-5) = 7$. Найдите:

- а) $f(-3) + f(-5)$; в) $f(3) + f(5)$;
б) $2f(3) + 3f(-5) - f(5)$; г) $7f(3) + 8f(-5) - 2f(-3) - 3f(5)$.

18.43 ○ Известно, что $y = f(x)$ — нечётная функция и $f(-4) + f(1) = 11$. Найдите:

- а) $f(4) + f(-1)$; в) $-f(4) - f(-1) + 1$;
б) $f(4) + f(1) + f(-4) + f(-1)$; г) $f(-4) - f(-1) + f(1) - f(4)$.

18.44 ○ Может ли функция $y = f(x)$ являться чётной, если:

- а) $f(3) - f(-3) = 3$; в) $f(15) + f(-15) = -15$;
б) $f(2) \cdot f(-2) = -1$; г) $\frac{f(5)}{f(-5)} = \sqrt{3}$?

18.45 ○ Может ли функция $y = f(x)$ являться нечётной, если:

- а) $f(3) - f(-3) = 3$; в) $f(15) + f(-15) = -15$;
б) $f(2) \cdot f(-2) = 1$; г) $f(0) \cdot f(3) = 3$?

18.46 ○ Что можно сказать о чётности и нечётности функции $y = f(x)$, если:

- а) на графике этой функции есть точки $M(-3; 1)$ и $N(3; 8)$;
б) $f(3) = 5$, а в точке -3 функция не определена;
в) $f(-2) = -f(2)$, а $f(0) = 5$;
г) функция $y = f(x)$ имеет три нуля в точках -5 , -2 и 2 ?

18.47 ○ а) Известно, что функция $y = f(x)$ является чётной и её наименьшее и наибольшее значения на отрезке $[-1; 17]$ равны -11 и 8 соответственно. Найдите наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-17; 1]$.

- б) Известно, что функция $y = f(x)$ является нечётной и её наименьшее и наибольшее значения на отрезке $[-1; 17]$ равны -11 и 8 соответственно. Найдите наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-17; 1]$.

18.48 а) Нечётная функция возрастает на отрезке $[0; 5]$ и убывает на промежутке $[5; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума этой функции.

- б) Чётная функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; -5]$ и убывает на промежутке $[-5; 0]$, причём $f(-5) = 7$, $f(0) = -3$. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы этой функции.

18.49 ● а) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{9 + 11x + 3x^2} - \sqrt{9 - 11x + 3x^2} = a$ имеет нечётное число разных корней?

- б) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{9 + 7x + x^2} + \sqrt{9 - 7x + x^2} = a$ имеет нечётное число разных корней?

18.50 ● Дано уравнение $5x^5 - 13x = \sqrt{32 - 32x} - \sqrt{32 + 32x}$.

- а) Докажите, что число -1 является корнем этого уравнения.
б) Докажите, что данное уравнение имеет не менее трёх корней.
в) Найдите сумму всех корней уравнения.
г) Найдите произведение всех корней уравнения.

19.4 Принадлежит ли графику функции $y = f(x)$ точка A , если:

- а) $f(x) = x^3 - 4$, $A(6; 212)$;
б) $f(x) = -(x + 6)^3$, $A(-8; -8)$;
в) $f(x) = (x - 2)^3 + 200$, $A(-8; 800)$;
г) $f(x) = -(x + 7)^3 + 25$, $A(-2; -100)$?

19.5 Не выполняя построения графика, найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

- а) $y = x^3 - 3$, $x[-1; 2]$; в) $y = (x - 2)^3 + 5$, $x[-1; 2]$;
б) $y = -(x + 4)^3$, $x[-4; 10]$; г) $y = -(x - 3)^3 - 1$, $x[-4; 8]$.

19.6 Исследуйте функцию на монотонность:

- а) $y = (x + 2)^3$; в) $y = x^3 - 10$;
б) $y = -(x - 4)^3 + 1$; г) $y = -(x + 1)^3 - 3$.

19.7 Найдите расстояние между двумя точками графика функции $y = x^3$ с абсциссами 2 и -2.

19.8 ○ Докажите, что функция $y = x^3 + 7x - 2$ возрастает на R .

19.9 ○ Докажите, что функция $y = \frac{1}{x - 1} - 2x^3$ убывает на $(1; +\infty)$.

19.10 Найдите область значений функции $y = -3x^3$ на промежутке:
а) $[1; 2]$; б) $(-3; -1]$; в) $[-1; 2]$; г) $[-1; 3]$.

19.11 ○ Найдите область значений функции $y = x^3 + 2x - 3$ на промежутке:
а) $[1; 2]$; б) $(-3; -1]$; в) $[-1; 2]$; г) $(-1; 3]$.

19.12 ○ Решите графически уравнение:

- а) $x^3 = 4x$; в) $x^3 = \frac{1}{x}$;
б) $(x + 1)^3 = 1 - 2x$; г) $-x^3 + 2 = x + 4$.

19.13 ○ Решите графически неравенство:

- а) $x^3 < 1$; б) $x^3 > x$; в) $x^3 > -8$; г) $x^3 \leq x$.

19.14 ○ Постройте и прочитайте график функции:

- а) $y = -(x + 1)^3$; в) $y = x^3 - 1$;
б) $y = (x - 1)^3 + 20$; г) $y = -(x + 3)^3 + 2$.

Исследуйте функцию на чётность и постройте её график:

10.15 ○ а) $y = \frac{x^4}{x}$; б) $y = \frac{x^4}{|x|}$; в) $y = \frac{x^5}{x^2}$; г) $y = x^2|x|$.

10.16 ○ а) $y = (|x| - 2)^3$; б) $y = -(|x| + 1)^3$.

10.17 ● Постройте график функции:

а) $y = |x^3 - 1| + x^3$; б) $y = |x^3 - 1| + |x^3 + 1|$;
в) $y = |x^3 + 1| - |x^3 - 1|$; г) $y = |x^3 + 1| - |x^3 - 1| + 2x^3$.

Функции $y = x^n$, $n > 3$ ($n \in \mathbb{N}$)

Прочитайте пп. 1 и 2 в § 19 учебника

163

Постройте и прочитайте график функции:

10.18 а) $y = x^6$; б) $y = -x^{10}$; в) $y = x^8$; г) $y = x^{12}$.

10.19 а) $y = -x^3$; б) $y = x^7$; в) $y = x^5$; г) $y = -x^9$.

Постройте график функции:

10.20 а) $y = (x + 2)^4$; б) $y = -(x - 1)^5$;
в) $y = x^6 + 1$; г) $y = -x^7 - 1$.

10.21 ○ а) $y = -(x + 2)^3 - 1$; б) $y = (x - 1)^6 + 0,5$;
в) $y = (x - 3)^5 - 2$; г) $y = -(x + 4)^4 + 1$.

10.22 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^6$:

а) на отрезке $[-1; 1]$; б) на луче $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;
в) на полуинтервале $(-2; 2]$; г) на луче $(-\infty; 3]$.

10.23 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^5$:

а) на отрезке $[-1; 1]$; б) на луче $(-\infty; 0]$;
в) на полуинтервале $(1; 3]$; г) на луче $[-1; +\infty)$.

10.24 Найдите точки пересечения графиков функций:

а) $y = x^4$ и $y = \frac{1}{x}$; б) $y = x^5$ и $y = -1$;
в) $y = x^6$ и $y = -2x^2$; г) $y = x^7$ и $y = \sqrt{x}$.

10.25 ○ Решите графически уравнение:

а) $x^6 = -\frac{1}{x}$; б) $x^5 = \frac{1}{x}$; в) $x^4 = 1$; г) $x^7 = x$.

19.26 ○ Определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^8, \\ y = x + 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^6, \\ y = -3 + 2x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^5, \\ y = 5 - 3x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = x^7, \\ y = -x + 4. \end{cases}$

19.27 ○ Определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^4, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^6, \\ y = 2 - 3x^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^5, \\ y = -2 + 0,5x^2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = x^2 - 6. \end{cases}$

19.28 ○ Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} x^4, & \text{если } x < 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x^6, & \text{если } x \leq 1; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{если } x < 0; \\ x^5, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} x^7, & \text{если } x < -1; \\ -2 - x, & \text{если } -1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

19.29 Чему равно n , если известно, что график степенной функции $y = x^n$ проходит через заданную точку:

а) (2; 256); б) (-2; -128); в) (3; 243); г) (-4; 256)?

19.30 ○ Исследуйте степенную функцию $y = x^n$ на чётность и ограниченность, если известно, что её график проходит через заданную точку:

а) (-1; 1); б) (-1; -1); в) (1; 1); г) (1; -1).

19.31 ○ Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = x^5 + 3x^3 + x - 11$; б) $y = x^6 + 3x^4 + x^2 - 132$.

19.32 ○ Пусть P — наибольшее значение функции $y = (x + 2)^5$ на отрезке $[-3; -1]$, а Q — наименьшее значение функции $y = \sqrt{x}$ на луче $[0; +\infty)$. Что больше: P или Q ? Сделайте графическую иллюстрацию.

19.33 ○ Пусть K — наибольшее значение функции $y = x^{361}$ на луче $(-\infty; 0]$, а L — наименьшее значение функции $y = x^{1002}$ на отрезке $[-5; 5]$. Не выполняя построения, ответьте на вопрос, что больше: K или L ?

10.34 ○ Найдите область значений функции $y = x^6 + 2x^2 - 5$ на промежутке:

- а) $[1; 2]$; б) $(-3; -1]$; в) $[-1; 2]$; г) $(-1; 3)$.

10.35 ○ Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^5, \\ y = |x| - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^4, \\ y = 4 + |x|; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^6, \\ y = 1 - |x|; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = x^7, \\ y = -|x| + 4; \end{cases}$

10.36 ○ Решите графически неравенство:

а) $x^4 < \sqrt{x}$;

в) $x^3 > |x| - 2$;

б) $x^5 < 5 - 4x$;

г) $-x^4 < \sqrt{x} + 1$.

10.37 ○ Решите уравнение:

а) $2x^5 + 3x = 5$;

в) $x^5 + 3x = 38$;

б) $3x^5 + 5x^3 = -8$;

г) $0,5x^5 + x^3 - 24 = 0$.

10.38 ○ Для каждого значения параметра b определите количество действительных корней уравнения:

а) $x^{44} = b$;

в) $x^{135} = b$;

б) $x^{23} + 5x^3 + x = b$;

г) $x^{10} + 3x^2 = b$.

10.39 ○ Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;

в) $x^4 + x^2 - 2x + 3 = 0$;

б) $x^6 - x + 3 = 0$;

г) $x^6 - \sqrt{x-1} = 0$.

10.40 ○ Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$, если:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } -3 \leq x \leq -1; \\ x^6, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Постройте и прочитайте график функции $y = f(x)$, если:

10.41 ○ $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x < 0; \\ x^{12}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

$$19.42 \quad \bigcirc \quad y = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \leq 0; \\ x^7, & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$19.43 \quad \bigcirc \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x < -1; \\ x^{11}, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ (x-1)^4 + 1, & \text{если } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

19.44 \bigcirc а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^7$. Докажите, что

$$f(2x) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = (f(x))^2.$$

б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^{10}$. Докажите, что $f(x^2) \cdot f(x^{-1}) = f(x)$.

19.45 \bigcirc а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = -x^4$. Докажите, что

$$f(4x) \cdot f\left(-\frac{x}{4}\right) = (f(x))^2.$$

б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = -x^3$. Докажите, что

$$(f(x))^9 : f\left(-\frac{1}{2}x^4\right) = f(2x^5).$$

19.46 \bigcirc а) Определите вид четырёхугольника, вершины которого принадлежат графику функции $y = x^3$ и имеют абсциссы $-1; -2; 1; 2$.

б) Определите вид четырёхугольника, вершины которого принадлежат графику функции $y = x^4$ и имеют абсциссы $-13; -7; 7$ и 13 .

Функции $y = x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

168

Прочитайте пп. 3 и 4 в § 19 учебника

Постройте и прочитайте график функции:

$$19.47 \quad \begin{array}{llll} \text{а) } y = \frac{1}{x^4}; & \text{б) } y = x^{-3}; & \text{в) } y = x^{-8}; & \text{г) } y = \frac{1}{x^5}. \end{array}$$

$$19.48 \quad \begin{array}{ll} \text{а) } y = (x+3)^{-4}; & \text{в) } y = \frac{1}{(x-2)^7}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{б) } y = \frac{1}{x^5} - 1; & \text{г) } y = x^{-2} + 4. \end{array}$$

10.50 ○ а) $y = \frac{1}{(x+1)^4} + 1$; в) $y = \frac{1}{(x-3)^7} - 2$;

б) $y = (x-2)^{-5} + 3$; г) $y = (x+4)^{-2} - 1$.

10.51 а) Постройте график функции $y = (x-2)^{-2}$. Найдите промежутки убывания и возрастания функции. Составьте уравнения горизонтальной и вертикальной асимптот.

б) Постройте график функции $y = x^{-2} - 1$. Найдите область значений функции. Составьте уравнения горизонтальной и вертикальной асимптот.

10.52 Какая из точек A , B принадлежит графику функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = x^{-4}$, $A\left(\frac{1}{2}; 16\right)$, $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$;

б) $f(x) = x^{-5}$, $A(0; 0)$, $B(-1; -1)$;

в) $f(x) = x^{-6}$, $A\left(\sqrt{2}; \frac{1}{8}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; 64\right)$;

г) $f(x) = x^{-7}$, $A(-1; 1)$, $B(1; -1)$?

10.53 Чему равно n , если известно, что график степенной функции $y = x^{-n}$ проходит через заданную точку:

а) $\left(2; \frac{1}{256}\right)$; б) $\left(-2; -\frac{1}{32}\right)$; в) $\left(7; \frac{1}{343}\right)$; г) $\left(\frac{1}{5}; 625\right)$?

10.54 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^{-4}$:

а) на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;

в) на полуинтервале $(-3; -1]$;

б) на луче $(-\infty; -2]$;

г) на луче $[3; +\infty)$.

10.55 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^{-5}$:

а) на отрезке $[-2; -1]$;

в) на полуинтервале $\left(\frac{1}{2}; 4\right]$;

б) на луче $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$;

г) на луче $[2; +\infty)$.

10.56 ○ Пусть P — наибольшее значение функции $y = \frac{1}{(x+2)^5} - 1$ на отрезке $[-1; 1]$, а Q — наименьшее значение функции $y = x^8$ на отрезке $[-1; 1]$. Что больше: P или Q ? Сделайте графическую иллюстрацию.

19.56

Исследуйте степенную функцию $y = x^{-n}$ на чётность и ограниченность, если известно, что её график проходит через заданную точку:

- а) $(-1; 1)$; б) $(-1; -1)$; в) $(1; 1)$; г) $(1; -1)$.

19.57



Найдите точки пересечения графиков функций:

- а) $y = x$ и $y = \frac{1}{x^3}$; в) $y = x^{-7}$ и $y = -x$;
б) $y = x^{-4}$ и $y = -2$; г) $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = |x|$.

19.58



Решите графически уравнение:

- а) $x^{-6} = x$; б) $\frac{1}{x^4} = x^2$; в) $\frac{1}{x^7} = x$; г) $x^{-4} = \sqrt{x}$.

Сколько решений имеет система уравнений:

19.59



- а) $\begin{cases} y = \frac{1}{x^5}, \\ y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \frac{1}{x^8}, \\ y = x^4 - 1; \end{cases}$
б) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 3 - 2x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^{-7}, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases}$

19.60



- а) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^2 - 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^{-4}, \\ y = 4 - x^4; \end{cases}$
б) $\begin{cases} y = \frac{1}{x^2}, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \frac{1}{x^3}, \\ y = x^3 + 3; \end{cases}$

19.61



Для функции $y = (x+2)^{-3} - 1$ укажите:

- а) область определения и область значений функции;
б) промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства функции;
в) уравнения асимптот;
г) координаты центра симметрии графика функции.

19.62



Для функции $y = (x-1)^{-2} - 2$ укажите:

- а) область определения и область значений функции;
б) промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства функции;
в) уравнения асимптот;
г) уравнение оси симметрии графика функции.

Постройте и прочитайте график функции:

19.63 $y = \begin{cases} x^{-2}, & \text{если } x < 0; \\ 2x^2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$

19.64 $y = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \leq 1; \\ x^{-3}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

19.65 $y = \begin{cases} -2(x+1)^2 + 2, & \text{если } -2 \leq x \leq 0; \\ x^{-12}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

19.66 а) $y = \begin{cases} -1, & \text{если } x \leq -1; \\ x^3, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ \frac{1}{x^{28}}, & \text{если } x > 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x^{-3}, & \text{если } x \leq -1; \\ -x^2, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ x^4, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

19.67 Решите графически неравенство:

а) $x^{-2} > 2x - 1$;

в) $x^{-2} \leq 2x - 1$;

б) $x^{-3} \leq \sqrt{x}$;

г) $x^{-3} > \sqrt{x}$.

19.68 Даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) = x^5$, $g(x) = x^{-10}$. Докажите, что $\frac{(f(2x))^2}{32} = 32(g(x))^{-1}$.

19.69 Даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) = x^{-3}$, $g(x) = x^4$. Докажите, что $(f(x^2))^2 = (g(x))^{-3}$.

19.70 Даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{-4}$. Докажите, что $\frac{16}{f(x^2)} = \left(g\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{-1}$.

19.71 Найдите точки экстремума функции:

а) $y = |x^{-1} - 3|$;

б) $y = |x^{-4} - 1|$.

19.72 Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = (|x| - 2)^{-3} + 1$;

б) $y = |x^{-2} - 1|$.

19.73 Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} = 30(x+1)^{-1}$;

в) $x^{-1} + 3x^{-3} + 5x^{-5} = 9$;

б) $x^2 = 4(x-1)^{-3}$;

г) $|x^{-1} + 4x^{-3} + 32x^{-5}| = 2$.

19.74

Найдите все такие значения параметра b , для которых существует такое число p , что график функции $y = (|x| + b)^{-3}$ расположен ниже прямой $y = p$. Для каждого такого b укажите все возможные значения p .

§20

ФУНКЦИЯ $y = \sqrt[3]{x}$, ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

175

Прочитайте п. 1 в § 20 учебника

Вычислите:

20.1

а) $\sqrt[3]{64}$;

б) $\sqrt[3]{-125}$;

в) $\sqrt[3]{216}$;

г) $\sqrt[3]{-343}$.

20.2

а) $\sqrt[3]{0,027}$;

б) $\sqrt[3]{-0,008}$;

в) $\sqrt[3]{0,001}$;

г) $\sqrt[3]{-0,064}$.

20.3

а) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$;

б) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$;

в) $\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$;

г) $\sqrt[3]{-4\frac{12}{125}}$.

20.4

а) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3}$;

б) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3}$;

в) $\sqrt[3]{3^9 \cdot 10^3}$;

г) $\sqrt[3]{5^6 \cdot 3^3}$.

20.5

а) $\sqrt[3]{2^{10} \cdot 2^2}$;

б) $\sqrt[3]{3^{11}} \cdot \sqrt[3]{81}$;

в) $\sqrt[3]{25 \cdot 5^7}$;

г) $\sqrt[3]{7^4} \cdot \sqrt[3]{7^5}$.

20.6

а) $\frac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{2}}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{250}}$;

в) $\frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$;

г) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{40}}$.

Вынесите множитель из-под знака радикала:

20.7

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 3}$;

б) $\sqrt[3]{-125 \cdot 2}$;

в) $\sqrt[3]{27 \cdot 5}$;

г) $\sqrt[3]{-64 \cdot 7}$.

20.8

а) $\sqrt[3]{54}$;

б) $\sqrt[3]{-432}$;

в) $\sqrt[3]{56}$;

г) $\sqrt[3]{-375}$.

20.9

а) $\sqrt[3]{27x}$;

б) $\sqrt[3]{-16a}$;

в) $\sqrt[3]{250y}$;

г) $\sqrt[3]{-343b}$.

20.10

а) $\sqrt[3]{125x^4}$;

б) $\sqrt[3]{-128x^7}$;

в) $\sqrt[3]{81a^5}$;

г) $\sqrt[3]{-512a^8}$.

Внесите множитель под знак радикала:

20.11 а) $2\sqrt[3]{3}$; б) $-3\sqrt[3]{2}$; в) $5\sqrt[3]{2}$; г) $-4\sqrt[3]{3}$.

20.12 а) $a\sqrt[3]{x}$; б) $a^2\sqrt[3]{a}$; в) $2x\sqrt[3]{a^2}$; г) $x^3\sqrt[3]{x^2}$.

20.13 Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[3]{-27b^3}$; в) $\sqrt[3]{8a^9b^{12}}$; г) $\sqrt[3]{-64a^6b^3c^9}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

20.14 а) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$; б) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; в) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$; г) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$.

20.15 а) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$; б) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$; в) $-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$; г) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

20.16 а) $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$; б) $\frac{a+c}{\sqrt[3]{a+c}}$; в) $\frac{c^2 - b^2}{\sqrt[3]{(b-c)^2}}$; г) $\frac{d-c}{\sqrt[3]{c-d}}$.

Выполните указанные действия:

20.17 а) $2\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{a}$; в) $8\sqrt[3]{b} + 5\sqrt[3]{b}$;
б) $\sqrt[3]{81x} + \sqrt[3]{24x}$; г) $\sqrt[3]{250y^2} - \sqrt[3]{54y^2}$.

20.18 а) $\sqrt[3]{54 \cdot 5} \cdot \sqrt[3]{100}$; в) $\sqrt[3]{\frac{192}{49}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{7}}$;
б) $(\sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{4}) \cdot \sqrt[3]{6}$; г) $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{15}) \cdot \sqrt[3]{25}$.

20.19 Между какими соседними целыми числами находится число:

а) $\sqrt[3]{20}$; б) $\sqrt[3]{-100}$; в) $\sqrt[3]{299}$; г) $\sqrt[3]{-48}$?

20.20 Вычислите без микрокалькулятора кубический корень из числа:

а) 729000; б) 1,331; в) 0,000512; г) 15 625.

20.21 Известно, что 1259 712 — куб некоторого натурального числа. Вычислите:

$$(\sqrt[3]{1259712} - 1) \cdot (\sqrt[3]{1259712} - 2) \cdot (\sqrt[3]{1259712} - 3) \times \dots \times (\sqrt[3]{1259712} - 1259712).$$

20.22 Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x} = 5$;

в) $\sqrt[3]{x} = -10$;

б) $\sqrt[3]{2x-1} = 1$;

г) $\sqrt[3]{4-2x} = 4$.

20.23 ○ Сравните числа a и b , если:

а) $a = \sqrt[3]{34}$, $b = 1 + \sqrt{5}$;

в) $a = \sqrt[3]{43}$, $b = \sqrt{6} + 1$;

б) $a = \sqrt[3]{33}$, $b = 1 + \sqrt{5}$;

г) $a = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$.

20.24 ● Проверьте равенство:

а) $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$;

в) $\sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}} = (\sqrt{2}-1)^2$;

г) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}$.

177

Прочитайте п. 2 в § 20 учебника

20.25 Постройте график функции и найдите промежутки знакопостоянства:

а) $y = \sqrt[3]{x} - 1$;

в) $y = \sqrt[3]{x} + 2$;

б) $y = \sqrt[3]{x+2}$;

г) $y = \sqrt[3]{x-1}$.

20.26 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt[3]{x}$ на заданном промежутке:

а) $[1; 8]$;

б) $(-8; 0]$;

в) $[-27; 64]$;

г) $[0, 125; +\infty)$.

20.27 Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ точка:

а) $A(8; 2)$;

в) $C\left(-\frac{8}{27}; -\frac{2}{3}\right)$;

б) $B(-27; 3)$;

г) $D\left(\frac{1}{125}; \frac{1}{5}\right)$?

20.28 Исследуйте функцию на чётность:

а) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$;

в) $y = \sqrt[3]{|x|} + x^{-2}$;

б) $y = x \cdot \sqrt[3]{x} + x^{-4} + 2$;

г) $y = x\sqrt[3]{|x|} - 2x^{-1}$.

Прочитайте п. 3 в § 20 учебника

178

Постройте и прочитайте график функции:

20.29 ○ а) $y = \sqrt[3]{x-3} + 2$;

в) $y = \sqrt[3]{x+3} - 2$;

б) $y = -\sqrt[3]{x}$;

г) $y = -\sqrt[3]{x-4}$.

20.30 ○ а) $y = \sqrt[3]{-x}$;

в) $y = 2 - \sqrt[3]{x}$;

б) $y = \sqrt[3]{2-x}$;

г) $y = |\sqrt[3]{x}|$.

20.31 ○ Решите графически уравнение:

а) $\sqrt[3]{x} = 10 - x$;

в) $\sqrt[3]{x} = 0,25x$;

б) $\sqrt[3]{x} = |x|$;

г) $\sqrt[3]{x} = |x-2| - 4$.

20.32 ○ Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ y = \sqrt[3]{x-1}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = |\sqrt[3]{x}|, \\ x^2 y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 2, \\ y = \sqrt[3]{x} + 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{-x}, \\ y - x^4 = -2? \end{cases}$

20.33 ○ Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leq 0; \\ \sqrt[3]{x}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \leq 1; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

20.34 ○ Решите уравнение $f(x) = p$, если:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $p = 2$;

в) $f(x) = -\sqrt[3]{x+2}$, $p = 3$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{|x|} - 1$, $p = 0$;

г) $f(x) = |\sqrt[3]{x-1}|$, $p = 1$.

20.35 ○ Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 6$;

в) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{-x} - 12 = 0$;

б) $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 2 = 0$;

г) $3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} = -1$.

20.36 ○ а) Даны функции $y = f(x)$, $y = q(x)$, где $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $q(x) = 2$. Решите уравнение $f(x-1) = q(x)$.

б) Даны функции $y = f(x)$, $y = q(x)$, где $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $q(x) = x^2$. Решите уравнение $f(x^3+2) = q(x)$.

20.37 ○ а) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Решите уравнение $2f(x) = f(2x + 3)$.

б) Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Решите уравнение $f(x^2) = f(x + 20)$.

20.38 ● Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{9 - x} + 2\sqrt[3]{16 - x} = 5$;

в) $\sqrt[3]{9 - x^2} + 2\sqrt[3]{16 - x^2} = 5$;

б) $\sqrt[3]{9 - |x|} + 2\sqrt[3]{16 - |x|} = 5$;

г) $\sqrt[3]{\frac{9x-1}{x}} + 2\sqrt[3]{\frac{16x-1}{x}} = 5$.

20.39 ○ Решите неравенство:

а) $\sqrt[3]{x} > 1$;

б) $\sqrt[3]{x} > 2 - x$;

в) $\sqrt[3]{x} \leq -2$;

г) $\sqrt[3]{x} \leq -x - 2$.

20.40 ○ Постройте и прочитайте график функции

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \leq -1; \\ x^5, & \text{если } -1 < x < 1; \\ \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

20.41 ● Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+4)^2, & \text{если } -6 \leq x \leq -2; \\ -x^3, & \text{если } -2 < x < 0; \\ \sqrt[3]{x}, & \text{если } 0 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

При каком значении параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет:

а) два корня;

в) четыре корня;

б) три корня;

г) не имеет корней?

20.42 ○ Постройте график уравнения:

а) $(\sqrt[3]{x} + y)(x^3 - y) = 0$;

в) $(\sqrt[3]{x+1} - y)(xy - 4) = 0$;

б) $(2\sqrt[3]{x} - y)(x^2 + y^2 - 4) = 0$;

г) $(x^{-2} + y)(2y + \sqrt[3]{x}) = 0$.

20.43 ○ Решите графически систему неравенств:

а) $\begin{cases} x + y > 2, \\ y - \sqrt[3]{x} > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y + \sqrt[3]{x} \geq 0, \\ y + |x - 2| \leq 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy + 1 \geq 0, \\ y - \sqrt[3]{x} \leq 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - \sqrt[3]{x} < 0, \\ xy - 1 \geq 0. \end{cases}$

20.44 ● Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = 1 - \sqrt[3]{|x - 4|}$;

б) $y = 1 - 2\sqrt[3]{|1 + x|}$.

4

ПРОГРЕССИИ

ГЛАВА

§21 ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Прочитайте п. 1 в § 21 учебника.

183

Определите, является ли заданная функция числовой последовательностью:

21.1

а) $y = 2x - 1$, $x \in (0; +\infty)$;

в) $y = 2x - 1$, $x \in \mathbb{Z}$;

б) $y = 2x - 1$, $x \in \mathbb{Q}$;

г) $y = 2x - 1$, $x \in \mathbb{N}$.

21.2

а) $y = \frac{2x+1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$;

в) $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{Z}$;

б) $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{Q}$;

г) $y = \frac{2x+1}{x}$, $x \in \mathbb{N}$.

21.3

Составьте математическую модель следующей задачи. Сосулька тает со скоростью 5 капель в минуту. Сколько капель упадёт на землю через 1 мин, 2 мин, 3 мин, 17 мин и т. д. от начала таяния сосульки? Является ли эта математическая модель числовой последовательностью?

21.4

Выясните, является ли указанное ниже соответствие последовательностью. Если да, то составьте формулу n -го члена последовательности и найдите её первые пять членов:

а) каждому натуральному числу ставится в соответствие его квадрат;

- 21.5** Назовите член последовательности (y_n) , который:

- а) a_{638} и a_{645} ; в) a_{n+3} и a_{n+10} ;
б) a_{1002} и a_{1008} ; г) a_{n-2} и a_{n+2} .

Прочитайте п. 2 в § 21 учебника

- 21.10** ○ а) Запишите несколько начальных членов возрастающей последовательности натуральных чисел, делящихся на 3, десятичная запись которых состоит только из цифр 7.
б) Запишите несколько начальных членов возрастающей последовательности натуральных чисел, делящихся на 11, десятичная запись которых состоит только из цифр 7.

Прочитайте п. 3 в § 21 учебника

186

По заданной формуле n -го члена последовательности вычислите её первые пять членов:

21.11

а) $a_n = 4n + 1$;

в) $b_n = 5n + 2$;

б) $c_n = -7n + 3$;

г) $a_n = -3n - 7$.

21.12

а) $a_n = \frac{1}{n+5}$;

в) $c_n = \frac{3}{2n+4}$;

б) $d_n = \frac{-2}{3-4n}$;

г) $a_n = \frac{-3}{4n-1}$.

21.13

а) $x_n = n^2 + 1$;

в) $z_n = -n^3 + 5$;

б) $y_n = -n^3 - 10$;

г) $w_n = n^2 - 15$.

21.14

По заданной формуле n -го члена последовательности вычислите её первые пять членов и изобразите их в виде точек числовой прямой:

а) $a_n = 2n + 3$;

б) $b_n = \frac{6}{n}$;

в) $x_n = n^2 + 1$;

г) $y_n = 2^n$.

21.15

По заданной формуле n -го члена последовательности вычислите её первые пять членов и изобразите их в виде точек на координатной плоскости:

а) $a_n = n$;

б) $a_n = (n-1)^2$;

в) $a_n = -\frac{6}{n} + 1$;

г) $a_n = 2^n$.

Составьте одну из возможных формул n -го члена последовательности по её первым пяти членам:

21.16

а) 1, 2, 3, 4, 5, ...;

в) 6, 7, 8, 9, 10, ...;

б) -2, -1, 0, 1, 2, ...;

г) -1, -2, -3, -4, -5, ...

21.17

а) 1, 3, 5, 7, 9, ...;

в) 4, 6, 8, 10, 12, ...;

б) 3, 6, 9, 12, 15, ...;

г) 4, 8, 12, 16, 20, ...

21.18

а) 1, 4, 9, 16, 25, ...;

в) 2, 5, 10, 17, 26, ...;

б) 4, 9, 16, 25, 36, ...;

г) 1, 8, 27, 64, 125, ...

21.19

Докажите, что число A является членом последовательности (y_n) , если:

а) $y_n = \frac{2n+3}{n+1}$, $A = \frac{11}{5}$;

в) $y_n = 3(n+2)^{-2}$, $A = \frac{1}{12}$;

б) $y_n = 2^{3n-11}$, $A = 128$;

г) $y_n = (n-2)^3 - 1$, $A = 342$.

21.20

Является ли членом последовательности (y_n) данное число B ? Если является, то укажите номер соответствующего члена последовательности:

а) $y_n = -n^5 + 3$, $B = -240$;

в) $y_n = n^2 + 15n + 16$, $B = 39$;

б) $y_n = \frac{n^2 + 4n + 45}{n^2 + 25}$, $B = 1,8$;

г) $y_n = (\sqrt[3]{3})^{7n-6}$, $B = 243$.

21.21



По заданной формуле n -го члена последовательности вычислите её первые пять членов:

а) $x_n = (-2)^n$;

в) $b_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$;

б) $c_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n$;

г) $d_n = (-2)^n + (-2)^{n-1}$.

21.22



Последовательность задана формулой n -го члена. Вычислите её первые три члена с чётными номерами:

а) $y_n = (-1)^n + (-2)^{n+1}$;

в) $z_n = (-2)^n - (-2)^{n+1}$;

б) $x_n = (-2)^{n+1} - (-2)^{n-1}$;

г) $w_n = (-1)^{n+1} - (-2)^n$.

21.23



Последовательность задана формулой n -го члена. Вычислите первые три члена с нечётными номерами:

а) $y_n = (-1)^n + 2^n$;

в) $z_n = (-2)^n + 4n$;

б) $x_n = (-2)^n + 16$;

г) $w_n = (-1)^n - 1$.

Составьте одну из возможных формул n -го члена последовательности по первым пяти её членам:

21.24



а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$;

в) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$;

б) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$;

г) $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \dots$

21.25



а) $-\frac{2}{2}, \frac{4}{5}, -\frac{6}{8}, \frac{8}{11}, -\frac{10}{14}, \dots$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4\sqrt{2}}, \dots$;

в) $\frac{2}{5}, -\frac{4}{10}, \frac{8}{15}, -\frac{16}{20}, \frac{32}{25}, \dots$;

г) $-\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}}, \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3}}, -\frac{9}{\sqrt{3 \cdot 4}}, \frac{16}{\sqrt{4 \cdot 5}}, -\frac{25}{\sqrt{5 \cdot 6}}, \dots$

- 21.26** а) Все натуральные числа, делящиеся на 17, расположили в порядке возрастания. Пусть x_n — n -е число в этой последовательности. Найдите формулу, задающую x_n .
 б) Натуральные числа, которые при делении на 17 дают в остатке 7, расположили в порядке возрастания. Пусть x_n — n -е число в этой последовательности. Найдите формулу, задающую x_n .
- 21.27** Формулой n -го члена задайте последовательность чётных натуральных чисел, не делящихся на 4.

Прочитайте п. 4 в § 21 учебника

189

Выпишите первые шесть членов последовательности (x_n):

- 21.28** ○ а) $x_1 = 1, x_n = -x_{n-1} + 5$ ($n = 2, 3, 4, \dots$);
 б) $x_1 = -5, x_n = x_{n-1} + 10$ ($n = 2, 3, 4, \dots$);
 в) $x_1 = 1, x_n = 2 + x_{n-1}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$);
 г) $x_1 = -3, x_n = -x_{n-1} - 2$ ($n = 2, 3, 4, \dots$).
- 21.29** ○ а) $x_1 = 1, x_n = n \cdot x_{n-1}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$);
 б) $x_1 = -3, x_n = -x_{n-1}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$);
 в) $x_1 = -512, x_n = 0,5 \cdot x_{n-1}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$);
 г) $x_1 = 1, x_n = x_{n-1} : 0,1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$).

- 21.30** ○ Последовательность задана рекуррентным способом. Найдите её первые шесть членов и изобразите их в виде точек на координатной плоскости:

- а) $a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = -2$; в) $a_{n+1} = -5a_n, a_1 = 0,2$;
 б) $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}, a_1 = 2$; г) $a_{n+1} = (n+1)a_n, a_1 = 1$.

- 21.31** ○ Выпишите первые шесть членов последовательности (x_n), у которой $x_1 = -3, x_2 = -2$ и каждый член, начиная с третьего, равен удвоенной сумме двух предыдущих членов. Составьте рекуррентное задание последовательности.

- 21.32** ○ Задайте последовательность рекуррентным способом:

- а) 2, 2, 2, 2, 2, ...; в) 9, 7, 5, 3, 1, ...;
 б) 2, 4, 6, 8, 10, ...; г) 5, -5, 5, -5, 5, -5, ...

- 21.33** ○ Задайте последовательность рекуррентным способом:

- а) 2, 6, 18, 54, 162, ...; в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$;
 б) 1, 8, 15, 22, 29, ...; г) 3, -9, 27, -81, 243, ...

21.34 ○ Последовательность задана рекуррентно. Перейдите к аналитическому заданию, т. е. найдите формулу её n -го члена:

а) $x_1 = 3, \quad x_n = x_{n-1} + 5 \quad (n = 2, 3, 4, \dots);$

б) $x_1 = 2, \quad x_n = 3x_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots);$

в) $x_1 = 11, \quad x_n = x_{n-1} - 4 \quad (n = 2, 3, 4, \dots);$

г) $x_1 = 3, \quad x_n = \frac{x_{n-1}}{2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$

21.35 ○ а) Задайте с помощью рекуррентного соотношения последовательность чётных натуральных чисел, делящихся на 37.

б) Задайте с помощью рекуррентного соотношения последовательность натуральных чисел, делящихся одновременно на 10 и на 14.

21.36 ○ Постройте график последовательности:

а) $y_n = \frac{3-n}{2};$

в) $y_n = n^2 - 4;$

б) $y_n = \frac{1}{n+1};$

г) $y_n = \frac{3n}{2}.$

21.37 ○ Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены последовательности (x_n) будут больше заданного числа A :

а) $x_n = 2n - 5, \quad A = 10;$

в) $x_n = n^2 - 27, \quad A = -2;$

б) $x_n = 3^{n-1}, \quad A = 30;$

г) $x_n = 2^{n-5}, \quad A = 1,5.$

21.38 ○ Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены последовательности (x_n) будут меньше заданного числа A :

а) $x_n = 3 - 2n, \quad A = -9;$

в) $x_n = 2 - 3n^2, \quad A = -25;$

б) $x_n = 3^{4-n}, \quad A = 0,5;$

г) $x_n = 2^{5-n}, \quad A = 0,75.$

21.39 ○ а) Выпишите все отрицательные члены последовательности $a_n = 9n - 73.$

б) Пусть $a_n = n^2 - 9n$. Выпишите все отрицательные члены последовательности.

21.40 ○ а) Найдите количество положительных членов последовательности $b_m = \frac{134}{122 - 3m}.$

б) Пусть $b_m = \frac{134 - m^2}{3m - 1}$. Сколько положительных членов имеет данная последовательность?

- 21.41** ○ а) Пусть $a_n = n^2 - 84n - 13$. Найдите наименьший член последовательности.
б) Пусть $a_n = -3n^2 + 184n - 83$. Найдите номер наибольшего члена последовательности.
- 21.42** ○ Найдите номер члена последовательности $a_n = 0,3n - 11$, наиболее близкого к числу: а) 173; б) 1000; в) -4; г) $\sqrt{17}$.
- 21.43** ○ Найдите член последовательности $b_n = \frac{2n + 171}{2n + 3}$, наиболее близкий к числу: а) 30; б) 17; в) 150; г) 1.
- 21.44** ○ Последовательность (b_n) такова, что $b_1 = b_2 = 0$; b_n при $n > 2$ равно числу диагоналей выпуклого n -угольника. Найдите формулу для b_n при $n > 2$.
- 21.45** ○ Укажите любую пару равных членов последовательности:
а) $b_n = n^2 - 46n + 5$; в) $b_n = n^2 + 36n - 55$;
б) $a_n = -3n^2 - 24n + 1$; г) $a_n = -2n^2 + 14n - 7$.
- 21.46** ○ Найдите член последовательности $b_n = \frac{20n}{n^2 + 1}$, наиболее близкий к числу: а) 3; б) 7; в) 150; г) 0.
- 21.47** ○ При каких значениях параметра p у последовательности $a_n = n^2 - 18n + p$:
а) ровно один отрицательный член;
б) ровно два отрицательных члена;
в) ровно пять отрицательных членов;
г) все члены отрицательны?
- 21.48** ○ При каких значениях параметра p у последовательности $a_n = -3n^2 + 84n + p$:
а) ровно один положительный член;
б) ровно два положительных члена;
в) все члены положительны;
г) все члены отрицательны?
- 21.49** ○ При каких значениях параметра p у последовательности $a_n = -3n^2 + 6pn + p$:
а) ровно один положительный член;
б) ровно два положительных члена;
в) все члены положительны;
г) все члены отрицательны?

§22

СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

193

Прочитайте п. 1 в § 22 учебника

22.1 ○

Приведите пример последовательности (заданной формулой общего члена), которая является:

- а) ограниченной;
- б) не ограниченной ни сверху, ни снизу;
- в) не ограниченной снизу, но ограниченной сверху;
- г) не ограниченной сверху, но ограниченной снизу.

22.2

Укажите, какие из приведённых последовательностей являются ограниченными сверху, а какие — ограниченными снизу:

- 1) $x_n = 2n - 7$;
- 2) $x_n = -n^2 + 2$;
- 3) $x_n = 9 - 4n$;
- 4) $x_n = n^3 - 1$.

22.3

Укажите, какие из приведённых последовательностей являются ограниченными, а какие — неограниченными:

- 1) $x_n = \frac{2}{n} + 1$;
- 2) $x_n = (-1)^n \cdot n$;
- 3) $x_n = 2 - \frac{4}{n}$;
- 4) $x_n = (-1)^{n-1} \cdot n^3$.

22.4 ○

Докажите, что последовательность a_n ограничена, если:

- а) $a_n = (-1)^{3n-1}$;
- б) $a_n = \frac{1}{n}$;
- в) $a_n = 15 - \frac{1000}{n}$;
- г) $a_n = \frac{17n+3}{n}$.

22.5 ○

Докажите, что последовательность не является ограниченной, если:

- а) $a_n = 3n - 1$;
- б) $b_n = n^2 - 111n - 1$;
- в) $a_n = 15n - \frac{1000}{n}$;
- г) $a_n = \frac{(-1)^n n^2 + 3}{2000n}$.

22.6 ○ Дана ограниченная последовательность a_n . Относительно каких из указанных последовательностей можно утверждать, что они тоже ограниченные:

1) $b_n = 384 + 5a_n$;

3) $d_n = na_n$;

2) $c_n = \frac{a_n}{n}$;

4) $p_n = (a_n)^{70}$?

22.7 ○ При каких значениях параметра a последовательность является ограниченной сверху; ограниченной снизу; ограниченной:

а) $b_n = an + 11$;

в) $b_n = 2n^2 - an - 23$;

б) $b_n = 13 - an^2$;

г) $b_n = \frac{an^2 + 1}{2n - 1}$?

Прочитайте п. 2 в § 22 учебника

195

22.8 ○ Приведите пример последовательности (заданной формулой общего члена), которая является:

а) возрастающей;

б) убывающей;

в) немонотонной;

г) немонотонной, но её подпоследовательность с чётными номерами возрастает, а подпоследовательность с нечётными номерами убывает.

22.9 ○ Приведите пример последовательности (заданной формулой общего члена), которая является:

а) неограниченной и возрастающей;

б) неограниченной и убывающей;

в) ограниченной и возрастающей;

г) ограниченной и убывающей.

22.10 Укажите, какая из данных последовательностей является возрастающей:

а) $-3; -1; 1; \dots$;

в) $0,01; 0,04; 0,09; \dots$;

б) $-3; 1; -1; \dots$;

г) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \dots$.

22.11 Укажите, какая из данных последовательностей является убывающей:

а) $-4; -7; -10; \dots$;

в) $2^{-1}; 2^{-2}; 2^{-3}; \dots$;

б) $\frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \dots$;

г) $2; 2; 2; \dots$.

22.20 ○ Определите характер монотонности числовой последовательности (y_n) , если:

а) $y_n = n^2 - 2n + 3$;

в) $y_n = n^2 + 8n - 3$;

б) $y_n = -n^2 - 4n + 5$;

г) $y_n = -n^2 + 2n - 1$.

22.21 ○ Для каждой из следующих последовательностей составьте выражение $a_{n+1} - a_n$, сравните это выражение с 0 и сделайте вывод о монотонности последовательности:

а) $a_n = 5n + 327$;

в) $a_n = 5n^2 - 7n + 1$;

б) $a_n = 5n^2 - 17n + 1$;

г) $a_n = \frac{3n-1}{n+2}$.

22.22 ○ Для каждой из следующих последовательностей с положительными членами составьте выражение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, сравните это выражение с 1 и сделайте вывод о монотонности последовательности:

а) $a_n = (2,3)^n$;

в) $a_n = (0,9)^n$;

б) $a_n = (0,53)^{2n-5}$;

г) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-n}$.

Исследуйте последовательность на монотонность:

22.23 ○ а) $a_n = 3n + 1$;

в) $c_n = 2 - \frac{5}{3n+1}$;

б) $b_n = \frac{5}{3n+1}$;

г) $d_n = \frac{6n-3}{3n+1}$.

22.24 ○ а) $a_n = 3n^2 + 1$;

в) $a_n = 3n^2 - 15n + 63$;

б) $a_n = 3n^2 + 5n - 13$;

г) $a_n = -3n^2 + 6n - 2$.

22.25 ○ а) $a_n = 3n - \frac{1}{n} - 11$;

в) $a_n = n + 2(-1)^n$;

б) $a_n = 2n + (-1)^n$;

г) $a_n = n - \frac{(-1)^n}{n}$.

22.26 ○ а) $a_n = \frac{5}{n^2+1}$;

в) $c_n = \frac{n^2}{n^2+1}$;

б) $b_n = \frac{n}{n^2+1}$;

г) $p_n = \frac{n^3}{n^2+1}$.

Дана возрастающая последовательность (a_n) . Исследуйте на монотонность последовательность:

22.27 ○

а) $b_n = 3a_n + 3$;

в) $b_n = 4 - 0,7a_n$;

б) $c_n = 3n + a_n$;

г) $p_n = a_n - 3n$.

22.28 ○

а) $d_n = na_n$;

в) $R_n = \frac{a_n}{n}$;

б) $b_n = (a_n)^2 + 3$;

г) $d_n = n + \sqrt{a_n}$.

22.29 ●

При каких значениях параметра a последовательность является возрастающей; убывающей:

а) $b_n = an + 11$;

в) $b_n = 13 - an^2$;

б) $b_n = -n^2 + (8 - a^2)n + 17$;

г) $b_n = 2n^2 - an - 23$?

22.30 ○

Дана последовательность $a_n = n^2$. Исследуйте на монотонность и ограниченность последовательность:

а) a_n ;

б) $b_n = a_{n+1} - a_n$;

в) $c_n = \frac{1}{a_n}$;

г) $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

22.31 ○

Дана последовательность $a_n = \frac{n+1}{n}$. Исследуйте на монотонность и ограниченность последовательность:

а) a_n ;

б) $b_n = a_{n+1} - a_n$;

в) $c_n = \frac{1}{a_n}$;

г) $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

22.32 ○

Укажите какой-либо номер, начиная с которого для всех членов последовательности $a_n = n^2 - 60n + 59$ выполняется условие $a_{k+1} > a_k$ (с этого номера последовательность возрастает).

22.33 ○

Укажите какой-либо номер, начиная с которого для всех членов последовательности $a_n = -3n^2 - 97n + 100$ выполняется условие $a_{k+1} < a_k$ (с этого номера последовательность убывает).

22.34 ○

Для последовательности $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ найдите такое k , что $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, но $\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \leq 1$.

22.35 ○

а) Докажите, что последовательность периметров правильных вписанных в окружность 2^{n+1} -угольников является возрастающей и ограниченной.

б) Докажите, что последовательность периметров правильных описанных около окружности 2^{n+1} -угольников является убывающей и ограниченной.

§ 23

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Прочитайте п. 1 в § 23 учебника

198

23.1 Определите, является ли приведённая ниже последовательность арифметической прогрессией:

а) $13, 10, 7, 4, 1, -2, \dots$;

в) $3, 1, 3, 1, 3, 1, \dots$;

б) $3, 0, -3, -6, -8, \dots$;

г) $-7, -5, -3, -1, 1, \dots$.

23.2 Найдите первый член и разность арифметической прогрессии:

а) $3, -1, -5, -9, \dots$;

в) $0,7, 0,9, 1,1, 1,3, \dots$;

б) $7, 4, 1, -2, \dots$;

г) $-1, -0,9, -0,8, -0,7, \dots$.

23.3 Выпишите первые шесть членов арифметической прогрессии (a_n) , если:

а) $a_1 = 3, d = 7$;

в) $a_1 = -21, d = 3$;

б) $a_1 = 10, d = -2,5$;

г) $a_1 = -17,5, d = -0,5$.

23.4 Запишите конечную арифметическую прогрессию (a_n) , заданную следующими условиями:

а) $a_1 = -2, d = 4, n = 5$;

в) $a_1 = 2, d = 3, n = 6$;

б) $a_1 = 1, d = -0,1, n = 7$;

г) $a_1 = -6, d = 1,5, n = 4$.

23.5 Найдите разность и десятый член арифметической прогрессии:

а) $1, 3, 5, 7, \dots$;

б) $\sqrt{5}, 6 + \sqrt{5}, 12 + \sqrt{5}, 18 + \sqrt{5}, \dots$;

в) $100, 90, 80, 70, \dots$;

г) $3, 3 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, 3 - 3\sqrt{2}, \dots$.

23.6 а) Возрастающая последовательность состоит из всех натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 3. Выясните, является ли она арифметической прогрессией. Если да, то укажите первый член и разность прогрессии.

б) Возрастающая последовательность состоит из всех натуральных чисел, кратных 11. Докажите, что она является арифметической прогрессией; укажите первый член и разность прогрессии.

23.7 Выясните, является ли арифметической прогрессией последовательность (x_n) , заданная формулой n -го члена. Если да, то укажите первый член и разность прогрессии.

а) $x_n = 3n + 1$;

в) $x_n = n^2$;

б) $x_n = 3 \cdot 2^n$;

г) $x_n = 4n - 3$.

23.8 ○ Докажите, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, и найдите разность прогрессии:

а) $a_n = 2n + 1$;

в) $a_n = -3n + 1$;

б) $a_n = 0,5n - 4$;

г) $a_n = -\frac{1}{3}n - 1$.

199

Прочитайте п. 2 в § 23 учебника

23.9 Зная формулу n -го члена арифметической прогрессии (a_n) , найдите a_1 и d :

а) $a_n = 3n - 2$;

в) $a_n = -0,1n + 3$;

б) $a_n = -1 - \frac{n}{3}$;

г) $a_n = 5 - 2n$.

23.10 Составьте формулу n -го члена арифметической прогрессии:

а) 2, 5, 8, 11, ...;

в) 7, 5, 3, 1, ...;

б) 0,5, 1,5, 2,5, 3,5, ...;

г) $-1, -1\frac{1}{7}, -1\frac{2}{7}, -1\frac{3}{7}, \dots$

23.11 Дана арифметическая прогрессия (a_n) . Вычислите:

а) a_6 , если $a_1 = 4$, $d = 3$;

б) a_{15} , если $a_1 = -15$, $d = -5$;

в) a_{17} , если $a_1 = -12$, $d = 2$;

г) a_9 , если $a_1 = 101$, $d = \frac{1}{2}$.

23.12 Найдите разность арифметической прогрессии (a_n) , если:

а) $a_1 = 12$, $a_5 = 40$;

в) $a_1 = -8$, $a_{11} = -28$;

б) $a_1 = -3$, $a_{15} = 53$;

г) $a_1 = 2,5$, $a_{10} = -3,5$.

23.13 Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n) , если:

а) $a_7 = 9$, $d = 2$;

в) $a_{26} = -71$, $d = -3$;

б) $a_{37} = -69$, $d = -2,5$;

г) $a_{14} = -6\sqrt{5}$, $d = -\sqrt{5}$.

23.14 Дана конечная арифметическая прогрессия (a_n) . Найдите a_n , если:

а) $a_1 = 1$, $d = 2$, $n = 11$;

в) $a_1 = \frac{2}{3}$, $d = \frac{3}{4}$, $n = 17$;

б) $a_1 = -1\frac{1}{2}$, $d = -3,75$, $n = 21$;

г) $a_1 = 0,2$, $d = \frac{1}{3}$, $n = 13$.

23.15 Дана конечная арифметическая прогрессия (a_n) . Найдите a_1 , если:

а) $d = 2, n = 15, a_n = -10$;

в) $d = -0,6, n = 17, a_n = 9,5$;

б) $d = \frac{1}{4}, n = 7, a_n = 10\frac{1}{2}$;

г) $d = -0,3, n = 15, a_n = -2,94$.

23.16 Дана конечная арифметическая прогрессия (a_n) . Найдите d , если:

а) $a_1 = 3, a_n = 39, n = 11$;

в) $a_1 = 5\frac{5}{8}, a_n = 1\frac{1}{4}, n = 36$;

б) $a_1 = -0,2, a_n = -18,4, n = 15$;

г) $a_1 = 3,6, a_n = 0, n = 37$.

23.17 Дана конечная арифметическая прогрессия (a_n) . Найдите n , если:

а) $a_1 = 1, d = \frac{2}{3}, a_n = 67$;

в) $a_1 = -6, d = \frac{3}{4}, a_n = 10\frac{1}{2}$;

б) $a_1 = 0, d = 0,5, a_n = 5$;

г) $a_1 = -4,5, d = 5,5, a_n = 100$.

23.18 ○ Докажите, что для любой арифметической прогрессии справедливо соотношение:

а) $a_{13} - a_3 = 10d$;

в) $a_{n+23} - a_n = 23d$;

б) $a_{n+10} - a_{10} = nd$;

г) $a_n - a_m = (n - m)d$.

23.19 Найдите разность арифметической прогрессии (a_n) , если:

а) $a_6 = -30, a_{16} = 30$;

в) $a_3 = -12, a_{14} = -67$;

б) $a_{11} = 4,6, a_{36} = 54,6$;

г) $a_7 = 1,5, a_{12} = -9$.

23.20 Проверьте:

а) является ли число 4,5 членом арифметической прогрессии $-1,5, -1, -0,5, \dots$;б) является ли число 43,5 членом арифметической прогрессии $7,5, 11, 14,5, \dots$.

23.21 Проверьте:

а) является ли число 41 членом арифметической прогрессии (a_n) , у которой $a_1 = -7, d = 4$;б) является ли число -33 членом арифметической прогрессии (a_n) , у которой $a_1 = 3, d = -6$.

23.22 а) Между числами 15 и 23 вставьте число таким образом, чтобы получившиеся три числа являлись последовательными членами арифметической прогрессии.

б) Между числами 16 и 28 вставьте число таким образом, чтобы получившиеся три числа являлись последовательными членами арифметической прогрессии.

23.23 ○

- а) Числа $-8, a_2, a_3, -35$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите разность этой прогрессии.
- б) Числа $-6, a_2, a_3, -15$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите разность этой прогрессии.

23.24 ○

Является ли число b членом заданной арифметической прогрессии (a_n) ? Если да, то укажите номер этого члена.

- а) $a_1 = 5, d = 0,3, b = 21,2$;
б) $a_1 = 3, d = -0,35, b = 0,65$;
в) $a_1 = -7, d = 5,1, b = 44$;
г) $a_1 = -0,13, d = 0,02, b = -0,01$.

23.25 ○

Является ли число b членом заданной арифметической прогрессии (a_n) ? Если да, то укажите номер этого члена.

- а) $a_n = 13 - 0,4n, b = 4,6$; в) $a_n = 5n - 104, b = 21$;
б) $a_n = 3n - 5,7, b = 69,4$; г) $a_n = 21,3 - 1,7n, b = 4,3$.

23.26 ○

Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены заданной арифметической прогрессии (a_n) будут меньше заданного числа A :

- а) $2, 1,9, 1,8, 1,7, \dots, A = 0$;
б) $15,9, 15,5, 15,1, \dots, A = 0,9$;
в) $110, 100, 90, \dots, A = 15$;
г) $-1, -1,75, -2,5, \dots, A = -16,3$.

23.27 ○

Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены заданной арифметической прогрессии (a_n) будут больше заданного числа A :

- а) $a_1 = -12, d = 3, A = 141$; в) $a_1 = -4,5, d = 5,5, A = 0$;
б) $a_1 = 4, d = 2,2, A = 14,7$; г) $a_1 = 14,5, d = 0,7, A = 22,9$.

23.28 ○

Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 6n - 306$. Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены прогрессии:

- а) больше -12 ;
б) являются положительными;
в) принадлежат лучу $[300; +\infty)$;
г) принадлежат открытому лучу $(-6; +\infty)$.

23.29 ○ Зная формулу n -го члена арифметической прогрессии (a_n) , найдите a_1 и d :

а) $a_n = \frac{n+1}{4}$;

в) $a_n = \frac{3n-2}{5}$;

б) $a_n = \frac{2\sqrt{3}-5n}{3}$;

г) $a_n = \frac{\sqrt{7}n-5}{\sqrt{5}}$.

23.30 ○ Составьте формулу n -го члена арифметической прогрессии (a_n) , если:

а) $a_5 = 15$, $a_{12} = 29$;

в) $a_7 = 20$, $a_{15} = 40$;

б) $a_9 = -30$, $a_{19} = -45$;

г) $a_5 = 0,2$, $a_{16} = -7,5$.

Напишите формулу n -го члена арифметической прогрессии, если:

23.31 ○ а) $\begin{cases} a_7 + a_9 = 70, \\ 3a_3 + 7a_7 = 284; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2a_3 - a_5 = 2, \\ a_{19} + 3a_9 = -202. \end{cases}$

23.32 ○ а) $\begin{cases} a_7^2 + a_9^2 = 50, \\ a_8 + a_{10} = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a_{11}^2 + a_{13}^2 = 58, \\ a_{12} + a_{14} = 14. \end{cases}$

23.33 ○ а) $\begin{cases} a_7 + a_{10} = 41, \\ a_6 a_8 = 144; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a_2 a_5 = 112, \\ \frac{a_1}{a_5} = 2. \end{cases}$

23.34 ○ а) В арифметической прогрессии 46, 41, ... найдите наименьший положительный член и его номер.

б) В арифметической прогрессии -37, -29, ... найдите наибольший отрицательный член и его номер.

23.35 ○ При каких значениях разности арифметической прогрессии, первый член которой равен -135, первые десять её членов отрицательные, а одиннадцатый член — положительное число?

23.36 ○ а) Сумма первого и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 14, а произведение второго и четвёртого её членов равно 45. Найдите шестой член этой прогрессии.

б) Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 18, а произведение второго и третьего её членов равно 21. Запишите первые пять членов этой прогрессии, если известно, что третий её член — положительное число.

23.37 ○ Четыре числа являются последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма первых трёх равна -21, а сумма трёх последних чисел равна -6. Найдите эти числа.

Прочитайте п. 3 в § 23 учебника

23.38 Найдите сумму S_n членов конечной арифметической прогрессии (a_n) , если известны первый и последний её члены:

- а) $a_1 = -1$, $a_{30} = 86$; в) $a_1 = -13$, $a_{10} = -5$;
б) $a_1 = 41$, $a_{20} = -16$; г) $a_1 = 17$, $a_{25} = 31$.

23.39 Найдите сумму первых пятидесяти членов арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что:

- а) $a_1 = 2$, $a_{50} = 147$; в) $a_1 = -10$, $a_{50} = 137$;
б) $a_1 = 0,5$, $a_{50} = -97,5$; г) $a_1 = -1,7$, $a_{50} = -8,1$.

23.40 Найдите сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что:

- а) $a_1 = -3$, $d = 1,5$, $n = 16$; в) $a_1 = -2,5$, $d = -0,5$, $n = 40$;
б) $a_1 = 121$, $d = -3,1$, $n = 25$; г) $a_1 = 4,5$, $d = 0,4$, $n = 100$.

23.41 ○ Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии (a_n) , заданной формулой n -го члена:

- а) $a_n = 4n + 3$; в) $a_n = -2n + 8$;
б) $a_n = 0,5n - 3$; г) $a_n = -2,5n - 6$.

23.42 ○ Найдите сумму последних десяти членов конечной арифметической прогрессии, если:

- а) $a_1 = 7$, $d = 2,5$, $n = 25$; в) $a_1 = 17$, $d = -1,3$, $n = 17$;
б) $a_1 = -3$, $d = 0,2$, $n = 51$; г) $a_1 = -19$, $d = 2$, $n = 553$.

23.43 ○ Дана конечная арифметическая прогрессия (a_n) , у которой $a_1 = -2$, $d = 7,5$, $n = 50$. Найдите сумму всех членов этой прогрессии:

- а) с чётными номерами;
б) номера которых при делении на 4 дают в остатке 3.

23.44 ○ Дана конечная арифметическая прогрессия (a_n) , у которой $a_1 = 7$, $d = -2,5$, $n = 57$. Найдите сумму всех членов этой прогрессии:

- а) с нечётными номерами;
б) номера которых при делении на 5 дают в остатке 2.

23.45 ○ а) Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 7.

- б) Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 2.

- 23.46 ○ а) Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 8.
б) Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 12 дают в остатке 5.

Прочитайте п. 4 в § 23 учебника

206

В 23.47—23.49 дана арифметическая прогрессия (a_n) .

- 23.47 а) Зная, что $a_{11} + a_{13} = 122$, найдите a_{12} ;
б) зная, что $a_{19} = 5$, найдите $a_{18} + a_{20}$;
в) зная, что $a_{15} + a_{17} = -2$, найдите a_{16} ;
г) зная, что $a_7 = 4$, найдите $a_6 + a_8$.

- 23.48 а) Зная, что $a_1 + a_{20} = 64$, найдите $a_2 + a_{19}$;
б) зная, что $a_3 + a_{17} = -40$, найдите $a_1 + a_{19}$;
в) зная, что $a_2 + a_{15} = 25$, найдите $a_1 + a_{16}$;
г) зная, что $a_1 + a_{25} = -10$, найдите $a_{10} + a_{16}$.

- 23.49 ○ а) Найдите $a_{10} + a_{20}$, если известно, что $a_9 + a_{11} = 44$ и $a_{19} + a_{21} = 104$.
б) Найдите $a_{15} + a_{30}$, если известно, что $a_{14} + a_{16} = -20$ и $a_{29} + a_{31} = 40$.

- 23.50 ○ а) Найдите те значения x , при которых числа x , $2x - 1$, $5x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.
б) Найдите те значения y , при которых числа $2y + 5$, y , $3y - 8$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

- 23.51 ○ Найдите те значения x , при которых данные числа в указанном порядке образуют конечную арифметическую прогрессию:
а) $x - 4$, $\sqrt{x - 3}$, $x - 6$; б) $4x + 6$, $\sqrt{5 - 4x}$, $-x - 1$.

- 23.52 ● Найдите сумму всех таких значений x , при которых числа $3x + 1$, $5x - 7$ и $x^2 + x - 3$, взятые в том или ином порядке, являются тремя соседними членами арифметической прогрессии.

- 23.53 ● а) В конечной арифметической прогрессии $a_1 = 0,2$, $d = 0,7$, $n = 49$. Сколько в этой прогрессии целых чисел?
б) В конечной арифметической прогрессии $a_1 = 0,15$, $d = 0,35$, $n = 60$. Сколько в этой прогрессии целых чисел?

- 23.54** ○ Найдите наименьшее число, являющееся общим членом двух прогрессий $a_n = 5n - 3$ и $b_n = 17n + 14$.
- 23.55** ● Найдите наименьшее положительное значение разности $A - B$, где A и B одновременно являются членами прогрессий $a_n = 101n - 15$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и $c_k = 13k + 14$, $k = 1, 2, 3, \dots$.
- 23.56** ○ Даны две арифметические прогрессии (a_n) и (b_n) . Известно, что $a_1 = b_2 = 2$ и $a_5 = b_6 - 8$, а разность прогрессии (a_n) в 2 раза меньше разности прогрессии (b_n) . Найдите сумму $a_{10} + b_{10}$.
- 23.57** ● Найдите наименьший и наибольший общие члены арифметических прогрессий (a_n) и (b_n) таких, что $a_{10} = b_{21} = 112$, разности этих прогрессий соответственно равны $d_a = 14$, $d_b = 35$, в прогрессии (a_n) 200 членов, а в прогрессии (b_n) 300 членов.
- 23.58** ● а) Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые делятся на 7 и не делятся на 13.
б) Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые не делятся ни на 7, ни на 13.
- 23.59** ○ При делении девятого члена арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, на второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена на шестой в частном получается 2, а в остатке 5. Найдите первый член и разность прогрессии.
- 23.60** ○ Сумма цифр четырёхзначного числа равна 16. Найдите это число, если известно, что его цифры образуют арифметическую прогрессию и цифра единиц на 4 больше цифры сотен.
- 23.61** ○ Числа -100 и -78 являются соответственно седьмым и девятым членами арифметической прогрессии. Найдите пятнадцатый член этой прогрессии и сумму её первых двадцати членов.
- 23.62** ○ В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, за каждый последующий — на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

- 23.63** ○ Больной принимает лекарство по следующей схеме: в первый день он принимает 5 капель, а в каждый следующий день — на 5 капель больше, чем в предыдущий. Дойдя до нормы 40 капель в день, он 3 дня пьёт по 40 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает приём на 5 капель, доведя его до пяти капель в последний день. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 200 капель)?
- 23.64** ○ Жук ползёт вверх по дереву, начиная от его основания. За первую минуту он прополз 30 см, а за каждую следующую минуту — на 5 см больше, чем за предыдущую. За какое время жук достиг ветки дерева, находящейся на высоте 5,25 м?
- 23.65** ○ Альпинисты в первый день восхождения поднялись на высоту 1400 м, а затем каждый следующий день поднимались на высоту на 100 м меньше, чем в предыдущий. За сколько дней они покорили высоту 5000 м?
- 23.66** ● Докажите, что если числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ в заданном порядке образуют конечную арифметическую прогрессию, то верно равенство:
а) $ab + bc + ac = 3ac$; б) $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$.
- 23.67** ● Докажите, что если числа $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{c+b}$ в заданном порядке образуют конечную арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 также образуют конечную арифметическую прогрессию.
- 23.68** ○ Решите уравнение
 $1 + x + x^2 + (2 + 5x + x^2) + (3 + 9x + x^2) + \dots + (10 + 37x + x^2) = 255$.
- 23.69** ○ Найдите произведение корней многочлена $p(x) = -1 + x + x^2 + (-1 + 2x + x^2) + (-1 + 3x + x^2) + \dots + (-1 + 10x + x^2)$.
- 23.70** ○ Решите уравнение $p(x) = 123x - 75$, где
 $p(x) = 1 + x + x^2 + (1 + 5x + x^2) + (1 + 9x + x^2) + \dots + (1 + 37x + x^2)$.
- 23.71** ○ Известно, что $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 11x^{10}$. Найдите $0,5(p(1) + p(-1))$.
- 23.72** ● При каком значении параметра a уравнение $x^3 - 6x^2 + 9x - a = 0$ имеет три различных корня, которые в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию? Найдите эти корни.

23.73 ○ От некой точки расходятся три дороги под углом 120° друг к другу. Три пешехода одновременно вышли из этой точки и стали двигаться в разных направлениях с постоянной скоростью каждый. Значения скоростей пешеходов образуют арифметическую прогрессию. Через 2 ч пути расстояние между самым медленным и самым быстрым пешеходами составило $2\sqrt{63}$ км, а между самым медленным и третьим пешеходом — $3\sqrt{19}$ км. Найдите скорость движения каждого пешехода.

23.74 ● Железная дорога за простой вагонов под разгрузкой в первый день берёт с предприятия 400 у. е., а в каждый последующий — на 300 у. е. больше, чем в предыдущий. Бригада грузчиков может разгрузить вагоны за 10 дней. Если бригада разгрузит вагоны раньше срока, то за каждый сэкономленный день она получит премию 2350 у. е. При каком сроке разгрузки затраты предприятия на оплату простоя вагонов и на премию грузчикам будут минимальными?

23.75 ● Две землеройные машины разных конструкций роют навстречу друг другу тоннель длиной 30 м. Для первой машины стоимость проходки первого метра равна 150 у. е., а каждого последующего метра на 90 у. е. больше предыдущего. Стоимость проходки каждого метра второй машиной одинакова и равна 1275 у. е. Сколько метров должна прорыть каждая из этих машин, чтобы стоимость работ была минимальной?

§24

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

211

Прочитайте п. 1 в § 24 учебника

Установите, является ли данная последовательность геометрической прогрессией.

24.1

а) 3, 9, 27, 81, 243, ...;

в) $4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$;

б) 3, 6, 9, 12, 15, ...;

г) $\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}, \dots$

- Р4.2 а) $x_n = \frac{3}{2^n}$; в) $x_n = \frac{2}{5} \cdot 3^n$;
б) $x_n = 4n + 3$; г) $x_n = 125 \cdot 5^{-n}$.

Р4.3 Дана возрастающая последовательность всех степеней числа 3 с натуральными показателями. Является ли она геометрической прогрессией? Если да, то чему равен её знаменатель?

Р4.4 Дана убывающая последовательность всех целых отрицательных степеней числа 10. Является ли эта последовательность геометрической прогрессией? Если да, то чему равен её знаменатель?

Установите, является ли данная геометрическая прогрессия возрастающей или убывающей.

- Р4.5 а) 3, 9, 27, ...; в) 4, 1, $\frac{1}{4}$, ...;
б) -2, 8, -32, ...; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ...

- Р4.6 а) $b_1 = 2$, $q = \frac{3}{2}$; в) $b_1 = -3$, $q = -5$;
б) $b_1 = -\sqrt{2}$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $b_1 = 5\sqrt{3}$, $q = -\frac{3}{5}$.

- Р4.7 Найдите знаменатель геометрической прогрессии:
а) 2, $\sqrt{2}$, 1, ...; в) 3^{15} , 3^{14} , 3^{13} , ...;
б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, ...; г) $\frac{12\sqrt{5}}{7}$, $6\sqrt{5}$, $21\sqrt{5}$, ...

- Р4.8 Найдите первые шесть членов геометрической прогрессии (b_n), если:
а) $b_1 = -1$, $q = 3$; в) $b_1 = -1$, $q = -3$;
б) $b_1 = -2$, $q = -\frac{1}{2}$; г) $b_1 = 20$, $q = \sqrt{5}$.

- Р4.9 Выразите указанные члены геометрической прогрессии (b_n) через b_1 и q :
а) b_5 ; б) b_{41} ; в) b_k ; г) b_{2n} .

- Р4.10 Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:
а) b_4 , если $b_1 = 128$, $q = -\frac{1}{2}$; в) b_8 , если $b_1 = \frac{1}{5}$, $q = \sqrt{5}$;
б) b_5 , если $b_1 = 270$, $q = \frac{1}{3}$; г) b_8 , если $b_1 = 625$, $q = -\frac{1}{5}$.

24.11

Дана геометрическая прогрессия (b_n) . Найдите:

а) b_4 , если $b_1 = -2$, $q = -1\frac{1}{2}$;

в) b_4 , если $b_1 = 3$, $q = -0,75$;

б) b_5 , если $b_1 = \sqrt{6}$, $q = \sqrt{2}$;

г) b_6 , если $b_1 = 5\sqrt{5}$, $q = (\sqrt{5})^{-1}$.

24.12

Найдите b_1 и q для геометрической прогрессии (b_n) , заданной следующими условиями:

а) $b_2 = 8$, $b_3 = -32$;

в) $b_2 = \frac{3}{2}$, $b_3 = \frac{3}{4}$;

б) $b_4 = 1$, $b_5 = -\frac{1}{2}$;

г) $b_5 = 6$, $b_6 = 3$.

213

Прочитайте п. 2 в § 24 учебника

24.13

Составьте формулу n -го члена геометрической прогрессии:

а) $b_1 = 3$, $q = 2$;

в) $b_1 = 2,5$, $q = -0,2$;

б) $b_1 = -2,5$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

г) $b_1 = 3\sqrt{3}$, $q = 3^{-1}$.

24.14

Определите b_1 и q , зная формулу n -го члена геометрической прогрессии (b_n) :

а) $b_n = 5^{n-1}$;

в) $b_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$;

б) $b_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$;

г) $b_n = \frac{5}{2^{n+1}}$.

24.15

Докажите, что для любой геометрической прогрессии справедливо соотношение:

а) $\frac{a_{23}}{a_3} = q^{20}$;

б) $\frac{a_{n+33}}{a_n} = q^{33}$;

в) $\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$.

24.16 ○

- а) Между числами 18 и 2 вставьте положительное число так, чтобы получились три последовательных члена геометрической прогрессии.
- б) Между числами 16 и 64 вставьте отрицательное число так, чтобы получились три последовательных члена геометрической прогрессии.

24.17 ○

Является ли число B членом геометрической прогрессии (b_n) ? Если да, то укажите его номер:

а) $b_n = \frac{1}{6} \cdot 0,1^{2n+1}$, $B = \frac{1}{600}$;

в) $b_n = \frac{7}{9} \cdot 3^{n-8}$, $B = 63$;

б) $b_n = 0,002 \cdot (\sqrt{5})^{n-4}$, $B = 0,25$;

г) $b_n = \frac{6}{7} \cdot 0,5^{3n+5}$, $B = \frac{3}{14}$.

1.18 Дана конечная геометрическая прогрессия (b_n) . Найдите b_n , если известно, что:

а) $b_1 = 1, q = 3, n = 10$;

в) $b_1 = 8, q = \frac{1}{2}, n = 5$;

б) $b_1 = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}, n = 6$;

г) $b_1 = 2,5, q = 1,5, n = 5$.

Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если:

1.19 а) $b_1 = 7, b_4 = 448$;

в) $b_1 = 35, b_4 = \frac{5}{49}$;

б) $b_1 = -\sqrt{2}, b_8 = 16$;

г) $b_1 = \frac{9}{5}, b_6 = -\frac{1}{135}$.

1.20 а) $b_1 = 5, b_9 = 1280$;

в) $b_1 = 2, b_7 = 1458$;

б) $b_1 = 100, b_5 = \frac{4}{25}$;

г) $b_1 = 72, b_3 = 2$.

1.21 Дана конечная геометрическая прогрессия (b_n) . Найдите n , если:

а) $b_1 = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}, b_n = \frac{1}{729}$;

в) $b_1 = 2,5, q = \frac{1}{5}, b_n = 4 \cdot 10^{-3}$;

б) $b_1 = 256, q = \frac{1}{2}, b_n = 2$;

г) $b_1 = \frac{1}{343}, q = -7, b_n = -2401$.

1.22 ○ Найдите первый член и знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) , если:

а) $b_7 = 192, b_5 = 48 (q > 0)$;

в) $b_3 = 3\frac{1}{4}, b_6 = -\frac{13}{32}$;

б) $b_2 = 24, b_5 = 81$;

г) $b_3 = 12, b_5 = 48 (q < 0)$.

1.23 ○ Между числами 1 и $\frac{1}{8}$ вставьте два положительных числа так, чтобы получились четыре последовательных члена геометрической прогрессии.

1.24 ○ В правильный треугольник со стороной 32 см последовательно вписываются треугольники; вершины каждого последующего треугольника являются серединами сторон предыдущего треугольника. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию. Запишите формулу n -го члена полученной прогрессии.

1.25 ○ Докажите, что в конечной геометрической прогрессии, имеющей чётное число членов, отношение суммы членов, стоящих на чётных местах, к сумме членов, стоящих на нечётных местах, равно знаменателю прогрессии.

216

Прочитайте п. 3 в § 24 учебника

24.26 ○ Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n) , у которой:

а) $b_1 = 18, q = \frac{1}{3};$

в) $b_1 = -12, q = -\frac{1}{2};$

б) $b_1 = 15, q = \frac{2}{3};$

г) $b_1 = -9, q = \sqrt{3}.$

24.27 ○ Для геометрической прогрессии (b_n) найдите S_n , если:

а) $b_1 = 5, q = 2, n = 6;$

в) $b_1 = -4, q = \frac{1}{2}, n = 13;$

б) $b_1 = -1, q = -1,5, n = 8;$

г) $b_1 = 4,5, q = \frac{1}{3}, n = 8.$

24.28 ○ Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии:

а) $3, 6, 12, \dots;$

в) $-3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \dots;$

б) $-1, 2, -4, \dots;$

г) $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \dots.$

24.29 ○ Найдите S_5 для геометрической прогрессии (b_n) , если:

а) $b_4 = 160, b_5 = 320;$

в) $b_3 = 1, b_5 = \frac{1}{9} (q > 0);$

б) $b_7 = 8, b_9 = 16 (q < 0);$

г) $b_4 = 3\sqrt{3}, b_7 = 27.$

24.30 ○ а) $b_2 = 4, b_4 = 16$. Найдите q и b_3 ($b_3 > 0$);

б) $b_5 = 12, b_7 = 3$. Найдите q и b_6 ($b_6 < 0$);в) $b_{25} = 7, b_{27} = 21$. Найдите q и b_{26} ($b_{26} < 0$);г) $b_6 = 15, b_8 = 5$. Найдите q и b_7 ($b_7 > 0$).

218

Прочитайте п. 4 в § 24 учебника

24.31 ○ а) Найдите те значения переменной t , при которых числа $t, 4t, 8$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

б) Найдите те значения переменной y , при которых числа $-81, 3y, -1$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

- 14.32** ○ а) Найдите те значения переменной x , при которых числа $x - 1$, $\sqrt{3}x$, $6x$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.
- б) Найдите все значения x , при которых числа $2 - x$; $2x - 3$; $4 - 3x$ в том или ином порядке образуют геометрическую прогрессию.

- 14.33** ○ Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, заданной формулой n -го члена:

а) $b_n = \frac{2}{5} \cdot 3^n$;

в) $b_n = \frac{5}{2^n}$;

б) $b_n = \frac{0,3}{(-5)^{n-1}}$;

г) $b_n = -\frac{1}{7} \cdot 2^{n+1}$.

- 14.34** ○ Укажите наименьший номер, начиная с которого все члены геометрической прогрессии (b_n) будут больше числа A :

а) $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $A = 324$;

в) $b_n = 2 \cdot 5^{n-1}$, $A = 1250$;

б) $b_n = 3,5 \cdot (\sqrt{2})^{n-2}$, $A = 14$;

г) $b_n = \frac{2}{5} \cdot (\sqrt{3})^{n+3}$, $A = 32,4$.

- 14.35** ○ Укажите номера всех тех членов заданной геометрической прогрессии, которые меньше заданного числа A :

а) $1, 3, 9, 27, \dots$, $A = 729$;

в) $243, 81, 27, \dots$, $A = \frac{1}{81}$;

б) $3, 1,5, 0,75, \dots$, $A = \frac{3}{32}$;

г) $16, 8\sqrt{2}, 8, \dots$, $A = 1$.

- 14.36** ○ В конечной геометрической прогрессии указаны первый член b_1 , знаменатель q и сумма S_n всех её членов. Найдите число членов прогрессии:

а) $b_1 = 5$, $q = 3$, $S_n = 200$;

в) $b_1 = 3$, $q = 2$, $S_n = 189$;

б) $b_1 = -1$, $q = \frac{1}{2}$, $S_n = -1\frac{63}{64}$;

г) $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{3}$, $S_n = 4\frac{13}{27}$.

- 14.37** ○ а) Дана возрастающая геометрическая прогрессия (b_n) . Найдите знаменатель этой прогрессии, если $b_1 = \sqrt{3}$, $b_9 = 81\sqrt{3}$.
- б) Дана убывающая геометрическая прогрессия (b_n) . Найдите знаменатель этой прогрессии, если $b_1 = 375$, $b_3 = 15$.

- 14.38** ○ а) Дана знакочередующаяся геометрическая прогрессия (b_n) . Найдите знаменатель прогрессии и сумму её первых пяти членов, если $b_1 = 5$, $b_3 = 80$.

- б) Дана знаочередующаяся геометрическая прогрессия (b_n) . Найдите знаменатель прогрессии и сумму её первых семи членов, если $b_1 = 1$, $b_3 = 8$.

24.39 ○ Первый член возрастающей геометрической прогрессии (b_n) равен 4, а сумма третьего и пятого членов равна 80. Найдите q и b_{10} , если известно, что прогрессия возрастающая.

24.40 ○ Разность между вторым и третьим членами геометрической прогрессии равна 18, а их сумма 54. Определите первый член и знаменатель прогрессии.

24.41 ○ Четвёртый член геометрической прогрессии в 4 раза больше её шестого члена, а сумма второго и пятого членов равна 63. Найдите двенадцатый член этой прогрессии.

24.42 ○ Между числами 1 и 81 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

24.43 ○ Все члены геометрической прогрессии — положительные числа. Известно, что разность между первым и пятым членами равна 15, а сумма первого и третьего членов равна 20. Найдите десятый член этой прогрессии.

24.44 ○ Составьте конечную геометрическую прогрессию из шести членов, зная, что сумма трёх первых членов равна 14, а трёх последних 112.

24.45 ○ Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда образуют геометрическую прогрессию. Объём параллелепипеда равен 216 м^3 , а сумма длин всех его рёбер равна 104 м. Найдите измерения параллелепипеда.

24.46 ○ Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если три последовательных её члена равны длинам сторон прямоугольного треугольника.

24.47 ○ Найдите сумму квадратов первых шести членов геометрической прогрессии (b_n) :

а) $b_1 = 3$, $q = \sqrt{2}$;

в) $b_1 = 9\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $b_1 = \sqrt{5}$, $q = \sqrt{6}$;

г) $b_1 = \sqrt{12}$, $q = (\sqrt{2})^{-1}$.

Найдите сумму:

24.48 ○ а) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8$;

в) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^6}$;

б) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + \frac{1}{2^{10}}$;

г) $1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots - 3^9$.

24.49 ○ а) $1 + x + x^2 + \dots + x^{100}$;

в) $x^2 - x^4 + x^6 - \dots - x^{20}$;

б) $x + x^3 + x^5 + \dots + x^{35}$;

г) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{40}}$, $x \neq 0$.

24.50 ○ Определите первый и последний члены конечной геометрической прогрессии, для которой:

а) $n = 8$; $q = 2$; $S_8 = 765$;

б) $n = 5$; $q = \frac{2}{3}$; $S_5 = 211$.

24.51 ○ Найдите первый член, знаменатель и сумму десяти членов геометрической прогрессии, если: $b_4 - b_1 = -36$; $b_3 + b_4 + b_5 = 6$; $q < 0$.

24.52 ○ В геометрической прогрессии $u_6 = 64$, а отношение суммы $u_7 + u_9$ к сумме $u_2 + u_4$ равно 32. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

24.53 ○ Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 42, а их произведение равно -1000 . Найдите четвёртый член этой прогрессии, если известно, что все её члены — целые числа.

24.54 ○ В геометрической прогрессии произведение первых трёх членов равно 1728, а их сумма равна 63. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

24.55 ○ В геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами известно произведение третьего, пятого, восьмого и двенадцатого членов, равное 144. Найдите произведение четвёртого и десятого её членов.

24.56 ○ В геометрической прогрессии (b_n) известно произведение седьмого и двадцатого членов, равное p . Найдите произведение второго, шестнадцатого, семнадцатого и девятнадцатого её членов.

24.57 ○ а) На графике функции $y = ax^2$, $a \neq 0$, выделены пять точек, абсциссы $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ которых в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Будут ли соответствующие ординаты этих точек образовывать геометрическую прогрессию? Если будут, то найдите её знаменатель.

б) На графике функции $y = ax^3$, $a \neq 0$, выделены пять точек, абсциссы $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ которых в указанном порядке являются членами геометрической прогрессии. Образуют ли соответствующие ординаты этих точек геометрическую прогрессию? Если да, то найдите её знаменатель.

24.58 ○ Седьмой член геометрической прогрессии в 5 раз больше её пятого члена. Найдите отношение первого и сто первого членов прогрессии.

24.59 ○ В геометрической прогрессии (a_n) все члены — положительные числа. Известно, что $1 \leq b_5 \leq 2$; $16 \leq b_7 \leq 18$. Какие значения может принимать шестой член этой прогрессии? Найдите наибольшее и наименьшее значения шестого члена прогрессии.

24.60 ○ Известно, что в геометрической прогрессии семнадцатый член принадлежит отрезку $[9; 10]$, а шестнадцатый — отрезку $[2; 3]$. В каких пределах может изменяться знаменатель этой прогрессии?

24.61 ● Пусть числа α и β — корни квадратного уравнения $4x^2 - 3x + a = 0$, а числа γ и δ — корни уравнения $x^2 - 3x + b = 0$. При каких значениях a и b числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию?

222

Рассмотрите решение примера 8 в § 24 учебника

24.62 ● Найдите сумму:

- а) $1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1$, где последнее слагаемое содержит n единиц;
б) $7 + 77 + \dots + 777\dots 7$, где последнее слагаемое содержит n семёрок.

224

Прочитайте п. 6 в § 24 учебника

24.63 ○ Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т. д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.

- 24.64** ○ Планируется взять в банке кредит в 50 тыс. рублей на 5 лет. В начале каждого года банк начисляет 20% на общую сумму имеющейся задолженности. Найдите общий размер выплат в результате погашения кредита, если:
- а) в середине каждого года выплачивать банку начисленные им в начале 20%, а в конце срока вернуть сам кредит;
 - б) провести только одну выплату, в конце срока, вернув и кредит, и проценты.
- 24.65** ○ Банк начисляет 7% годовых. 1 января 2012 г. в этот банк была положена сумма в a р. Найдите размер вклада на 1 января 2017 г., если в течение этого времени процентная ставка оставалась без изменения. С помощью калькулятора выясните, через какое наименьшее число лет сумма вклада увеличится более чем в 2 раза.
- 24.66** ● За понедельник акции банка выросли в цене на целое число n процентов. За вторник они упали в цене на то же число процентов. В итоге, за понедельник и вторник акции изменились в цене на 1%. Найдите n .
- 24.67** ● В результате трёхкратного повышения цены на некоторый товар на одно и то же число процентов цена товара стала превышать первоначальную цену на 72,8%. На сколько процентов повышалась цена на товар каждый раз?
- 24.68** ○ В угол 60° вписана окружность радиусом R . В образовавшийся криволинейный треугольник вновь вписана окружность, касающаяся сторон угла и первой окружности. Далее этот процесс повторяется (рис. 92). Найдите радиус:
- а) десятой такой окружности;
 - б) n -й окружности.

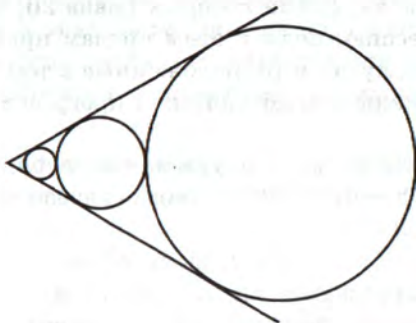


Рис. 92

- 24.69** ○ В угол 2α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) вписана окружность радиусом R . В образовавшийся криволинейный треугольник вновь вписана окружность, касающаяся сторон угла и первой окружности. Далее этот процесс повторяется (см. рис. 92). Найдите радиус:
а) десятой такой окружности; б) n -й окружности.

220

Рассмотрите решение примеров 6 и 7 в § 24 учебника

- 24.70** ○ Три числа составляют конечную геометрическую прогрессию. Если последнее число уменьшить на 16, то получится конечная арифметическая прогрессия. Найдите два последних числа, если первое равно 9.
- 24.71** ○ Сумма трёх чисел, составляющих конечную арифметическую прогрессию, равна 24. Если второе число увеличить на 1, а последнее на 14, то получится конечная геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.
- 24.72** ○ Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, являющиеся последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите седьмой член исходной геометрической прогрессии, если известно, что он меньше 1000.
- 24.73** ○ Три числа, сумма которых равна 31, можно рассматривать как три последовательных члена некоторой геометрической прогрессии или как первый, второй, седьмой члены некоторой арифметической прогрессии. Найдите эти числа.
- 24.74** ○ Три числа, сумма которых равна 26, составляют геометрическую прогрессию. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 6, 3, то получатся расположенные в том же порядке последовательные члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.
- 24.75** ○ а) Числа x , y , z в указанном порядке образуют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии. Найдите эти числа.
б) Числа x , y , z в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, а числа $x + y$, $y + z$, $z + x$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

- 21.76** ○ Найдите сумму десяти членов каждой из двух возрастающих прогрессий, арифметической и геометрической, если известно, что первый член каждой прогрессии равен 2, третьи члены прогрессий равны между собой, пятый член арифметической прогрессии на 10 больше второго члена геометрической прогрессии.
- 21.77** ○ Арифметическая и геометрическая прогрессии имеют первые члены, равные 5; третьи члены этих прогрессий также равны между собой, а второй член арифметической прогрессии на 10 больше второго члена геометрической прогрессии. Найдите эти прогрессии.
- 21.78** ○ Арифметическая и геометрическая прогрессии имеют первые члены, равные 1; третий член арифметической прогрессии равен второму члену геометрической прогрессии, а сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии вдвое больше суммы второго и третьего членов арифметической прогрессии. Найдите эти прогрессии.
- 21.79** ● Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второй её член увеличить на 2, то числа в том же порядке образуют арифметическую прогрессию. Если третий член этой арифметической прогрессии увеличить на 16, то числа в том же порядке составят опять геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.
- 21.80** ● Найдите трёхзначное число, если известно, что цифры единиц, десятков и сотен в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а цифры числа, который меньше данного на 10, в том же порядке образуют геометрическую прогрессию.
- 21.81** ● Найдите трёхзначное число, если известно, что цифры единиц, десятков и сотен в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, который меньше данного на 400, в том же порядке образуют арифметическую прогрессию.
- 21.82** ● Найдите четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую. Сумма крайних членов равна 14, а сумма средних — 12.
- 21.83** ● Разность арифметической прогрессии (a_n) не равна нулю. Числа, равные произведениям a_1a_2 ; a_2a_3 ; a_3a_1 , образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите её знаменатель.

§25 МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

226

Прочитайте пп. 1 и 2 в § 25 учебника

25.1 ○ Используя метод математической индукции, докажите:

а) формулу n -го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n - 1);$$

б) формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n.$$

25.2 ○ Используя метод математической индукции, докажите:

а) формулу n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$;

б) формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ при } q \neq 1.$$

25.3 ○ Докажите, что при любом натуральном значении n выполняется равенство:

а) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2};$

б) $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = (2n + 1)n;$

в) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2;$

г) $10 + 11 + 12 + \dots + (n + 9) = \frac{n(n + 19)}{2}.$

Докажите, что при любом натуральном значении n выполняется равенство:

25.4 ○ а) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1;$

б) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right);$

в) $-3 + 9 - 27 + 81 - \dots + (-3)^n = -\frac{3}{4} (1 - (-3)^{n+1});$

г) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$

25.5 ○ а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$;

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

г) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

25.6 ○ а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

г) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

25.7 ○ а) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$;

б) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$;

в) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$;

г) $4 \cdot 2 + 7 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^5 + \dots + (3n+1) \cdot 2^{2n-1} = n \cdot 2^{2n+1}$.

25.8 ○ Выведите формулу для суммы:

а) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Рассмотрите решение примера 5 в § 25 учебника

233

Докажите, что для любого натурального значения n справедливо утверждение:

25.9 ○ а) $(n^3 + 35n) : 6$;

б) $(n^3 + 3n^2 + 8n) : 3$;

в) $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) : 24$;

г) $(2n^3 + 3n^2 + 7n) : 6$.

- 25.10 ○ а) $(7^n - 1) : 6$; в) $(17^n - 1) : 16$;
б) $(2^{2n+1} + 1) : 3$; г) $(13^{2n+1} + 1) : 14$.

- 25.11 ○ а) $(7^n + 9) : 8$, если n — нечётное;
б) $(4^n - 3^n - 7) : 84$, если n — чётное;
в) $(3^n + 7) : 8$, если n — чётное;
г) $(5 \cdot 2^{n-2} + 3^{n-1}) : 19$, если n кратно 3.

- 25.12 ○ а) $(18^n - 1) : 17$; б) $(6^{2n} - 1) : 7$.

- 25.13 ○ а) $(11^{n+2} + 12^{12n+1}) : 133$; б) $(7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n) : 19$.

- 25.14 ○ а) $(4^n + 15n - 1) : 9$; б) $(5^n + 2 \cdot 3^n + 5) : 8$.

231

Рассмотрите решение примеров 3 и 4 в § 25 учебника

Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

- 25.15 ○ а) $4^n > 7n - 5$; в) $5^n > 3n - 1$;
б) $3^n - 2^n \geq n$; г) $4^n - 3^n \geq n^2$.

- 25.16 ○ а) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < 1$;
б) $\frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + \dots + \frac{1}{(4n+1)^2} < \frac{1}{4}$.

- 25.17 ○ а) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 10$. Докажите, что $a_n = 10n - 8$.
б) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n - 6$. Докажите, что $a_n = -6n + 9$.

- 25.18 ○ а) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 10a_n$. Докажите, что $a_n = 0,2 \cdot 10^n$.
б) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n$. Докажите, что $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.

- 25.19 ○ а) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. Докажите, что $a_n = \frac{2}{3}((-1)^{n+1} + 2^n)$.
б) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 5$, $a_2 = -2$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Докажите, что $a_n = 17 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^n$.

- 25.20 ● а) Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$. Докажите, что все члены последовательности с нечётными номерами кратны 4.
б) Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 8n$. Докажите, что каждый член последовательности является квадратом целого числа.
- 25.21 ○ Докажите, что количество разных наборов по два предмета, которые можно сделать из n различных предметов, равно $\frac{n(n+1)}{2}$ ($n > 1$).
- 25.22 ● Докажите, что количество разных наборов по три предмета, которые можно сделать из n различных предметов, равно $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ($n > 2$).
- 25.23 ● Докажите, что количество разных непустых наборов, которые можно сделать из n различных предметов, равно $2^n - 1$.
- 25.24 ○ Докажите, что n разных предметов можно расставить в ряд $n!$ способами ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).
- 25.25 ● Докажите методом математической индукции, что у выпуклого n -угольника ($n \geq 3$):
а) сумма внутренних углов равна $180^\circ(n-2)$;
б) число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

5 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА

§26

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

237

Прочитайте п. 1 в § 26 учебника.

26.1 ○

Найдите количество всех:

- а) двузначных чисел;
- б) двузначных чисел, состоящих из разных цифр;
- в) двузначных чисел, сумма цифр которых больше 16;
- г) двузначных чисел, произведение цифр которых меньше 2.

26.2 ○

Из цифр 4, 6, 7 составляют различные трёхзначные числа без повторяющихся цифр.

- а) Найдите наибольшее число.
- б) Найдите наименьшее число, у которого вторая цифра равна 7.
- в) Сколько чисел, оканчивающихся цифрой 7, можно составить?
- г) Сколько всего чисел можно составить?

26.3 ○

Из цифр 0, 1, 4, 8, 9 составляют двузначное число (повторения цифр допускаются).

- а) Найдите наибольшее число.
- б) Найдите наименьшее число, которое кратно 9.
- в) Сколько чётных чисел можно составить?
- г) Перечислите все числа, которые кратны 8.

26.4 ○

Для завтрака на кусок белого, чёрного или ржаного хлеба можно положить сыр или колбасу. Бутерброд можно запить чаем, молоком или кефиром.

- а) Нарисуйте дерево возможных вариантов завтрака.
- б) В скольких случаях будет выбран молочный напиток?
- в) Что более вероятно: то, что хлеб будет ржаным, или то, что бутерброд будет с сыром?
- г) Как изменится дерево вариантов, если известно, что сыр не положат на чёрный хлеб, а колбасу не будут запивать кефиром?

26.5 ○

В урне лежит девять неразличимых на ощупь шаров: пять белых и четыре чёрных. Вынимают одновременно два шара. Если они разного цвета, то их откладывают в сторону, а если одного цвета, то возвращают в урну. Такую операцию повторяют два раза.

- а) Нарисуйте дерево возможных вариантов.
- б) В скольких случаях в урне останется девять шаров?
- в) В скольких случаях в урне останется не более пяти шаров?
- г) Нарисуйте дерево возможных вариантов, если указанную в условии операцию повторяют три раза.

Прочитайте п. 2 в § 26 учебника

239

26.6 ○

В коридоре три лампочки.

- а) Сколько имеется различных способов освещения коридора, включая случай, когда все лампочки не горят?
- б) Сколько имеется различных способов освещения, если известно, что лампочки № 1 и № 2 горят или не горят одновременно?
- в) Сколько имеется различных способов освещения, если известно, что при горящей лампочке № 3 лампочка № 2 не горит?
- г) Сколько имеется различных способов освещения коридора, когда горит большинство лампочек?

26.7 ○

Несколько стран решили использовать для своего государственного флага прямоугольник, разделённый на четыре вертикальные полосы одинаковой ширины разных цветов: белого, синего, красного, зелёного. У каждой страны — свой флаг. Сколько всего стран:

- а) могут использовать такие флаги;
- б) могут использовать флаги с первой белой полосой;
- в) могут использовать флаги с третьей не зелёной полосой;
- г) могут использовать флаги с синей и с красной полосами, расположенными подряд?

26.8 ○ В книжке-раскраске нарисованы непересекающиеся треугольник, квадрат и круг. Каждую фигуру надо раскрасить в один из цветов радуги, разные фигуры — в разные цвета.

- Сколько существует способов раскрашивания?
- Сколько среди них способов, при которых круг — оранжевый?
- Сколько среди них способов, при которых треугольник — не красный?
- Сколько существует способов раскрашивания в холодные цвета?

26.9 ○ На координатной плоскости отмечены все точки, абсциссы и ординаты которых равны одному из следующих чисел: $-3, -1, 1, 2, 7$ (повторения допускаются).

- Сколько всего таких точек?
- Сколько точек лежит левее оси ординат?
- Сколько точек лежит выше оси абсцисс?
- Сколько точек лежит в круге радиусом 5 с центром в начале координат?

26.10 ○ Известно, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$ (совпадения допускаются).

- Найдите наименьшее и наибольшее значения числа x .
- Сколько всего таких чисел можно составить?
- Сколько среди них будет чётных чисел?
- Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся нулём?

241

Прочитайте п. 3 в § 26 учебника

Вычислите:

26.11 ○ а) $7!$; б) $8!$; в) $6! - 5!$; г) $\frac{5!}{5}$.

26.12 ○ а) $\frac{10!}{5!}$; б) $\frac{11!}{5! \cdot 6!}$; в) $\frac{51!}{49!}$; г) $\frac{14!}{7! \cdot 3! \cdot 4!}$.

26.13 ○ Делится ли $11!$ на:
а) 64; б) 25; в) 81; г) 49?

26.14 ○ Сократите дробь:

а) $\frac{n!}{(n-1)!}$; б) $\frac{(2k+1)!}{(2k-1)!}$; в) $\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$; г) $\frac{(4m-1)!}{(4m-3)!}$.

26.15 ○ Решите в натуральных числах уравнение:

- а) $n! = 7(n-1)!$; в) $(k-10)! = 77(k-11)!$;
 б) $(m+17)! = 420(m+15)!$; г) $(3x)! = 504(3x-3)!$.

26.16 ○ К хозяину дома пришли гости A, B, C, D . За круглым столом — пять разных стульев.

- а) Сколько существует способов рассаживания?
 б) Сколько существует способов рассаживания, если место хозяина дома уже известно?
 в) Сколько существует способов рассаживания, если известно, что гостя C следует посадить рядом с гостем A ?
 г) Сколько существует способов рассаживания, если известно, что гостя A не следует сажать рядом с гостем D ?

26.17 Из цифр 0, 2, 8, 9 составляют различные трёхзначные числа (повторения цифр допускаются).

- а) Найдите наименьшее число.
 б) Укажите все числа, которые меньше 250.
 в) Укажите все нечётные числа, которые больше 900.
 г) Укажите все числа, которые кратны 40.

26.18 На дне портфеля лежат неразличимые на ощупь карандаши: два простых и три цветных. Их вынимают по одному. Цветной карандаш оставляют на столе, а простой карандаш отправляют обратно на дно портфеля. Такая операция повторяется трижды.

- а) Нарисуйте дерево возможных вариантов.
 б) В скольких случаях все вынутые карандаши будут простыми?
 в) В скольких случаях все вынутые карандаши будут цветными?
 г) В скольких случаях среди вынутых карандашей цветных будет больше, чем простых?

26.19 ● В таблице собрана информация о выходе новостей на четырёх телеканалах.

	1-й выпуск	2-й выпуск и далее
Канал № 1 (федеральный)	6-00	9-00 и далее через каждые 3 часа
Канал № 2 (федеральный)	8-00	11-00 и далее через каждые 3 часа
Канал № 3 (региональный)	6-00	10-00 и далее через каждые 4 часа
Канал № 4 (городской)	9-30	11-30 и далее через каждые 2 часа

- в) Точки $(1; -3)$, $(0; 0)$, $(0; 4)$, $(3; 0)$, $(3; 7)$ являются вершинами выпуклого пятиугольника. Сколькими способами можно обозначить эти вершины буквами P, R, S, T, Q ?
- г) В скольких случаях в задании в) PR будет одной из сторон?

Р6.24 ○ В волейбольной команде шесть человек, а на площадке шесть позиций (номеров) для их расстановки.

- а) Сколькими способами команду можно расставить по позициям?
- б) Сколько есть способов расстановки, при которых капитан находится на подаче?
- в) Сколько есть способов расстановки, при которых капитан находится не на подаче?
- г) Сколько есть способов расстановки, при которых капитан находится или на подаче, или на месте разыгрывающего?

Р6.25 ● Упростите выражение:

а) $\frac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!}$;

в) $\frac{25m^5 - m^3}{(5m+1)!} \cdot \left(\frac{1}{5 \cdot (5m-2)!} \right)^{-1}$;

б) $\frac{1}{(n-2)!} - \frac{n^3 - n}{(n+1)!}$;

г) $\frac{(3k+3)! \cdot k!}{(3k)!} : \frac{(k+3)!(3k+1)}{k^2 + 5k + 6}$.

§ 27

СТАТИСТИКА: ДИЗАЙН ИНФОРМАЦИИ

Прочитайте п. 1 в § 27 учебника

246

27.1 Укажите общий ряд данных следующих измерений:

- а) вес (в кг) взрослого человека;
- б) длина слова (количество букв в слове) русского языка;
- в) число страниц в ежедневной газете;
- г) текущие отметки в школьном дневнике.

27.2 Укажите общий ряд данных следующих измерений:

- а) результаты прыжков в высоту (с точностью до 5 см) среди мальчиков 9-го класса;
- б) площадь (в м^2) кухни в городской квартире;
- в) высота потолков (в дм) в городской квартире;
- г) сумма отметок в выпускном школьном аттестате за знания по русскому языку, литературе и математике.

27.3



Продавец записывал массу каждого проданного арбуза (с точностью до 0,5 кг). У него получились такие данные:

8	6,5	9,5	11	8	7	9	11
6	8,5	10	12	10,5	7	10	9
5	11	8	7	10	6	7	11
8	7	10	6	11	8	10	8
5	7	10	8,5	6	8	10,5	
7	9	8	11	7	6,5	8	
8	10,5	8,5	8	9	8	10	
12	8	7	9	8	6	12	

- Сколько арбузов он продал?
- Каков общий ряд данных измерения веса арбузов?
- Укажите наименьшую и наибольшую варианты этого измерения.
- Какова кратность варианты 5, варианты 8, варианты 12?
- Приведите пример числа из общего ряда данных, которое не является вариантом этого измерения.

250

Прочитайте п. 2 в § 27 учебника

27.4



Результаты измерения роста (в см) девятиклассников представлены в таблице:

162	168	157	176	185	160	162	158	181	179
164	176	177	180	181	179	175	180	176	165
168	164	179	163	160	176	162	178	164	190
181	178	168	165	176	178	185	179	180	168
160	176	175	177	176	165	164	177	175	181

- Каков общий ряд данных измерения роста девятиклассников?
- Укажите наименьшую и наибольшую варианты проведённого измерения.
- Какова кратность варианты 168; варианты 179?
- Приведите пример числа из общего ряда данных, которое не является вариантом этого измерения.

27.5



Ценники в продуктовом магазине распределили по ценовым категориям. Получилось такое распределение (границную цену относят к более высокой категории):

Цена, р.	0—20	20—50	50—100	100—150	150—200	> 200
Кол-во ценников	31	52	47	38	19	13

- Найдите объём измерения, т. е. количество распределённых ценников.
- Какова частота варианты «от 100 до 150 р.»?
- Какова процентная частота варианты «больше или равно 200 р.»?
- Дополните таблицу строкой частот вариант и строкой их процентных частот.

27.6 ○ В специализированном спортивном магазине продаётся 50 видов велосипедов. Они распределены по цене (граничную цену относят к более высокой категории):

Цена, тыс. р.	До 3	3—6	6—9	9—12	12—15	> 15
Кол-во видов	3	8	19	?	11	2

- Сколько видов велосипедов стоят от 9 до 12 тыс. р.?
- Какова частота очень дорогих (≥ 15 тыс. р.) велосипедов?
- Какова процентная частота относительно дешёвых (< 6 тыс. р.) велосипедов?
- Какова процентная частота моды проведённого измерения?

27.7 ○ В сводной таблице распределения данных некоторого измерения оказались пустые места. Заполните их.

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность		5			
Частота	0,45		0,1		
Частота, %		25		20	

Прочитайте пп. 3 и 4 в § 27 учебника

252

27.8 ○ По приведённому многоугольнику кратностей данных (рис. 93) определите:

- количество вариантов измерения;
- объём измерения;
- моду измерения;
- медиану измерения.

27.12 ● В сентябре–ноябре Коля получил по геометрии такие отметки: 4, 3, 5, 5, 4, 4. Он хотел, чтобы его средняя отметка за первое полугодие стала не меньше 4,5, и планировал для этого получать в декабре одни пятёрки.

- а) Какое наименьшее количество пятёрок надо было бы для этого получить?
- б) Какова его реальная средняя декабрьская отметка, если на самом деле в декабре он получил отметки 4, 5, 5, 4?

27.13 ● В сводной таблице распределения данных некоторого измерения оказались пустые места. Заполните их.

	Варианта						Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	
Кратность	291		113				
Частота		0,122				0,193	
Частота, %	29,1			20,2	7,9		

27.14 ○ По приведённому многоугольнику кратностей данных (рис. 94):

- а) определите объём измерения;
- б) найдите моду измерения и её частоту;
- в) составьте таблицу частот;
- г) нарисуйте многоугольник процентных частот.

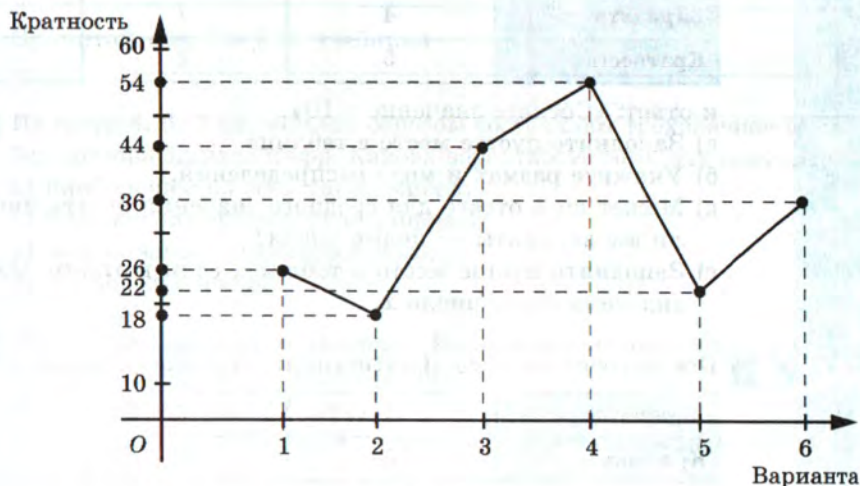


Рис. 94

27.15



Деталь по норме должна весить 431 г. Контроль при взвешивании 2000 деталей дал такие результаты:

Вес, г	427	428	429	430	431	432	433	434	435
Число деталей	40	80	220	360	610	430	200	40	20

- Чему равна мода измерения?
- Каков процент деталей, вес которых отличается от планового не более чем на два грамма?
- Составьте таблицу распределения частот.
- Постройте многоугольник частот. Для удобства из всех вариантов вычтите по 431.

27.16



Девятиклассник за первое полугодие получил итоговые «пятёрки» по трём предметам, «четвёрки» по восьми предметам и «тройки» по пяти предметам.

- Найдите среднее значение его полугодовых оценок.
- Каким было бы среднее значение, если бы он по физкультуре вместо «пятёрки» получил бы «тройку»?
- Каким было бы среднее значение, если бы он по математике и по литературе получил «пятёрки», а не «четвёрки»?
- По какому наименьшему количеству предметов ему следует улучшить оценку на 1 балл для того, чтобы среднее значение его оценок стало больше 4?

27.17



После урока по теме «Статистика» на доске остались таблица

Варианта	4	7	
Кратность	5	2	3

и ответ: «Среднее значение = 10».

- Заполните пустое место в таблице.
- Укажите размах и моду распределения.
- Может ли в ответе для среднего значения стоять число 15, если все варианты — целые числа?
- Заполните пустое место в таблице, если в ответе для среднего значения стоит число x .

27.18



После урока по теме «Статистика» на доске остались таблица

Варианта	4	7	11
Кратность	5	2	

и ответ: «Среднее значение = 10».

- а) Заполните пустое место в таблице.
- б) Укажите размах и моду распределения.
- в) Можно ли пустое место в таблице заполнить так, чтобы среднее значение стало равно 5?
- г) Какое ближайшее к 5 число может стоять в ответе для среднего значения?

27.19 ● При каком наименьшем n среднее ряда из n двоек и одной пятёрки будет:

- а) меньше 3;
- б) меньше 2,5;
- в) меньше 2,1;
- г) равняться 2,01?

27.20 ● Семь экспертов независимо оценивают качество товара. Наименьший и наибольший результаты отбрасывают и вычисляют дисперсию оставшихся оценок. Если дисперсия окажется меньше 0,09, то оценки товара считаются согласованными. Для следующих случаев оценок семи экспертов найдите дисперсию и определите, являются ли оценки согласованными или нет?

- а) 12,3; 12,7; 12,5; 12,0; 12,6; 12,9; 12,4.
- б) 10,6; 9,7; 10,3; 9,5; 10,5; 10,4; 9,6.

§ 28

ПРОСТЕЙШИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ

Прочитайте п. 1 в § 28 учебника

261

28.1 ● Из цифр 4, 6, 7 случайным образом составляют трёхзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что получится:

- а) наибольшее из всех таких чисел;
- б) число, у которого вторая цифра 7;
- в) число, заканчивающееся на 6;
- г) число, кратное 5?

28.2 ● Монету подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что:

- а) в последний раз выпадет решка;
- б) ни разу не выпадет орёл;
- в) число выпадений орла в два раза больше числа выпадений решки;
- г) при первых двух подбрасываниях результаты будут одинаковы?

28.3 ○ Случайным образом выбирают двузначное число. Найдите вероятность того, что оно:

- а) оканчивается нулём;
- б) состоит из одинаковых цифр;
- в) больше 27 и меньше 46;
- г) не является кубом другого целого числа.

28.4 ○ Имеются четыре кандидата: Владимир Владимирович, Василий Всеволодович, Вадим Владимирович и Владимир Венедиктович. Из них случайно выбирают двоих. Какова вероятность того, что:

- а) будет выбран Владимир Венедиктович;
- б) отца одного из кандидатов зовут так же, как и самого кандидата;
- в) будут выбраны кандидаты с одинаковыми именами;
- г) будут выбраны кандидаты с разными отчествами?

28.5 ○ Случайным образом выбирают двузначное число. Найдите вероятность того, что:

- а) его цифры различаются больше чем на 8;
- б) его цифры различаются больше чем на 7;
- в) при перестановке цифр местами получится двузначное число, которое меньше исходного;
- г) оно ближе к 27, чем к 72.

264

Прочитайте п. 2 в § 28 учебника

28.6 ○ В задании линейной функции $y = ax + 152$ в качестве коэффициента a наудачу подставляют некоторое число из множества $\{-10, -3, 0, 1, 2\}$. Найдите вероятность того, что график функции:

- а) не пересечёт ось ординат;
- б) не пересечёт ось абсцисс;
- в) пересечёт ось абсцисс левее точки $(-50; 0)$;
- г) не пересечёт четвертую координатную четверть.

28.7 ○ В каждую клетку таблички 2×2 случайным образом ставят крестик или нолик. Найдите вероятность того, что:

- а) будет поставлен ровно один крестик;
- б) будет поставлено ровно два нолика;
- в) в левой нижней клетке будет стоять крестик;
- г) в верхней левой и нижней правой клетках будут разные значки.

а) синей; в) красной или синей;
б) не красной; г) неокрашенной?

а) четвёрка; в) число очков больше четырёх;
б) чётное число очков; г) число очков, не кратное трём.

а) она не является дублем;
б) на ней не выпала тройка;
в) произведение очков на ней меньше 29;
г) выпавшие очки различаются больше чем на 1.

266

a) $-8 \leq x \leq 1$; в) $\frac{x+5}{2-x} \geq 0$;
б) $x^2 - 4x - 21 \leq 0$; г) $x^2 \leq 6$?

а) в треугольнике KCN ; в) вне треугольника AMC ;
б) в треугольнике MBN ; г) в четырёхугольнике $MNKL$?

а) наименьшее из всех таких чисел;
б) чётное число;
в) число, кратное 9;
г) число, удалённое от 50 менее чем на 20?

28.14

Монету подбрасывают четыре раза. Какова вероятность того, что:

- а) все четыре раза результат будет одним и тем же;
- б) при первых трёх подбрасываниях выпадет решка;
- в) в последний раз выпадет орёл;
- г) орлов и решек выпадет поровну?

28.15

В квадратное уравнение $x^2 + bx + 15 = 0$ в качестве коэффициента b подставляют некоторое натуральное число от 2 до 11. Найдите вероятность того, что у полученного квадратного уравнения:

- а) будут два различных корня;
- б) не будет корней;
- в) будет хотя бы один отрицательный корень;
- г) будет хотя бы один положительный корень.

28.16

В уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в качестве радиуса R подставляют натуральное число от 1 до 20. Найдите вероятность того, что:

- а) точка $(1; 0)$ будет лежать на этой окружности;
- б) точка $(0; -1)$ будет принадлежать кругу, который ограничен этой окружностью;
- в) точка $(1; 3)$ не будет принадлежать кругу, который ограничен этой окружностью;
- г) эта окружность не будет пересекать прямую $y = \sqrt{123}$.

28.17

В уравнение гиперболы $y = \frac{k}{x}$ в качестве коэффициента k подставляют некоторое число из множества $\{-5, -2, 1, 3, 4\}$. Найдите вероятность того, что такая гипербола:

- а) пройдёт через начало координат;
- б) пересечёт прямую $y = x$;
- в) пройдёт через точку $(-5; 0,4)$;
- г) не пересечёт окружность $x^2 + y^2 = 1$.

28.18

Из четырёх тузов одной колоды случайным образом поочерёдно вытаскивают две карты. Найдите вероятность того, что:

- а) обе карты — тузы чёрной масти;
- б) вторая карта — пиковый туз;
- в) первая карта — туз красной масти;
- г) среди выбранных карт есть бубновый туз.

28.19

Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что:

- а) среди выпавших чисел есть хотя бы одна единица;
- б) сумма выпавших чисел не больше 3;
- в) сумма выпавших чисел меньше 11;
- г) произведение выпавших чисел меньше 27.

- 28.20** ● Случайным образом выбирают натуральное число из промежутка $[100; 200)$. Найдите вероятность того, что:
- а) оно не оканчивается нулём;
 - б) среди его цифр есть хотя бы одна, которая больше двух;
 - в) оно не является квадратом другого целого числа;
 - г) сумма его цифр меньше 17.

Прочитайте п. 4 в § 28 учебника

270

- 28.21** Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 4| < 5$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства:

- а) $|x| < 1$;
- б) $|x| > 2$;
- в) $4 < |x| < 5$;
- г) $|x + 4| < 5$?

- 28.22** ● В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 6, а катет BC равен 8. Из вершины C провели высоту CH и медиану CM . В треугольнике случайно отмечают точку. Какова вероятность того, что эта точка окажется:

- а) в треугольнике ACM ;
- б) в треугольнике ACH ;
- в) в треугольнике CHM ;
- г) внутри окружности, вписанной в треугольник ABC ?

§ 29

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

- 29.1** ○
- а) Сколько чисел, кратных четырём, находится среди первых 17 натуральных чисел?
 - б) Какова частота чисел, кратных четырём, среди первых 17 натуральных чисел?
 - в) Заполните таблицу появления чисел, кратных четырём, среди первых n натуральных чисел.

n	17	18	19	20	27	28	29	30	40	60	80	100
Кол-во чисел, кратных 4, среди чисел от 1 до n												
Частота												

- г) К какому числу приближается частота с увеличением n ?

29.2 ○

По многолетней статистике отдела контроля из 1000 экземпляров некоторой детали, выпущенной на предприятии, в среднем оказывается 4 бракованные детали. Сколько бракованных деталей в среднем можно ожидать:

- а) в партии из 4000 деталей;
- б) в партии из 7500 деталей;
- в) в партии из 11 250 деталей;
- г) в партии из 300 деталей?

29.3 ○

По сведениям университетской приёмной комиссии, процент поступающих, верно решивших все задачи на письменном экзамене по математике, практически постоянен за последние несколько лет и равен примерно 1,5%.

- а) В прошлом году было 405 абитуриентов. Оцените число абитуриентов, решивших все задачи.
- б) В позапрошлом году было 467 абитуриентов. Оцените число абитуриентов, решивших все задачи.
- в) В этом году подано 534 заявления. Сколько можно ожидать абитуриентов, которые верно решат все задачи?
- г) Два года назад 5 абитуриентов верно решили все задачи. Сколько примерно было абитуриентов?

29.4 ○

По статистике ежедневных продаж в продовольственном супермаркете процент чеков на сумму менее 100 р. достаточно устойчив и колеблется от 9% (по субботам) до 11% (по вторникам).

- а) Во вторник в супермаркете было 1247 покупателей. Оцените количество покупок на сумму менее 100 р.
- б) В субботу было 2357 покупателей. Оцените количество покупок на сумму не менее 100 р.
- в) За неделю было выбито 9785 чеков. В каких пределах лежит число чеков на сумму менее 100 р.?
- г) За месяц было выбито 4017 чеков на сумму менее 100 р. Оцените число покупателей за месяц.

29.5 ○

На железнодорожном вокзале при проходе к поездам пригородного сообщения стоят турникеты. Примерно 38% ежедневно продаваемых билетов составляют билеты до 2-й зоны и 17% составляют билеты до 3-й зоны.

- а) В понедельник было продано 12 153 билета до 2-й зоны. Оцените количество билетов, проданных в понедельник.
- б) Оцените количество билетов, проданных в понедельник до 3-й зоны.
- в) Во вторник было продано 6057 билетов до 3-й зоны. Сколько примерно было продано билетов до 2-й зоны?

г) Оцените количество билетов, проданных за эти два дня.

29.6

- а) Сколько чисел, оканчивающихся цифрой 4, находится среди первых 17 натуральных чисел?
 б) Какова частота чисел, оканчивающихся на 4, среди первых 17 натуральных чисел?
 в) Заполните таблицу появления чисел, оканчивающихся цифрой 4, среди первых n натуральных чисел:

n	17	27	57	77	100	125	150	173	200	1000
Кол-во чисел, оканчивающихся цифрой 4										
Частота										

г) К какому числу приближается частота с увеличением n ?

29.7

- а) Сколько чисел, начинающихся с цифры 4, находится среди первых 17 натуральных чисел?
 б) Какова частота чисел, начинающихся с цифры 4, среди первых 17 натуральных чисел?
 в) Заполните таблицу появления чисел, начинающихся с цифры 4, среди первых n натуральных чисел:

n	17	57	100	400	500	1000	4000	5000	10000
Кол-во чисел, начинающихся с цифры 4									
Частота									

г) Наблюдается ли тут статистическая устойчивость? В каких пределах меняется частота с увеличением n ?

29.8

По статистике выполнения заданий единого государственного экзамена (ЕГЭ) количество учеников, решавших задание под номером А7, составило 73%, а решивших его — примерно 64% от общего числа участников.

- а) Всего в ЕГЭ участвовало около 700 тыс. человек. Сколько примерно из них не решали задачу А7?
- б) Сколько примерно человек решили задачу А7?
- в) В Приволжском федеральном округе в ЕГЭ участвовало 113 586 человек и процент выполнения был на 2 выше, чем в среднем по стране. Сколько примерно человек в этом округе решили задачу А7?
- г) В Центральном федеральном округе верно решили эту задачу 76 121 человек и процент выполнения был на 1 ниже, чем в среднем по стране. Сколько человек сдавали ЕГЭ в этом округе?

29.9

- а) Проведите эксперимент с подбрасываниями игрального кубика; результаты (количество выпадений определённого числа очков) впишите в таблицу:

Кол-во бросков	Число очков					
	1	2	3	4	5	6
20						
40						
60						
80						
100						

- б) Повторите этот же эксперимент ещё дважды и заполните таблицу:

Кол-во бросков	Процент выпадения					
	единицы	двойки	тройки	четвёрки	пятёрки	шестёрки
100						
200						
300						

- в) Объедините свои результаты с результатами одноклассников и найдите процентную частоту выпадения единицы при 1000 бросках.
- г) К какому числу приближается процентная частота каждой из вариантов с увеличением числа бросков?

29.10

- а) Проведите эксперимент с подбрасываниями двух разноцветных игральных кубиков; результаты (количество бросков, при которых выпала нужная сумма очков) впишите в таблицу:

Кол-во бросков	Сумма очков										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20											
40											
50											

- б) Повторите этот же эксперимент ещё трижды и заполните таблицу:

Кол-во бросков	Сумма очков										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
100											
200											

- в) Объедините свои результаты с результатами одноклассников и заполните таблицу процентных частот выпадения сумм при 1000 бросках:

Кол-во бросков	Сумма очков										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1000											

- г) К какому числу приближается процентная частота выпадения суммы в 7 очков с увеличением числа бросков?

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ

Все задания этой главы по содержанию, структуре и идеологии соответствуют заданиям основного государственного экзамена (ОГЭ). В каждом разделе вы встретите задания с выбором ответа (из четырёх — они даны цифрами 1, 2, 3, 4), с записью краткого ответа (в виде числа или последовательности цифр) и задания на соответствие, а также задачи с записью полного решения (такие задачи даны после черты и со сменой цвета на полях).

Задания этой главы разбиты (в соответствии с рубрикацией ОГЭ) на два модуля: «Алгебра» и «Реальная математика».

МОДУЛЬ «АЛГЕБРА»

Числа и числовые выражения

1

Найдите натуральное число x , про которое известно, что оно:

- а) больше 7246, но меньше 7256 и при этом делится на 9;
- б) больше 8864, но меньше 8872 и при этом делится на 6;
- в) больше 9347, но меньше 9362 и при этом делится на 15;
- г) больше 7572, но меньше 7590 и при этом делится на 18.

2

На какое из указанных чисел делится произведение $213 \cdot 65$?

- 1) 26; 2) 142; 3) 45; 4) 39?

3

На какое из указанных чисел не делится значение выражения $23^2 + 23 \cdot 26$?

- 1) 23; 2) 7; 3) 9; 4) 49?

4

На какое из указанных чисел делится значение выражения $108^2 - 87^2$?

- 1) 70; 2) 91; 3) 95; 4) 143.

5

Укажите номера выражений, значения которых равны числу -1 .

- 1) $8 \cdot 1,25 - 9$ 3) $0,8 \cdot (-1,25) + 2$
2) $8 \cdot 0,125 - 2$ 4) $-0,8 \cdot 12,5 + 9$

6

Укажите номера выражений, значения которых равны числу -2 .

- 1) $4 \cdot (-0,75) + 1$ 3) $0,4 \cdot (-7,5) - 1$
2) $4 \cdot 0,75 - 5$ 4) $-0,04 \cdot 75 + 2$

7

Установите соответствие между выражением и его значением.

- A. $\frac{1}{3} : 0,3$; B. $0,3 \cdot \frac{2}{3}$; B. $0,4 : 1\frac{1}{3}$.

- 1) 0,3; 2) 0,2; 3) 0,1; 4) $1\frac{1}{9}$.

8

Установите соответствие между выражением и его значением.

- A. $\frac{1}{6} - 0,6$; B. $0,6 - 1\frac{1}{6}$; B. $0,6 - \frac{5}{6}$.

- 1) $-\frac{7}{30}$; 2) $-\frac{23}{30}$; 3) $-\frac{13}{30}$; 4) $-\frac{17}{30}$.

9

Установите соответствие между обыкновенной и десятичной дробью.

- A. $\frac{1}{3}$; B. $\frac{5}{8}$; B. $\frac{1}{16}$.

- 1) 0,625; 2) 0,3; 3) 0,(3); 4) 0,0625.

10

Установите соответствие между обыкновенной и десятичной дробью.

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{3}$.

- 1) 1,6 2) 0,6 3) 0,(6) 4) 0,1(6).

11

Запишите десятичную дробь, сумма разрядных слагаемых которой равна

- а) $2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^{-1} + 10^{-3}$; б) $4 \cdot 10^0 + 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$.

12

Установите соответствие между десятичной дробью и её записью, представленной в виде суммы разрядных слагаемых.

- A. 70,77. B. 7,707. B. 0,777.

- 1) $7 \cdot 10 + 7 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-3}$ 3) $7 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-3}$
2) $7 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$ 4) $7 \cdot 10 + 7 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$.

13

Установите соответствие между десятичной дробью и её записью, представленной в виде суммы разрядных слагаемых.

А. 55,005 Б. 5,505 В. 50,505

- 1) $5 \cdot 10 + 5 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-3}$ 3) $5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-3}$
 2) $5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 10^{-3}$ 4) $5 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-3}$.

14

Вычислите:

- а) $(5^{-3})^2 : 5^3 \cdot (5^2)^4$; б) $2^7 \cdot (2^2)^{-5} : (2^{-3})^3$.

15

Вычислите:

- а) $\frac{3^5 \cdot 9^{-2}}{27^2}$; б) $\frac{4^2 \cdot 5^3}{10^5}$; в) $\frac{2^7 \cdot 8^{-3}}{4^{-5}}$; г) $\frac{15^6}{9^3 \cdot 5^7}$.

16

Вычислите:

- а) $\frac{4}{9} \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 + 6,3 : 6$; б) $0,5 \cdot 0,6 - 2\frac{2}{9} : \left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

17

Вычислите:

- а) $\frac{0,3 \cdot 2,4 + 0,7 \cdot 2,4}{1,5^2 - 0,9^2}$; б) $\frac{1,7^2 - 0,8^2}{0,18 - 1,5 \cdot 0,18}$.

18

Расстояние между двумя населёнными пунктами составляет $1,7 \cdot 10^4$ м. Выразите это расстояние в километрах.

- 1) 17 км; 2) 170 км; 3) 1700 км; 4) 0,17 км.

19

Масса продуктов на оптовой базе составляет 4 500 000 кг. Выразите эту массу в тоннах и запишите полученное число в стандартном виде.

- 1) $45 \cdot 10^2$ т; 3) $0,45 \cdot 10^4$ т;
 2) $45 \cdot 10^3$ т; 4) $4,5 \cdot 10^3$ т.

20

Расстояние между двумя населёнными пунктами на карте составляет $1,25 \cdot 10^2$ мм. Выразите это расстояние в метрах.

- 1) 1,25 м; 3) $1,25 \cdot 10^{-1}$ м;
 2) $1,25 \cdot 10^{-2}$ м; 4) $1,25 \cdot 10$ м.

21

Участок имеет площадь 632 м^2 . Выразите площадь участка в гектарах, записав полученное число в стандартном виде.

- 1) $0,632 \cdot 10^{-1}$ га; 3) $63,2 \cdot 10^{-3}$ га;
 2) $6,32 \cdot 10^{-2}$ га; 4) $6,32 \cdot 10^2$ га.

22 Вычислите:

а) $(\sqrt{16})^3 - 51^0 - 5^2 \cdot 5^{-4} - 2 : 2^{-3}$;

б) $3^2 : 3^{-1} - (\sqrt[3]{125})^2 - 10 \cdot 10^{-3} + (\sqrt{13})^0$.

23 Вычислите:

а) $\frac{(-11\sqrt{7})^2}{77} - \frac{\sqrt{512}}{\sqrt{8}}$;

б) $\frac{(-17\sqrt{5})^2}{85} + \sqrt{6 \cdot 15} \cdot \sqrt{40}$.

24 Между какими последовательными натуральными числами находится $\sqrt{183}$?

1) 14 и 15;

3) 13 и 14;

2) $\sqrt{182}$ и $\sqrt{184}$;

4) 12 и 15.

25 Между какими последовательными натуральными числами находится $10\sqrt{3}$?

1) 17 и 18;

3) 16 и 18;

2) 10 и 11;

4) $\sqrt{299}$ и $\sqrt{301}$.

26 На координатной прямой (рис. 95) отмечены точки A, B, D. Где должна быть расположена точка C ($4\sqrt{11}$)?

1) Левее A;

3) между B и D;

2) между A и B;

4) правее D.

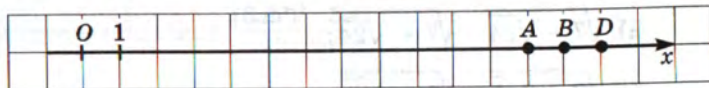


Рис. 95

27 На координатной прямой (рис. 96) отмечены точки K, M, N. Где должна быть расположена точка P ($3\sqrt{15}$)?

1) Левее K;

3) между M и N;

2) между K и M;

4) правее N.



Рис. 96

28

Расположите числа $4\sqrt{5}$; $3\sqrt{7}$; $5\sqrt{3}$; $2\sqrt{11}$ в порядке возрастания.

1) $5\sqrt{3}$; $3\sqrt{7}$; $4\sqrt{5}$; $2\sqrt{11}$; 3) $3\sqrt{7}$; $4\sqrt{5}$; $5\sqrt{3}$; $2\sqrt{11}$;

2) $2\sqrt{11}$; $3\sqrt{7}$; $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; 4) $2\sqrt{11}$; $3\sqrt{7}$; $4\sqrt{5}$; $5\sqrt{3}$.

29

Расположите числа $7\sqrt{3}$; $8\sqrt{2}$; $4\sqrt{7}$; $5\sqrt{6}$ в порядке убывания.

1) $4\sqrt{7}$; $5\sqrt{6}$; $7\sqrt{3}$; $8\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{6}$; $7\sqrt{3}$; $8\sqrt{2}$; $4\sqrt{7}$;

2) $8\sqrt{2}$; $7\sqrt{3}$; $5\sqrt{6}$; $4\sqrt{7}$; 4) $5\sqrt{6}$; $8\sqrt{2}$; $7\sqrt{3}$; $4\sqrt{7}$.

30

Вычислите:

а) $(-5\sqrt{3})^2 + \sqrt{4\frac{21}{25}}$; б) $\sqrt{5\frac{1}{16}} - (0,2\sqrt{10})^2$.

31

Вычислите:

а) $\sqrt{113^2 - 112^2} + (\sqrt{7} + 6)(\sqrt{7} - 6)$;

б) $\frac{\sqrt{244^2 - 240^2}}{(\sqrt{5} - 4)(\sqrt{5} + 4)}$.

32

Вычислите:

а) $(5\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{3})^4$; б) $(2\sqrt{5})^4 - (7\sqrt{2})^2$.

33

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{7 - \sqrt{24}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{24}}$;

б) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$.

34

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{(5 - \sqrt{23})^2} + \sqrt{(4 - \sqrt{23})^2}$;

б) $\sqrt{(6 - \sqrt{41})^2} + \sqrt{(7 - \sqrt{41})^2}$.

35

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$; б) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{7}$.

Алгебраические выражения

36

Упростите выражение $\frac{a^4 \cdot a^{-9}}{(a^3)^2 a^{-7}}$.

- 1)
- a^3
- ; 2)
- a^{-3}
- ; 3)
- a^4
- ; 4)
- a^{-4}
- .

37

Упростите выражение $\frac{(a^4)^3 a^{-12}}{(a^2)^{-5} a^7}$.

- 1) 0; 2)
- a^3
- ; 3)
- a^{-4}
- ; 4)
- a^{-3}
- .

38

Упростите выражение $\frac{(2a)^3 \cdot 4a^{-2}}{(4a^3)^2}$.

- 1)
- $2a^{-5}$
- ; 2)
- $2a^{-4}$
- ; 3)
- $8a^{-5}$
- ; 4)
- $\frac{1}{2a^5}$
- .

39

Упростите выражение $\frac{3b^{-1} \cdot (9b^2)^3}{(3b^{-2})^4}$.

- 1)
- $\frac{b^{13}}{3}$
- ; 2)
- $27b^{13}$
- ; 3)
- $9b^{10}$
- ; 4)
- $27b^3$
- .

40

Упростите выражение $(3xy)^3 \cdot (3x^{-1}y)^{-2} : (9x^3y^4)$.

- 1)
- $\frac{1}{3x^3y}$
- ; 2)
- $\frac{1}{3}x^2y^{-3}$
- ; 3)
- $\frac{1}{3}x^3y^8$
- ; 4)
- $\frac{1}{3}x^{-3}y^7$
- .

41

Упростите выражение $(7m^{-3}n^3) : (7m^5n^4)^{-2} \cdot (49m^{-1}n^{15})^{-1}$.

- 1)
- $\frac{1}{343m^{12}n^{20}}$
- ; 2)
- $\frac{49m^8}{n^4}$
- ; 3)
- $\frac{7}{m^9n^{18}}$
- ; 4)
- $\frac{7m^8}{n^4}$
- .

42

Упростите выражение $\frac{(6ab^3)^3 \cdot 3a^{-9}}{(2a^{-2}b)^3}$.

- 1)
- $81b^6$
- ; 2)
- $81a^{-12}b^6$
- ; 3)
- $\frac{1}{729}a^{-12}b^6$
- ; 4)
- $12b^3$
- .

43

Упростите выражение $\frac{(10x^4y^{-3})^4}{16x^8 \cdot (25x^2y^{-2})^3}$.

- 1)
- $\frac{y^5}{5x^5}$
- ; 2)
- $\frac{x^2}{25y^6}$
- ; 3)
- $\frac{x^6y^6}{25}$
- ; 4)
- $-\frac{10}{x^6y^{18}}$
- .

44

Найдите значение выражения

- а)
- $\frac{x^{-8}}{x^{-4}x^{-2}}$
- при
- $x = \frac{1}{3}$
- ; б)
- $\frac{y^{-7}y^{-8}}{(y^{-3})^4}$
- при
- $y = 1\frac{1}{2}$
- .

45

Укажите номера тождественно равных выражений.

- 1) $x^2 - 4y^2 = (x - 4y)(x + 4y)$;
- 2) $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$;
- 3) $x^2 - 8xy + 16y^2 = (4y - x)^2$;
- 4) $x^2 - 4y^2 = -(2y - x)(2y + x)$.

46

Укажите номера тождественно равных выражений.

- 1) $9x^2 + y^2 = (3x - y)(3x + y)$;
- 2) $9x^2 - 6xy + y^2 = (3x + y)^2$;
- 3) $9 - y - 8y^2 = (1 - y)(9 + 8y)$;
- 4) $9x^2 - y^2 = (y - 3x)(-y - 3x)$.

47

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

- а) $(x + 2x)^2 - 4x(2x + y)$; б) $(2x - y)^2 - 2x(x - 2y)$.

48

Упростите выражение:

- а) $(3a + 6)(a - 2) - (2a - 1)^2$; б) $(2a - 6)(a + 3) - (3a + 1)^2$.

49

Укажите алгебраические дроби, тождественно равные дроби

$$\frac{m + 2n}{4m - 3n}.$$

- 1) $-\frac{m + 2n}{3n - 4m}$; 2) $\frac{-m - 2n}{3n - 4m}$; 3) $-\frac{-m - 2n}{4m - 3n}$; 4) $\frac{-m - 2n}{4m - 3n}$.

50

Укажите алгебраические дроби, тождественно равные дроби

$$\frac{3m - n}{4m + 3n}.$$

- 1) $\frac{n - 3m}{3n + 4m}$; 2) $\frac{-3m + n}{-3n - 4m}$; 3) $-\frac{n - 3m}{4m + 3n}$; 4) $\frac{n - 3m}{-4m - 3n}$.

51

а) Найдите значение выражения $\frac{4a^2 - 25}{15 - 6a}$ при $a = 0,05$.б) Найдите значение выражения $\frac{-15x - 40}{64 - 9x^2}$ при $x = -\frac{2}{3}$.

52

а) Найдите значение выражения $\frac{a^2 - 16a + 64}{64 - 8a}$ при $a = -0,4$.б) Найдите значение выражения $\frac{36 - y^2}{y^2 - 12y + 36}$ при $y = \frac{2}{3}$.

53 Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - 8x - 9}{x^2 - 81}$; в) $\frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 1}$;

б) $\frac{x^2 + 8x}{x^2 + 9x + 8}$; г) $\frac{x^2 - 9x}{x^2 - 10x + 9}$.

54 а) Найдите значение выражения $\frac{c^2 - 2c}{c - 4} - \frac{16 - 6c}{4 - c}$ при $c = -3,5$.б) Найдите значение выражения $\frac{n^2 + n}{n^3 - 8} - \frac{n + 4}{8 - n^3}$ при $n = 2,1$.55 Разложите квадратный трёхчлен $x^2 - 4x - 45$ на множители.

- 1) $(x + 9)(x - 5)$; 3) $(x - 9)(x - 5)$;
2) $(x - 9)(x + 5)$; 4) $(x + 9)(x + 5)$.

56 Разложите квадратный трёхчлен $-x^2 + 2x + 24$ на множители.

- 1) $(x + 6)(x - 4)$; 3) $-(x + 6)(x - 4)$;
2) $(x - 6)(x + 4)$; 4) $-(x - 6)(x + 4)$.

57 Разложите квадратный трёхчлен $3x^2 + 13x - 10$ на множители.

- 1) $3(x - 2)(x + 5)$; 3) $(3x - 2)(x + 5)$;
2) $\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 5)$; 4) $(3x + 2)(x - 5)$.

58 Разложите квадратный трёхчлен $-4x^2 + 5x + 6$ на множители.

- 1) $-4(x + 3)(x + 2)$; 3) $(4x - 3)(x + 2)$;
2) $(x - 2)\left(x + \frac{3}{4}\right)$; 4) $(2 - x)(4x + 3)$.

59 Укажите квадратный трёхчлен, который нельзя разложить на множители.

- 1) $x^2 + 12x - 36$; 3) $x^2 - 12x + 35$;
2) $x^2 - 12x + 36$; 4) $x^2 + 12x + 37$.

60 Укажите квадратный трёхчлен, который нельзя разложить на множители.

- 1) $x^2 + 16x + 64$; 3) $x^2 - 16x + 63$;
2) $x^2 - 16x + 65$; 4) $x^2 + 16x - 65$.

61

а) Найдите значение выражения $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ при $a = -\sqrt{6}$.б) Найдите значение выражения $\frac{250}{x^5\sqrt{10}}$ при $a = \sqrt{10}$.

62

а) Найдите значение выражения $\frac{12x+5y}{4x^2y} - \frac{5y-4x}{5xy^2}$ при $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{5}$.б) Найдите значение выражения $\frac{2n+3m}{6mn^2} - \frac{9m-2n}{9m^2n}$ при $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{2}$.

63

а) Найдите наименьшее значение выражения $2x^2 - 8x - 7$.б) Найдите наибольшее значение выражения $-3x^2 - 6x + 5$.

64

Упростите выражение:

а) $\frac{2x-3}{5x-20} - \frac{x-2}{2x-8}$; б) $\frac{c-6}{8+12c} - \frac{2c-7}{15c+10}$.

65

а) Найдите значение выражения $\frac{10x}{16-x^2} + \frac{5}{x-4}$ при $x = 1$.б) Найдите значение выражения $\frac{6}{7-a} + \frac{12a}{a^2-49}$ при $a = -5$.

66

а) Найдите значение выражения $\frac{x^2-y^2}{3xy} \cdot \frac{3y}{x-y}$ при $x = 1$, $y = -1,5$.б) Найдите значение выражения $\frac{c^2-49}{10cd} : \frac{2c+14}{5d}$ при $c = 0,5$.

67

Сократите дробь:

а) $\frac{x^2+4xy-2x-8y}{x^2+8xy+16y^2}$; б) $\frac{x^2-5xy+2x-10y}{x^2-10xy+25y^2}$;

в) $\frac{(3a-d)^2 - (3a+d)^2}{ad}$; г) $\frac{(6b+c)^2 - (6b-c)^2}{bc}$.

68

Найдите значение выражения $\left(\frac{m+1}{m-1} - \frac{m-1}{m+1}\right) : \frac{2m}{5m-5}$ при $n = \frac{1}{9}$.

69

Найдите значение выражения $\left(\frac{b}{a-b} - \frac{b}{a+b}\right) \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{2b^2}$ при $a = -0,2$, $b = 0,3$.

Функции и графики

70

Укажите функцию, графиком которой является прямая.

1) $y = \frac{2}{x}$; 2) $y = x^2 - 1$; 3) $y = 2x$; 4) $y = x^3$.

71

Укажите функцию, графиком которой не является прямая.

1) $y = 2x - 8$; 2) $y = \frac{x+2}{8}$; 3) $y = x^2 + 2$; 4) $y = 8x$.

72

Какое из перечисленных уравнений является уравнением прямой?

1) $xy + 9 = 0$; 3) $y + x^2 - 9 = 0$;
2) $2x + 3y - 9 = 0$; 4) $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

73

Задайте формулой линейную функцию, график которой изображён на рис. 97.

1) $y = x + 3$; 2) $y = \frac{x}{3}$; 3) $y = 3x$; 4) $y = -3x$.

74

Задайте формулой линейную функцию, график которой изображён на рис. 98.

1) $y = -2x$; 2) $y = \frac{1}{2}x$; 3) $y = 2x - 1$; 4) $y = -\frac{1}{2}x$.

75

Задайте формулой линейную функцию, график которой изображён на рис. 99.

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 2x$; 3) $y = \frac{1}{2}x - 1$; 4) $y = 1 - 2x$.

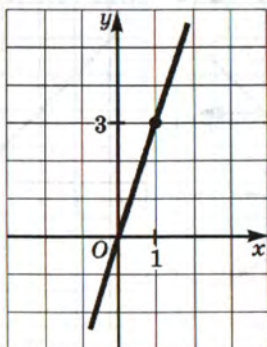


Рис. 97

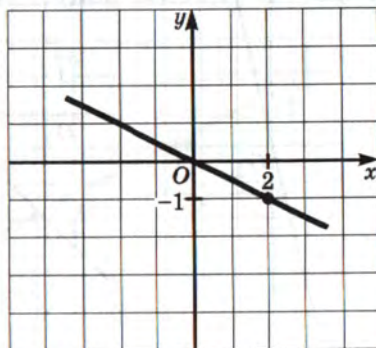


Рис. 98

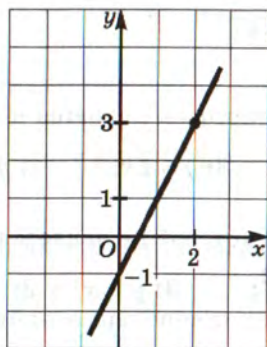


Рис. 99

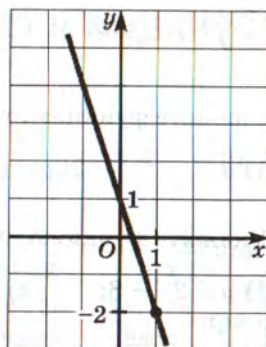


Рис. 100

76

Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через начало координат параллельно графику функции, изображённому на рис. 100.

- 1) $y = 3x$; 2) $y = 3 - x$; 3) $y = -3x$; 4) $y = -\frac{1}{3}x$.

77

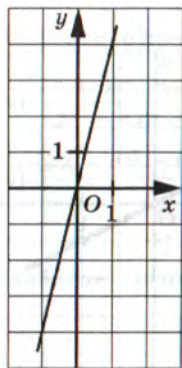
Установите соответствие между графическим и аналитическим заданием функции (рис. 101).

- 1) $y = 4 - x$; 2) $y = -4x$; 3) $y = x - 4$; 4) $y = 4x$.

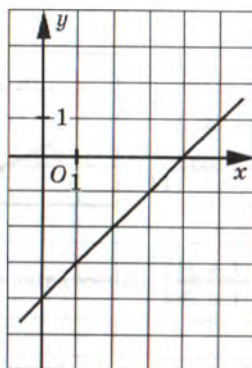
78

Установите соответствие между графическим и аналитическим заданием функции (рис. 102).

- 1) $y = -4x$; 2) $y = -4 - x$; 3) $y = x + 4$; 4) $y = 4 - x$.

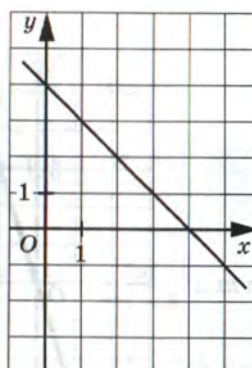


А

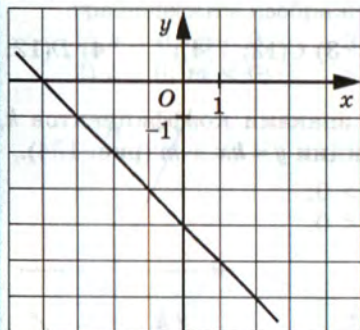


Б

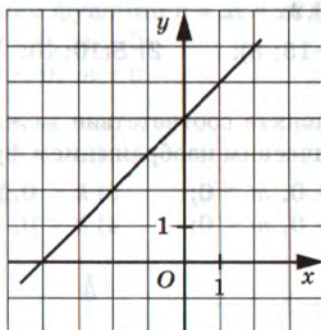
Рис. 101



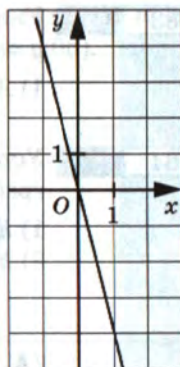
В



А



Б



В

Рис. 102

- 79 Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точку $(0; -5)$ параллельно графику функции, изображённой на рис. 103.

1) $y = 0,5x - 5$; 2) $y = -0,5x - 5$; 3) $y = 2x - 5$; 4) $y = -5$.

- 80 Найдите абсциссу точки пересечения прямых $y = 37$, $y = 2x + 11$.

1) 24; 2) 13; 3) -13; 4) 37.

- 81 Найдите координаты точки пересечения прямых $y = -21x + 84$, $y = 19x - 76$.

1) $(4; 0)$; 2) $(-4; 0)$; 3) $(0; 4)$; 4) $(-4; 4)$.

- 82 Укажите точку, принадлежащую графику функции $y = 0,6x - 4$.

1) $A(-10; 14)$; 2) $B(-10; 6)$; 3) $C(-10; -6)$; 4) $D(-10; -10)$.

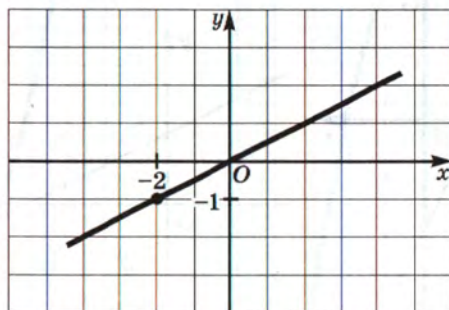


Рис. 103

83

Укажите точку, которая не принадлежит графику функции $y = -0,2x + 5$.

- 1) $A(-15; 8)$; 2) $B(10; 3)$; 3) $C(12; 7,4)$; 4) $D(12; 2,6)$.

84

Установите соответствие между знаками коэффициентов k , m и графическим изображением функции $y = kx + m$ (рис. 104).

- 1) $k > 0, m > 0$; 3) $k < 0, m > 0$;
2) $k > 0, m < 0$; 4) $k < 0, m < 0$.

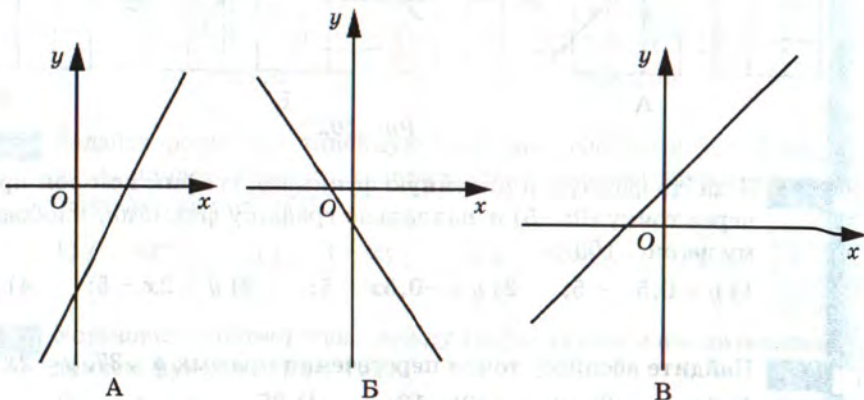


Рис. 104

85

Установите соответствие между знаками коэффициентов k , m и графическим изображением функции $y = kx + m$ (рис. 105).

- 1) $k > 0, m > 0$; 3) $k < 0, m > 0$;
2) $k > 0, m < 0$; 4) $k < 0, m < 0$.

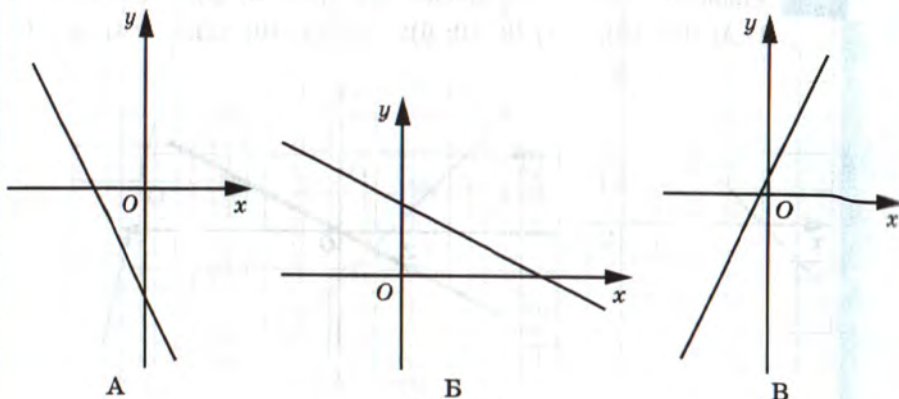
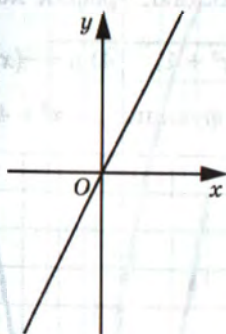


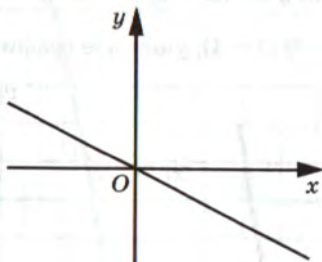
Рис. 105

86 Установите соответствие между знаками коэффициентов k , m и графическим изображением функции $y = kx + m$ (рис. 106).

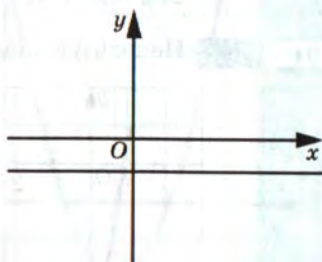
- 1) $k > 0$, $m = 0$; 3) $k = 0$, $m > 0$;
2) $k = 0$, $m < 0$; 4) $k < 0$, $m = 0$.



А



Б



В

Рис. 106

87 Укажите функцию, графиком которой является парабола.

- 1) $y = 2x + 5$; 3) $y = \frac{6}{x + 3}$;
2) $y = x^3 - 4$; 4) $y = 5 - 3x^2$.

88 Укажите функцию, графиком которой не является парабола.

- 1) $y = -x^2 + 1$; 3) $y = 2x + 1$;
2) $y = (x + 1)^2$; 4) $y = \frac{x^2}{2}$.

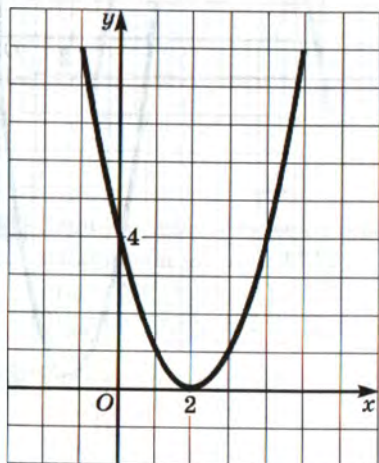


Рис. 107

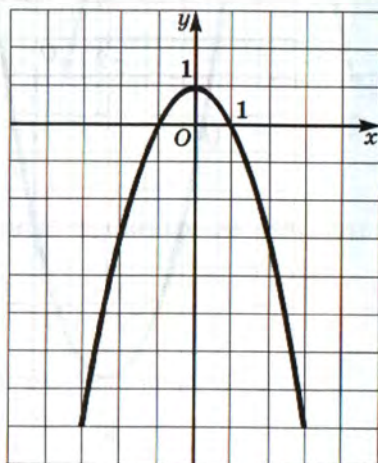


Рис. 108

89

Задайте аналитически квадратичную функцию, график которой изображён на рис. 107.

1) $y = 2x^2$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $y = (x + 2)^2$; 4) $y = (x - 2)^2$.

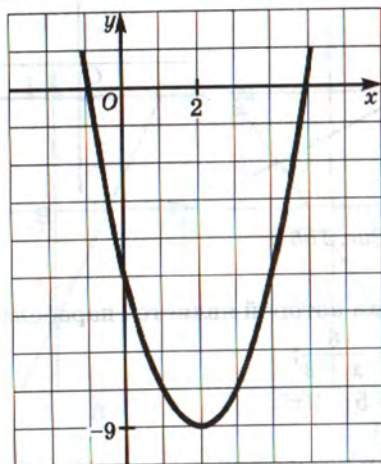
90

Задайте аналитически квадратичную функцию, график которой изображён на рис. 108.

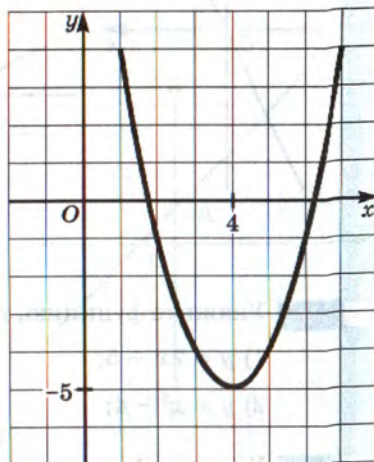
1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = -(x + 1)^2$; 3) $y = -x^2 + 1$; 4) $y = -(x - 1)^2$.

91

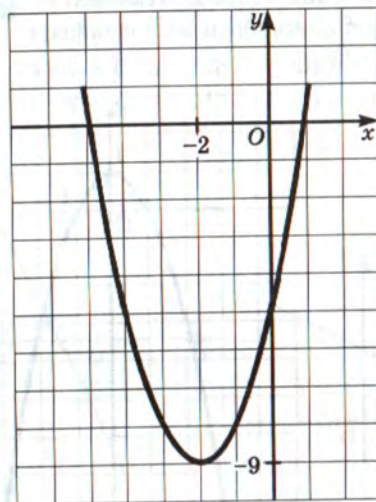
Используя рис. 109 (1—4), укажите график функции $y = x^2 + 4x - 5$.



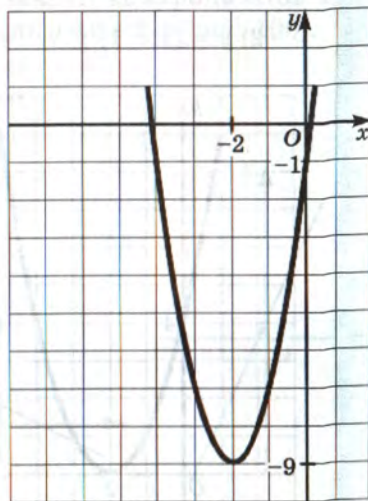
1)



2)



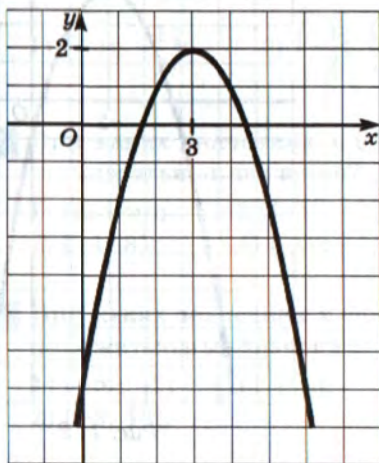
3)



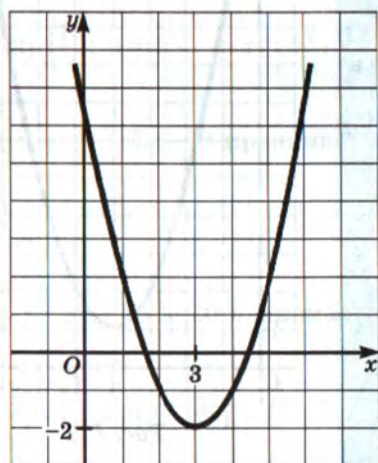
4)

Рис. 109

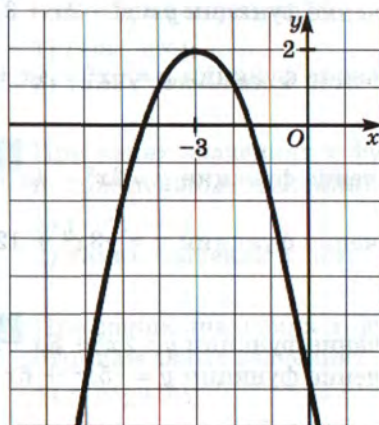
92 Используя рис. 110 (1—4), укажите график функции $y = -x^2 + 6x - 7$.



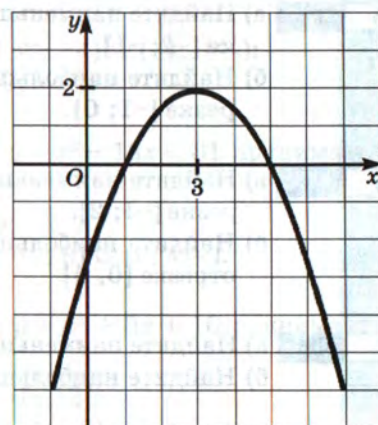
1)



2)



3)



4)

Рис. 110

93 Задайте аналитически квадратичную функцию, график которой изображён на рис. 111.

- 1) $y = 2x^2 + 8x + 17$; 3) $y = x^2 + 8x + 17$;
2) $y = x^2 - 8x + 15$; 4) $y = x^2 - 8x + 17$.

94 Задайте аналитически квадратичную функцию, график которой изображён на рис. 112.

- 1) $y = -x^2 + 2x + 3$; 3) $y = -x^2 - 4x + 7$;
2) $y = -x^2 - 4x - 1$; 4) $y = -x^2 + 4x - 1$.

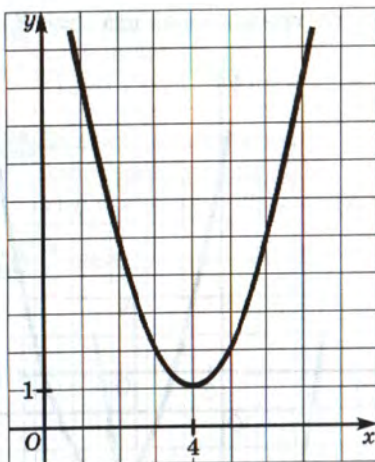


Рис. 111

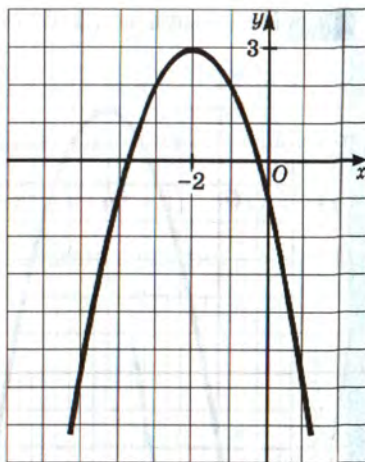


Рис. 112

95

- а) Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 2x + 3$ на отрезке $[-2; -1]$.
 б) Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 - 4x + 5$ на отрезке $[-1; 0]$.

96

- а) Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 4x + 1$ на отрезке $[-1; 2]$.
 б) Найдите наибольшее значение функции $y = -3x^2 + 12x - 8$ на отрезке $[0, 4]$.

97

- а) Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 + 3x - 2$.
 б) Найдите наибольшее значение функции $y = -5x^2 + 6x - 1$.

98

- Укажите промежуток возрастания функции $y = x^2 - 3x + 4$.
 1) $[0; +\infty)$; 3) $[-1,5; +\infty)$;
 2) $[1,5; +\infty)$; 4) $[3; +\infty)$.

99

- Укажите промежуток возрастания функции $y = -x^2 + 6x + 7$.
 1) $(-\infty; 3]$; 2) $[3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $[-3; +\infty)$.

100

- Укажите, какому промежутку принадлежат нули функции $y = 3x^2 - 10x + 3$.

- 1) $(0; \frac{1}{2})$; 2) $(\frac{1}{2}; \frac{8}{3})$; 3) $(\frac{8}{3}; \frac{10}{3})$; 4) $[\frac{1}{3}; \frac{10}{3}]$.

101 Укажите, какому промежутку принадлежат нули функции $y = -4x^2 + 13x + 12$.

- 1) $(-\infty; -\frac{1}{2})$; 2) $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$; 3) $(\frac{13}{4}; +\infty)$; 4) $[\frac{7}{8}; \frac{17}{4}]$.

102 При каких значениях x функция $y = x^2 - 7x - 8$ принимает отрицательные значения?

- 1) $[8; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [8; +\infty)$;
2) $[-1; 8]$; 4) $(-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$.

103 При каких значениях x функция $y = -x^2 + 8x + 20$ принимает неположительные значения?

- 1) $(-\infty; -2] \cup [10; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2]$;
2) $[-2; 10]$; 4) $(-\infty; -10] \cup [2; +\infty)$.

104 При каких значениях x функция $y = x^2 + 8x + 16$ принимает положительные значения?

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$;
2) таких значений x нет; 4) $[0; +\infty)$.

105 При каких значениях x функция $y = x^2 - 18x + 81$ принимает неположительные значения?

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 3) 9;
2) таких значений x нет; 4) $(-\infty; 9) \cup (9; +\infty)$.

106 При каких значениях x функция $y = x^2 + 3x + 10$ принимает отрицательные значения?

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 3) $[-5; -2]$;
2) таких значений x нет; 4) $(-\infty; -5] \cup [-2; +\infty)$.

107 При каких значениях x функция $y = -x^2 + 6x - 16$ принимает положительные значения?

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(0,5; 5,5)$;
2) таких значений x нет; 4) $(-\infty; 0,5) \cup (5,5; +\infty)$.

108 Установите соответствие между знаками коэффициентов a , c и графическим изображением функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 113).

- 1) $a > 0, c > 0$; 3) $a < 0, c < 0$;
2) $a > 0, c < 0$; 4) $a < 0, c > 0$.

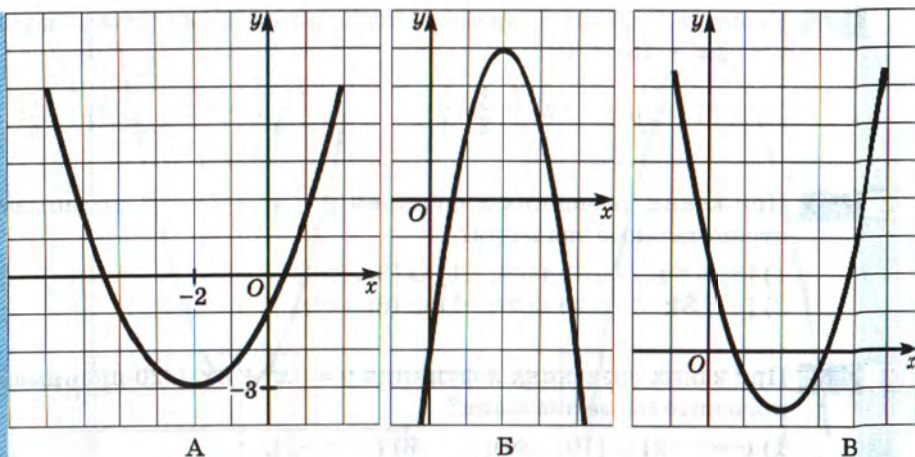


Рис. 113

109

Нарис. 114 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.
Определите знаки коэффициентов a , b и c .

- 1) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$; 3) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$;
2) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$; 4) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

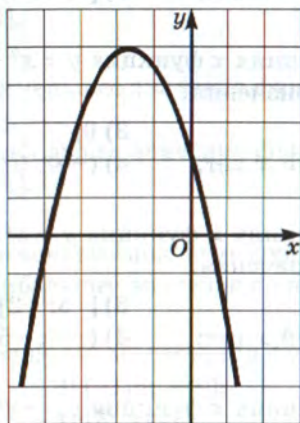


Рис. 114

110

Укажите функцию, графиком которой является гипербола.

- 1) $y = \frac{3}{x}$; 2) $y = \frac{x}{3}$; 3) $y = \frac{x^2}{3}$; 4) $y = x^3$.

111

Укажите уравнение, графиком которого является гипербола.

- 1) $x^2 + 2y = 1$; 3) $xy + 2 = 0$;
2) $3x + y = -2$; 4) $x^2 + y^2 = 1$.

112

Укажите функцию, графиком которой не является гипербола.

1) $y = \frac{4}{x-1}$; 2) $y = \frac{4}{x} - 1$; 3) $y = x^{-1}$; 4) $y = \frac{x-1}{4}$.

113

Установите соответствие между аналитическим и графическим заданием функции (рис. 115).

1) $y = \frac{4}{x-1}$; 2) $y = \frac{4}{x+1}$; 3) $y = \frac{4}{x} + 1$; 4) $y = -\frac{4}{x-1}$.

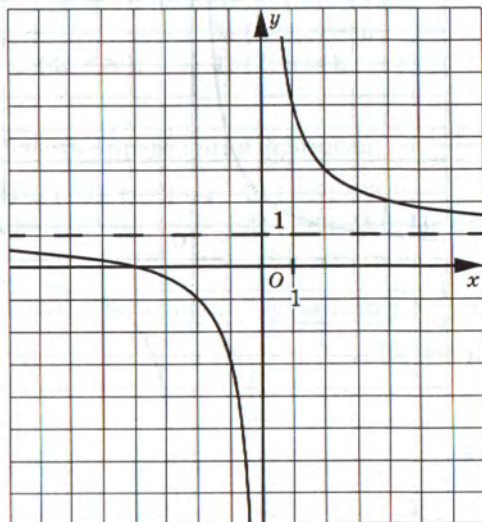
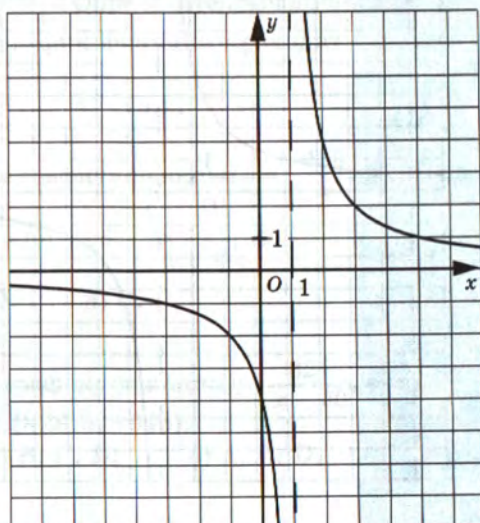
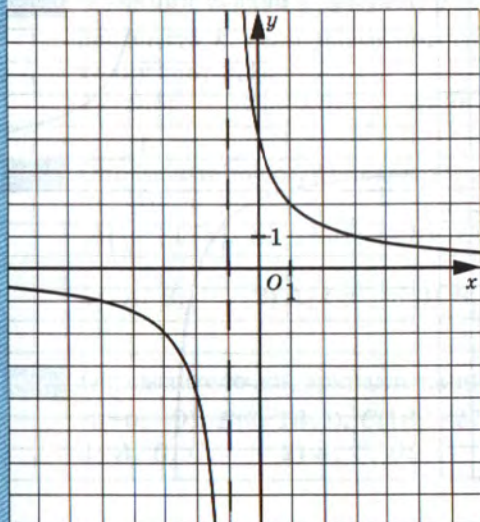


Рис. 115

114

Установите соответствие между аналитическим и графическим заданием функции (рис. 116).

1) $y = -\frac{4}{x} - 1$; 2) $y = \frac{4}{x} - 1$; 3) $y = \frac{4}{x} + 1$; 4) $y = -\frac{4}{x-1}$.

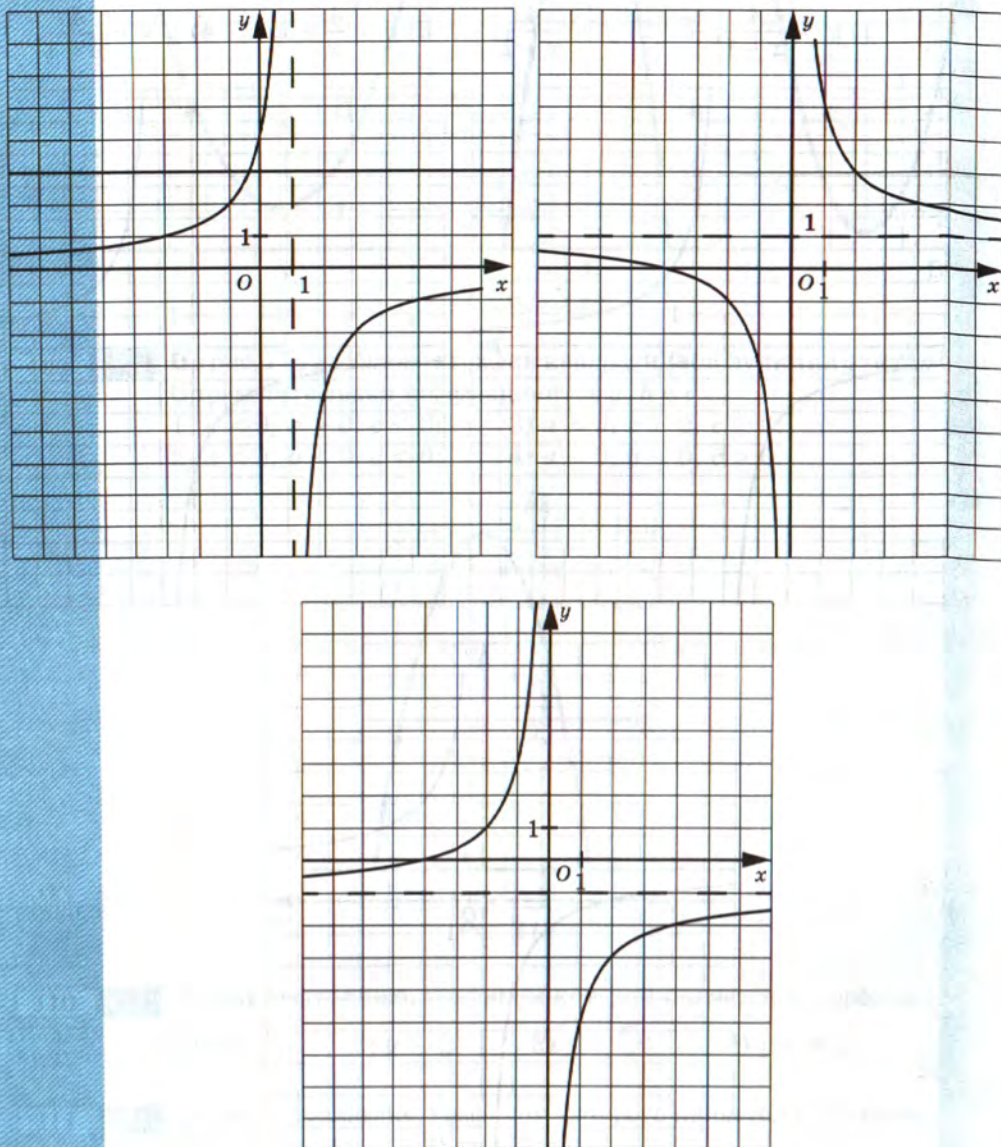


Рис. 116

115

Функция задана формулой $y = \frac{k}{x}$. Определите значение коэффициента k , если известно, что график функции проходит через точку $(-0,3; -2,1)$.

- 1) 6,3; 2) 7; 3) 0,63; 4) $\frac{1}{7}$.

116

Функция задана формулой $y = \frac{k}{x+4}$. Определите значение коэффициента k , если известно, что график функции проходит через точку $(-8; 2,4)$.

- 1) -9,6; 2) -0,6; 3) 28,8; 4) -15,2.

117

Определите точки, принадлежащие графику функции $y = -\frac{150}{x}$, если

$$A\left(\frac{5}{7}; -175\right), B(-15\sqrt{2}; 5\sqrt{2}), C(10\sqrt{5}; 3\sqrt{5}), D\left(-1\frac{7}{8}; 80\right).$$

- 1) A, B; 2) A, C; 3) B, D; 4) C, D.

118

Определите точки, принадлежащие графику функции $y = \frac{324}{x-30}$, если $A(-6; -9)$, $B(6; 13,5)$, $C(18; -27)$, $D(29,5; -648)$.

- 1) A, B, C; 2) A, C, D; 3) B, C, D; 4) A, B, D.

119

Найдите область определения функции $y = \frac{5}{x-4}$.

- 1) $(-\infty; 4)$; 3) $(-\infty; +\infty)$;
2) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$; 4) $(4; +\infty)$.

120

Найдите область определения функции $y = \frac{2}{x+3} + 1$.

- 1) $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$;
2) $(-3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

121

Укажите множество значений функции $y = \frac{1}{x} + 2$.

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; 4) $(2; +\infty)$.

122

Укажите множество значений функции $y = \frac{3}{x+2}$.

- 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$;
2) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(1,5; +\infty)$.

123

Укажите множество значений функции $y = \frac{4}{x-8} - 6$.

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$;
 2) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$; 4) $(-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$.

124

Укажите уравнение гиперболы, изображённой на рис. 117.

- 1) $xy = 1$; 2) $y = (x-2)^{-1}$; 3) $xy = 2$; 4) $xy = 4$.

125

Укажите уравнение гиперболы, изображённой на рис. 118.

- 1) $xy + 3 = 0$; 3) $xy - 3 = 0$;
 2) $xy - 1 = 0$; 4) $y = x^{-1} + 3$.

126

Укажите уравнение гиперболы, изображённой на рис. 119.

- 1) $y = \frac{x+1}{2}$; 2) $y = \frac{2}{x+1}$; 3) $y = \frac{2}{x} + 1$; 4) $y = \frac{2}{x-1}$.

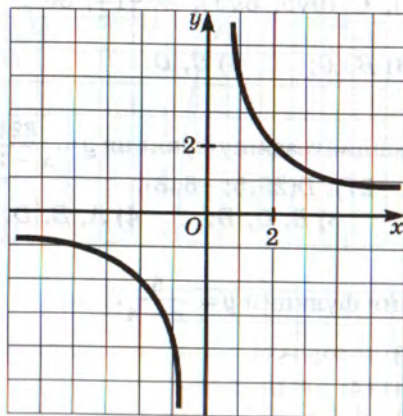


Рис. 117

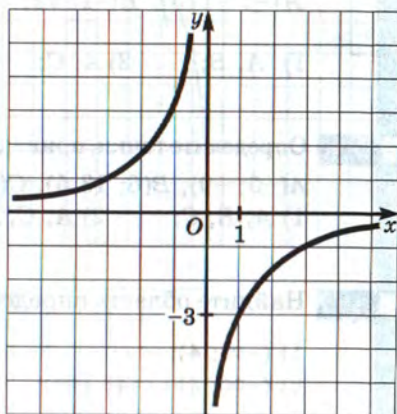


Рис. 118

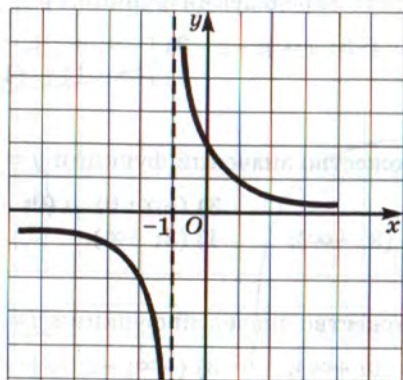


Рис. 119

127 Укажите уравнение гиперболы, изображённой на рис. 120.

1) $y = \frac{6}{x} - 2$; 3) $y = -\frac{6}{x} - 2$;

2) $y = -\frac{6}{x-2}$; 4) $y = -\frac{6}{x} + 2$.

128 Укажите уравнение гиперболы, изображённой на рис. 121.

1) $y = \frac{2}{x-1} - 3$; 3) $y = \frac{2}{x+3} - 1$;

2) $y = \frac{2}{x-3} - 1$; 4) $y = \frac{2}{x+1} + 3$.

129 Укажите промежутки убывания функции $y = \frac{5}{x+4}$.

1) $(-\infty; +\infty)$;

3) $(-4; +\infty)$;

2) $(-\infty; -4)$;

4) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.

130 Укажите промежутки возрастания функции $y = -\frac{7}{x-1}$.

1) $(-\infty; 1)$;

3) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

2) $(1; +\infty)$;

4) $(-\infty; +\infty)$.

131 а) Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{6}{x-2}$ на отрезке $[-8; -3]$.

1) -6;

2) -0,6;

3) -1,2;

4) -1.

б) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{10}{x+5}$ на отрезке $[-4,5; -2,5]$.

1) 5;

2) 20;

3) 4;

4) 25.

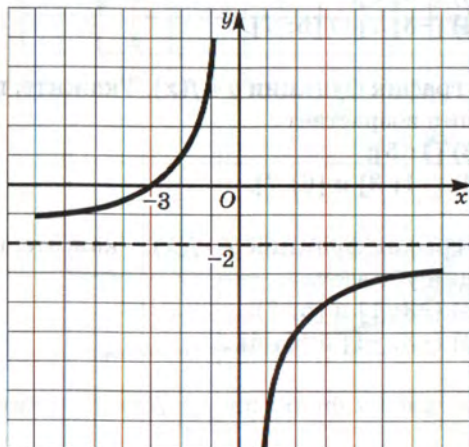


Рис. 120

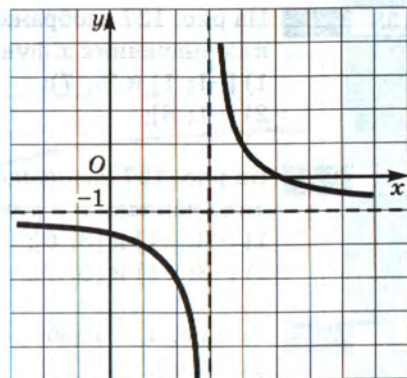


Рис. 121

132

Соотнесите аналитическое и графическое задания функций (рис. 122, а—г).

1) $y = x^3$; 2) $y = x^2$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x}$.

133

Соотнесите аналитическое и графическое задания функций (рис. 123, а—г).

1) $y = \sqrt{x - 2}$; 3) $y = 2 - \sqrt{x}$;
2) $y = \sqrt{x} - 2$; 4) $y = \sqrt{x + 2}$.

134

Задайте аналитически функцию, график которой изображён на рис. 124.

1) $y = |x| - 2$; 3) $y = |x + 2|$;
2) $y = |x - 2|$; 4) $y = 2 - |x|$.

135

Задайте аналитически функцию, график которой изображён на рис. 125.

1) $y = |x + 3|$; 3) $y = |x| - 3$;
2) $y = |x| + 3$; 4) $y = |x - 3|$.

136

На рис. 126 изображён график функции $y = f(x)$. При каких значениях x выполняется неравенство $f(x) > 0$?

1) $(-2; 2)$; 2) $(6; 7]$; 3) $(-2; 2) \cup (6; +\infty)$; 4) $(6; +\infty)$.

137

На рис. 127 изображён график функции $y = f(x)$. При каких значениях x выполняется неравенство $f(x) \leq 0$?

1) $(-3; 1] \cup [5; 7)$; 3) $(-3; 0]$;
2) $(-3; -1] \cup [3; 6]$; 4) $[-3; 1] \cup [5; 7]$.

138

На рис. 127 изображён график функции $y = f(x)$. Укажите, при каких значениях x функция возрастает.

1) $[-1; 1]$ и $[6; 7)$; 3) $[1; 5]$;
2) $[-1; 3]$; 4) $[-1; 3]$ и $[6; 7]$.

139

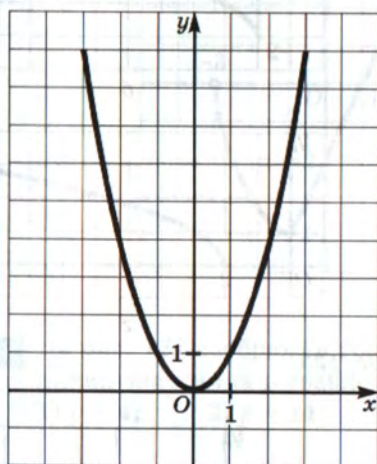
На рис. 127 изображён график функции $y = f(x)$. Укажите, при каких значениях x функция убывает.

1) $[-3; -1]$ и $[3; 6]$; 3) $(-3; 1]$ и $[5; 7)$;
2) $(-3; -1]$ и $[5; 7]$; 4) $(-3; -1]$ и $[5; 6]$.

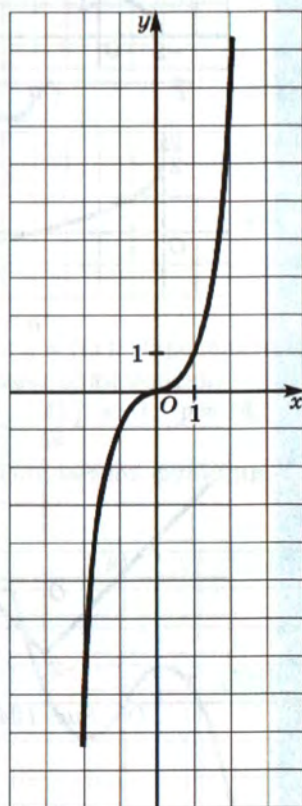
140

На рис. 127 изображён график функции $y = f(x)$. Укажите нули функции.

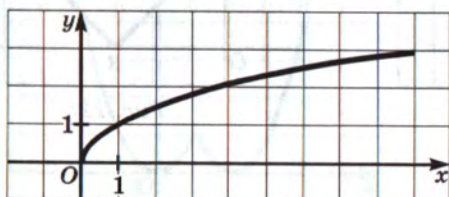
1) $-3; 1; 5; 7$; 2) $1; 5$; 3) $-3; 7$; 4) $-2; 1; 5$.



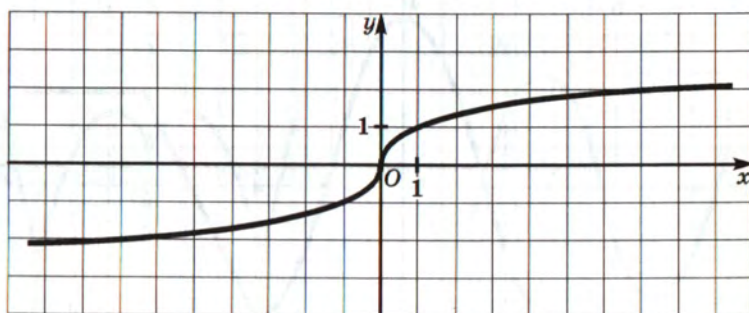
а



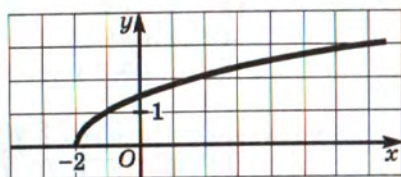
з



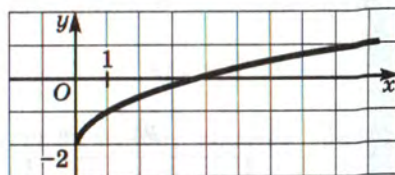
б



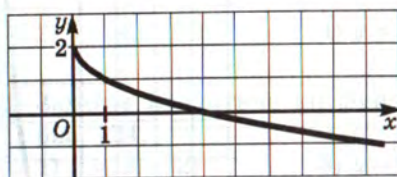
в



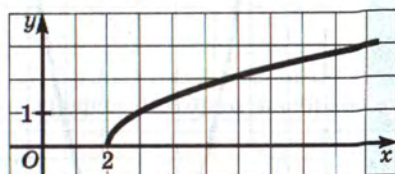
a



б



в



г

Рис. 123

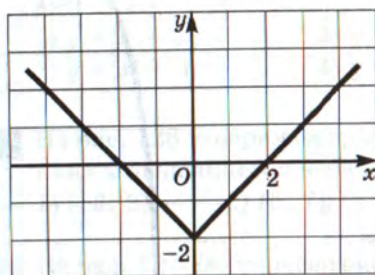


Рис. 124

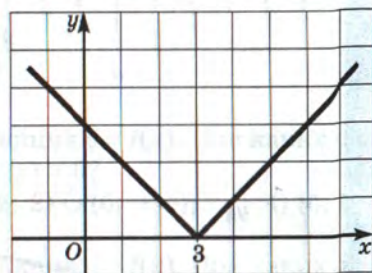


Рис. 125

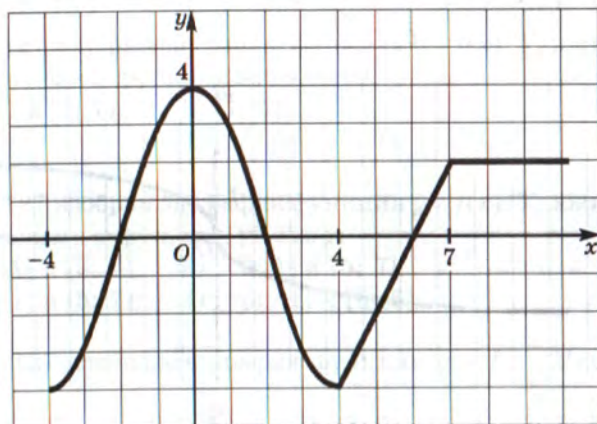


Рис. 126

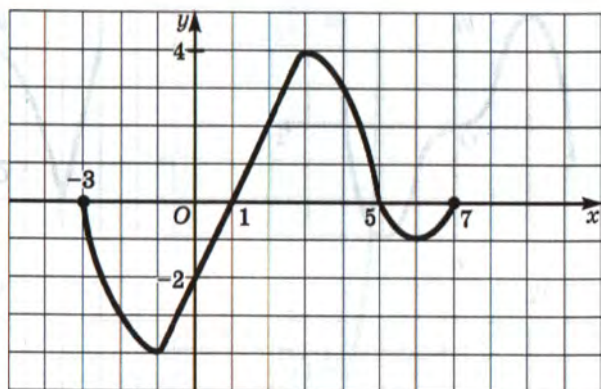


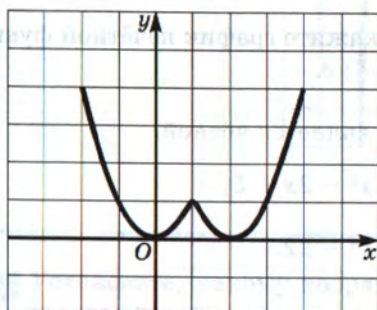
Рис. 127

141 На рис. 127 изображён график функции $y = f(x)$. Определите, при каких значениях p уравнение $f(x) = p$ имеет один корень.

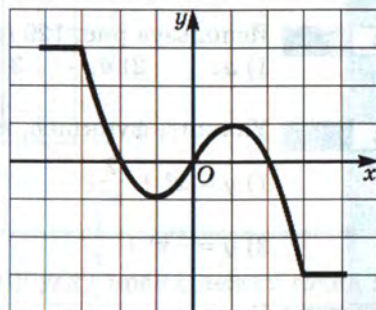
- 1) $p = 4$; 2) $p = \pm 4$; 3) $p = -1$; 4) $p = -1, p = \pm 4$.

142 Используя рис. 128 (a—г), укажите график чётной функции.

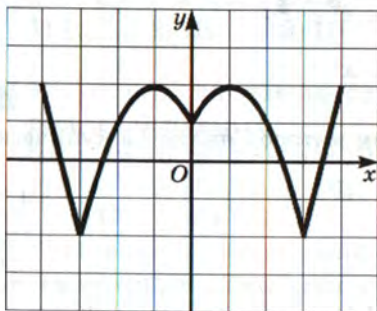
- 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.



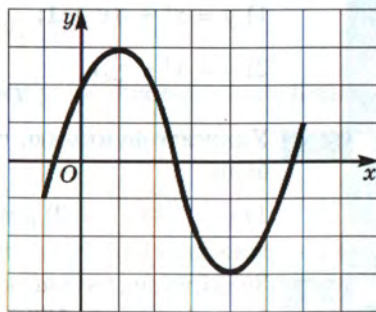
а



б



в



г

Рис. 128

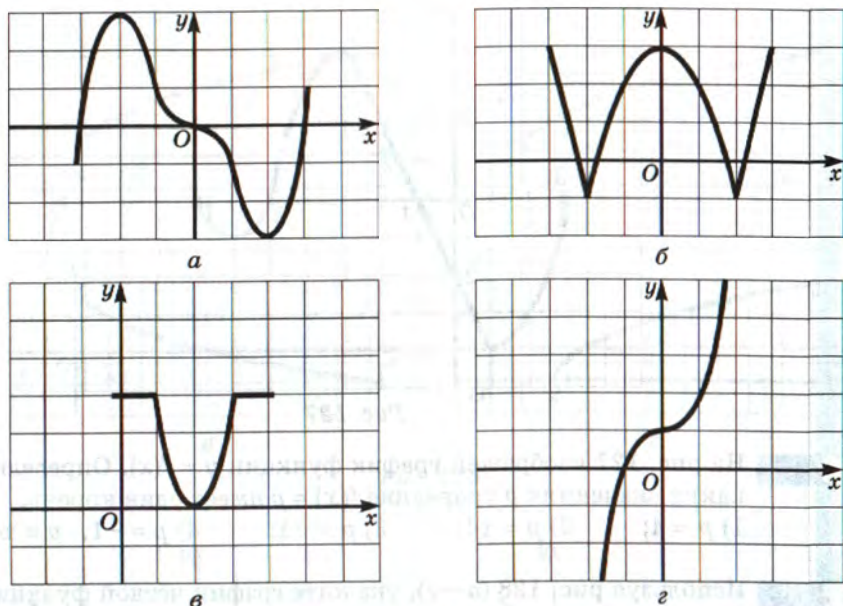


Рис. 129

143

Используя рис. 129 (а—г), укажите график нечётной функции.

- 1) а; 2) б; 3) в; 4) г.

144

Укажите функцию, которая является чётной.

- 1) $y = x^3 + \frac{2}{x^2}$; 3) $y = x^2 - 2x + 5$;
 2) $y = -x^3 + \frac{1}{x}$; 4) $y = x^4 - 22$.

145

Укажите функцию, которая является нечётной.

- 1) $y = x^3 + 3x + 1$; 3) $y = x^3 + \frac{2}{x}$;
 2) $y = x^4 - \frac{1}{x^2}$; 4) $y = x^4 + x$.

146

Укажите функцию, графиком которой является кубическая парабола.

- 1) $y = \sqrt[3]{x}$; 2) $y = x^2 - 3$; 3) $y = x^3$; 4) $y = \frac{1}{x^3}$.

147

Задайте аналитически кубическую параболу, график которой изображён на рис. 130.

- 1) $y = x^3$; 2) $y = x^3 + 2$; 3) $y = (x - 2)^3$; 4) $y = (x + 2)^3 - 2$.

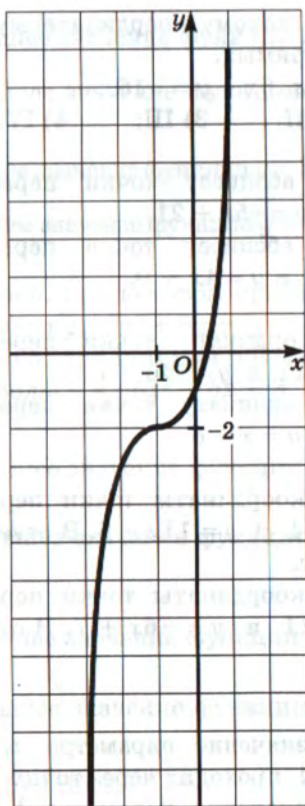


Рис. 130

- 148 Установите, какому координатному углу принадлежит точка пересечения прямых.

$$3x - y = 6 \text{ и } 2x + y = 8.$$

- 1) I; 2) II; 3) III; 4) IV.

- 149 Установите, какому координатному углу принадлежит точка пересечения прямых.

$$5x + y = 15 \text{ и } 4x + y = 10.$$

- 1) I; 2) II; 3) III; 4) IV.

- 150 Установите, какому координатному углу принадлежит точка пересечения прямых.

$$x - 3y = 9 \text{ и } 3x + y = -4.$$

- 1) I; 2) II; 3) III; 4) IV.

151

Установите, какому координатному углу принадлежит точка пересечения прямых.

$$x + 2y = 6 \text{ и } 6x - y = -16.$$

- 1) I; 2) II; 3) III; 4) IV.

152

а) Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y = 7x$ и $y = -5x + 21$.

б) Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y = 9x - 4$ и $y = 4x + 9$.

153

а) Найдите ординату точки пересечения графиков функций $y = -8x + 11$ и $y = -2x - 7$.

б) Найдите ординату точки пересечения графиков функций $y = 21x$ и $y = x - 6$.

154

а) Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 15x + 4$ и $y = 11x - 8$. В ответе укажите сумму найденных координат.

б) Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 8x - 11$ и $y = -6x + 7$. В ответе укажите значение выражения $\frac{x}{y}$.

155

а) Найдите значение параметра a , если известно, что прямая $ax + 6y = 4$ проходит через точку $(2; 1)$.

б) Найдите значение параметра b , если известно, что прямая $-4x + by = -2$ проходит через точку $(3; 8)$.

156

а) Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 6x + 5$.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 + 4x - 1$.

157

а) Найдите наибольшее значение функции $y = -10x^2 + 30x - 23$.

б) Найдите наибольшее значение функции $y = -5x^2 - 16x + 1$.

158

а) Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{16 - x^2}$.

б) Найдите наибольшее значение функции $y = 1 - \sqrt{x}$.

159

а) Найдите наименьшее значение функции $y = 5 + 3\sqrt{x}$.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 49}$.

160

а) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 1}$.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{2x^2 + 4x + 6}$.

161

а) Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$.б) Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$.

162

а) Найдите наибольшее значение функции $y = 11 - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.б) Найдите наименьшее значение функции $y = 17 + \sqrt{x^2 + 5x + 6}$.

163

а) Найдите значение b , при котором прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы $y = 3x^2 + bx + 7$.б) Найдите значение b , при котором прямая $x = -2$ является осью симметрии параболы $y = -5x^2 + bx + 3$.

164

а) Найдите наименьшее значение функции $y = -\frac{12}{x^2 + 2}$.б) Найдите наименьшее значение функции $y = 1 - \frac{10}{x^2 + 2}$.

165

а) Найдите наибольшее значение функции $y = 3 + \frac{12}{\sqrt{x^2 + 36}}$.б) Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{14}{\sqrt{x^2 + 49}}$.

166

Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 2x}{x}$; в) $y = \frac{3x - 3x^2}{x - 1}$;

б) $y = \frac{16 - x^2}{x - 4}$; г) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$.

167

Постройте график функции:

а) $y = -\frac{4x + 4}{x^2 + x}$; в) $y = \frac{6x - 30}{x^2 - 5x}$;

б) $y = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$; г) $y = \frac{x + 1}{1 - x^2}$.

168

Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^3 - 4x}{x + 2}$; в) $y = \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x - 3}$;

б) $y = \frac{x^4 - x^3 - x^2 + x}{x^2 + x}$; г) $y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - x - 2}$.

169

а) Постройте график функции $y = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x - 2}$ и найдите, при каких значениях p прямая $y = p$ имеет с графиком данной функции одну общую точку.

б) Постройте график функции $y = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x + 1}$ и найдите, при каких значениях p прямая $y = p$ имеет с графиком данной функции одну общую точку.

170

а) Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x - 1}$ и найдите, при каких значениях p уравнение $f(x) = p$ имеет один корень.

б) Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x + 3}$ и найдите, при каких значениях p уравнение $f(x) = p$ имеет один корень.

171

Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 4x + 5, & \text{если } x < -1; \\ -2x, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$

При каких значениях p график данной функции имеет с прямой $y = p$ две общие точки?

172

Постройте график функции $y = \begin{cases} -x - 2, & \text{если } x < -2; \\ -x^2 + 2x + 8, & \text{если } x \geq -2 \end{cases}$

При каких значениях p график данной функции имеет с прямой $y = p$ две общие точки?

173

Постройте график функции $y = |x^2 - 4x|$. При каких значениях m график данной функции будет иметь с прямой $y = m$ три общие точки?

174

Постройте график функции $y = |x^2 - 4|$. При каких значениях m график данной функции будет иметь с прямой $y = m$ три общие точки?

175

Постройте график функции $y = x^2 + 3$. При каких значениях k график данной функции будет иметь с прямой $y = kx$ одну общую точку?

176

Постройте график функции $y = -x^2 - 5$. При каких значениях k график данной функции будет иметь с прямой $y = kx$ одну общую точку?

Уравнения и системы уравнений

177

- а) На рисунке 131 изображена парабола $y = x^2 - 5x + 4$. Найдите абсциссу точки B .
 б) На рисунке 132 изображена парабола $y = -x^2 - 5x + 6$. Найдите абсциссу точки A .

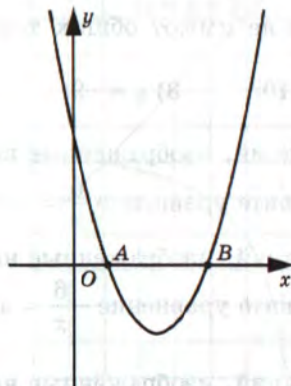


Рис. 131

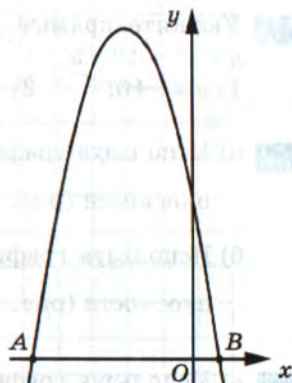


Рис. 132

178

- а) На рисунке 133 изображены графики функций $y = -x^2 - 4x$ и $y = 2x + 5$. Найдите координаты точки C .
 б) На рисунке 134 изображены графики функций $y = x^2 - 4x$ и $y = -2x + 3$. Найдите координаты точки C .

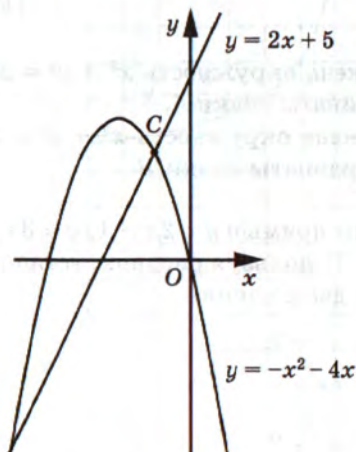


Рис. 133

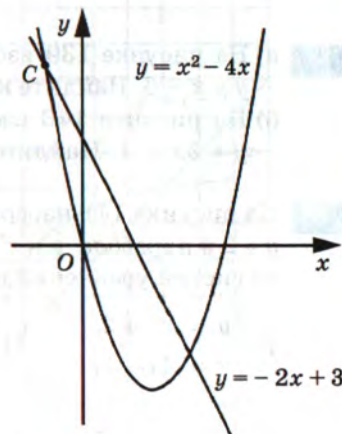


Рис. 134

179

Укажите прямые, которые имеют с параболой $y = x^2 + 4x + 3$ ровно одну общую точку.

- 1) $y = 0$; 2) $y = x - 2$; 3) $y = -1$; 4) $y = 2x + 2$.

180

Укажите прямые, которые имеют с параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ две общие точки.

- 1) $y = 2x$; 2) $y = 3 - x$; 3) $y = 1$; 4) $y = -50$.

181

Укажите прямые, которые не имеют общих точек с параболой $y = x^2 - 4x - 5$.

- 1) $y = -10$; 2) $y = 2x - 10$; 3) $y = -9$; 4) $y = x - 10$.

182

а) Используя графики функций, изображённые на координатной плоскости (рис. 135), решите уравнение $\frac{6}{x} = x + 5$.

б) Используя графики функций, изображённые на координатной плоскости (рис. 136), решите уравнение $-\frac{6}{x} = x - 7$.

183

а) Используя графики функций, изображённые на координатной плоскости (рис. 137), решите систему уравнений $\begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ y = 5 - x \end{cases}$.

б) Используя графики функций, изображённые на координатной плоскости (рис. 138), решите систему уравнений $\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = x + 8 \end{cases}$.

184

а) На рисунке 139 изображена окружность $x^2 + y^2 = 20$ и прямая $y = x - 6$. Найдите координаты точки А.

б) На рисунке 140 изображена окружность $x^2 + y^2 = 2$ и прямая $y = 5x + 4$. Найдите координаты точки В.

185

На рисунке 141 изображены прямые $y = 2x - 1$, $y = 3x$, $y = 2x + 1$, $y = 2$ и парабола $y = x^2 + 2$. Используя рисунок, установите, какая из систем уравнений имеет два решения.

1) $\begin{cases} y = x^2 + 2, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = x^2 + 2, \\ y = 3x. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 + 2, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 + 2, \\ y = 2. \end{cases}$

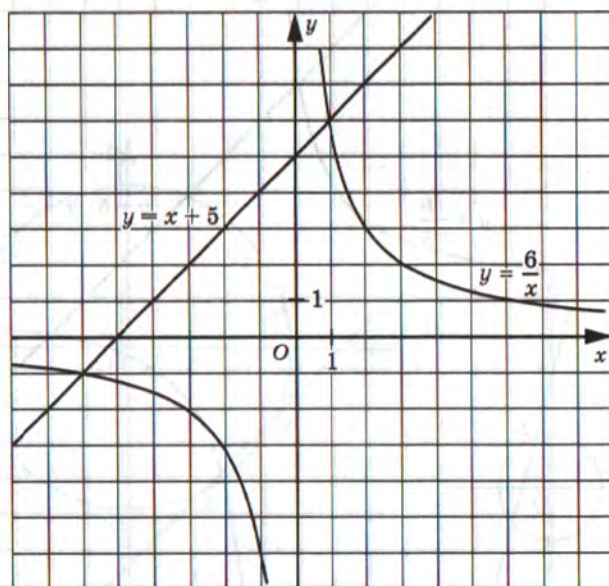


Рис. 135

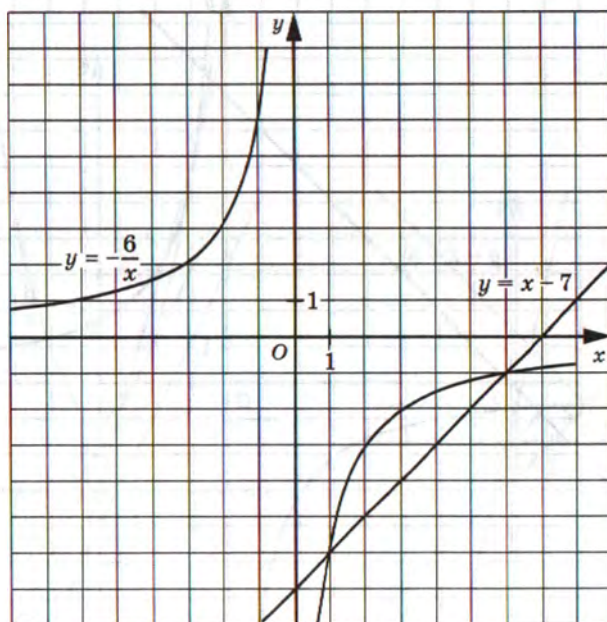


Рис. 136

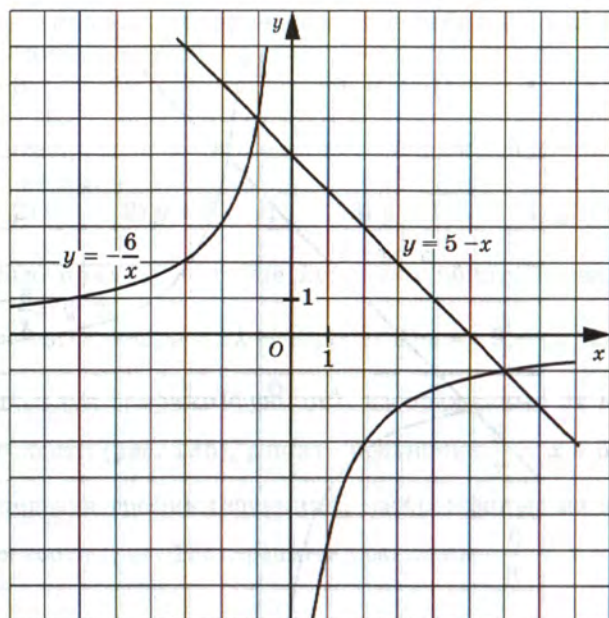


Рис. 137

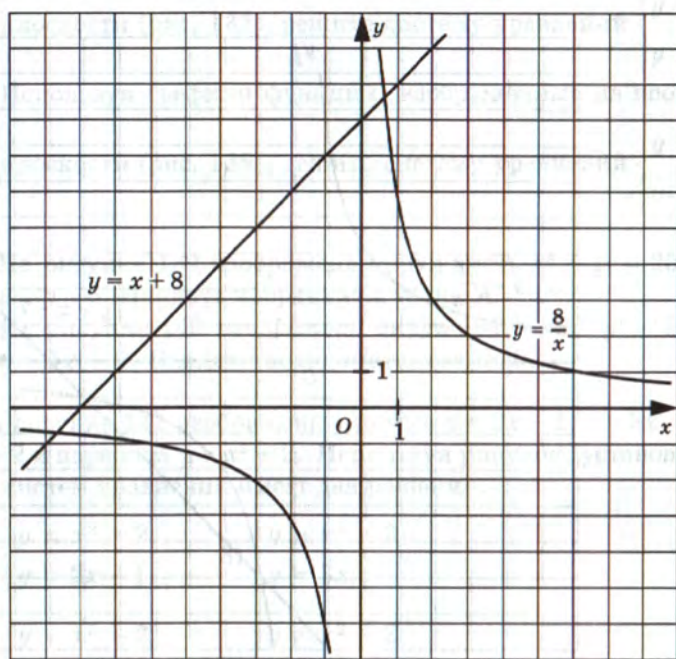


Рис. 138

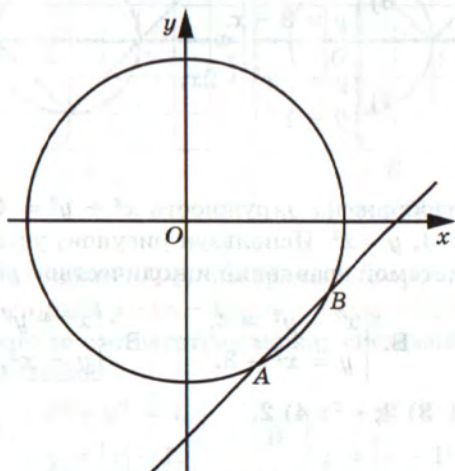


Рис. 139

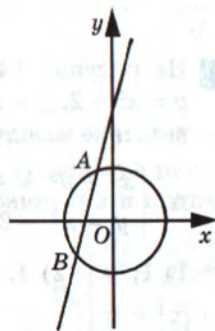


Рис. 140

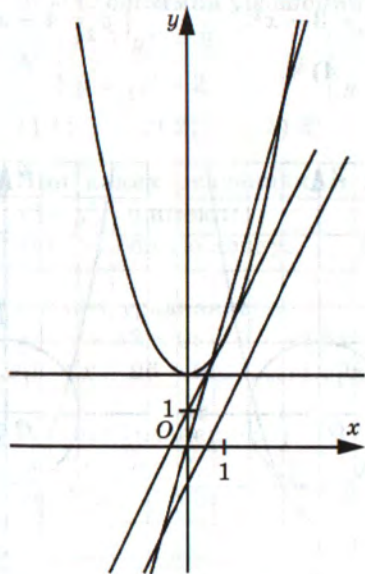


Рис. 141

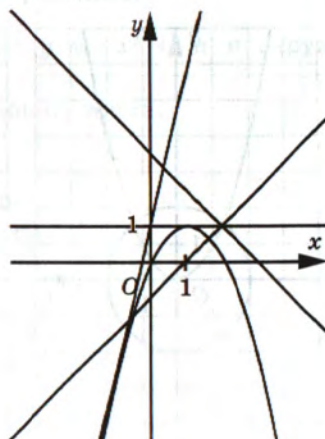


Рис. 142

186

На рисунке 142 изображены прямые $y = x - 1$, $y = 3 - x$, $y = 4x + 1$, $y = 1$ и парабола $y = -x^2 + 2x$. Используя рисунок, установите, какая из систем уравнений не имеет решений.

$$1) \begin{cases} y = -x^2 + 2x, \\ y = x - 1. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y = -x^2 + 2x, \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = -x^2 + 2x, \\ y = 4x + 1. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y = -x^2 + 2x, \\ y = 1. \end{cases}$$

187

На рисунке 143 изображена окружность $x^2 + y^2 = 4$ и параболы $y = x^2 - 2$, $y = x^2 - 3$, $y = x^2$. Используя рисунок, установите соответствие между системой уравнений и количеством её решений.

$$A. \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 2. \end{cases} \quad B. \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 3. \end{cases} \quad B. \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2. \end{cases}$$

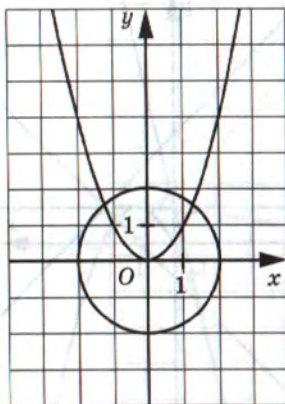
1) 1; 2) 4; 3) 3; 4) 2.

188

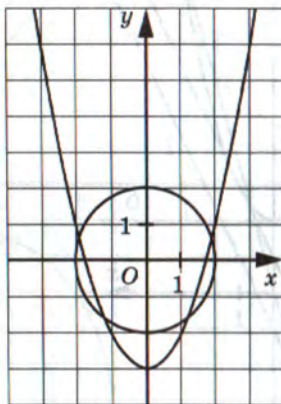
Используя графические представления, установите соответствие между системой уравнений и количеством её решений.

$$A. \begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = 2 - x^2. \end{cases} \quad B. \begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = 3 - x^2. \end{cases} \quad B. \begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = 4 - x^2. \end{cases}$$

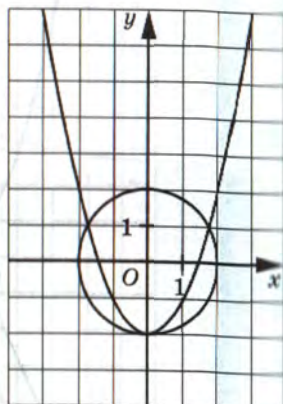
1) 0; 2) 3; 3) 2; 4) 4.



A



B



B

Рис. 143

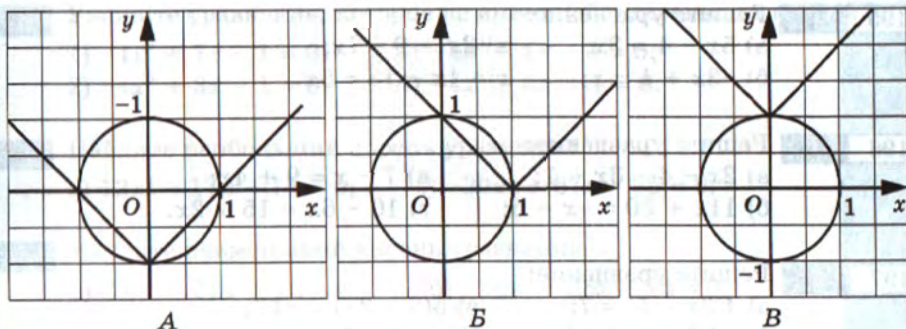


Рис. 144

189

На рисунке 144 изображена окружность $x^2 + y^2 = 1$ и графики функций $y = |x| - 1$, $y = |x - 1|$, $y = |x| + 1$. Используя рисунок, установите соответствие между системой уравнений и количеством её решений.

A. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x| - 1. \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x - 1|. \end{cases}$

В. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x| + 1. \end{cases}$

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

190

Используя графические представления, установите соответствие между системой уравнений и количеством её решений.

A. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = |x| - 2. \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = |x - 2|. \end{cases}$

В. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = |x| + 2. \end{cases}$

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) нет решений.

191

При каких значениях m парабола $y = -x^2 + m$ и окружность $x^2 + y^2 = 5$ имеют:

- а) одну общую точку; б) три общие точки.

192

Решите уравнение:

а) $7x - 42 = 0$;

в) $6x + 84 = 0$;

б) $-8x - 96 = 0$;

г) $-9x + 54 = 0$.

193

Решите уравнение:

а) $12x + 6 = 0$;

в) $-20x + 5 = 0$;

б) $-15x - 3 = 0$;

г) $10x - 4 = 0$.

194

Решите уравнение:

а) $-4x - 7 = 1$;

в) $-14x + 9 = 37$;

б) $6x + 13 = -2$;

г) $9x - 12 = 33$.

195

Решите уравнение:

- а) $5x - 4 = 3x$; в) $2x + 9 = 7x$;
б) $-3x + 1 = x$; г) $-4x - 18 = 5x$.

196

Решите уравнение:

- а) $2x - 4 = 3x + 1$; в) $7 - x = 9 + 4x$;
б) $11x + 30 = -x - 6$; г) $10 - 6x = 15 + 2x$.

197

Решите уравнение:

- а) $4(3x - 5) = 7$; в) $5(8 - 2x) = -12$;
б) $-3(4x + 1) = 1$; г) $-2(4 - 7x) = 13$.

198

Решите уравнение:

- а) $8(1 - x) = 2x$; в) $-7(2x + 3) = -10x$;
б) $-6(3 - 5x) = 5x$; г) $10(x + 6) = -3x$.

199

Решите уравнение:

- а) $1 - 2(3x + 2) = x - 5$; в) $2 - 3(x - 4) = 2x + 3$;
б) $4 + 5(2x - 1) = 3x + 1$; г) $6 + 4(3x + 2) = 12 - x$.

200

Решите уравнение:

- а) $3(4x - 1) - 7(2x + 4) = x - 4$.
б) $5(2x - 3) - (8x - 7) = 12 - 2x$.

201

Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравне-

$$\text{ния } \frac{2x + 15}{8} = \frac{x - 3}{12} + 2.$$

- 1) $(-13; -11)$; 2) $(-8; -5)$; 3) $(-5; -3)$; 4) $(-1; 0)$.

202

Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравне-

$$\text{ния } \frac{3x + 1}{9} = \frac{2 - x}{6} - 1.$$

- 1) $(-15; -9)$; 2) $(-3; -2)$; 3) $(-2; -1)$; 4) $(-1; 1)$.

203

Укажите уравнение, которое имеет два различных действительных корня.

- 1) $x^2 - 8x + 19 = 0$; 3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
2) $x^2 - 8x + 16 = 0$; 4) $x^2 + 5x + 8 = 0$.

204

Укажите уравнение, которое имеет два отрицательных корня.

- 1) $3x^2 + 10x + 6 = 0$; 3) $3x^2 + 10x + 9 = 0$;
2) $3x^2 - 10x + 6 = 0$; 4) $3x^2 - 10x - 6 = 0$.

205

Укажите уравнение, которое не имеет действительных корней.

- 1) $-4x^2 + 7x - 1 = 0$; 3) $-4x^2 - 4x - 1 = 0$;
2) $-4x^2 + 3x - 1 = 0$; 4) $-4x^2 + 6x + 1 = 0$.

206

Найдите наибольший корень уравнения.

- а) $12x^2 - 17x - 14 = 0$; б) $-30x^2 + 67x - 35 = 0$.

207

Найдите наименьший корень уравнения.

- а) $20x^2 + 31x + 12 = 0$; б) $-24x^2 + 38x - 15 = 0$.

208

Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $6x^2 + 13x + 6 = 0$.

- 1) $(-2,5; -1)$; 2) $[-0,8; 0]$; 3) $(0,5; 2)$; 4) $[-1,5; -0,5]$.

209

Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $-25x^2 + 5x + 2 = 0$.

- 1) $(-1; 0)$; 2) $[0; 1]$; 3) $[-0,4; 0,2]$; 4) $(-0,4; 0,6)$.

210

Решите уравнение:

а) $\sqrt{5x - 3} = 2$; в) $\sqrt{4 - 3x} = 5$;

б) $\sqrt{x^2 - 24} = 5$; г) $\sqrt{x^2 - 20} = 4$.

211

Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} = 2$; б) $\frac{6}{x^2} - \frac{1}{x} = 5$.

212

Решите уравнение:

а) $\frac{y^2 - 25}{6y - 30} = 0$; б) $\frac{y^2 - 16}{-3y - 12} = 0$.

213

Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 7x + 12}{2x - 8} = 0$; б) $\frac{x^2 + 6x + 8}{5x + 10} = 0$.

214

Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = 0$; б) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 1} = 0$.

215

а) Решите уравнение

а) $\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 2x - 3} = 0$; б) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 0$.

216

Решите уравнение:

а) $\frac{x-5}{x-3} + \frac{4}{x+3} + \frac{24}{x^2-9} = 0$; б) $\frac{1}{x-2} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{x+1}{x+2}$.

217

Решите уравнение:

а) $\frac{3x+2}{2x} + \frac{2x}{3x+2} = -2$; б) $\frac{4x-3}{6x} + \frac{6x}{4x-3} = 2$.

218

Решите уравнение:

а) $x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$; б) $x - 6\sqrt{x} - 7 = 0$.

219

Решите уравнение:

а) $4x^{-1} + x + 4 = 0$; б) $9x^{-1} + x - 6 = 0$.

220

Найдите модуль разности корней уравнения:

а) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$; б) $4x^4 - 35x^2 - 9 = 0$.

221

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3y = 4, \\ -x + y = -8; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - 3y = -5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = -10, \\ 5x + y = 6; \end{cases}$

222

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 9, \\ x + 2y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x + 4y = 18, \\ 5x + y = 24; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 15x + 4y = -3, \\ 5x + 2y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - 16y = 7, \\ 3x + 8y = 13. \end{cases}$

223

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x + 2y = 26, \\ 4x - 3y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x - 3y = 1, \\ -6x + 5y = 2; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 3x - 7y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - 5y = -2, \\ 3x + 2y = -13. \end{cases}$

224

Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2(2x - 3y) - 4x = 2y - 8, \\ 6x + 3 = 8x - 3(2y - 4); \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 16 - (5x + 2y) = 3x - 2y, \\ 4y + 20 = 2(3x - 4y) - 4. \end{cases}$$

225

Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x + 2y}{5} + \frac{3x - y}{3} = 5, \\ 2x - 3y = -1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{4x + 1}{3} - \frac{5x - 3y}{4} = 3, \\ 7x - 10y = 5. \end{cases}$$

226

а) Найдите значение выражения $|x_1 - y_1| + \frac{1}{|x_2 - y_2|}$, где пары чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} xy = 63, \\ x + y = 16; \end{cases}$$

б) найдите значение выражения $|x_1 - x_2| + \frac{2}{|y_1 - y_2|}$, где пары чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} xy = -91, \\ x + y = -6; \end{cases}$$

227

а) Найдите значение выражения $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}$, где пары чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} xy = -80, \\ x - y = -21; \end{cases}$$

б) найдите значение выражения $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}$, где пары чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} xy = 60, \\ x - y = -11. \end{cases}$$

228

а) Найдите значение выражения $x_1y_1 + x_2y_2$, где пары чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy = 6, \\ 7x - xy = 2; \end{cases}$$

б) найдите значение выражения $x_1y_1 + x_2y_2$, где пары чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} xy - y^2 = 7, \\ xy + 5y = 13. \end{cases}$$

229

Определите, сколько решений имеет система уравнений:

$$a) \begin{cases} x^2 + 4x = y - 2, \\ x + y + 2 = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + y = 2x + 2, \\ y - 3 = 0. \end{cases}$$

230

Определите, сколько решений имеет система уравнений:

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ xy + 4 = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y = -5. \end{cases}$$

231

Решите систему уравнений:

$$a) \begin{cases} x^2 y^2 - 6xy = -5, \\ 3x + 3y = 10; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x^2 y^2 - 5xy = -2, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

232

а) Решите систему уравнений:

$$a) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{4y}{x} = 3, \\ x - 3y = 1; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{5y}{x} = -6, \\ 2x + 7y = 6. \end{cases}$$

233

а) Решите систему уравнений:

$$a) \begin{cases} \frac{8}{x-y} - \frac{1}{x+y} = 5, \\ \frac{15}{x-y} - \frac{6}{x+y} = -3; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{9}{2x+y} - \frac{4}{x-y} = 2, \\ \frac{3}{2x+y} + \frac{5}{x-y} = 26. \end{cases}$$

234

Найдите целое значение a , при котором $ax + 5y = 0$, если пара чисел

$$(x; y) \text{ является решением системы уравнений } \begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

235

Найдите целое значение a , при котором $ax + y = 6$, если пара чисел

$$(x; y) \text{ является решением системы уравнений } \begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ 2x - y = 11. \end{cases}$$

236

При каком значении a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ |x| - y = a \end{cases}$ имеет три решения?

237

При каком значении a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ |x| + y = a \end{cases}$ имеет одно решение?

Неравенства и системы неравенств

238

Укажите неравенство, верное при любых значениях переменных и удовлетворяющее условию $a > b$.

- 1) $b - a < 0$; 2) $a - b < 0$; 3) $a - b > 1$; 4) $a - b < 2$.

239

Укажите неравенство, верное при любых значениях переменных и удовлетворяющее условию $a > -b$.

- 1) $b - a > 0$; 2) $a + b < 0$; 3) $a + b > 1$; 4) $a - b < -1$.

240

Укажите неверное неравенство, если известно, что числа b и c удовлетворяют условию $b < c$.

- 1) $3b < 3c$; 3) $b + 15 < c + 15$;
2) $-3b < -3c$; 4) $b - 2 < c - 2$.

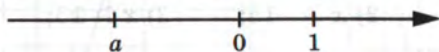
241

Укажите неверное неравенство, если известно, что числа b и c удовлетворяют условию $b > c$.

- 1) $3b + 1 > 3c + 1$; 3) $\frac{b}{4} < \frac{c}{4}$;
2) $1 - 3b < 1 - 3c$; 4) $-c > -b$.

242

На координатной прямой изображено число a .

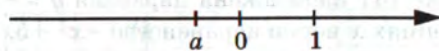


Какие из указанных неравенств являются верными?

- 1) $a^2 > 1$; 2) $-1 < \frac{1}{a} < 0$; 3) $-\frac{1}{a} > 1$; 4) $-a > 1$.

243

На координатной прямой изображено число a .

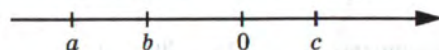


Какие из указанных неравенств являются верными?

- 1) $a^2 > 1$; 2) $-\frac{1}{a} > 0$; 3) $-\frac{1}{a} > 1$; 4) $a - 1 > 0$.

244

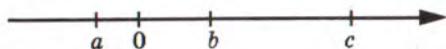
На координатной прямой отмечены числа a , b , c .



Какое из следующих неравенств является неверным?

- 1) $-abc > 0$; 2) $ab^2c < 0$; 3) $ac < bc$; 4) $a + b < c$.

245

На координатной прямой отмечены числа a, b, c .

Какое из следующих неравенств является неверным?

- 1) $abc < 0$; 2) $a^2bc > 0$; 3) $ac > bc$; 4) $b - a > c$.

246

Найдите наименьшее целое решение неравенства:

- а) $9x - 4 < 10x + 3$; б) $12x + 7 \geq 9x - 11$.

247

Найдите множество решений неравенства $2,2x - 0,1 < 1,8x + 2,9$.

- 1) $(-\infty; 7,5]$; 2) $(-\infty; 0,75)$; 3) $(7,5; +\infty)$; 4) $(-\infty; 7,5)$.

248

Решите неравенство $\frac{4}{7}x + \frac{1}{6} \geq \frac{3}{14} + \frac{2}{3}x$.

- 1) $x \leq -0,5$; 2) $x \leq 2$; 3) $x \leq 0,5$; 4) $x \leq -2$.

249

Решите неравенство $\frac{11 + 5x}{12} > \frac{8x - 2}{15}$.

- 1) $x < -9$; 2) $x > 9$; 3) $x < 9$; 4) $x > -9$.

250

Решите неравенство $\frac{15 + 3x}{20} \leq \frac{7x - 9}{32}$.

- 1) $x \leq -15$; 2) $x \geq -15$; 3) $x \geq 15$; 4) $x \leq 15$.

251

а) На рисунке 145 изображена парабола $y = x^2 + 8x + 7$. При каких значениях x верно неравенство $x^2 + 8x + 7 > 0$?

б) на рисунке 146 изображена парабола $y = x^2 + 5x - 6$. При каких значениях x верно неравенство $y = x^2 + 5x - 6 \leq 0$?

252

а) На рисунке 147 изображена парабола $y = -x^2 - 5x - 4$. При каких значениях x верно неравенство $-x^2 - 5x - 4 \geq 0$?

б) на рисунке 148 изображена парабола $y = -x^2 - 8x - 12$. При каких значениях x верно неравенство $-x^2 - 8x - 12 < 0$?

253

Решите неравенство $x^2 - 7x + 12 \leq 0$.

- 1) $3 \leq x \leq 4$; 3) $-4 \leq x \leq -3$;
2) $x \leq -4$ и $x \geq -3$; 4) $x \leq 3$ и $x \geq 4$.

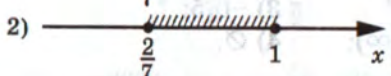
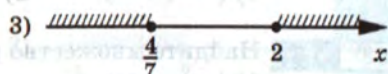
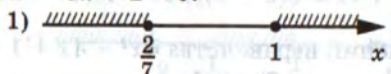
254

Решите неравенство $-x^2 + 11x - 30 < 0$.

- 1) $5 < x < 6$; 3) $-6 < x < 5$;
2) $x < 5$ и $x > 6$; 4) $x < -6$ и $x > 5$.

255

Укажите геометрическую модель решения неравенства $7x^2 - 9x + 2 \leq 0$.



256

Укажите геометрическую модель решения неравенства $-2x^2 + 9x - 7 < 0$.

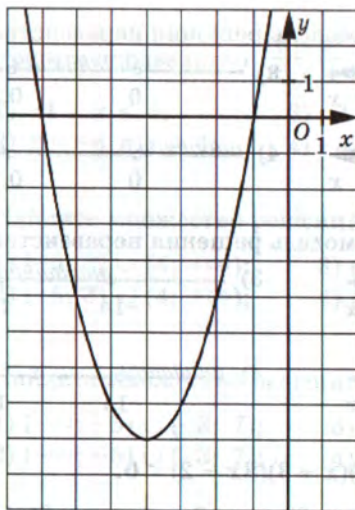
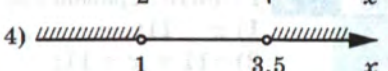
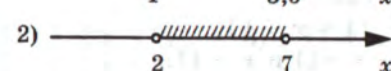
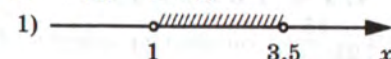


Рис. 145

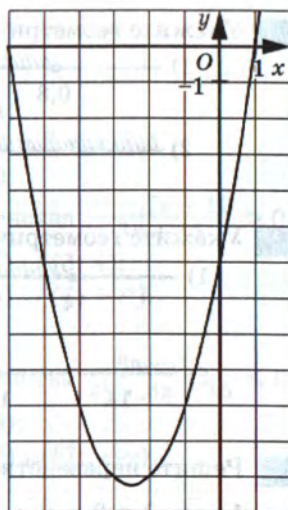


Рис. 146

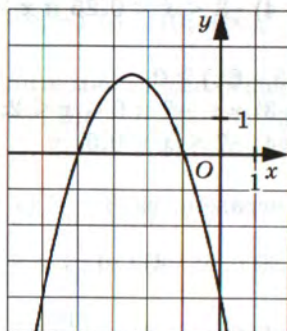


Рис. 147

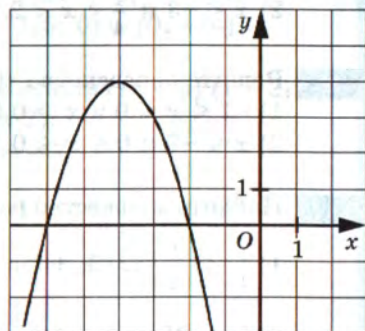


Рис. 148

257

Найдите множество решений неравенства $-x^2 + 2x - 1 < 0$.

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; 3) 1; 4) \emptyset .

258

Найдите множество решений неравенства $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$.

- 1) $(-\infty; +\infty)$; 3) $-0,5$;
2) $(-\infty; -0,5) \cup (-0,5; +\infty)$; 4) \emptyset .

259

Решите неравенство $4x^2 \geq 9x$.

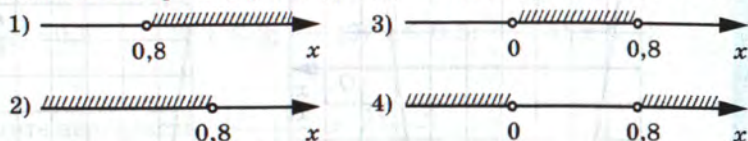
- 1) $x \leq 0$ и $x \geq 2,25$; 3) $x \geq 2,25$;
2) $0 \leq x \leq 2,25$; 4) $x \leq -1,5$ и $x \geq 1,5$.

260

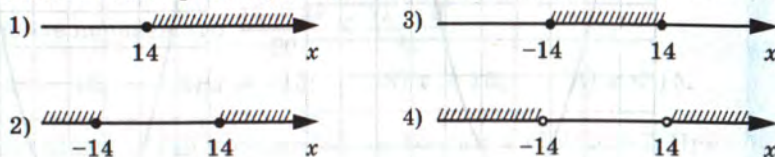
Решите неравенство $x^2 < 121$.

- 1) $x < 11$; 3) $-11 \leq x \leq 11$;
2) $-11 < x < 11$; 4) $x < -11$ и $x > 11$.

261

Укажите геометрическую модель решения неравенства $4x < 5x^2$.

262

Укажите геометрическую модель решения неравенства $x^2 \geq 196$.

263

Решите неравенство $(x - 2)(x + 3)(8x - 2) < 0$.

- 1) $x < 3$ и $2 < x < 4$; 3) $x < -2$ и $\frac{1}{4} < x < 3$;
2) $x < -3$ и $\frac{1}{4} < x < 2$; 4) $-3 < x < 0,25$ и $x > 2$.

264

Решите неравенство $x(x + 7)(3 - 6x) \geq 0$.

- 1) $-7 \leq x \leq 0$ и $x \geq 0,5$; 3) $x \leq -7$ и $0 \leq x \leq 2$;
2) $x \leq -7$ и $0 \leq x \leq 0,5$; 4) $-7 \leq x \leq 0,5$.

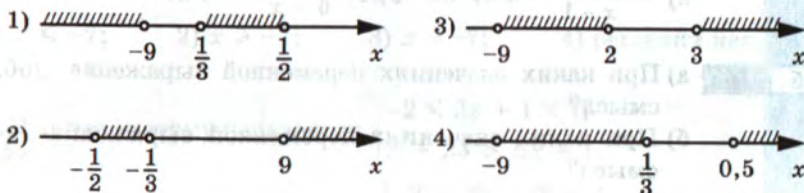
265

Найдите множество решений неравенства $(3x - 1)(x + 4)(x - 6) \geq 0$.

- 1) $[-4; \frac{1}{3}] \cup [6; +\infty)$; 3) $[-6; -4) \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$;
2) $[-4; 3] \cup [6; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4) \cup (\frac{1}{3}; 6)$.

266

Укажите геометрическую модель решения неравенства $(2x - 1)(4 - 12x)(x + 9) < 0$.



267

Решите неравенство $\frac{-54}{x^2 - 49} \leq 0$.

- 1) $-7 < x < 7$; 3) $x < -7$ и $x > 7$;
2) $-7 \leq x \leq 7$; 4) $x > 7$.

268

Решите неравенство $\frac{16 - x^2}{x^2 + 4} \geq 0$.

- 1) $-4 < x < 4$; 3) $-4 \leq x \leq 4$;
2) $x \leq -4$ и $x \geq 4$; 4) $-4 \leq x < 2$ и $2 < x \leq 4$.

269

Найдите множество решений неравенства $\frac{x^2 - 7x + 12}{3x + 15} > 0$.

- 1) $[-5; 3] \cup [4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5) \cup (3; 4)$;
2) $(-5; 3) \cup (4; +\infty)$; 4) $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$.

270

Найдите множество решений неравенства $\frac{2x - 14}{x^2 + 8x + 15} \leq 0$.

- 1) $(-\infty; -5) \cup (-3; 7]$; 3) $(-5; -3)$;
2) $(-\infty; -5] \cup [-3; 7]$; 4) $(-5; -3) \cup [7; +\infty)$.

271

Найдите множество решений неравенства $x^2(2x + 3) > 0$.

- 1) $(-1,5; 0)$; 3) $(-1,5; +\infty)$;
2) $(-\infty; -1,5) \cup (0; +\infty)$; 4) $(-1,5; 0) \cup (0; +\infty)$.

272

Найдите множество решений неравенства $(x + 3)^2(x - 2) < 0$.

- 1) $(-\infty; 2)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (-3; 2)$;
2) $(-3; 2)$; 4) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

273

Решите неравенство:

- а) $\frac{x^2}{x - 2} \geq 0$; в) $\frac{x + 2}{(x - 4)^2} \geq 0$;
б) $\frac{x - 3}{x^2 + 6x + 9} \leq 0$; г) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \leq 0$.

274

Решите неравенство:

а) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 1} \leq 0$. б) $\frac{x^2 - 5x - 6}{6 - x} \leq 0$.

275

а) При каких значениях переменной выражение $\sqrt{56x + 7}$ имеет смысл?б) При каких значениях переменной выражение $\frac{1}{\sqrt{5x - 2}}$ имеет смысл?

276

а) При каких значениях переменной выражение $\sqrt{x^2 + 6x}$ имеет смысл?б) При каких значениях переменной выражение $\sqrt{\frac{2}{x^2 - 36}}$ имеет смысл?

277

а) Найдите область определения функции $y = \sqrt{5x + 1}$.б) Найдите область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{5x - 2}}$.

278

а) Найдите область определения функции $y = \sqrt{225 - x^2}$.б) найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 49}$.

279

а) Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 6x - 7}$.б) найдите область определения функции $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.

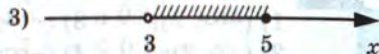
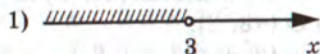
280

Решите систему неравенств $\begin{cases} 16x - 96 \leq 0, \\ 10 - 5x \leq 0. \end{cases}$ 1) $2 \leq x \leq 6$; 2) $x \leq 6$; 3) $x \geq 2$; 4) $x \leq 2$.

281

Укажите геометрическую модель решения системы неравенств

$$\begin{cases} 14x - 70 \geq 0, \\ 9 - 3x < 0. \end{cases}$$



282

Решите систему неравенств $\begin{cases} 15x + 60 < 0, \\ -42 - 6x \geq 0. \end{cases}$ 1) $-7 \leq x < -4$; 2) $x < -4$; 3) решений нет; 4) $x \leq -7$.

283

Решите систему неравенств $\begin{cases} -28 - 4x < 0, \\ 5x + 35 < 0. \end{cases}$

- 1) $x < -7$; 2) $x \geq -7$; 3) $x = -7$; 4) решений нет.

284

а) Решите систему неравенств $\begin{cases} -2 \leq 3x + 1 \leq 7, \\ x + 23 > 5x - 1. \end{cases}$

б) Решите систему неравенств $\begin{cases} -3 < 2x - 7 < 3, \\ 6x - 13 < x + 17. \end{cases}$

285

а) Решите систему неравенств $\begin{cases} 1 \leq 5x - 4 \leq 26, \\ x + 21 > 7x + 3. \end{cases}$

б) Решите систему неравенств $\begin{cases} -4 < 7x + 3 < 31, \\ x - 13 \leq 2x - 13. \end{cases}$

286

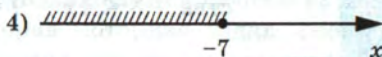
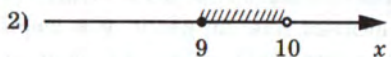
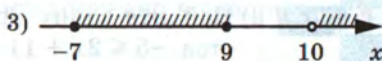
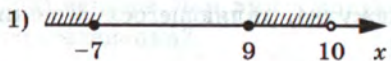
Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - x - 56 < 0, \\ x + 4 \geq 0. \end{cases}$

- 1) $-4 \leq x < 8$; 3) $x < -7$ и $-4 \leq x < 8$;
2) $-7 < x \leq 4$ и $x > 8$; 4) $4 \leq x < 7$.

287

Укажите геометрическую модель решения системы неравенств

$$\begin{cases} x - 10 < 0, \\ x^2 - 2x - 63 \geq 0. \end{cases}$$



288

Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$.

- 1) $[-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$;
2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; 4) $[-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

289

Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$.

- 1) $[-1; 2)$; 3) $(-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$;
2) $(2; +\infty)$; 4) $[-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

290

Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$.

- 1) $(-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$; 3) $(2; +\infty)$;
2) $[-1; 2)$; 4) $[-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

291

Найдите область определения функции $y = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

- 1) $(-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$; 3) $[-1; 2) \cup (2; +\infty)$;
2) $[-1; 2)$; 4) $(2; +\infty)$.

292

а) Укажите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{x+9}{x^2+1} > 0$.б) Укажите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{-25}{x+8} \leq 0$.

293

а) Укажите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{17}{2x-4} < 0$.б) Укажите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{3x-11}{x^2+3} \leq 0$.

294

а) Найдите длину промежутка, являющегося решением неравенства $-5 \leq 2x + 11 \leq 1$.б) Найдите длину промежутка, являющегося решением неравенства $-3 \leq 4x - 9 \leq 3$.

295

а) Сколько целых чисел принадлежит решению неравенства $-2 < 7 - 3x < 4$?б) Сколько целых чисел принадлежит решению неравенства $-4 \leq 6 - 5x \leq 1$?

296

а) Укажите наибольшее целое число, которое не является решением неравенства $\frac{3-9x}{x+5} < 0$.б) Укажите наименьшее целое число, которое не является решением неравенства $\frac{x-6}{6-2x} \leq 0$.

297

а) Укажите наибольшее целое число, которое является решением

$$\begin{cases} \frac{x-5}{x+3} > 0, \\ 2x+6 < 11. \end{cases}$$

б) Укажите наименьшее целое число, которое является решением

$$\begin{cases} \frac{-6-x}{3x-12} \leq 0, \\ 9x+6 > 4. \end{cases}$$

298

а) При каких значениях n квадратное уравнение

$$x^2 + (n-2)x - (n-5) = 0$$

имеет два корня?

б) При каких значениях n квадратное уравнение

$$x^2 - (n+1)x - (n-2) = 0$$

не имеет корней?

Текстовые задачи

299

Швейная мастерская сшила всего 2600 детских спортивных костюмов, курток и комбинезонов. Комбинезонов сшито на 220 меньше, чем курток, а спортивных костюмов в 2 раза больше, чем курток. Сколько сшито спортивных костюмов?

300

Во время озеленения района было посажено всего 6780 деревьев. Из них лип посажено в 2 раза больше, чем клёнов, а каштанов на 1200 меньше, чем лип. Сколько лип посажено в районе во время его озеленения?

301

Из пункта A в пункт B вышла моторная лодка со скоростью 12 км/ч. Через 4 ч вслед за ней вышла вторая моторная лодка, скорость которой 14 км/ч. Найдите расстояние между пунктами A и B , если обе моторные лодки прибыли в пункт B одновременно.

302

Катер прошёл расстояние между пунктами A и B по течению реки за 4 ч 30 мин, а в обратную сторону за 6 ч 18 мин. Определите расстояние между пунктами A и B , если скорость течения реки 2,4 км/ч.

303

Длина прямоугольника в 3 раза больше ширины. Если ширину прямоугольника увеличить на 2 см, то его площадь увеличится на 126 см². Найдите периметр прямоугольника.

304

Один катет прямоугольного треугольника на 17 см меньше другого. Найдите площадь этого треугольника, если гипотенуза равна 25 см.

305

Бассейн наполняется водой через одну трубу за 4 ч, а через вторую за 6 ч. Через сколько часов наполнится бассейн, если обе трубы будут работать одновременно?

306

Двое рабочих, работая совместно, могут выполнить заказ за 3 ч 36 мин. Первый рабочий, работая один, может выполнить этот заказ за 6 ч. Сколько времени необходимо второму рабочему для выполнения заказа, если он будет работать один?

307

За 2,5 м шерстяной ткани и 4 м хлопчатобумажной ткани уплатили 2120 р. В конце сезона цена на шерстяную ткань снизилась на 20%, а на хлопчатобумажную ткань повысилась на 10%, и такая покупка стала стоить 1882 р. Найдите первоначальную цену каждого вида ткани.

308

За 8 футболок и 10 спортивных маек уплатили 4560 р. Во время распродажи цена на футболки была снижена на 25%, а на спортивные майки на 10%, и такая покупка стала стоить 3780 р. Найдите первоначальную цену каждого вида товара.

309

Из двух городов, расстояние между которыми 500 км, выехали одновременно два поезда и встретились через 4 ч. Если бы второй поезд выехал на 50 мин раньше первого, то они встретились бы через 3 ч 36 мин после выхода первого поезда. Найдите скорость каждого поезда.

310

Катер может пройти 80 км по течению реки и 40 км против течения за 6 ч 30 мин, а 40 км по течению и 80 км против течения за 7 ч. Определите собственную скорость катера и скорость течения реки.

311

Если длину данного прямоугольника увеличить на 8 см, а ширину на 6 см, то площадь прямоугольника увеличится на 632 см^2 . Если же длину уменьшить на 6 см, а ширину увеличить на 8 см, то площадь прямоугольника увеличится на 164 см^2 . Найдите периметр данного прямоугольника.

312

Скорость пассажирского поезда на 20 км/ч больше скорости товарного поезда, поэтому расстояние 700 км пассажирский поезд проходит на 4 ч быстрее, чем товарный. Найдите скорость товарного поезда.

- 313** Расстояние 36 км один лыжник прошёл на 0,5 ч быстрее, чем другой. Найдите скорость каждого лыжника, если скорость одного из них на 1 км/ч больше скорости другого.
- 314** Расстояние между двумя пристанями 105 км катер проплывает по течению реки на 2 ч быстрее, чем против течения. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера равна 18 км/ч.
- 315** Две бригады, работая одновременно, могут выполнить некоторое задание за 6 дней. Одна бригада, работая отдельно, может выполнить это задание на 5 дней быстрее, чем вторая. За какое время может выполнить всё задание вторая бригада, работая отдельно?
- 316** Две копировальные машины, работая одновременно, могут выполнить работу за 12 мин. Если будет работать только первая копировальная машина, то вся работа будет выполнена на 10 мин быстрее, чем при работе только второй машины. За сколько минут всю работу может выполнить вторая копировальная машина?
- 317** Один асфальтоукладчик может выполнить задание на 15 дней быстрее, чем другой. После того как первый асфальтоукладчик проработал 10 дней, его сменил другой и закончил работу за 30 дней. За сколько дней могут выполнить всю работу два асфальтоукладчика, работая одновременно?
- 318** Один экскаватор может вырыть котлован на 10 ч быстрее, чем другой. После того как первый экскаватор проработал 10 ч, его сменил второй экскаватор и закончил работу за 15 ч. За сколько часов могли бы вырыть котлован оба экскаватора, работая одновременно?
- 319** К 30%-ному раствору серной кислоты добавили 60 г воды и получили 10%-ный раствор. Найдите массу первоначального раствора серной кислоты.
- 320** Какое количество воды надо добавить к 3 л 36%-ного раствора соли, чтобы получить 24%-ный раствор?
- 321** Один сплав содержит 55% цинка, а другой — 70% цинка. После переплавки получили 750 г нового сплава с 60%-ным содержанием цинка. Сколько граммов цинка содержалось в первом сплаве?
- 322** Смешали два раствора соляной кислоты 15%-ной и 7%-ной концентрации, после чего получили 480 г раствора 10%-ной концентрации. Найдите массу 7%-ного раствора.

323

В конце года банк начисляет 9% к сумме вклада. Какую сумму получит вкладчик через 2 года, положив 30 000 р.?

324

В конце года банк начисляет 4% к сумме вклада. Какую сумму получит вкладчик через 3 года, положив 25 000 р.?

Последовательности.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

325

Укажите последовательность чисел, которая является арифметической прогрессией.

- 1) 2; 3; 5; 8; ... 3) 2; 4; 8; 16; ...
2) 2; -2; -6; -10; ... 4) 2; -1; 10; -7; 18; ...

326

Укажите последовательность чисел, которая является геометрической прогрессией.

- 1) 2; 3; 5; 8; ... 3) 16; 8; 4; 2; ...
2) 2; -2; -6; -10; ... 4) 2; -1; 10; -7; 18; ...

327

Укажите первые три члена арифметической прогрессии (a_n) , если $a_1 = 0,5$, $d = 1,5$.

- 1) 0,5; 1,5; 2,5; 3) 0,5; 0,75; 1,125;
2) 0,5; -1; -2,5; 4) 0,5; 2; 3,5.

328

Укажите первые четыре члена арифметической прогрессии (a_n) , если $a_1 = -3$, $d = -2,3$.

- 1) -3; -2,6; -4,9; -7,2; 3) -3; -5,3; -7,6; -9,9;
2) -3; -0,7; 1,6; 3,9; 4) -3; 6,9; -15,87; 36,501.

329

Укажите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = 0,3$, $q = 2$.

- 1) 0,3; 0,6; 0,12; 0,24; 0,48;
2) 0,3; 0,6; 1,2; 2,4; 4,8;
3) 0,3; 0,9; 0,27; 0,81; 0,243;
4) 0,3; 0,15; 0,075; 0,0375; 0,01875.

330

Укажите первые четыре члена геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = 27$, $q = -\frac{1}{3}$.

- 1) 27; -9; 3; -1; 3) 27; $26\frac{2}{3}$; $26\frac{1}{3}$; 26;
2) 27; -9; -3; -1; 4) 27; 9; 3; 1.

331 Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите a_8 , если $a_1 = \frac{2}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$.

- 1) 3; 2) $-1\frac{2}{3}$; 3) -3; 4) -2.

332 Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите a_9 , если $a_1 = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{3}{4}$.

- 1) $2\frac{3}{4}$; 2) $-3\frac{1}{4}$; 3) $5\frac{3}{4}$; 4) 7.

333 Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите b_4 , если $b_1 = -3$, $q = \frac{1}{2}$.

- 1) 0,375; 2) -0,5; 3) $-\frac{3}{16}$; 4) $-\frac{3}{8}$.

334 Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите b_6 , если $b_1 = \sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$.

- 1) $2\sqrt{2}$; 2) -8; 3) $8\sqrt{2}$; 4) $-4\sqrt{2}$.

335 Найдите седьмой член арифметической прогрессии -24; -21; -18; ...

- 1) -6; 2) -42; 3) -3; 4) 3.

336 Найдите двенадцатый член арифметической прогрессии 12; 8; 4; ...

- 1) 36; 2) -32; 3) 56; 4) -36.

337 Найдите шестой член геометрической прогрессии 6; 3; 1,5; ...

- 1) $\frac{3}{16}$; 2) 0,6; 3) 192; 4) 60.

338 Найдите седьмой член геометрической прогрессии -10; 20; -40; ...

- 1) 1280; 2) $-\frac{5}{64}$; 3) $-\frac{5}{32}$; 4) -640.

339 Найдите разность арифметической прогрессии (a_n) , если $a_1 = 21$, $a_8 = 49$.

- 1) 4; 2) 10; 3) -4; 4) 3,5.

340 Найдите разность арифметической прогрессии (a_n) , если $a_1 = -18$, $a_{10} = 18$.

- 1) 0; 2) 4; 3) -4; 4) 3,6.

341

Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = -4$, $b_6 = \frac{1}{8}$.

- 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -2 ; 4) $-\frac{1}{2}$.

342

Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = 2$, $b_5 = 162$.

- 1) 3; 2) -3 ; 3) ± 3 ; 4) ± 9 .

343

Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n) , если $a_{13} = 5,1$, $d = -0,3$.

- 1) 1,5; 2) 1,2; 3) 9; 4) 8,7.

344

Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n) , если $a_{18} = -9,6$, $d = 0,8$.

- 1) 4; 2) $-23,2$; 3) -24 ; 4) 4,8.

345

Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите b_1 , если $b_8 = 512$, $q = 2$.

- 1) 0,5; 2) 0,25; 3) 4; 4) 2.

346

Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите b_1 , если $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = -\frac{1}{12}$.

- 1) $\frac{1}{48}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $-\frac{16}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$.

347

Найдите сумму первых 26 членов арифметической прогрессии (a_1) , если $a_1 = -4$, $d = 3$.

- 1) 871; 2) 1089; 3) 837,5; 4) 1037,5.

348

Найдите сумму первых 25 членов арифметической прогрессии (a_1) , если $a_1 = 18$, $d = -2$.

- 1) -175 ; 2) 1075; 3) 1050; 4) -150 .

349

Найдите сумму первых пяти членов конечной геометрической прогрессии, если $b_1 = 6$, $q = 3$.

- 1) 726; 2) 729; 3) 240; 4) 243.

350

Найдите сумму первых четырёх членов конечной геометрической прогрессии, если $b_1 = \frac{5}{12}$, $q = \frac{1}{5}$.

- 1) $\frac{31}{60}$; 2) 0,52; 3) $-0,52$; 4) $-\frac{31}{60}$.

351 Найдите восьмой член арифметической прогрессии (a_n) , если $a_7 + a_9 = 0,18$.

- 1) 0,36; 2) 0,18; 3) 0,09; 4) 0,9.

352 Найдите девятнадцатый член арифметической прогрессии (a_n) , если $a_{14} + a_{24} = -\frac{4}{5}$.

- 1) $-\frac{4}{5}$; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $-\frac{8}{5}$; 4) $-\frac{1}{5}$.

353 Найдите $a_4 + a_6$ арифметической прогрессии (a_n) , если $a_2 + a_8 = -20,1$.

- 1) -10,5; 2) -10,05; 3) -20,1; 4) -40,2.

354 Найдите $a_5 + a_{13}$ арифметической прогрессии (a_n) , если $a_{10} + a_8 = \frac{3}{4}$.

- 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{3}{16}$.

355 Укажите формулу, которая задаёт арифметическую прогрессию (a_n) .

- 1) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $a_n = 21 - 3n$;
2) $a_n = n^2 + 2$; 4) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

356 Укажите формулу, которая задаёт геометрическую прогрессию (b_n) .

- 1) $b_n = \frac{2n+1}{n}$; 3) $b_n = 6n + 4$;
2) $b_n = 3n^2$; 4) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

357 Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = -0,5n + 5$. Найдите $a_{14} - a_5$.

- 1) 0,5; 2) -9,5; 3) -4,5; 4) -2,7.

358 Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = 3n - 4,2$. Найдите $a_1 \cdot a_8$.

- 1) 21,6; 2) 2,16; 3) -2,64; 4) -23,76.

359 Дана последовательность $a_n = -0,3n + 6$. Укажите номер её члена, равного -12,3.

- 1) 21; 2) 91; 3) 61; 4) 43.

360 Дана последовательность $b_n = 2 \cdot 5^{n+2}$. Укажите номер её члена, равного 1250.

- 1) 4; 2) 2; 3) 1; 4) 6.

361

Найдите разность арифметической прогрессии (a_n) , если:

- а) $a_3 = -2$, $a_9 = 19$; б) $a_5 = 9$, $a_{16} = -24$.

362

Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n) , если:

- а) $a_5 = 43$, $a_9 = 21$; б) $a_7 = 36$, $a_{15} = 64$.

363

Найдите знаменатель монотонной геометрической прогрессии (b_n) , если:

- а) $b_6 = \frac{1}{25}$, $b_{10} = 400$; б) $b_5 = 3$, $b_7 = \frac{3}{25}$.

364

Найдите знаменатель знакопеременной геометрической прогрессии (b_n) , если $b_3 = 5$, $b_7 = 405$.

365

Укажите номер данного члена арифметической прогрессии:

- а) -1 ; $-0,5$; 0 ; ...; если $a_n = 15$; б) 2 ; $\frac{4}{3}$; $\frac{2}{3}$; ...; если $a_n = -4$.

366

Укажите номер данного члена геометрической прогрессии:

- а) 4 ; 12 ; 36 ; ...; если $b_n = 972$; б) 20 ; 4 ; $0,8$; ...; если $b_n = \frac{4}{625}$.

367

- а) Определите, начиная с какого номера все члены данной арифметической прогрессии -14 ; $-11,5$; -9 ; ... положительны.
б) Определите, начиная с какого номера все члены данной арифметической прогрессии 28 ; $26,5$; 25 ; ... отрицательны.

368

- а) Определите, начиная с какого номера все члены данной арифметической прогрессии -32 ; $-25,6$; $-18,2$; ... неотрицательны.
б) Определите, начиная с какого номера все члены данной арифметической прогрессии 15 ; $12,5$; 10 ; ... неположительны.

369

- а) Определите, начиная с какого номера все члены арифметической прогрессии -5 ; -1 ; 3 ; ... удовлетворяют неравенству $a_n \geq 27$.
б) Определите, начиная с какого номера все члены арифметической прогрессии 3 ; 7 ; 11 ; ... удовлетворяют неравенству $a_n > 55$.

370

- а) Определите, начиная с какого номера все члены арифметической прогрессии 2 ; $0,5$; -1 ; ... удовлетворяют неравенству $a_n \leq -13$.
б) Определите, начиная с какого номера все члены арифметической прогрессии 16 ; 13 ; 10 ; ... удовлетворяют неравенству $a_n < -8$.

- 371 а) Найдите число членов геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = 6$, $q = 3$, $S_n = 726$.
б) Найдите число членов геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = 128$, $q = \frac{1}{2}$, $b_n = \frac{1}{4}$.
- 372 Найдите разность арифметической прогрессии (a_n) , если $a_8 - a_3 = 2$.
- 373 Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n) , если $a_5 + a_8 = 16$, $a_7 - a_2 = 4$.
- 374 Найдите разность арифметической прогрессии (a_n) , если $a_6 + a_5 = -4$, $a_8 + a_{10} = -18$.
- 375 Найдите разность возрастающей арифметической прогрессии (a_n) , если $a_6 + a_8 = 15$, $a_2 \cdot a_{12} = 56$.
- 376 Найдите первый член убывающей арифметической прогрессии (a_n) , если $a_7 + a_2 = 5$, $a_5 \cdot a_4 = -36$.
- 377 а) Найдите значения t , при которых числа $3t + 2$, $2t + 5$, $15t + 1$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.
б) Найдите значение t , при котором числа $3t - 4$, $5t$, $4t + 10$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.
- 378 а) Найдите сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) , если $a_3 = 10$, $a_{12} = 37$, $n = 21$.
б) Найдите сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) , если $a_8 = 8$, $a_{15} = -27$, $n = 10$.
- 379 а) Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 12.
б) Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 8.
- 380 а) Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 8 дают в остатке 3.
б) Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 6 дают в остатке 4.
- 381 а) Сумма двадцати пяти членов арифметической прогрессии равна 525. Найдите разность прогрессии, если известно, что её первый член равен -51 .
б) Сумма шестнадцати членов арифметической прогрессии равна 432. Найдите первый член прогрессии, если известно, что разность прогрессии равна -2 .

382

- а) Между числами 7 и 448 вставьте положительное число так, чтобы получилось три последовательных члена геометрической прогрессии.
- б) Между числами $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{192}$ вставьте отрицательное число так, чтобы получилось три последовательных члена геометрической прогрессии.

383

- а) Найдите значение p , при котором числа $p - 3$, $\sqrt{4p}$, $p + 2$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.
- б) Найдите значение p , при котором числа $p - 5$, $\sqrt{7p}$, $p + 4$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

МОДУЛЬ «РЕАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Задачи

384

После рекламной кампании спрос на товар увеличился в 4 раза. На сколько процентов увеличился спрос на товар?

- 1) 400%; 2) 25%; 3) 300%; 4) 75%.

385

Во время сезонной распродажи цена на товар уменьшилась в 4 раза. На сколько процентов уменьшилась цена на товар?

- 1) 400%; 2) 25%; 3) 300%; 4) 75%.

386

В связи с инфляцией цена на товар возросла на 150%. Во сколько раз возросла цена на товар?

- 1) В 1,5 раза; 2) в 2,5 раза; 3) в 2 раза; 4) в 150 раз.

387

Цена на товар была сначала снижена на 10%, а затем ещё на 20%. На сколько процентов была снижена цена товара по сравнению с первоначальной?

- 1) 30%; 2) 72%; 3) 18%; 4) 70%.

388

Цену товара сначала повысили на 50%, а затем понизили на 20%. Во сколько раз изменилась цена товара?

- 1) В 0,2 раза; 2) в 0,3 раза; 3) в 1,2 раза; 4) в $\frac{5}{6}$ раза.

389 Цена на товар была снижена на 10%, а затем повышена на 10%. Как изменилась цена на товар?

- 1) Цена на товар осталась без изменения;
- 2) товар стал дороже на 0,1%;
- 3) товар стал дешевле на 0,01%;
- 4) товар стал дешевле на 1%.

390 Цену на товар понизили на 20%. На сколько процентов необходимо повысить цену товара, чтобы она стала первоначальной?

391 В первый день туристы прошли 30% всего пути, во второй день — 120% пути, пройденного в первый день, а в третий — остальные 34 км. Сколько километров составлял весь путь?

392 Руда содержит 72% железа. Сколько тонн железа получится из 360 т руды?

393 Рубашка дешевле пиджака на 80%, а пиджак дороже брюк на 100%. На сколько процентов рубашка дешевле брюк?

394 Сливки составляют 20% всего молока, а сливочное масло — 25% сливок. Сколько литров молока необходимо взять, чтобы получить 180 г сливочного масла? (Масса 1 л молока равна 1 кг.)

395 К 180 г воды добавили 20 г соли. Определите процентное содержание соли в полученном растворе.

Зависимости между величинами

396 Кинетическая энергия вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$. Выразите из этой формулы скорость v .

$$1) v = \sqrt{\frac{E}{2m}}; \quad 2) v = \sqrt{\frac{2E}{m}}; \quad 3) v = \sqrt{\frac{2m}{E}}; \quad 4) v = \left(\frac{2E}{m}\right)^2.$$

397 При равноускоренном движении ускорение можно вычислить по формуле $a = \frac{v - v_0}{t}$. Выразите из этой формулы начальную скорость v_0 .

$$1) v_0 = at - v; \quad 3) v_0 = v - at; \\ 2) v_0 = \frac{v}{t} - a; \quad 4) v_0 = v + at.$$

398

Радиус окружности, описанной вокруг правильного треугольника, можно вычислить по формуле $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Выразите длину стороны через радиус.

а) $a = \frac{R}{\sqrt{3}}$; б) $a = R\sqrt{3}$; в) $a = \frac{\sqrt{3}}{R}$; г) $a = \frac{1}{R\sqrt{3}}$.

399

Радиус окружности, описанной вокруг правильного четырёхугольника, можно вычислить по формуле $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Выразите длину стороны через радиус.

а) $a = R\sqrt{2}$; б) $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$; в) $a = \frac{1}{R\sqrt{2}}$; г) $a = \frac{\sqrt{2}}{R}$.

400

Радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами a, b, c , можно вычислить по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где S — площадь треугольника. Выразите площадь треугольника через радиус и длину сторон.

а) $S = \frac{abcR}{4}$; б) $S = \frac{4R}{abc}$; в) $S = \frac{abc}{4R}$; г) $S = \frac{abc}{4} - R$.

401

Площадь трапеции можно вычислить по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где S — площадь, h — высота, a и b — стороны. Выразите из этой формулы высоту h .

а) $h = \frac{a+b}{2S}$; в) $h = \frac{S}{a+b}$;
б) $h = \frac{2S}{a+b}$; г) $h = \frac{S}{2(a+b)}$.

402

Мяч, подброшенный от земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 18$ м/с, через 3 с оказался на высоте h (м), где $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. На какой высоте был мяч, если t — время (с), $g = 10$ м/с² — ускорение свободного падения тела?

403

Мяч, подброшенный от земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 24$ м/с, через 4 с оказался на высоте h (м), где $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. На какой высоте был мяч, если t — время (с), $g = 10$ м/с² — ускорение свободного падения тела?

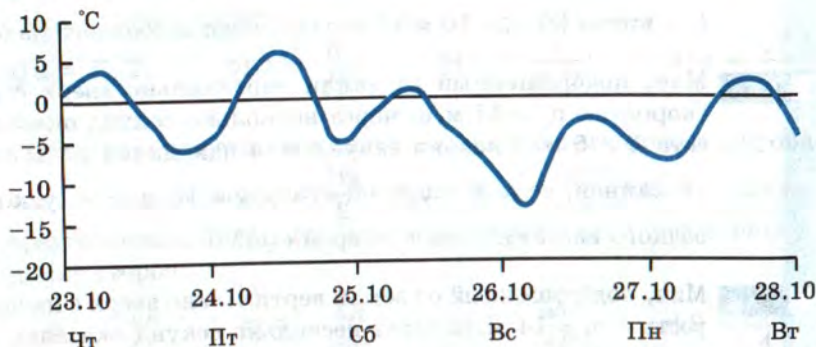
- 404 Мяч, подброшенный от земли вертикально вверх, через 3 с оказался на высоте 6 м. Найдите начальную скорость v_0 (м/с) мяча, если высоту h можно вычислить по формуле $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где t — время (с), $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения тела.
- 405 Мяч, подброшенный от земли вертикально вверх, оказался на высоте 12 м через 4 с. Найдите начальную скорость v_0 (м/с) мяча, если высоту h (м) можно вычислить по формуле $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где t — время (с), $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения тела.
- 406 Мяч, подброшенный от земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 17 \text{ м/с}$, через несколько секунд оказался на высоте $h = 6 \text{ м}$. Сколько секунд мяч находился на высоте, выше указанной, если $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения тела, t — время (с)?
- 407 Мяч, подброшенный от земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 14 \text{ м/с}$, через несколько секунд оказался на высоте $h = 8 \text{ м}$. Сколько секунд мяч находился на высоте, выше указанной, если $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения тела, t — время (с)?
- 408 Камень, упавший с высоты 12 м с начальной скоростью 6 м/с, за 0,8 с преодолел расстояние s (м). На каком расстоянии (в метрах) от земли оказался камень, если $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, где t — время (с), $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения тела?
- 409 Камень, упавший с высоты 10 м с начальной скоростью 8 м/с, за 0,6 с преодолел расстояние s (м). На каком расстоянии (в метрах) от земли оказался камень, если $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, где t — время (с), $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения тела?
- 410 Камень, упавший с высоты 30 м с начальной скоростью 5 м/с, через несколько секунд достиг земли. Сколько секунд камень находился в воздухе, если расстояние s (м), которое пролетает тело при свободном падении, вычисляется по формуле $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, где t — время (с), $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения тела?

411

Камень, упавший с высоты 24 м с начальной скоростью 7 м/с, через несколько секунд достиг земли. Сколько секунд камень находился в воздухе, если расстояние s (м), которое пролетает тело при свободном падении, вычисляется по формуле $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, где t — время (с), $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения тела?

412

На графике показано изменение температуры воздуха в городе Улан-Удэ.

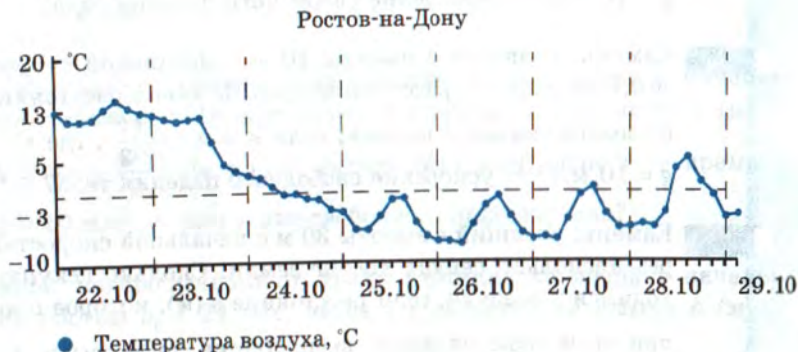


По графику определите:

- в какой день недели температура воздуха была самой низкой;
- сколько раз в течение пяти дней температура была 0° ;
- в какой день недели температура не поднималась выше 0° ;
- в какой день недели температура воздуха была самой высокой.

413

На графике показано изменение температуры воздуха в Ростове-на-Дону.



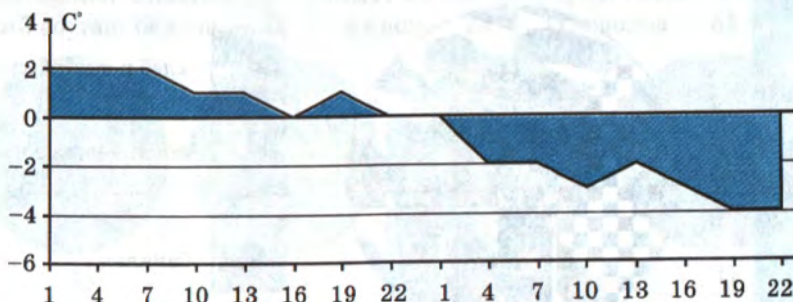
По графику определите:

- наибольшую температуру 26.10;

- б) в какой день температура впервые опустилась ниже 0° ;
 в) перепад температуры 23.10;
 г) количество дней, когда температура поднималась выше 0° .

414

На графике показано изменение температуры воздуха в Санкт-Петербурге.



По графику определите:

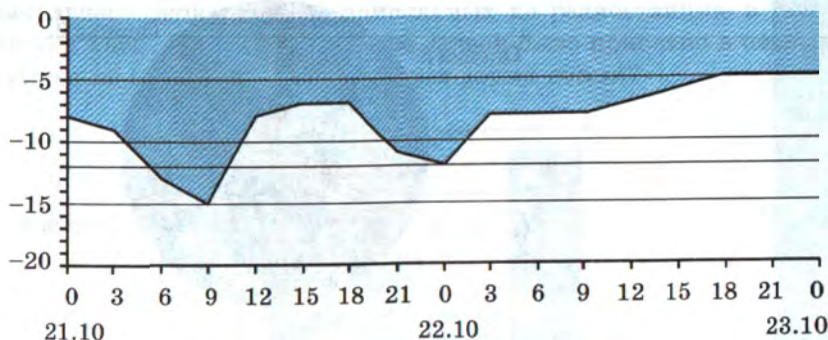
- а) самую высокую температуру воздуха;
 б) самую низкую температуру воздуха;
 в) продолжительность времени, когда температура была равна 0° ;
 г) продолжительность времени, когда температура была не выше -2° .

415

На графике показано изменение температуры воздуха в Екатеринбурге.

По графику определите:

- а) в какое время 21.10 температура воздуха была самой низкой;
 б) какая температура была самой высокой за 2 дня;



- в) на сколько градусов поднялась температура 22.10;
 г) на сколько градусов упала температура 21.10 с 00 ч до 9.00.

Статистика и вероятность

416

На диаграмме представлен ассортимент продуктового магазина, распределённый по четырём видам товаров: кондитерские изделия; гастрономические продукты; бакалея; хлеб и хлебобулочные изделия.

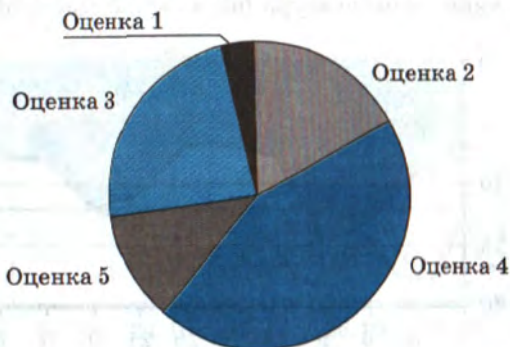


Укажите номера неверных утверждений:

- 1) наименьший ассортимент — хлеб и хлебобулочные изделия;
- 2) наибольший ассортимент — бакалея;
- 3) ассортимент кондитерских изделий — более 25 %;
- 4) ассортимент бакалеи меньше, чем ассортимент гастрономических продуктов.

417

На диаграмме представлены результаты диагностической работы по математике. Укажите номера верных утверждений:



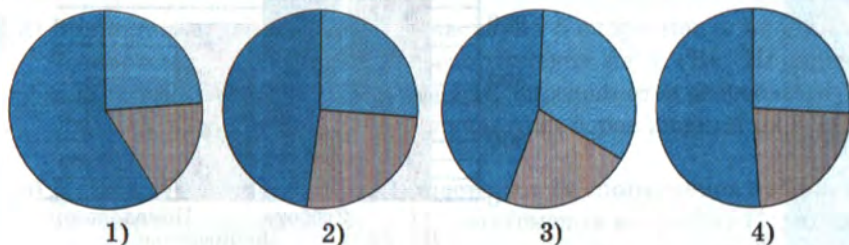
- 1) наибольшее число учащихся получили оценку «5»;
- 2) количество учащихся, получивших оценки «2» и «3», не больше, чем количество учащихся, получивших оценку «4»;

3) количество учащихся, получивших оценку «2», меньше, чем количество учащихся, получивших оценку «3»;

4) количество учащихся, не писавших диагностическую работу, не превосходит 10 % всех учащихся.

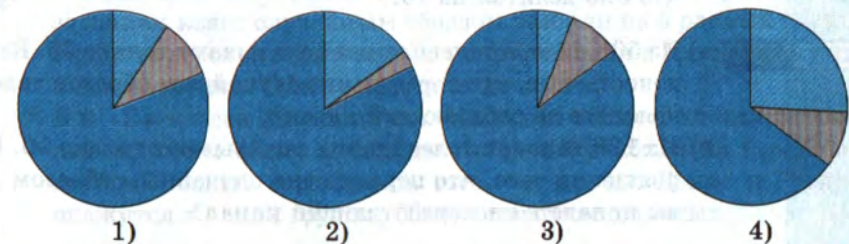
418

На диаграмме показано распределение белков, жиров и углеводов в ряженке. Укажите диаграмму, на которой представлен следующий состав: белков — 26 %, жиров — 23 %, углеводов — 51 %.



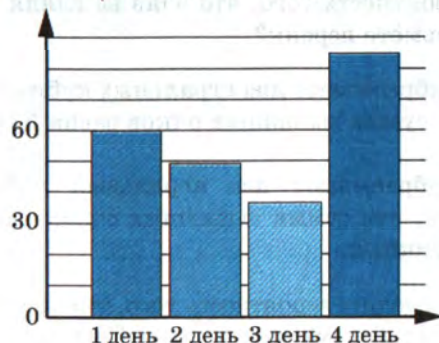
419

На диаграмме показано распределение белков, жиров и углеводов в сушёном корне сельдерея. Укажите диаграмму, на которой представлен следующий состав: белков — 15 %, жиров — 3 %, углеводов — 82 %.



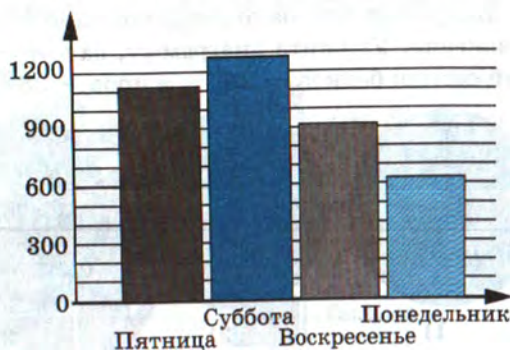
420

На диаграмме представлено количество заявок на исполнение музыкального произведения, присланных на радиостанцию в течение 4-х дней. На сколько больше заявок было прислано в первые два дня по сравнению с последними двумя днями?



421

На диаграмме представлено количество абонентов, ответивших по телефону на вопросы социологической службы в течение 4-х дней. На сколько меньше абонентов приняло участие в социологическом обследовании в будние дни по сравнению с выходными днями?



422

- а) Наташа выбирает двузначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 12.
 б) Денис выбирает двузначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 19.

423

- а) Из 50 каналов телевидения показывают только 35. Какова вероятность того, что переключив случайным образом телевизор, вы попадёте на работающий канал?
 б) Из 128 каналов телевидения показывают только 96. Какова вероятность того, что переключив случайным образом телевизор, вы попадёте на неработающий канал?

424

- а) На полке стоят 4 банки вишнёвого варенья, 7 банок — клубничного и 9 банок — малинового. Какова вероятность того, что достава не глядя одну из банок, вы возьмёте клубничное варенье?
 б) На блюде лежат 10 яблок, 7 нектаринов и 8 персиков. Какова вероятность того, что взяв не глядя один из этих фруктов, вы возьмёте персик?

425

- а) Подбрасывают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5? Ответ округлите до тысячных.
 б) Подбрасывают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4? Ответ округлите до тысячных.

426

- а) Определите вероятность того, что при бросании игрального кубика дважды сумма выпавших очков не будет превосходить число 7.

- б) Определите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма очков будет превосходить число 8.

427

- а) Найдите вероятность того, что при одновременном подбрасывании двух симметричных монет выпадут орёл и решка.
б) Найдите вероятность того, что при одновременном подбрасывании двух симметричных монет выпадут два орла.

428

- а) В школьных соревнованиях участвуют 5 спортсменов из 9 «А», 7 спортсменов из 9 «Б» и 8 спортсменов из 9 «В». Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что участник соревнований из 9 «А» будет выступать последним.
б) В школьных соревнованиях участвуют 14 спортсменов из 9 «А», 15 спортсменов из 9 «Б» и 11 спортсменов из 9 «В». Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что участник соревнований из 9 «Б» будет выступать вторым.

429

- а) В 9 «А» классе 25 учащихся. На уроке алгебры для работы над заданием класс случайным образом разбили на 5 равных групп. Найдите вероятность того, что подруги Маша и Даша окажутся в одной группе. Ответ округлите до сотых.
б) В 9 «Б» классе 30 учащихся. На уроке геометрии для работы над заданием класс случайным образом разбили на 6 равных групп. Найдите вероятность того, что друзья Денис и Руслан окажутся в одной группе. Ответ округлите до сотых.

ОТВЕТЫ

Глава 1

§ 1

- 1.8. а) $x < -\frac{1}{3}$; $1,5 < x < 2$; б) $-1,5 \leq x \leq 0,5$; $x \geq 1$; в) $\frac{2}{3} < x < 1,5$; $x > 4$; $x > 4$; г) $x \leq -7$; $-0,75 \leq x \leq 2,5$. 1.12. а) $-\frac{1}{3} < x < 0$; $x > 4$; б) $x \leq -1,5$; $-1 \leq x \leq 1$; в) $-5 \leq x \leq 0$; $x \geq 0,5$; г) $x < -2$; $0,25 < x < 2$.
- 1.13. а) $-1\frac{2}{3} < x < -\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} < x < 1,5$; б) $x < -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$; $x > 1$; в) $-1 < x < \frac{2}{3}$; $2 < x < 5$; г) $x < -2,5$; $-\frac{3}{4} < x < 3$; $x > 3,5$.
- 1.14. а) $-8 < x < 0$; $x > 8$; б) $x \leq -\sqrt{2}$; $0 \leq x \leq \sqrt{2}$; в) $-1 \leq x \leq 0$; $x \geq 1$; г) $x < -\sqrt{10}$; $0 < x < \sqrt{10}$. 1.15. а) $x < 1$; б) $x \geq -5$; в) $x < 7$; г) $x \leq -1,2$.
- 1.16. а) $x < 4$; б) $x \leq \frac{1}{2}$; $x \geq 2$; в) $x > -8$; г) $-3 \leq x \leq -\frac{1}{3}$. 1.17. а) $-3 < x < 0$; $x > 2$; б) $x \leq -6$; $0 \leq x < 2$; в) $-1 < x < 0$; $x > 9$; г) $x < -7$; $0 < x \leq 5$.
- 1.18. а) $x < \frac{2}{3}$; $1 < x < 2,5$; б) $x \leq -1,5$; $-0,5 \leq x < 1$; $x > 4$; в) $x < -4$; $-3 \leq x \leq -2$; $-1 \leq x < 0,5$; $x > 3$; г) $x < -0,5$; $\frac{2}{3} < x < 4$; $x > 7$.
- 1.19. а) $1\frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{3}$; б) $x < 2$; в) $x < -2$; $x \geq 1$; г) $x > -5$. 1.20. а) $x < 0$; $2 \leq x \leq 4$; б) $0 < x \leq 1$; $x \geq 2$; в) $x \leq -3$; $-1 \leq x < 0$; г) $-2 < x < 0$; $x > 4$.
- 1.21. а) $x < 2$; $3 < x < 5$; $x > 7$; б) $x < -3$; $x > 3$; в) $-8 < x < -1$; г) $-5 < x < -4$; $-3 < x < 5$. 1.22. а) $-8 < x < -1$; б) $-4 \leq x < -1$; $0 < x \leq 4$; в) $-4 < x < 2$; $x \geq 3,5$; г) $x < -4$; $-3 < x < 3$; $x > 7$. 1.23. а) $x < -7$; б) $x < -1,5$; $x \geq 1,5$; в) $x \leq 6$; г) $0 < x < 0,2$. 1.24. а) $-1\frac{2}{3} < x \leq 0$; $x > 1\frac{2}{3}$; б) $-8 < x \leq 1$; в) $-1 < x < 5$; г) $-2 < x < 2$. 1.25. а) $x < -3$; $-2 \leq x \leq 2$; $x > 3$; б) $-4 \leq x < -3$; $x = 0$; $3 < x \leq 4$; в) $-13 \leq x < -10$; $10 < x \leq 13$; г) $x < -12$; $-7 < x < 0$; $0 < x < 7$; $x > 12$. 1.26. а) $x > 9$; б) -2 ; $x \leq -4$; в) $-3 < x < 0$; $x > 0$; г) 1 ; $x \geq 5$. 1.27. а) $-6 < x < 1$; $1 < x < 2$; б) $x > 8$; в) $x \leq 3$; $x \geq 7$; г) $x = 1$; $x \geq 6$. 1.28. а) $x < -2$; $-2 < x < -1$; $x > 7$; б) $x \leq -3$; $1 < x \leq 2$; в) $-6 < x < 1$; г) $2 \leq x \leq 4$; $x \geq 5$. 1.29. а) $0 < x < 3$; $x = 7$; б) $-1\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < x \leq 1\frac{1}{3}$; в) $x < -5$; $-5 < x \leq -4$; $x \geq 0$; г) $x < -5$; $x = -\frac{1}{3}$; $x > 5$. 1.30. а) $-12 < x \leq -2$; $x > 4$; б) $x < -2$; $-2 < x \leq 7$; в) $x \leq -5$; $-2 \leq x < 6$; г) $-8 < x < 3$; $x > 3$. 1.31. а) $x \leq -3$; $2 < x < 3$; $x > 3$; б) $\frac{1}{2} \leq x < 2$; $2 < x < 3$; в) $1 \leq x < 2$; г) $x < -5$; $x \geq -\frac{1}{3}$. 1.32. а) $-3 < x < -2$;

- $-1 < x < 1$; б) $x < -1$; $-\frac{1}{3} < x < 0$; $x > 1$; в) $x < -2$; $x > 2$; г) $x < 3$; $3,5 < x < 4$. **1.33.** а) $x \leq -4$; $x \geq -3$; б) $x < -1$; $0 \leq x < 1$; в) $-7 < x < -5$; $x > -5$; г) $-8 < x < -5$; $0 < x < 5$. **1.34.** а) 0, 1, 2, 3; б) -3, -2, -1, 0; в) 1, 2, 3; г) -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. **1.35.** а) $-5 < x < -1$; $0 < x < 2$; $x > 2$; б) $x < -5$; $-1 < x < 0$; в) $-5 \leq x \leq -1$; $x \geq 0$; г) $x \leq -5$; $-1 \leq x \leq 0$; $x = 2$. **1.36.** а) $-2 < x < -1$; $x > 5$; б) $-2 \leq x \leq -1$; $x = 0$; $x \geq 5$; в) $x < -2$; $-1 < x < 0$; $0 < x < 5$; г) $x \leq -2$; $-1 \leq x \leq 5$. **1.37.** а) $x < -2$; $-2 < x < -1,5$; $-0,5 < x < 0$; $x > 1$; б) $-1,5 < x < -0,5$; $0 < x < 1$; в) $x \leq -1,5$; $-0,5 < x < 0$; $x \geq 1$; г) $x = -2$; $-1,5 \leq x < -0,5$; $0 < x \leq 1$. **1.38.** а) $-2 < x < -1$; $x > 3$; б) $-2 < x \leq -1$; $x = 0$; $x > 3$; в) $x < -2$; $-1 < x < 0$; $0 < x < 3$; г) $x < -2$; $-1 \leq x < 3$. **1.39.** а) $-1 < x < 0$; $x > 3$; б) $-1 \leq x \leq 0$; $x > 3$; в) $x < -2$; $-2 < x < -1$; $0 < x < 3$; г) $x < -2$; $-2 < x \leq -1$; $0 \leq x < 3$. **1.40.** а) $x < -1$; $-0,5 < x < 0$; $0 < x < 1,5$; б) $-3 < x < 0$; $0 < x < 1$; $x > 2$; в) $x < 3$; $4 < x < 5$; $5 < x < 8$; г) $0 < x < 1,5$; $1,5 < x < 2$; $x > 2,5$. **1.41.** а) $1 < x < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3}$; $x > 2$; б) $6 < x < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 15}{3}$; $x > 7$; в) $x < -2$; $-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3} < x < -1$; г) $x < 1$; $-\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 9}{3} < x < 2$. **1.42.** а) $x < 0$; $0 < x < 1$; б) $x < -3$; $-1 < x < 3$; $x > 4$; в) $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$; г) $x < -4$; $-1 < x < 4$; $x > 4$. **1.43.** а) $x < -1$; $0 < x < 1$; б) $x < -1$; $0 < x < 1$; $x > 1$; в) $-1 < x < 0$; $0 < x < 4$; г) $x < -4$; $-1 < x < 1$; $x > 1$. **1.44.** а) $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x < 0$; $1 < x < 2$; в) $x < -0,5$; $x > 0$; г) $x < 0$. **1.45.** 6 тетрадей. **1.46.** а) $p < -6$; $p > 3$; б) $p = -6$; $p = 3$; в) $-6 < p < 3$; г) $p \leq -6$; $p \geq 3$. **1.47.** а) -4; -2; 4; б) $p < -4$; $-4 < p < -2$; $p > 4$; в) $p \leq -2$; $p \geq 4$; г) $p = -4$; $-2 \leq p \leq 4$. **1.48.** а) $p = 1$; $p = -5$; б) $p = 2$; в) $p = -1$; $p = -3$; г) $p = -2$. **1.49.** а) $p = 3$; $p = 11$; б) $p = 6$; 7; 8. **1.50.** а) $p = 1$; б) $p = 2$; в) $p = 3$; г) таких значений p нет. **1.51.** а) $p = -2$; б) $p = 1$; $p = -4$; в) $p = 0$; $p = -1$; $p = -3$; г) $p = 2$; $p = -5$.

§ 2

- 2.5.** а) $\left(-\infty; -4\frac{1}{3}\right]$; б) $(-1; 2)$; в) $(-1; 1)$; г) $[-2; 4)$. **2.6.** а) 0; б) -9; в) 0; г) 4. **2.8.** а) $\left\{-9; -\frac{10}{3}; 1\right\}$; б) $\{-8; -1; 1; 2\}$; в) \emptyset ; г) $\{-7; -2; 1; 2\}$. **2.9.** а) $[0; +\infty)$; б) $\{1; 2\}$; в) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $\{-7; -2\}$. **2.10.** а) $A \cup B$; б) $A \cap B$. **2.11.** а) Из A надо отбросить элементы множества $A \cap B$; б) из B надо отбросить элементы множества $A \cap B$. **2.12.** а) $(-1; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; в) $[-3; 0) \cup (0; 3]$; г) $\{2\}$. **2.13.** а) $p \neq -64$, $p \neq 1$; б) $3 \leq m < 4$; в) $p = \sqrt{6}$; г) $m = 2$. **2.22.** а) $(\sqrt{101}; 11)$; б) $[\sqrt{97}; 13]$; в) $(\sqrt{101}; \sqrt{167}]$; г) $(7,7; 13]$. **2.23.** в) $A = \{2; 3; 5; 6; 9\}$; г) 6. **2.24.** а) 3; б) 6; в) 9; г) одну треть. **2.25.** а) 2; б) 4; в) 8; г) одну четверть. **2.26.** а) $M \cup N$; в) $M \cap N$. **2.29.** а) 26; б) 126; в) 225. **2.30.** а) 100; б) 800; в) 600; г) 1400. **2.31.** 30.

§ 3

3.5. а) $-11 < x < 3$; б) $\frac{4}{7} < x < 1$; в) $-1,5 < x \leq 0$; г) $-2\frac{4}{7} < x \leq 13$.

3.6. а) $x < 6$; б) $x \geq 2\frac{2}{3}$; в) $0,25 < x < 0,8$; г) $1 < x < 15$. 3.7. а) $-1 \leq x < 3\frac{1}{3}$;

б) $x < 0,6$; в) $2,1 < x \leq 3,5$; г) $4,5 < x < 6,5$. 3.8. а) $3 < x < 4$; б) нет решений; в) $x < \frac{1}{3}$; г) $-3 < x < -2,5$. 3.9. а), в) Нет решений; б) $x > \frac{2}{3}$;

г) $x > \frac{1}{7}$. 3.10. а) $-3 < x < 3$; б), г) нет решений; в) $x \leq -4$; $x \geq 4$.

3.11. а) $x \geq 3$; б) $-5 \leq x < 0$; в) $x \geq 9$; г) $1 \leq x < 2$. 3.12. а) $x \leq -4$; $x \geq 4$;

б) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$; в) нет решений; г) $-\frac{1}{7} < x < \frac{1}{7}$. 3.13. а) $0,5 \leq x \leq 1$;

б) $x \leq 2$; $x \geq 5$; в) $-1 \leq x < 2$; $7 < x \leq 8$; г) $-2,5 < x \leq -1$. 3.14. а) $-4 < x < -1$;

б) $3 \leq x \leq 5$; в) $0 \leq x < 2$; г) $-1,6 < x < 0$. 3.15. а) $-0,6 < x < 1,8$;

б) $-6,5 \leq x \leq -0,5$. 3.16. а) $-0,25 < x < 4$, 0 и 3; б) $-2,4 < x < 0,2$, -2 и 0.

3.17. а) $1,5 < x < 2$; б) $1 < x < 1,3$; в) $1,25 < x < 1,6$; г) $x > 4$.

3.18. а) $4 \leq x < 5$; б) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{6}$; в) $1,25 \leq x < 1,5$; г) $x \leq -4,5$; $x \geq 8,5$.

3.19. а) $-2 \leq x < 0$; $1 \leq x \leq 3$; $x \geq 4$; б) $2 \leq x < 9$; в) нет решений;

г) $2 \leq x \leq 3$. 3.20. а) $-8 < x < -1$; б) $x \leq -3$; $-1 \leq x < 0$; в) $-1 < x < 1$;

г) $-1\frac{2}{3} < x < -1$; $x = 0$. 3.21. а) $[-2; 4]$; б) $[-4; 5]$; в) $[2; 4]$; г) $[3; +\infty)$.

3.22. а) $(-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$; б) $\left[-\frac{2}{3}; 3,5\right) \cup [4; 5)$; в) $(-\infty; 2] \cup [3; 5] \cup [6; +\infty)$;

г) $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$. 3.23. а) $[4; 7]$; б) $[-3; 1] \cup [2; 3]$; в) $(-\infty; -1] \cup [1; 2] \cup$

$\cup [3; +\infty)$; г) $[-1; 5]$. 3.24. а) $(-\infty; -4] \cup [2,5; +\infty)$; б) $[2,5; +\infty)$;

в) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup (5; +\infty)$; г) $(5; +\infty)$. 3.25. а) $[-6; -5) \cup (-5; 6]$;

б) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 0,4]$;

г) $[0; 3) \cup (3; 4]$. 3.26. а) $[6,5; 23) \cup (23; 27]$; б) $(-\infty; -3) \cup (-3; 0]$;

в) $[-1,5; 3) \cup (3; 4]$; г) $[-3; -1] \cup [4; 6) \cup (6; +\infty)$. 3.27. а) $x \geq 7$; $x = 0$;

б) $[-2; 2) \cup (2; 3]$; в) $[0,6; +\infty)$; г) $[0,5; 1) \cup (1; +\infty)$. 3.28. а) $\frac{37}{40}$; б) $-\frac{1}{2}$.

3.29. а) $x \leq -3$; б) $-1 < x < 0$; $x > 5$; в) $-3 \leq x \leq 11$; г) $x > 4$. 3.30. а) $0 \leq x \leq 1$;

б) $x < -2$; $0 < x < 1$; в) $1 \leq x \leq 3$; г) $0 < x < 1$. 3.31. а) $p < 3$; $p \geq 3$;

б) $p \leq 7$; $p > 7$; в) $p < 5$; $p \geq 5$; г) $p \geq 2$; $p < 2$.

3.32. а) $x < -5\frac{1}{3}$; $x > -0,8$; б) $-1 \leq x \leq 0$; $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$; в) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

г) $x < -1$; $x > 2$. 3.33. а) $-1 < x < \frac{3-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{21}}{2} < x \leq 12$; б) $1 < x \leq 2$.

3.34. а) $-4 \leq x \leq -3$; $x = 0$; б) $x < -4$; $-2 < x < 0$; $x > 0$. 3.35. а) $x < -2$;

$-1 \leq x < 1$; $1 < x < \frac{8}{3}$; б) $-4 \leq x < -3$; $1 \leq x < 2$; $2 < x < 3$.

3.36. а) $-1 < x < 1 - \sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3} < x < 7$; б) $-1 < x \leq -\frac{3}{4}$; $0 < x < 1$.

3.37. а) $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < x < -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0,5 < x < 1$; б) $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < x < -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$0,5 < x < 1$. 3.38. а) $4 - \sqrt{15} < x < 4 + \sqrt{15}$; б) $-\frac{1}{5} < x < \frac{3 - \sqrt{14}}{5}$;

$1 < x \leq \frac{3 + \sqrt{14}}{5}$. 3.39. а) $\frac{9}{8} < x < \frac{16}{13}$; б) $\frac{5}{21} < x < \frac{4}{11}$. 3.40. а) При $a > \frac{1}{2}$

есть решения; при $a < \frac{1}{2}$ нет решений; б) при $a > \frac{1}{2}$ имеет решения; при

$a < \frac{1}{2}$ нет решений; при $a = \frac{1}{2}$ одно решение; в) при всех a есть решения;

г) при $a \leq 1$ имеет решения; при $a > 1$ нет решений, при $a = 1$ одно решение. 3.41. а) $p = 5$; б), г) таких значений p нет; в) $p < 3$.

3.42. а) $-3 < x \leq 0$; $x > \frac{3}{8}$; б) $x > -1$. 3.43. $1 < x < 3$. 3.44. $-5\sqrt{2} < x < -5$;

$-1 < x < -\frac{1}{2}$; $4 < x \leq 5\sqrt{2}$. 3.45. а) $p < 0$; б) $p > 2\frac{2}{11}$. 3.46. $x < 0$. 3.47. $x > -1$.

3.48. $x > 0$. 3.49. $x > 6$. 3.50. 119. 3.51. 4 ч, 6 ч.

§4

4.6. а) $x < -3$; $x > 1$; б) $x < -5$; $-1 < x \leq 4$; $x > 5$; в) $x > -3$; г) $x < 0$;

$x \geq 4$. 4.7. а) $-4 < x < 4$; б) $x < -6$; $x > -1$; в) $x < -6$; $-5 < x \leq 3$; $x > 6$;

г) $x \leq \frac{1}{3}$; $x > 2$. 4.8. а) $-0,2 < x \leq 0,5$; $x \geq -0,5$; б) $-3\pi < x \leq 4$; в) $x < -\frac{2}{3}$;

$x > -\frac{1}{2}$; г) $x < \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{4} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$; $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$. 4.10. а) $x > -3$; б) $x \leq 4$;

в) $x \leq -2$; $x \geq 16$; г) $x < 0$; $0 < x \leq 1$. 4.12. а) $x < 1$; $x > 3$; б) $x < 0$;

$0 < x < 1$; $\frac{10}{3} < x < 4$; $x > 4$; в) $-\infty < x < +\infty$; г) $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < 0$; $x > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

4.15. а) $x \leq 1$; б) $x \leq -2$; в) $x < \frac{1}{2}$; $1 < x < 3$; г) $x \leq -\frac{10}{3}$; $x \geq 2$.

4.16. а) $-1 < x < 0$; $x > 2$; б) $x \leq -3$; $0 < x \leq \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$; в) $0 < x < 2$;

г) $-8 \leq x < 0$; $\frac{2}{3} < x \leq 5$.

§5

5.10. а) $-\infty < x < +\infty$; б) \emptyset . 5.11. а) $x \geq 4$; б) $0 \leq x < 4$. 5.12. а) $-3 < x < 3$;

б) $x \leq -3$; $x \geq 3$. 5.13. а) $-1 < x < 5$; б) $-5 < x < 5$; в) $x \leq -1$; $x \geq 5$;

г) $x \leq -5$; $x \geq 5$. 5.14. а) $0 \leq x \leq 1$; $6 \leq x \leq 7$; б) $x \leq -1$; $x \geq 5$; в) $x < -5$;

$-4 < x < -1$; $x > 0$; г) $-3 < x < 2$. 5.15. а) $-\frac{4}{3} < x < 1$; б) $x < -1$; $x > -1$;

в) $-\infty < x < +\infty$; г) $\frac{4 - \sqrt{22}}{3} < x < \frac{2}{3}$; $2 < x < \frac{4 + \sqrt{22}}{3}$. 5.16. а) $x < -2$;

$x > \frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{5} < x < \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{4}$; в) $0 < x < 2$; г) $-\frac{1}{7} < x < 0$; $0 < x \leq \frac{1}{9}$.

- 5.17. а) $x \leq -\frac{2}{3}$; $x \geq 2$; б) $x < 0$; $0 < x < \frac{1}{8}$; $x > \frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2} \leq x < 1$; $1 < x \leq \frac{7}{6}$;
 г) $-\frac{6}{7} < x < 0$. 5.18. а) $-4 < x < -1$; $1 < x < 4$; б) $x < -3$; $-1 < x < 0$;
 $0 < x < 1$; $x > 3$; в) $-2 \leq x \leq -1$; $1 \leq x \leq 2$; г) $x < -2$; $-2 < x < 0$; $0 < x < 2$;
 $x > 2$. 5.19. а) $x < -1$; $-1 < x < 1$; $x > 2$; б) $x < 1$; $x > 2$; в) $1 < x < 2$;
 г) $1 < x < 2$; $x = -1$. 5.20. а) $-1 < x < 1$; $1 < x < 2$; б) $-1 \leq x < 1$;
 $1 < x < 2$; $x > 2$; в) $x < -1$; г) $x \leq -1$. 5.21. а) $-1 < x < 0$; $0 < x < 3$; $x > 3$;
 б) $-1 \leq x < 3$; $x > 3$; в) $x < -2$; $-2 < x < -1$; г) $x < -2$; $-2 < x \leq -1$; $x = 0$.
 5.22. а) $x < -7$; $-7 < x \leq 0$; $x = 2$; б) $x = 0$; $x = \pm 2$; в) $x = 0$; 2 ; 4 ;
 г) $x = \frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{4}$. 5.24. а) $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{7}$; б) $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{4}{3}$; в) $x > \frac{2}{9}$;
 г) $-6 \leq x \leq 0$. 5.25. а) $x < -13$; $\frac{1-\sqrt{22}}{3} < x < 1$; $x > \frac{1+\sqrt{22}}{3}$; б) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$;
 в) $0 \leq x \leq 1$; $x \geq 2$; г) $x \leq -2$; $\frac{-2-\sqrt{10}}{3} \leq x < 0$; $x > \frac{-2+\sqrt{10}}{3}$.
 5.26. а) $x \leq -2$; $x \geq \frac{1}{3}$; б) $-\frac{5}{3} < x < -\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3} < x < 0$; в) $-2 \leq x \leq -\sqrt{2}$;
 $x \geq \sqrt{2}$; г) $x \leq -6$; $-\frac{4}{3} \leq x < 0$; $x > 0$. 5.27. а) $x < 0$; $x > 2,5$; б) $-9 < x < 0$;
 $0 < x < 2$; $2 < x < 5$; в) $x < 0$; $x > \frac{11}{3}$; г) $x < -3$; $-3 < x < 0$; $0 < x \leq 2,5$;
 $x > 3,5$. 5.28. а) $x < -\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} < x < 3$; $x > 3$; б) $x \leq -5$; $\frac{5}{3} \leq x < 4$; $4 < x < 5$;
 $x > 5$. 5.29. а) $x < -2$; $-2 < x < 1$; $x > 3$; б) $-2 \leq x < 0$; $x = 1$. 5.30. а) $x > 6$;
 б) $x \leq -1$; $x \geq \frac{9}{4}$; в) $x > -1$; г) $-0,6 \leq x \leq 1$. 5.31. а) $\frac{1}{3} < x < 1$; б) $-1 \leq x < 0$;
 $x \geq 2$; в) $0,4 \leq x \leq 2$; г) $0 < x \leq \frac{4}{3}$; $x = -4$. 5.32. а) $x < 0,6$; $x > 4$;
 б) $-5 \leq x \leq 1$; в) $x > -3$; г) $x \leq 0$; $x \geq \frac{5}{3}$. 5.33. а) $x = -1$; б) $x \leq 0$; $x \geq 1$;
 в) $-5 < x < -1$; $0 < x < 2$; г) $x < -6$; $-3 < x < 0$; $x > 1$. 5.34. а) $x < 1$; $x > 1$;
 б) $x = 1$; в) $0 \leq x \leq \frac{11}{4}$; $x \geq 14$; г) $x \geq 0$. 5.35. а) $x > -2$; б) $x < -1$;
 $-1 < x < 1$; $x > 1$; в) $x \leq -2$; $x > 4$; г) $x \geq 1$. 5.37. а) $x < -6$; $-5 < x < 6$;
 б) $x < -1$; $0 < x < 1$; $x > 2$; в) $-3 < x < 4$; $x > 5$; г) $x < -\sqrt{3}$; $0 < x < 1$;
 $x > \sqrt{3}$. 5.39. а) $-\sqrt{7} \leq x \leq -\frac{5}{3}$; $x \geq \sqrt{7}$; б) $-\sqrt{3} < x < 0$; $1 \leq x < \sqrt{3}$;
 в) $x \geq 4$; $x = -4$; г) $x \leq -0,75$; $x \geq 0$. 5.40. а) $x < -3$; $-1 < x < 1$; $x > 3$;
 б) $-1 \leq x < 4$; в) $-10 < x < 14$; г) $x \leq -1$; $2 \leq x \leq 3$; $x > 6$.
 5.41. а) $\frac{-5-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{5-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{21}}{2}$; б) $x < -1-\sqrt{2}$;
 $1-\sqrt{2} < x < 0$; $0 < x < -1+\sqrt{2}$; $x > 1+\sqrt{2}$; в) $-2 < x < -1$; $1 < x < 2$;
 г) $x = \pm 3$; $x = \pm 1$. 5.42. а) $-4,5 \leq x \leq -4$; $-3 < x < 1$; $2 \leq x \leq 2,5$;

§ 6

б) $-2\frac{1}{4} < x < 0$; в) $x < 0$; $1 < x < 1\frac{1}{3}$; $2\frac{2}{3} < x < 3$; $x > 4$; г) $0 < x < \frac{1}{2}$;

$\frac{7}{3} < x < 9$. 5.44. а) $t < 9$; б) $[9; +\infty)$. 5.45. а) $t < 11$; б) $[11; +\infty)$. 5.46. а) 25;

б) 20.

6.6. а) $x < -1$; $x > 4$; б) $0 < x < 7$; в) $-2 \leq x \leq 2$; г) $x < -4$; $x > 3$.

6.7. а) $-1 < x \leq 0$; $15 \leq x < 16$; б) $-2 \leq x \leq 0,25$; в) $-2,5 \leq x < -2$;

$2 < x \leq 2,5$; г) $-1 < x < \frac{1}{4}$. 6.8. а) $0 < x < 10$; б) $x \leq -4$; $x \geq -2$; в) $0 < x < 4$;

г) $x < 1$; $x > 7$. 6.9. а) $-\frac{1}{3} < x < 0$; б) $-\frac{8}{9} < x < 0$; $1 < x \leq 2$; в) $2 < x \leq 2\frac{2}{7}$;

г) $-2 < x < -1$; $x > 8$. 6.10. а) $-1 \leq x \leq 0$; б) $-9 \leq x \leq -3$; $1 \leq x \leq 3$;

в) $x \leq -4$; $x \geq \frac{4}{35}$; г) $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$. 6.11. а) Нет решений; б) $x = -3$; $x = 0$;

в) $x \leq 3$; г) x — любое число. 6.12. а) $x > 3$; б) $-1 < x < 0$; в) $-\frac{4}{3} \leq x < -1$;

г) $x \geq 4$. 6.13. а) $-2 \leq x < 2$; б) $x \leq -4$; в) $x \geq -3$; г) $0 \leq x < 9$. 6.14. а) $x \geq 8$;

б) $x < -3$; в) $x > -4$; г) $x \leq 7$. 6.15. а) $\frac{5}{3} < x \leq 2$; $x \geq 10$; б) $-1 \leq x < -0,4$;

в) $x \leq -4$; $-2 \leq x \leq -\frac{4}{3}$; г) $-1 \leq x \leq 0$. 6.16. а) $x \leq -6$; б) $-2 \leq x \leq 1$;

в) $x \leq -\frac{42}{11}$; г) $-1 < x \leq 3$. 6.17. а) $2 < x < 10$; б) $-5 \leq x \leq -4$; $x \geq 11$;

в) $-2\frac{1}{4} \leq x < -1,44$; $x > 4$; г) $x = 1,4$. 6.18. а) $x > 1,5$; б) $\frac{5}{8} \leq x \leq 16$;

в) $-\frac{2}{3} < x \leq 5$; г) $x \leq 1$. 6.19. а) $x < 0$; $0 < x \leq \frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{4} \leq x < 2$; в) $x \geq 12$;

$x = 1$; г) $x = 3$. 6.20. а) $x < -8$; б) $x < -6$; в) $x < -5$; г) $x = 7$. 6.21. а) $x > 3$;

б) $-3 < x < 0$; в) $x > 0$; г) $x = 0$. 6.22. а) $0 < x < 1$; б) $x < -1$; в) $0 \leq x \leq 1$;

г) $-1 \leq x \leq 0$. 6.23. а) $x = -1$; $0 \leq x \leq 2$; б) $x < -4$; $-3 < x < 3$; в) $x > 2$;

г) $x \leq -4$; $x = -2$. 6.24. а) $x \geq \frac{7}{5}$; б) $0 < x < 1,5$; в) $\frac{1}{3} < x < 1,6$;

г) $-5 \leq x \leq -1$; $x \geq -\frac{2}{3}$. 6.25. а) $1 \leq x \leq 4$; б) $0 \leq x \leq 1$; $x \geq 16$; в) $x \geq 0$;

г) нет решений. 6.26. а) $-3 \leq x \leq 0$; б) $-1 \leq x \leq 3$; в) $-87 < x \leq -6$; г) $x \leq 3$.

6.27. а) $4 < x < 16$; б) $-1 \leq x \leq 35$; в) $x < -23$; $1 < x \leq 2$; г) $x \leq -\frac{137}{3}$.

6.28. а) $5,5 < x \leq 10$; б) $-11\frac{1}{3} < x < -\frac{2}{3}$; в) $-\frac{2}{7} \leq x < -\frac{1}{7}$; г) $x < -1$; $x = 3$.

6.29. а) $0,25 \leq x < 0,64$; $1 < x \leq 4$; б) $1 < x \leq 4$; $x > 16$; в) $0 < x < 1$;

$4 \leq x < 9$; г) $0 \leq x < 1$; $4 < x < 9$. 6.30. а) $0 < x \leq 16$; б) $\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{5}{7}$;

в) $\frac{1}{2} \leq x \leq 25$; г) $x = \frac{3}{7}$. 6.31. а) $0 \leq x < 1$; $4 < x \leq 5$; б) $8 - \sqrt{15} \leq x < 8$;

$8 < x \leq 8 + \sqrt{15}$; в) $-1 \leq x < 2$; $2 < x \leq 5$; г) $x = -1$. 6.32. а) $0,25 \leq x < 1$; б) $1 \leq x < 2$; $2 < x \leq 4$; в) $-1 \leq x \leq 2 - 2\sqrt{2}$; $4 \leq x \leq 2 + 2\sqrt{2}$;

- г) $-1 < x < \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$; $1 < x < \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$. **6.33.** а) $-10 < x < -1$; $x > 2$;
 б) $x < -1$; $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$; в) $-\frac{5}{4} < x < 1$; $x > 3$; г) $-2 < x < -1$. **6.34.** а) $-\frac{2}{3} < x < 0$; $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{1}{3} \leq x < 1$; $1 < x \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$; в) $-1 \leq x < -\frac{1}{3}$;
 г) $1 \leq x < \frac{5}{3}$; $x = 2$. **6.35.** а) 1,8; б) 2,08. **6.36.** а) 4; б) 3. **6.37.** 3.

§7

- 7.1.** а) Если $a \leq -3$, то $x > -3$; если $a > -3$, то $x > a$; б) если $a \leq -3$, то \emptyset ; если $a > -3$, то $-3 < x < a$; в) если $a < -3$, то $x \leq a$; если $a \geq -3$, то $x < -3$; г) если $a < -3$, то $a \leq x \leq -3$; если $a = -3$, то $x = -3$; если $a > -3$, то \emptyset . **7.2.** а) Если $a < 3$, то $a \leq x \leq 3$; если $a \geq 3$, то $3 \leq x \leq a$; б) если $a < 3$, то $a < x \leq 3$; если $a = 3$, то \emptyset ; если $a > 3$, то $3 \leq x < a$; в) если $a \leq -2$, то $x < a$; $x > -2$; если $a > -2$, то $x < -2$; $x > a$; г) если $a \leq -4$, то $x < a$; $x > -4$; если $a > -4$, то $x < -4$; $x > a$. **7.3.** а) Если $a < 0$, то $x \leq 2a$; $x \geq a$; если $a = 0$, то $-\infty < x < +\infty$; если $a > 0$, то $x \leq a$; $x \geq 2a$; б) если $a < 0$, то $x < 2a$; $x \geq a$; если $a = 0$, то $x < 0$; $x > 0$; если $a > 0$, то $x \leq a$; $x > 2a$; в) если $a < 0$, то $a < x < \frac{a}{2}$; если $a = 0$, то \emptyset ; если $a > 0$, то $\frac{a}{2} < x < a$; г) если $a < 0$, то $2a < x < a$; если $a = 0$, то \emptyset ; если $a > 0$, то $a < x < 2a$. **7.4.** а) Если $a < -2$, то $x \leq a$, $-2 \leq x \leq 0$; если $a = -2$, то $x \leq 0$; если $-2 < a < 0$, то $x \leq -2$, $a \leq x \leq 0$; если $a = 0$, то $x \leq -2$; $x = 0$; если $a > 0$, то $x \leq -2$, $0 \leq x \leq a$; б) если $a < -1$, то $x \leq a$, $-1 \leq x \leq 1$; если $a = -1$, то $x \leq 1$; если $-1 < a < 1$, то $x \leq -1$, $a \leq x \leq 1$; если $a = 1$, то $x \leq -1$, $x = 1$; если $a > 1$, то $x \leq -1$, $1 \leq x \leq a$; в) если $a < -3$, то $a < x < -3$, $x > 3$; если $a = -3$, то $x > 3$; если $-3 < a < 3$, то $-3 < x < a$; $x > 3$; если $a = 3$, то $-3 < x < 3$, $x > 3$; если $a > 3$, то $-3 < x < 3$, $x > a$; г) если $a < 0$, то $x < a$, $0 < x < 3$; если $a = 0$, то $x < 0$, $0 < x < 3$; если $0 < a < 3$, то $x < 0$, $a < x < 3$; если $a = 3$, то $x < 0$; если $a > 3$, то $x < 0$, $3 < x < a$. **7.5.** а) Если $a < -2$, то $a < x \leq -2$, $x \geq 2$; если $a = -2$, то $x \geq 2$; если $-2 < a < 2$, то $-2 \leq x < a$, $x \geq 2$; если $a = 2$, то $-2 \leq x < 2$, $x > 2$; если $a > 2$, то $-2 \leq x \leq 2$, $x > a$; б) если $a \leq 0$, то $x < a$, $0 < x < 4$; если $0 < a < 4$, то $x < 0$, $a < x < 4$; если $a = 4$, то $x < 0$; если $a > 4$, то $x < 0$, $4 < x < a$; в) если $a < -2$, то $a < x < -2$, $x > 3$; если $a = -2$, то $x > 3$; если $-2 \leq a < 3$, то $-2 < x < a$, $x > 3$; если $a \geq 3$, то $-2 < x < 3$, $x > a$; г) если $a < -7$, то $x < a$, $-7 \leq x \leq 1$; если $a = -7$, то $x < -7$, $-7 < x \leq 1$; если $-7 < a < 1$, то $x \leq -7$, $a < x \leq 1$; если $a = 1$, то $x \leq -7$; если $a > 1$, то $x \leq -7$, $1 \leq x < a$. **7.6.** а) Если $a < -4$, то $x \leq a$, $4 \leq x \leq -a$; если $a = -4$, то $x \leq -4$, $x = 4$; если $-4 < a < 0$, то $x \leq a$, $-a \leq x \leq 4$; если $a = 0$, то $x \leq 4$; если $0 < a < 4$, то $x \leq -a$, $a \leq x \leq 4$; если $a = 4$, то $x \leq -4$, $x = 4$; если $a > 4$, то $x \leq -a$, $4 \leq x \leq a$; б) если $a < -5$, то $a < x < -5$, $x > -a$; если $a = \pm 5$, то $x > 5$; если $-5 < a \leq 0$, то $-5 < x < a$, $x > -a$; если $0 < a < 5$, то $-5 < x < -a$, $x > a$; если $a \geq 5$, то $-a < x < -5$, $x > a$; в) если $a < -3$, то $a < x < -3$, $x > -a$; если $a = \pm 3$, то $x > 3$; если $-3 < a < 0$, то $-3 < x < a$, $x > -a$; если $a = 0$, то $-3 < x < 0$, $x > 0$; если $0 < a < 3$, то

$-3 < x < -a$, $x > a$; если $a > 3$, то $-a < x < -3$, $x > a$; г) если $a < -2$, то $x < a$, $2 \leq x < -a$; если $a = \pm 2$, то $x < -2$; если $-2 < a < 0$, то $x < a$, $-a < x \leq 2$; если $a = 0$, то $x < 0$, $0 < x \leq 2$; если $0 < a < 2$, то $x < -a$, $a < x \leq 2$; если $a > 2$, то $x < -a$, $2 \leq x < a$. **7.7.** а) Если $a < 0$, то $x < \frac{1}{a}$, $x > 0$; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $0 < x < \frac{1}{a}$; б) если $a \leq 0$, то $x < a$, $x > 0$; если $a > 0$, то $x < 0$, $x > a$; в) если $a > 0$, то $0 < x \leq 1$; если $a = 0$, то $x < 0$, $x > 0$; если $a < 0$, то $x < 0$, $x > 1$; г) если $a < 0$, то $x \leq \frac{1}{a}$, $x > 0$; если $a = 0$, то \emptyset ; если $a > 0$, то $x < 0$, $x > \frac{1}{a}$. **7.8.** а) Если $a \leq -3$, то $-3 < x < 3$; если $-3 < a < 3$, то $a < x < 3$; если $a > 3$, то решений нет; б) если $a < -3$, то решений нет; если $-3 \leq a \leq 3$, то $-3 \leq x \leq a$; если $a > 3$, то $-3 \leq x \leq 3$; в) если $a < -3$, то $a < x < -3$, $x > 3$; если $-3 \leq a \leq 3$, то $x > 3$; если $a > 3$, то $x > a$; г) если $a < -3$, то $x < -3$; если $-3 \leq a \leq 3$, то $x < -3$; если $a > 3$, то $x < -3$, $3 < x \leq a$. **7.9.** а) Если $a \leq -2$, то \emptyset ; если $-2 < a \leq \frac{13}{3}$, то $-2 \leq x < a$; если $a > \frac{13}{3}$, то $-2 \leq x \leq \frac{13}{3}$; б) если $a < -3,4$, то $-3,4 \leq x \leq 2$; если $-3,4 \leq a < 2$, то $a < x \leq 2$; если $a \geq 2$, то \emptyset ; в) если $a \leq -2$, то $a \leq x \leq -2$, $x \geq \frac{13}{3}$; если $-2 < a \leq \frac{13}{3}$, то $x \geq \frac{13}{3}$; если $a > \frac{13}{3}$, то $x \geq a$; г) если $a \leq -3,4$, то $x \leq a$; если $-3,4 < a < 2$, то $x \leq -3,4$; если $a \geq 2$, то $x \leq -3,4$, $2 \leq x \leq a$. **7.10.** а) Если $a \leq 1$, то \emptyset ; если $1 < a \leq 2$, то $x < a$; если $a > 2$, то $1 \leq x \leq 2$; б) если $a < -1$, то \emptyset ; если $a = -1$, то $x = -1$; если $-1 < a < 0$, то $a \leq x \leq 2a + 1$; если $0 \leq a < 1$, то $a \leq x \leq 1$; если $a = 1$, то $x = 1$; если $a > 1$, то $1 \leq x \leq a$; в) если $a \leq 1$, то $1 \leq x \leq 2$; если $1 < a < 2$, то $a \leq x \leq 2$; если $a = 2$, то $x = 2$; если $a > 2$, то \emptyset ; г) если $a \leq -1$, то $-1 \leq x \leq \frac{1}{a}$; если $a > -1$, то \emptyset . **7.11.** а) Если $a \leq 1$, то $1 \leq x \leq 2$; если $1 < a < 2$, то $x = 1$, $a \leq x \leq 2$; если $a = 2$, то $x = 1$, $x = 2$; если $a > 2$, то $x = 1$; б) если $a \leq -1$, $a \geq 0$, то \emptyset ; если $-1 < a < -0,5$, то $-a < x \leq 1$; если $-0,5 \leq a < 0$, то $-a < x < -2a$; в) если $a \leq -2$, то $1 \leq x \leq 2$; если $-2 < a < -1$, то $-1 \leq x \leq -a$; если $a = -1$, то $x = 1$; если $a > -1$, то \emptyset ; г) если $a < -2$, то $a \leq x \leq 1$; если $-2 < a < -0,5$, то $a \leq x \leq -a$; если $a = -0,5$, то $-0,5 \leq x \leq 0,5$ или $x = 1$; если $-0,5 < a < 0$, то $a \leq x \leq -a$, $-2a \leq x \leq 1$; если $0 < a < 1$, то $a \leq x \leq 1$; если $a = 1$, то $x = 1$; если $a > 1$, то $1 \leq x \leq a$. **7.12.** а) $a = 7$; б) $a > 7$; в) $a > -2$; г) $-2 < a \leq 7$. **7.13.** а) $a = 7$; б) $a > 7$; в) $a > -2$; г) $-2 \leq a \leq 7$. **7.14.** а) $a = -2$; б) $a \leq -2$; $a > 7$; в) при любых a ; г) $a \leq -2$, $a \geq 7$. **7.15.** а) $-3 < b < 2$; б) $-3 \leq b \leq 2$. **7.17.** а) $a > \frac{4}{3}$; б) $a \geq 1$. **7.18.** а) $-6 \leq a \leq 2$; б) $a < -6$. **7.19.** а) $b > \frac{1}{2}$; б) $b > 1,41$. **7.20.** а) Нет таких a ; б) $a \leq 0$; $a \geq 1$; в) $0 < a < 1$. **7.21.** а) $0 \leq a < 0,5$; $0,5 < a \leq 1$; б) $-1 \leq a < 0$; $a = 0,5$; $1 < a \leq 2$; в) $-1 \leq a \leq 2$; г) $a < -1$, $a > 2$. **7.22.** а) Нет таких a ; б) $a \leq 0$; в) $a > 0$. **7.23.** $-2 < a \leq 0$. **7.24.** а) Если

$a \leq 10,5$, то $x > -3,5$; если $a > 10,5$, то $x > -\frac{a}{3}$; б) если $a < 25$, то $-\infty < x < +\infty$; если $a \geq 25$, то $x < 5$, $x > \sqrt{a}$; в) если $a < -\frac{8}{3}$, то $x \leq \frac{a}{2}$, $x > -\frac{4}{3}$; если $a \geq -\frac{8}{3}$, то $-\infty < x < +\infty$; г) если $a < 0$, то $x \leq 6a$, $0 \leq x \leq 7$; если $a = 0$, то \emptyset ; если $0 < a \leq \frac{7}{6}$, то $x \geq 0$; если $a > \frac{7}{6}$, то $0 \leq x \leq 7$, $x \geq 6a$. **7.25.** а) Если $a \leq 0$, то \emptyset ; если $a > 0$, то $0 \leq x < a$; б) если $a < 0$, то $x \geq 0$; если $a \geq 0$, то $x > a^2$; в) если $a < 0$, то $x \geq 0$; если $a \geq 0$, то $x > a$; г) если $a \leq 0$, то \emptyset ; если $a > 0$, то $0 \leq x < a^2$. **7.26.** а) Если $a < 0$, то $0 \leq x \leq 13$; если $0 \leq a < \sqrt{13}$, то $a^2 < x \leq 13$; если $a = \sqrt{13}$, то \emptyset ; если $a > \sqrt{13}$, то $13 \leq x < a^2$; б) если $a \leq 0$, то $x \geq 9$; если $0 < a < 9$, то $x \geq 9$, $0 \leq x < a$; если $a = 9$, то $0 \leq x < 9$, $x > 9$; если $a > 9$, то $0 \leq x \leq 9$, $x > a$; в) если $a \leq 0$, то $x \geq 13$; если $0 < a < \sqrt{13}$, то $0 \leq x < a^2$, $x \geq 13$; если $a = \sqrt{13}$, то $0 \leq x < 13$, $x > 13$; если $a > \sqrt{13}$, то $0 \leq x \leq 13$; $x > a^2$; г) если $a < 0$, то $0 \leq x \leq 9$; если $0 \leq a < 9$, то $a < x \leq 9$; если $a = 9$, то решение нет; если $a > 9$, то $9 \leq x < a$. **7.27.** а) Если $a < 0$, то $0 \leq x < 1$; $x > 2$; если $0 \leq a < 1$, то $a^2 < x < 1$, $x > 2$; если $a = 1$, то $x > 2$; если $1 < a \leq \sqrt{2}$, то $1 < x < a^2$, $x > 2$; если $a > \sqrt{2}$, то $1 < x < 2$, $x > a^2$; б) если $a^2 < 1$, то $0 \leq x \leq a^2$, $1 < x < 2$; если $a^2 = 1$, то $1 < x < 2$; если $1 < a^2 < 2$, то $a^2 \leq x < 2$, $0 \leq x < 1$; если $a^2 \geq 2$, то $0 \leq x < 1$, $2 < x \leq a^2$. **7.28.** а) Если $a \leq -5$, то \emptyset ; если $a > -5$, то $3 \leq x < a^2 + 10a + 28$; б) если $a < -5$, то $x \geq 3$; если $a \geq -5$, то $x > a^2 + 10a + 28$. **7.29.** а) $x = 3$ при $a > 5$; б) $x = a$ при $0 \leq a \leq 2$; в) $x = 5$ при $a < 10$; г) если $a < -2$, $a > 0$, то $x = \frac{a}{2}$. **7.30.** Если $-1 < a \leq 0$, то $0 \leq x \leq (a+1)^2$; если $a > 0$, то $a^2 \leq x \leq (a+1)^2$. **7.31.** а) Если $a < 0$, то $a < x < 0$; если $a \geq 0$, то \emptyset ; б) если $a < 0$, то $a \leq x < 0$; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то \emptyset ; в) если $a \leq 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $x > a$; г) если $a \leq 0$, то $x \geq 0$; если $a > 0$, то $x \geq a$. **7.32.** Если $a < -3$, то $0 \leq x \leq 9$, $x \geq a^2$; если $a = -3$, то $x \geq 0$; если $-3 < a < 0$, то $0 \leq x \leq a^2$, $x \geq 9$; если $a = 0$, то $x \geq 9$; если $0 < a < 81$, то $0 \leq x < \sqrt{a}$, $x \geq 9$; если $a = 81$, то $0 \leq x < 9$, $x > 9$; если $a > 81$, то $0 \leq x \leq 9$, $x > \sqrt{a}$. **7.36.** а) Если $a \leq 1$, то \emptyset ; если $a > 1$, то $x > \frac{a+1}{2}$; б) если $a < 0$, то $x \leq \frac{a}{3}$; если $a \geq 0$, то $x \leq -a$; в) если $a < 1$, то $-\infty < x < +\infty$; если $a \geq 1$, то $x < \frac{a+1}{2}$; г) если $a \leq 0$, то $x \geq \frac{a}{3}$; если $a > 0$, то $x > -a$. **7.37.** а) Если $a < 0$, то $x < \frac{a}{3}$, $x > -a$; если $a > 0$, то $x < -a$, $x > \frac{a}{3}$; б) если $a < 0$, то $\frac{a}{2} < x < 0$; если $a = 0$, то \emptyset ; если $a > 0$, то $0 < x < \frac{a}{2}$; в) если $a < 0$, то $\frac{a}{4} \leq x \leq -\frac{a}{2}$; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{4}$; г) если $a < 0$, то $x \leq a$, $x \geq -a$; если $a > 0$, то $x \leq -a$, $x > a$; если $a = 0$, то

$-\infty < x < +\infty$. **7.38.** а) Если $a < 8$, то $-\infty < x < +\infty$; если $a \geq 8$, то $x < -1 - \frac{a}{2}$, $x > \frac{a}{2} - 1$; б) если $a < 5,5$, то \emptyset ; если $5,5 \leq a < 11$, то $\frac{7-a}{3} \leq x \leq a-5$; если $a \geq 11$, то $\frac{7-a}{3} \leq x \leq \frac{a+7}{3}$. **7.39.** а) $4 < a < 5$; б) $4 \leq a < 5$; в) $4,4 < a < 4,6$; г) $7 - \sqrt{7} \leq a < 2 + \sqrt{7}$. **7.40.** а) $-1, 7$; б) $-1, 0, 1, \dots, 7$. **7.41.** а) 2 ; б) $-1, 0, 1, 2$. **7.42.** а) Если $a \leq 2$, то $x \geq \frac{2a-3}{2}$; если $a > 2$, то $x = \frac{1}{2}$; $x \geq \frac{2a-3}{2}$; б) если $a > 1$, то $x \leq a$, $x \geq a^2$; если $a = 1$, то $-\infty < x < +\infty$; если $a = 0$, то $-\infty < x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то $x \leq a^2$, $x \geq a$; если $a < 0$, то $x \leq a$, $x \geq a^2$. **7.43.** Если $a < -1$, то $x \leq -a - \sqrt{a^2 + 1}$, $0 < x \leq -a - \sqrt{a^2 - 1}$, $-a + \sqrt{a^2 - 1} \leq x \leq -a + \sqrt{a^2 + 1}$; если $a \geq -1$, то $0 < x \leq -a + \sqrt{a^2 + 1}$. **7.44.** Если $a < -1$, то $x \leq a$, $x > -1$; если $a = -1$, то $x < -1$, $x > -1$; если $a > -1$, то $x < -1$, $x \geq a$. **7.45.** -2 . **7.46.** а) $0, \pm 1, \pm 2, -3$. **7.47.** а) $-\sqrt[3]{3} \leq a \leq -1$; б) $0; \pm 1$. **7.48.** $-\frac{14}{3} \leq x \leq 2$. **7.49.** $x \leq -3$; $-1 \leq x \leq 1$. **7.50.** $-\frac{2}{3} < x < 1$. **7.51.** $-2 < c \leq 2$. **7.52.** $-6 < a < 2$. **7.53.** $a < -1$; $a > 0,5$. **7.54.** $-\frac{11}{12} < a < \frac{11}{4}$.

Глава 2

§ 8

8.35. а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 50$; б) $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 25$. **8.36.** а) $(x+7)^2 + y^2 = 25$; б) $x^2 + (y+6)^2 = 100$. **8.43.** а) 12 ; б) 120 ; в) 48 ; г) $2pq$. **8.46.** а) $(1; 2)$; б) $[-0,5; 0) \cup (0; 0,5]$; в) $\left[0; \frac{1}{3}\right]$; г) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **8.52.** а) $-11 \leq a \leq 1$; б) $-14 \leq a \leq 6$; в) $-9 \leq a \leq 11$; г) $-4 \leq a \leq 16$. **8.53.** а) $(-2; 3)$; б) $(0,5; -1,5)$; в) $\left(1\frac{1}{3}; 0\right)$; г) $(2; -1); (-2; 7)$. **8.54.** а) $(3k+2; 2k-1)$; б) $(2-3k; 2k-1)$; в) $(3k+2; 1-5k)$; г) $(4k+1; 5k+6)$, $k \in \mathbb{Z}$. **8.55.** а) $(1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1)$; б) $(0; 0), (3; 3), (-1; 1), (2; 4)$; в) $(4; 1), (4; -1), (-4; 1), (-4; -1)$; г) $(2; 3), (2; -1), (-2; 1), (-2; -3)$. **8.56.** а) 54 ; б) $12; 24; 36; 48$. **8.57.** $0 < a < \frac{2}{3}$; $a > \frac{8}{3}$. **8.58.** $0 < b < 3$; $b = 5$.

§ 9

9.11. а) $c < -\frac{1}{11}$, $c > \frac{8}{7}$; б) $-34 < c < -33$. **9.16.** а) $-4 \leq a \leq 4$; б) $-\infty < a < +\infty$; в) $-2 \leq a \leq 2$; г) $-\infty < a < +\infty$. **9.17.** а) $8(\pi + \sqrt{3})$; б) $96 + 50\pi$. **9.18.** 5 . **9.19.** $4,6$. **9.20.** 12 . **9.21.** $(-1; 0,5)$. **9.22.** а) $(-6; -3), (-7; -4)$; б) $(-1; 5)$.

§ 10

- 10.3. а) $(-1; 3)$; б) $(1; 2)$; в) $(-2; -1)$; г) $(3; 6)$, $(-3; 6)$; д) $(-3; 5)$, $(1; -3)$.
 10.4. а) $(1; -3)$, $(-3; 1)$; б) $(2; 2)$, $(-1; -4)$; в) $(4; -2)$, $(-2; 4)$; г) $(2; 3)$,
 $(-2; -3)$. 10.5. а) 2; б) 2; в) 3; г) 0. 10.6. а) $(-1; 0)$; б) $(1; 1)$, $(1; -5)$;
 в) $(0; -1)$, $(6; -1)$; г) $(2; 2)$. 10.7. а) $(0; 0)$, $(1; 1)$; б) $(0; 2)$; в) $(2; 1)$, $(-1; -2)$;
 г) $(1; 0)$, $(5; -4)$. 10.8. а) $(1; 1)$, $(-1; 1)$; б) $(0; -1)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$; в) $(0; -3)$,
 $(-1; -4)$, $(-2; -3)$; г) $(-3; 0)$, $(0; -3)$, $(3; 0)$. 10.9. а) $p = 2$; б) $p = 5$.
 10.10. а) $p = 0$; б) $p = 0$, $p = -4$. 10.11. а) $p = -2$; б) $p = 2$. 10.13. а) Нет;
 б) да. 10.14. а) Нет; б) да. 10.15. а) Да; б) да. 10.16. $a = 1$. 10.23. а) 5;
 б) 144; в) 6; г) 28. 10.24. а) $16 - 4\pi$; б) $25\pi - 24$. 10.25. а) $16\pi - 32$;
 б) $24 - \frac{36}{25}\pi$. 10.26. $y < -8$, $y > \frac{4}{3}$. 10.27. $1,8 \leq x \leq 3$, $y = \frac{5}{3}$.
 10.28. а) $(-1; 2)$; б) $(-2; 0)$, $(-2; 2)$, $(-1; 1)$, $(-3; 1)$. 10.29. 22 и 31.

§ 11

- 11.1. а) $(-4; -5)$, $(6; 5)$; б) $(4; 2)$, $(9; -3)$; в) $(8; 5)$, $(0; -3)$; г) $(3; 9)$, $(-2; 4)$.
 11.2. а) $(-1; 2)$, $(2; -1)$; б) $(1; -4)$, $(-1, 4; -6, 4)$; в) $(5; 2)$, $(-1; 4)$; г) $(2; 6)$,
 $(6; 2)$. 11.3. а) $(-4; 2)$, $(-1; 3)$; б) $(4; 0)$, $(12; 16)$; в) $(5, 5; 5)$, $(3; -5)$;
 г) $\left(-9\frac{2}{3}; -8\frac{1}{3}\right)$, $(5; -1)$. 11.4. а) $(-3; -2)$, $(3; 1)$; б) $(-5; 10)$; в) $(2; 0)$,
 $(0; -2)$; г) $(2; -1)$, $(-2; 1)$. 11.5. а) $(3; 2)$, $(-0, 4; 0, 3)$; б) $(4, 5; 1, 5)$; в) $(6; 2)$,
 $(-1; -1, 5)$; г) $(4; 3)$. 11.6. а) $(10; 2)$, $(-10; -2)$; б) $(2; 1)$, $(-2; -1)$; в) $(2; -6)$,
 $(-2; 6)$; г) $(1; 1)$, $(-1; -1)$. 11.10. а) $\left(-3\frac{3}{4}; 4\right)$, $(1, 5; -2)$; б) $(1; 0)$, $(1; -1)$.
 11.11. а) $\left(-\frac{131}{169}; -\frac{551}{169}\right)$, $(1; 1)$; б) $(-1; 3)$, $(-1; -1)$. 11.12. а) $(2; 1)$,
 $\left(-\frac{2}{13}; \frac{6}{13}\right)$; б) $(1; 2)$, $(4; 2)$, $\left(\frac{11 \pm \sqrt{57}}{2}; 5\right)$. 11.13. а) $(0; 0)$, $(3; -3)$;
 б) $(0; 0)$. 11.14. а) $(-6; -2)$; б) $(-2; 3)$, $(-1, 2; 3, 4)$. 11.15. а) $(1; 1)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$,
 $(2; -1)$, $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$; б) $(1; -1)$, $\left(-\frac{17}{18}; -\frac{4}{9}\right)$; в) $(2; 1)$, $\left(-2\frac{27}{32}; -\frac{13}{32}\right)$; г) $(1; 2)$,
 $\left(-\frac{3}{14}; -1\frac{1}{28}\right)$. 11.16. а) $(1; 2)$, $(2; 1)$; б) $(1; 0)$, $\left(-\frac{19}{21}; \frac{8}{21}\right)$; в) $(1; 3)$, $(3; 1)$;
 г) $\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$, $(-3; 2)$. 11.17. а) $(a; a)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; б) $(6; 1)$, $(-6; -1)$.
 11.18. а) $(4; 2)$; б) $(2; 1)$, $(-1; -2)$; в) $(3; 1)$; г) $(1; 4)$, $(4; 1)$. 11.19. а) $(2; 1)$,
 $(-2; -1)$, $(2; -1)$, $(-2; 1)$; б) $(3; 2)$, $(-3; -2)$, $(3; -2)$, $(-3; 2)$; в) $(3; 1)$,
 $(-3; -1)$, $(3; -1)$, $(-3; 1)$; г) $(-1; -3)$, $(-3; -1)$, $(-1; 3)$, $(-3; 1)$, $(1; -3)$, $(1; 3)$,
 $(3; -1)$, $(3; 1)$. 11.20. а) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $(2; 1, 5)$; б) $(3; 3)$, $(-3; -3)$; в) $(2; -2)$,
 $(5; -1)$, $\left(-5; -\frac{13}{3}\right)$; г) $(1; -1)$, $(7; 8)$. 11.21. а) $(-5; -4)$, $(5; 4)$; б) $(1; 2)$, $(-1; -2)$,
 $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -3\right)$; в) $(2; 4)$, $(-2; -4)$, $(4; 2)$, $(-4; -2)$; г) $(5; 4)$, $(-5; -4)$.

- 11.22.** а) $(-3; 3)$, $(3; 3)$; б) $(3; 1)$, $(-3; 1)$; в) $(1; 1)$, $(1; -1)$; г) $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(1; -\sqrt{2})$, $(1; \sqrt{2})$. **11.23.** а) $(1; 0)$, $(1; -1)$, $(-2; 0)$, $(-2; -1)$; б) $(3; 4)$, $(-1; 4)$; в) $(1; 2)$, $(1; -3)$; г) $(2; 0)$, $(2; -1)$, $(-3; 0)$, $(-3; -1)$. **11.24.** а) $(-1; -2)$, $(2; 1)$, б) $(9; 3)$, $(-3; -9)$; в) $(1,2; 0,6)$; г) $(8; 2)$, $(2; 8)$. **11.25.** а) $(3; -2)$, $(8; 18)$; б) $(8; 6)$, $(-7; -9)$; в) $(3; -4)$, $(-2; 1)$; г) $(5; 1)$, $(-\frac{2}{3}; 18)$. **11.26.** а) $(-3; 1)$, $(1; -3)$; б) $(2,25; 1,5)$; в) $(2; 1)$; г) $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$. **11.27.** а) $(-3; -2)$, $(1; 2)$; б) $(\frac{1}{3}; 1)$, $(-\frac{1}{3}; -1)$; в) $(0; -5)$, $(1; -4)$; г) $(1; 2)$, $(2; 1)$. **11.28.** а) $(3; 4)$, $(1; 2)$; б) $(4; 5)$, $(2; -1)$; в) $(1; 5)$, $(-3; 1)$; г) $(1; 3)$, $(-7; -1)$. **11.29.** а) $(-3; 3)$, $(0,6; 4,2)$; б) $(\frac{6}{9}; \frac{7}{9})$, $(7; 1)$; в) $(3\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $(4; 1)$; г) $(\frac{1}{5}; \frac{1}{3})$. **11.30.** а) $(3; 2)$, $(1; 4)$, $(-3; -4)$, $(-5; -2)$; б) $(-\frac{5}{24}; -\frac{7}{24})$, $(-\frac{3}{8}; -\frac{1}{8})$, $(\frac{1}{4}; \frac{1}{6})$, $(\frac{1}{12}; \frac{1}{3})$. **11.31.** а) $(-5; -3)$, $(5; 3)$; б) $(2; -3)$. **11.32.** а) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 169$; б) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$. **11.33.** а) $(1; 1)$; б) $(2; 2)$, $(-2; -2)$; в) $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$; г) $(2; 1)$. **11.34.** а) $(1; 1)$; б) нет решений. **11.35.** а) $(2; 1; 3)$; б) $(2; \frac{1}{2}; 1)$. **11.36.** а) $(1; 2; -1)$; б) $(\frac{16}{7}; \frac{6}{7}; -1)$. **11.37.** а) $(1; 1; 2)$, $(-1; -1; -2)$; б) $(1; \pm 2; 4)$. **11.38.** а) 15; б) 12; в) 3. **11.39.** а) $a \neq -2$; б) $a = -2$; в) таких a нет. **11.40.** а) $a \neq 0$; б) $a = 0$; в) таких a нет. **11.41.** а) $a \neq \pm 2$; б) таких a нет; в) $a = \pm 2$. **11.42.** а) $a \neq \frac{2}{3}$, $a \neq 3$; б) $a = 3$; в) $a = \frac{2}{3}$. **11.43.** Если $a \neq 1$ и $a \neq -\frac{1}{2}$, то $x = 1$, $y = 1$; если $a = 1$, то бесконечно много решений вида $(t; 2 - t)$, где $t \in \mathbb{R}$; если $a = -\frac{1}{2}$, то бесконечно много решений вида $(5 - 4t; t)$, где $t \in \mathbb{R}$. **11.44.** а) $a = 2$; б) $a \neq 2$; в) таких a нет. **11.45.** а) $a = 2$; $a = 3,5$; б) $a \neq 2$ и $a \neq 3,5$; в) таких a нет. **11.46.** а) $a = 4$; б) $a \neq 4$; в) таких a нет. **11.47.** а) $a = 2$; б) $a \neq 2$; в) таких a нет. **11.48.** а) $a \neq 2$; б) $a = -1 \pm 4\sqrt{3}$; в) $a = -1$; г) 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$. **11.49.** а) $(-5; -2)$, $(-1; -2)$, $(1; 2)$, $(5; 2)$; б) $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$.

§ 12

- 12.1.** а) $(0; 1)$, $(0; -1)$, $(\frac{2\sqrt{7}}{7}; -\frac{\sqrt{7}}{7})$, $(-\frac{2\sqrt{7}}{7}; \frac{\sqrt{7}}{7})$; б) $(2; 0)$, $(-2; 0)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. **12.2.** а) $(1; -1)$, $(-1; 1)$, $(\sqrt{\frac{75}{47}}; 2\sqrt{\frac{3}{47}})$, $(-\sqrt{\frac{75}{47}}; -2\sqrt{\frac{3}{47}})$; б) $(2; 2)$, $(-2; -2)$. **12.3.** а) $(2; 1)$, $(-2; -1)$; б) $(3; 2)$, $(-3; -2)$. **12.4.** а) $(2; 3)$, $(3; 2)$; б) $(1; 2)$, $(2; 1)$; в) $(1; 4)$, $(4; 1)$; г) $(1; 1)$,

- $(2 + \sqrt{3,5}; 2 - \sqrt{3,5})$; $(2 - \sqrt{3,5}; 2 + \sqrt{3,5})$. **12.5.** а) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$;
 $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$; б) $(1; 1), (-2 + \sqrt{4,5}; -2 - \sqrt{4,5}), (-2 - \sqrt{4,5}; -2 + \sqrt{4,5})$.
12.6. а) $(2; 2); 6) (2; 3), (3; 2), \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right); \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right)$.
12.7. а) $(1; 1), (-1; -1); 6) (-2; -1), (-2; 1), (-1; -2), (-1; 2), (1; -2), (1; 2),$
 $(2; -1), (2; 1); в) (-1 - \sqrt{6}; \sqrt{6} - 1), (\sqrt{6} - 1; -1 - \sqrt{6}), (-4; 1), (1; -4);$
 г) $(3; -2), (-2; 3)$. **12.8.** а) $(1; 1); 6) (5; -1), (0; 1), \left(\frac{5\sqrt{17} - 3}{2}; -\sqrt{17}\right),$
 $\left(\frac{-3 - 5\sqrt{17}}{2}; \sqrt{17}\right)$. **12.9.** а) $(-1; 0), (-1; 1,5), (0; 1); 6) (1; 2), (-4; 3),$
 $(-4; -3), (4; -1)$. **12.10.** а) $(8; -2), (-8; 2), (2\sqrt{6}; 2\sqrt{6}), (-2\sqrt{6}; -2\sqrt{6});$
 б) $(-2; -2), (2; 1), (-4; -3)$. **12.11.** а) $(2; -1), (-2; 1); 6) \left(\frac{1}{2}; 1\right), \left(-\frac{1}{2}; -1\right),$
 $\left(\frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$. **12.12.** а) $(-1; -1)$ при $a = -1$; $(0,5; 0,5)$ при $a = 0,5$;
 б) $(1; 1)$ при $a = \frac{1}{8}$. **12.13.** $a = 8$.

§ 13

- 13.4.** а) $(\pm\sqrt{2t-1}; t), 345t > \frac{1}{2}$; б) $(0; 6); в) (\sqrt{30}; 0), (5; 1); г) \left(1; \frac{2}{3}\right)$.
13.5. а) $(4; -8); 6) (4; 1); в) (0; 9); (1; 3); г) (6,25; 0)$. **13.6.** а) $(3; -3);$
 $\left(\frac{15}{8}; \frac{3}{8}\right); 6) (0; 1), \left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right); в) (2; 6), \left(-\frac{10}{9}; \frac{40}{9}\right); г) (1; 0)$. **13.7.** а) $(9; -3);$
 б) $\left(\frac{13}{4}; \pm 2,5\right); в) (9; 9), \left(\frac{27 + 9\sqrt{5}}{2}; \frac{27 - 9\sqrt{5}}{2}\right); г) \left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{8}\right), \left(\frac{65}{8}; \frac{63}{32}\right)$.
13.8. а) $(4,5; 0,5), (-0,5; -4,5); 6) \left(-1; -\frac{4}{5}\right), \left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right); (1; 0), (-1; 0);$
 в) $(1; 15), (16; -15); г) (-2; 1), \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right), (2,5; 1)$. **13.9.** а) $(2; 2);$
 б) $(6; -1)$. **13.10.** а) 2; б) 4. **13.11.** а) 5; б) 15. **13.12.** а) 5; б) 10.
13.13. а) $a = 1,25; a < 1; 6) 1 < a < 1,25; в) a > 1,25$. **13.14.** а) $a < 8; a > 16;$
 б) $a = 8; в) 8 < a < 16$. **13.15.** а) $(1; 0); 6) (3; -2), \left(t; 2 - \frac{4}{3}t\right)$ при $t \leq 3;$
 в) $(0; 2), \left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right); г) \text{ нет решений}$. **13.16.** а) $(1; 0); 6) (-5,5; 5,5),$
 $(-3,25; 3,25); в) (1; 1), (-2; -2), (-8; 4); г) (2,5; 6,5), (1; 5), (-11; 11),$
 $(-3,5; 3,5)$. **13.17.** а) $(2y - 1; y), y \geq 1; 6) (2 - 2t; t), \text{ где } 0 \leq t \leq 1; (0; -1);$
 в) $\left(\frac{11}{5}; -\frac{4}{5}\right); г) (4; -1), (-10; 3), \left(\frac{10}{3}; -\frac{13}{9}\right)$. **13.18.** а), б) Нет решений;

в) $(-1; 5)$, $(-1; -5)$; г) $(2; -1)$, $\left(\frac{1}{3}; 1,5\right)$. **13.19.** а) $(-1; -3)$, $(-3; -1)$, $(-2 + \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$; б) $(-2; 3,5)$. **13.20.** а) 1, если $a = 1,5$, $a < -3$, $a \geq 3$; 2, если $\frac{3}{2} < a < 3$; 0, если $-3 \leq a < \frac{3}{2}$; б) 2, если $a > 3$; 1, если $a = 3$; 0, если $a < 3$. **13.21.** $1 < a < \sqrt{2}$.

§ 14

14.1. 27 и 11. **14.2.** 31 и 19. **14.3.** 24. **14.4.** 48. **14.5.** $\frac{5}{11}$. **14.6.** 32. **14.7.** 94. **14.8.** 48 и 15. **14.9.** 34 и 41. **14.10.** 83. **14.11.** 6 см, 8 см. **14.12.** 180 м^2 . **14.13.** 84 дм. **14.14.** 84 см. **14.15.** 14 и 24. **14.16.** 20 и 18. **14.17.** 2,9 и 11. **14.18.** 6 км/ч, 1 км/ч. **14.19.** 10 км/ч, 2 км/ч. **14.20.** 3 км/ч. **14.21.** 80 км/ч, 60 км/ч. **14.22.** 4 км/ч, 3 км/ч. **14.23.** 24 км/ч, 60 км/ч. **14.24.** 30 км/ч, 10 км. **14.25.** 75 км/ч, 37,5 км/ч, 600 км. **14.26.** За 1 ч 45 мин или 30 мин. **14.27.** 90 и 96 км/ч. **14.28.** 27 и 36 км/ч. **14.29.** 90 км/ч. **14.30.** 20 м/с, 30 м/с. **14.31.** 10 и 15 км/ч. **14.32.** 15 км/ч. **14.33.** 4 и 3,2 км/ч. **14.34.** 60 км/ч, 100 км/ч, 600 км. **14.35.** 2 ч, 6 ч. **14.36.** 330 км. **14.37.** 4 км. **14.38.** 3 и 4 м/с. **14.39.** 10 ч. **14.40.** 12 ч. **14.41.** 6 ч, 10 ч. **14.42.** 3 ч, 1,5 ч. **14.43.** $10 \text{ м}^3/\text{ч}$. **14.44.** 120 ч, 80 ч. **14.45.** 5 ч, 3 ч 20 мин. **14.46.** 10 ч, 15 ч. **14.47.** 45 ч. **14.48.** 45 и 30 дней. **14.49.** 4 ч, 6 ч. **14.50.** 8 ч, 6 ч. **14.51.** 10 ч, 8 ч. **14.52.** 10 мин. **14.53.** 10 ч, 10 ч. **14.54.** 20 ч, 12 ч. **14.55.** 300 г и 500 г. **14.56.** 1 л, 2 л. **14.57.** $51\frac{2}{3}\%$. **14.58.** 9 кг, 3 кг. **14.59.** 20 000 р., 10%. **14.60.** 65 000 р. **14.61.** $\frac{5}{17}$.

Глава 3

§ 15

15.18. а) $(-\infty; -1] \cup [8; +\infty)$; б) $(-\infty; -1] \cup [8; 12) \cup (12; +\infty)$. **15.19.** а) $[-8; 1]$; б) $(-8; 1]$; в) $[-3; 1]$; г) $[-3; -2) \cup (-2; 1]$. **15.20.** а) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1]$; б) $[-3; -2]$; в) $(-3; -2]$; г) $(-\infty; -3) \cup (-3; -0,5) \cup (-0,5; 1]$. **15.21.** а) $[4; 5]$; б) $[4; 5]$; в) $[-1; 0] \cup [4; 5]$; г) $[0; 5]$. **15.29.** а) $[-3; +\infty)$; б) $(-\infty; 3,5]$; в) $(-\infty; 0]$; г) $[0; +\infty)$. **15.31.** а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0]$; в) $(-\infty; 3]$; г) $[-1; +\infty)$. **15.32.** а) $(0; +\infty)$; б) $(-\infty; -2)$; в) $(-\infty; 0)$; г) $(-2; +\infty)$. **15.33.** а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0]$; в) $[3; +\infty)$; г) $(-\infty; -7]$. **15.34.** а) $[0; 2]$; б) $[0; 2]$; в) $[0; 3]$; г) $[0; 3]$. **15.35.** а) $[1; +\infty)$; б) $[\sqrt{2}; +\infty)$; в) $[0; +\infty)$; г) $[1; +\infty)$. **15.36.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[3; +\infty)$; в) $[-1,5; +\infty)$; г) $[-8; +\infty)$. **15.37.** а) $\left(0; \frac{1}{4}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{6}; 0\right)$; в) $(1; 1,25]$; г) $\left[-\frac{7}{6}; -1\right)$. **15.38.** а) $(-\infty; 4]$; б) $[-11; 5]$; в) $(-\infty; -10]$; г) $[5; 9]$. **15.39.** а) $[2; +\infty)$; 2; б) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$; 0; в) $(-\infty; 5]$; 5; г) $(0; 2]$; 1 и 2. **15.40.** а) $[0; +\infty)$; $x = 10$; б) $(-\infty; 2]$; $x = 2$. **15.47.** а) $[-3; 5]$;

б) $[-1; 7]$; в) $[-5; 3]$; г) $[-3; 5]$. **15.48.** а) $[-1; 10]$; б) $[-3; 30]$; в) $[-1; 32]$; г) $[-10; 1]$. **15.49.** а) $[-1,8; 4,6]$; б) $\left[-1; \frac{17}{7}\right]$. **15.50.** а) 1, 2, 3; б) 2, 3, ..., 7; в) нет целочисленных значений; г) 0, 1, 2, 3, 4, 5. **15.51.** а) $[0; 25]$; б) $[-27; 125]$; в) $[0; 5]$; г) $[1; 3]$. **15.52.** а) $[-12; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[-24; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **15.59.** а) $a < -11$; б) $a \geq 4$. **15.60.** Если $a < 0$, то $D(f) = \emptyset$; если $0 < a < \frac{4}{3}$, то $\left[\frac{4}{a}; +\infty\right)$; если $a \geq \frac{4}{3}$, то $[3; +\infty)$.

§ 16

16.20. а) $y = 3x^2 + x + 1$; б) $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{3}$; в) $y = -x^2 + 21$; г) задать нельзя. **16.21.** а) 1; б) 1; в) $f(x) = 1$. **16.22.** а) $-\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{19}{6}$; г) $\frac{13}{3x} - \frac{7x}{6}$. **16.26.** $S(x) = \frac{|x|}{2}$; $x = \pm 4$. **16.27.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 4. **16.28.** а) 9; б) 6; в) 9; г) 4. **16.29.** $E(f) = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. **16.39.** а) x — любое целое число; б) $0 \leq x < 1$; в) $x = 0$; г) 1. **16.42.** $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$. **16.43.** а) 0, 1, 2, 2, 3, 10; б) 3, 4, 5, ..., 16. **16.44.** 1, 1, 2, 2, 4, 28, 20.

§ 17

17.33. а) 2; б) 3; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}$. **17.34.** а) 9; б) 4; в) 0,25; г) 0. **17.44.** а) 3, 8; б) $y_{\text{наиб}} = 1$; в) -3, -1; г) 3, 8. **17.49.** а) 0, 36; б) $\sqrt{7} - 30$, 3. **17.50.** -1, $-\frac{1}{4}$. **17.51.** а) $5a - 3, 5a + 5, a \in \mathbb{R}$; б) $-a - 3, 4 - a, a \in \mathbb{R}$. **17.52.** а) Если $-1 < a < 2$, то $a^2 - 4a, 5$; если $2 \leq a \leq 5$, то -4, 5; если $a > 5$, то 5, $a^2 - 4a$; б) если $a \leq -1$, то $-a^2 + 2a - 3, -2$; если $-1 < a \leq 1$, то -6, -2; если $1 < a < 3$, то -6, $-a^2 + 2a - 3$. **17.53.** а) Если $a \leq -\frac{1}{2}$, то $1 + 4a, 4 - 8a$; если $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{4}$, то $-4a^2, 4 - 8a$; если $\frac{1}{4} < a < 1$, то $-4a^2, 1 + 4a$; если $a \geq 1$, то $4 - 8a, 1 + 4a$; б) если $a < -\frac{2}{3}$, то $8a - 3, -12a - 2$; если $-\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{4}$, то $8a - 3, 4a^2 + 7$; если $-\frac{1}{2} \leq a < 1$, то $-12a - 2, 4a^2 + 7$; если $a \geq 1$, то $-12a - 2, 8a - 3$.

§ 18

18.36. а), б) 0. **18.37.** а), б) 0. **18.42.** а) 7; б) 14; в) 7; г) 35. **18.43.** а) -11; б) 0; в) 12; г) 22. **18.44.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **18.45.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **18.47.** а) -11, 8; б) -8, 11. **18.49.** а) $a = 0$; б) $a = 6$. **18.50.** в) 0; г) 0. **18.51.** в) 0. **18.52.** в) 0.

§ 19

19.11. а) $[0; 9]$; б) $(-36; -6]$; в) $[-6; 9]$; г) $(-6; 30]$. **19.12.** а) 0, 2, -2; б) 0; в) 1, -1; г) -1. **19.13.** а) $x < 1$; б) $-1 < x < 0$; $x > 1$; в) $x > -2$; г) $x \leq -1$; $0 < x \leq 1$. **19.25.** а) -1; б) 1, -1; в) 1, -1; г) 0, 1, -1. **19.26.** а) 2; б) 1; в) 0; г) 1. **19.27.** а) 2; б) 1; в) 2; г) 1. **19.31.** а) Возрастает на $(-\infty; +\infty)$; б) убы-

вает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$. **19.32.** $P > Q$. **19.33.** $K = L$. **19.34.** а) $[-2; 67]$; б) $[-2; 742]$; в) $[-5; 67]$; г) $[-5; 742]$. **19.35.** а) 1; б) 2; в) 2; г) 1. **19.36.** а) $0 < x \leq 1$; б) $x < 1$; в) $x > -1$; г) $x \geq 0$. **19.37.** а) 1; б) -1; в) 2; г) 2. **19.38.** а) 0, если $b < 0$; 1, если $b = 0$; 2, если $b > 0$; б) 1 при $b \in R$; в) 1 при $b \in R$; г) 0, если $b < 0$; 1, если $b = 0$; 2, если $b > 0$. **19.46.** а) Параллелограмм; б) равнобедренная трапеция. **19.55.** $P = Q$. **19.59.** а) 1; б) 4; в) 2; г) 1. **19.60.** а) 3; б) 2; в) 4; г) 2. **19.67.** а) $x < 0$, $0 < x < 1$; б) $x \geq 1$; в) $x \geq 1$; г) $0 < x < 1$. **19.71.** а) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ — точка минимума; б) $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ — точки минимума. **19.73.** а) 9; б) 2; в) 1; г) 2, -2. **19.74.** $b > 0$; $p > \frac{1}{b^3}$.

§ 20

20.18. а) 30; б) $6 - 2\sqrt{3}$; в) $1\frac{5}{7}$; г) $5 + 5\sqrt{3}$. **20.21.** 0. **20.23.** а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a > b$. **20.31.** а) 8; б) 0, 1; в) 0, 8, -8; г) 8, -1. **20.32.** а) 2; б) 2; в) 2; г) 2. **20.34.** а) 9; б) 1, -1; в) -29; г) 8, 0. **20.35.** а) 8, -27; б) $8, \frac{1}{8}$; в) 64; -27; г) $1, \frac{1}{27}$. **20.36.** а) 9; б) $\sqrt[3]{2}$, -1. **20.37.** а) $\frac{1}{2}$; б) 5, -4. **20.38.** а) 8; б) 8, -8; в) $\pm 2\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{8}$. **20.39.** а) $x > 1$; б) $x > 1$; в) $x < -8$; г) $x \leq -1$. **20.41.** а) $p = 0$, $p = 8$; б) $2 < p < 8$; в) $0 < p \leq 2$; г) $p < 0$; $p > 8$.

Глава 4

§ 21

21.7. а) 1, 1, 7, 1, 73, 1, 732; б) 2, 1, 8, 1, 74, 1, 733. **21.9.** а) 3, 4, 3, 3, 4; б) 8, 8, 8, 8; в) 3, 5, 0, 0, 5; г) 2, 8, 5, 1, 8. **21.10.** а) 777, 777 777, 777 777 777, ...; б) 77, 7777, 777 777, **21.20.** а) Да, $n = 3$; б) да, $n = 5$; в) нет; г) да, $n = 3$. **21.21.** а) -2, 4, -8, 16, -32; б) 2, -2, 2, -2; в) 2, -6, 18, -54, 162; г) -1, 2, -4, 8, -16. **21.22.** а) -7, -31, -127; б) -6, -24, -96; в) 12, 48, 192; г) -5, -17, -65. **21.23.** а) 1, 7, 31; б) 14, 8, -16; в) 2, 4, -12; г) -2, -2, -2. **21.24.** а) $\frac{1}{2n-1}$; б) $\frac{n}{n+1}$; в) $\frac{1}{n^2}$; г) $\frac{1}{n(n+1)}$. **21.25.** а) $(-1)^n \frac{2n}{3n-1}$; б) $\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$; в) $(-1)^{n+1} \frac{2^n}{5^n}$; г) $(-1)^n \frac{n^2}{\sqrt{n(n+1)}}$. **21.30.** а) -2, 1, 4, 7, 10, 13; б) 2, 2, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{60}$; в) $\frac{1}{5}$, -1, 5, -25, 125, -625; г) 1, 2, 6, 24, 120, 720. **21.31.** -3, -2, -10, -24, -68, -184; $x_n = 2(x_{n-2} + x_{n-1})$, $n \geq 3$. **21.32.** а) $x_1 = 2$, $x_n = x_{n-1}$; б) $x_1 = 2$, $x_n = x_{n-1} + 2$; в) $x_1 = 9$, $x_n = x_{n-1} - 2$; г) $x_1 = 5$, $x_n = -x_{n-1}$. **21.33.** а) $x_1 = 2$, $x_n = 3x_{n-1}$; б) $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + 7$; в) $x_1 = 0,5$, $x_n = 0,5x_{n-1}$; г) $x_1 = 3$, $x_n = -3x_{n-1}$. **21.34.** а) $5n - 2$; б) $2 \cdot 3^{n-1}$; в) $15 - 4n$; г) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

21.35. а) $a_1 = 74$, $a_{n+1} = 2a_n$; б) $a_1 = 70$, $a_{n+1} = 2a_n$. **21.37.** а) 8; б) 5; в) 6; г) 6. **21.38.** а) 7; б) 5; в) 4; г) 6. **21.39.** а) -64, -55, -46, -37, -28, -19, -10, -1; б) -8, -14, -18, -20, -20, -18, -14, -8. **21.40.** а) 40; б) 11. **21.41.** а) -1777; б) 31. **21.42.** а) 613; б) 3370; в) 23; г) 50. **21.43.** а) $b_1 = \frac{173}{5}$; б) $b_4 = \frac{179}{11}$; в) $b_1 = \frac{173}{5}$; г) не существует.

21.44. $b_n = \frac{n(n-3)}{2}$. **21.45.** а) $b_1 = b_{45} = -40$; б) таких пар нет; в) таких

пар нет; г) $a_3 = a_4 = 17$. **21.46.** а) $b_7 = \frac{14}{5}$; б) $b_2 = 8$, $b_3 = 6$; в) $b_1 = 10$; г) не

существует. **21.47.** а) $80 \leq p < 81$; б) таких p нет; в) $72 \leq p < 77$; г) таких p нет. **21.48.** а) $-588 < p \leq -585$; б) таких p нет; в) таких p нет; г) $p < -588$. **21.49.** а) Таких p нет; б) $24(2 - \pi) < p \leq 12(1 - \pi)$; в) таких p нет; г) $p < 9(3 - 2\pi)$.

§ 22

22.7. а) Ограничена сверху, если $a < 0$; ограничена снизу, если $a \geq 0$; б) ограничена снизу, если $a \leq 0$; ограничена сверху, если $a \geq 0$; в) ограничена снизу при $a \in \mathbb{R}$; г) ограничена снизу при $a \geq 0$; ограничена сверху при $a \leq 0$. **22.20.** а) Возрастает; б) убывает; в) возрастает; г) убывает. **22.21.** а) Возрастает; б) немонотонна; в) возрастает; г) возрастает. **22.22.** а) Возрастает; б) убывает; в) убывает; г) возрастает. **22.23.** а) Возрастает; б) убывает; в) возрастает; г) возрастает. **22.24.** а) Возрастает; б) возрастает; в) немонотонна; г) убывает. **22.25.** а) Возрастает; б) возрастает в нестрогом смысле; в) немонотонна; г) немонотонна. **22.26.** а) Убывает; б) убывает; в) возрастает; г) возрастает. **22.27.** а) Возрастает; б) возрастает; в) убывает; г) возможны варианты. **22.28.** а) — в) Возможны варианты; г) возрастает. **22.29.** а) Возрастает при $a > 0$, убывает при $a < 0$; б) убывает при $a^2 > 5$, в остальных случаях немонотонна; в) убывает при $a > 0$, возрастает при $a < 0$; г) возрастает при $a < 6$, немонотонна при $a > 6$. **22.30.** а) Возрастает, ограничена снизу; б) возрастает, ограничена снизу; в) убывает, ограничена; г) убывает, ограничена. **22.31.** а) Убывает, ограничена; б) возрастает, ограничена; в) убывает, ограничена; г) возрастает, ограничена. **22.34.** $k = 2$.

§ 23

23.23. а) -9; б) -3. **23.24.** а) 55; б) нет; в) 11; г) 7. **23.25.** а) 21; б) нет; в) 25; г) 10. **23.26.** а) 22; б) 39; в) 11; г) 22. **23.27.** а) 53; б) 6; в) 2; г) 14.

23.28. а) 50; б) 52; в) 101; г) 51. **23.29.** а) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$; б) $\frac{2\sqrt{3}-5}{3}, -\frac{5}{3}$; в) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$;

г) $\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{35}}{5}$. **23.30.** а) $a_n = 2n + 5$; б) $a_n = -1,5n - 16,5$; в) $a_n = 2,5n + 2,5$;

г) $a_n = -0,7n + 3,7$. **23.31.** а) $a_n = 3n + 11$; б) $a_n = 7 - 5n$. **23.32.** а) $a_n = 3n - 20$ или $a_n = 4n - 29$; б) $a_n = 2n - 19$ или $a_n = 5n - 58$. **23.33.** а) $a_n = 5n - 22$ или $a_n = 44,2n - 355,2$; б) $a_n = 18 - 2n$ или $a_n = 2n - 18$. **23.34.** а) $a_{10} = 1$; б) $a_5 = -5$. **23.35.** $13,5 < d < 15$. **23.36.** а) 13; б) -1, 3, 7, 11, 15. **23.37.** -12, -7, -2, 3. **23.41.** а) 1950; б) 142,5; в) -690; г) -1342,5. **23.42.** а) 557,5; б) 15,5; в) 20,5; г) 10 760. **23.43.** а) 4637,5; б) 2136. **23.44.** а) -1827; б) -771. **23.45.** а) 728; б) 981. **23.46.** а) 61 376; б) 40 875. **23.49.** а) 74; б) 10.

§ 24

23.50. а) -1; б) 1. 23.51. а) 7; б) $-\frac{1}{9}$. 23.52. 3, 0, $\pm 2\sqrt{3}$. 23.53. а) 5; б) 3.
 23.54. 82. 23.55. 1313. 23.56. 54. 23.57. $a_5 = b_{19} = 42$, $a_{200} = b_{97} = 2772$.
 23.58. а) 65 422; б) 391 454. 23.59. 3, 4. 23.60. 1357. 23.61. -12, -1230.
 23.62. 21. 23.63. 2 пузырька. 23.64. 10 мин. 23.65. 4 дня. 23.68. 1, -20.
 23.69. -1. 23.70. -5, -1, 7. 23.71. 36. 23.72. $2 - \sqrt{3}$, 2, $2 + \sqrt{3}$. 23.73. 3; 4, 5;
 6 км/ч. 23.74. 7 дней. 23.75. 17 м, 13 м.

24.16. а) 6; б) -32. 24.17. а), г) Не является; б) 10; в) 12. 24.22. а) 3, 2;
 б) 16, 1, 5; в) 13, -0, 5; г) 3, -2. 24.23. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. 24.24. $192 \cdot 2^{-n}$. 24.26. а) $\frac{728}{27}$;
 б) $\frac{3325}{81}$; в) $-\frac{63}{8}$; г) $-117(\sqrt{3} + 1)$. 24.27. а) 315; б) $\frac{1261}{128}$; в) $-\frac{8191}{1024}$;
 г) $\frac{1640}{243}$. 24.28. а) 93; б) -11; в) $-\frac{93}{16}$; г) $121\sqrt{2}$. 24.29. а) 620; б) $7 - 3\sqrt{2}$;
 в) $\frac{121}{9}$; г) $13 + 4\sqrt{3}$. 24.30. а) 2, 8; б) $-\frac{1}{2}$, -6; в) $-\sqrt{3}$, $-7\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $5\sqrt{3}$.
 24.31. а) 0, 5; б) ± 3 . 24.32. а) 1, 5; б) 1. 24.33. а) 1, 2, 3; б) 0, 3, -0, 2; в) 2, 5,
 0, 5; г) $-\frac{4}{7}$, 2. 24.34. а) 6; б) 7; в) 6; г) 6. 24.35. а) $n \leq 6$; б) $n \geq 7$; в) $n \geq 11$;
 г) $n \geq 10$. 24.36. а) 4; б) 7; в) 6; г) 5. 24.37. а) $q = \sqrt{3}$; б) $q = 0, 2$.
 24.38. а) $q = -4$; $S_5 = 1025$; б) $q = -2\sqrt{2}$, $S_7 = 585 - 146\sqrt{2}$. 24.39. 2, 2048.
 24.40. 72, $\frac{1}{2}$. 24.41. $\frac{7}{128}$ или $\frac{9}{128}$. 24.42. 3, 9, 27 или -3, 9, -27. 24.43. $\frac{1}{32}$.
 24.44. 2, 4, 8, 16, 32, 64. 24.45. 2, 6 и 18 м. 24.46. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. 24.48. а) 567;
 б) 46 655; в) 364; г) $\frac{189}{8}$. 24.48. а) 511; б) $\frac{683}{1024}$; в) $\frac{364}{729}$; г) -14 762.
 24.49. а) $\frac{x^{101} - 1}{x - 1}$; б) $\frac{x(x^{36} - 1)}{x^2 - 1}$; в) $\frac{x^2(1 - x^{20})}{1 + x^2}$; г) $\frac{1 - x^{40}}{x^{40}(1 - x)}$. 24.50. а) 3,
 384; б) 81, 16. 24.51. $q = -0, 5$; $b_1 = 32$; $S_{10} = 21\frac{5}{16}$. 24.52. 2046. 24.53. -250.
 24.54. 3 и 4 или 48 и 0, 25. 24.55. 12. 24.56. p^2 . 24.57. а) $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$; б) $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$.
 24.58. $(0, 2)^{50}$. 24.59. $4 \leq b_6 \leq 6$. 24.60. $3 \leq q \leq 5$. 24.61. $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$
 или $a = -4, 5$, $b = -18$. 24.62. а) $\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$; б) $\frac{70(10^n - 1) - 63n}{81}$.
 24.63. $2^{72} - 1$. 24.64. а) 100 000 руб; б) 124 416 руб. 24.65. $1, 07^5 a$;
 через 11 лет. 24.66. 10. 24.67. На 20 %. 24.68. а) $\frac{R}{3^{10}}$; б) $\frac{R}{3^n}$.
 24.69. а) $\left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}\right)^{10} \cdot R$; б) $\left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}\right)^n \cdot R$. 24.70. 21 и 49 или -3 и 1.

- 24.71. 27, 8, -11 или 3, 8, 13. 24.72. $\frac{7}{81}$. 24.73. 1, 5, 25 или $\frac{31}{3}$, $\frac{31}{3}$, $\frac{31}{3}$.
 24.74. 2, 6, 18. 24.75. а) $x = y = z \neq 0$; б) 1 или -2. 24.76. 155, 2046.
 24.77. 5, 25, 45 и 5, 15, 45 или 5, 5, 5 и 5, -5, 5. 24.78. 1, 2, 3 и 1, 3, 9.
 24.79. 1, 3, 9 или $\frac{1}{9}$, $-\frac{5}{8}$, $\frac{25}{9}$. 24.80. 258 или 852. 24.81. 931. 24.82. 2, 4, 8, 12 или 12,5, 7,5, 4,5, 1,5. 24.83. -2.

Глава 5

§ 26

- 26.1. а) 90; б) 81; в) 3; г) 10. 26.2. а) 764; б) 476; в) 2; г) 6. 26.3. а) 99; б) 18; в) 12; г) 40, 48, 80, 88. 26.4. б) 12; в) хлеб ржаной (6 случаев) менее вероятен, чем бутерброд с сыром (9 случаев); г) из 18 ветвей следует убрать 6. 26.5. б) 4; в) 1. 26.6. а) 8; б) 4; в) 6; г) 4. 26.7. а) 24; б) 6; в) 18; г) 12. 26.8. а) 210; б) 30; в) 180; г) 24. 26.9. а) 25; б) 10; в) 15; г) 16. 26.10. а) 1 и 27 000; б) 64; в) 48; г) 36. 26.11. а) 5040; б) 40 320; в) 600; г) 24. 26.12. а) 30 240; б) 462; в) 2550; г) 120 120. 26.13. а) Да; б) да; в) да; г) нет. 26.14. а) n ; б) $2k(2k + 1)$; в) $\frac{n(n-1)}{2}$; г) $(4m - 1)(4m - 2)$. 26.15. а) 7; б) 4; в) 87; г) 3. 26.16. а) 120; б) 24; в) 60; г) 60. 26.17. а) 200; б) 200, 202, 208, 209, 220, 222, 228, 229; в) 909, 929, 989, 999; г) 200, 280, 800, 880, 920. 26.18. б) 1; в) 1; г) 4. 26.20. а) 120; б) 48; в) 80; г) 96. 26.21. а) 100 000; б) 32 768; в) 32; г) 8192. 26.22. а) 12 и 2250; б) 24; в) 6; г) 8. 26.23. а) 6; б) 24; в) 120; г) 60. 26.24. а) 720; б) 120; в) 600; г) 240. 26.25. а) $\frac{n-3}{n+4}$; б) 0; в) m^2 ; г) $3(3k + 2)$.

§ 27

- 27.3. а) 60; б) от 4 до 25 кг с шагом 0,5; в) 5 и 12; г) 2, 14 и 3; д) 5,5.
 27.4. а) От 140 до 210 см; б) 157 и 190; в) 4 и 4; г) 161. 27.5. а) 200; б) 0,19; в) 6,5%; г)

	Ценовая категория, р.					
	0—20	20—50	50—100	100—150	150—200	> 200
Кол-во ценников	31	52	47	38	19	13
Частота	0,155	0,26	0,235	0,19	0,095	0,065
Частота, %	15,5	26	23,5	19	9,5	6

- 27.6. а) 7; б) 0,04; в) 22%; г) 38%.

27.7.

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность	9	5	2	4	20
Частота	0,45	0,25	0,1	0,2	1
Частота, %	45	25	10	20	100

27.8. а) 7; б) 50; в) 5; г) 5. 27.9. а) 4; б) 2; в) 1,8 ч; г) 2. 27.10. а) 2, 4, 6, 8; б) 4, 8, 2, 8, 6, 4, 8; в) 6, 2, 8, 2, 4, 6, 2; г) 4. 27.11. а) От 12 до 20 баллов; б) 15; в) 4; г) 12; 12; 12; 13; 13; 14; 14; 14; 14; 16; 16; 16; 16; 17; 17; 17; 17; 18; 18; 19; 19; 20; 20; 20; 20; 20.

27.12. а) 4; б) 4,5; в) 4,8; г) 0,41.

27.13.

	Варианта						Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	
Кратность	291	122	113	202	79	193	1000
Частота	0,291	0,122	0,113	0,202	0,079	0,193	1
Частота, %	29,1	12,2	11,3	20,2	7,9	19,3	100

27.14. а) 200; б) 4; 0,27. 27.15. а) Мода равна 431; б) 91%; г)

Вес, г	427	428	429	430	431	432	433	434	435
Частота, %	2	4	11	18	30,5	21,5	10	2	1

27.16. а) 3,875; б) 3,75; в) 4; г) 3. 27.17. а) 22; б) 18 и 4; в) нет; г) $\frac{10x-34}{3}$. 27.18. а) 36; б) 7 и 11; в) нет; г) $\frac{45}{8}$. 27.19. а) а) 3; б) 6; в) 30; г) 299. 27.20. а) а) 0,02, да; б) 0,14, нет.

§ 28

28.1. а) $\frac{1}{6}$, б), в) $\frac{1}{3}$, г) 0. 28.2. а) 0,5; б) 0,125; в) 0,375; г) 0,5. 28.3. а) 0,1; б) 0,1; в) 0,2; г) $\frac{44}{45}$. 28.4. а) 0,5; б) 0,5; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{5}{6}$. 28.5. а) $\frac{1}{90}$; б) $\frac{2}{45}$; в) 0,4; г) $\frac{4}{9}$. 28.6. а) 0; б) 0,2; в) 0,4; г) 0,6. 28.7. а) 0,25; б) 0,375; в), г) 0,5. 28.8. а) 0,23; б) 0,63; в) 0,6; г) 0,4. 28.9. а) $\frac{1}{6}$; б) 0,5; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{3}$. 28.10. а) 0,75; б) 0,75; в) $\frac{13}{14}$; г) $\frac{15}{28}$. 28.11. а) 0,8; б) 0,6; в) 0,7; г) $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

28.12. а) $\frac{1}{6}$; б) 0,125; в) 0,875; г) $\frac{25}{48}$. 28.13. а) 0,05; б) 0,6; в) 0,2; г) 0,25.

28.14. а) 0,125; б) 0,125; в) 0,5; г) 0,375. 28.15. а) 0,4; б) 0,6; в) 0,4; г) 0.

28.16. а) 0,05; б) 1; в) 0,15; г) 0,55. 28.17. а) 0; б) 0,6; в) 0,2; г) 1.

28.18. а) $\frac{1}{6}$; б) 0,25; в) 0,5; г) 0,5. 28.19. а) $\frac{11}{36}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{11}{12}$; г) $\frac{11}{12}$.

28.20. а) 0,9; б) 0,91; в) 0,95; г) 0,94. 28.21. а) 0,2; б) 0,7; в) 0,1; г) 0,2.

28.22. а) 0,5; б) 0,36; в) 0,14; г) $\frac{\pi}{6}$.

§ 29

29.1. а) 4; б) $\frac{4}{17}$;

в)

n	17	18	19	20	27	28
Кол-во чисел, кратных 4, от 1 до n	4	4	4	5	6	7
Частота	0,235	0,222	0,21	0,25	0,222	0,25

n	29	30	40	60	80	100
Кол-во чисел, кратных 4, от 1 до n	7	7	10	15	20	25
Частота	0,24	0,23	0,25	0,25	0,25	0,25

г) 0,25. 29.2. а) 16; б) 30; в) 45; г) 1. 29.3. а) 6; б) 7; в) 8; г) 330.

29.4. а) 137; б) 2145; в) от 880 до 1076; г) около 40 000: от 36 520 до 44 630. 29.5. а) Около 32 000; б) 5440; в) 13 540; г) около 67,5 тыс. (67 630). 29.6. а) 2; б) 0,118;

в)

n	17	27	57	77	100
Кол-во чисел, оканчивающихся на 4	2	3	6	8	10
Частота	0,118	0,111	0,105	0,104	0,1

n	125	150	173	200	1000
Кол-во чисел, оканчивающихся на 4	13	15	17	20	100
Частота	0,104	0,1	0,098	0,1	0,1

- г) 0,1. **29.7.** а) 1; б) 0,06; г) нет; от $\frac{1}{36}$ до $\frac{2}{9}$. **29.8.** а) 189 тыс.; б) 448 тыс.; в) около 75 тыс. (74 966); г) около 121 тыс. (120 826). **29.9.** г) Примерно по 16,7 % $\left(16, (6) = \frac{100}{6}\right)$. **29.10.** г) Примерно к 16,7% $\left(16, (6) = 100 \% \cdot \frac{6}{36}\right)$.

Итоговое повторение

- 30.** а) 77,2; б) 1,85. **31.** а) -14; б) -4. **32.** а) 194; б) 302. **33.** а) 5; б) 4. **34.** а) 1; б) 1. **35.** а) 2; б) -1. **61.** а) -3; б) 0,25. **62.** а) 45; б) 0,5. **63.** а) -15; б) 8. **64.** а) -0,1; б) -0,05. **65.** а) -1; б) 3. **66.** а) -0,5; б) -3,25. **68.** 9. **69.** -0,2. **152.** а) 1,75; б) 2,6. **153.** а) -13; б) -6,3. **154.** а) -44; б) -1,8. **155.** а) -1; б) 1,25. **157.** а) -0,5; б) 23,8. **163.** а) -12; б) -20. **164.** а) -6; б) -4. **165.** а) 5; б) 2. **216.** а) 1; б) 4. **217.** а) -0,4; б) -1,5. **226.** а) 2,5. **227.** а) -3,5125. **228.** а) -53. **231.** а) $\left(3; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$; б) (-2; -1), (1; 2), $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)$. **232.** а) (4; 1), (0,25; -0,25); б) (10; -2), (-1,2; 1,2). **233.** а) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; б) (0,25; 0). **234.** 4. **235.** 1. **236.** 4. **237.** -3. **297.** б) 5. **298.** а) $n < -4$, $n > 4$; б) $-7 < n < 1$. **299.** 1410 спортивных костюмов. **300.** 3192 липы. **301.** 336 км. **302.** 75,6 км. **303.** 168 см. **304.** 84 см². **305.** 2,4 ч. **306.** 9 ч. **307.** 600 р., 155 р. **308.** 270 р., 240 р. **309.** 65 км/ч, 60 км/ч. **310.** 18 км/ч, 2 км/ч. **311.** 172 см. **312.** 50 км/ч. **313.** 8 км/ч, 9 км/ч. **314.** 3 км/ч. **315.** 15 дней. **316.** 30 мин. **317.** 18 дней. **318.** 12 ч. **319.** 30 г. **320.** 1,5 л. **321.** 500 г. **322.** 300 г. **323.** 35 643 р. **324.** 28 121,6 р. **361.** а) 3,5; б) -3. **362.** а) 65; б) 15. **363.** а) 10; б) 0,2. **364.** -3. **365.** а) 33; б) 10. **366.** а) 6; б) 6. **367.** а) Начиная с $n = 7$; б) начиная с $n = 20$. **368.** а) Начиная с $n = 6$; б) начиная с $n = 7$. **369.** а) Начиная с $n = 9$; б) начиная с $n = 15$. **370.** а) Начиная с $n = 11$; б) начиная с $n = 10$. **371.** а) 5; б) 10. **372.** 0,4. **373.** 3,6. **374.** -2. **375.** 0,1. **376.** 48. **377.** а) 0,5; б) 2. **378.** а) 714; б) 205. **379.** а) 432; б) 616. **380.** а) 660; б) 780. **381.** а) 6; б) 42. **382.** а) 56; б) $-\frac{1}{48}$. **383.** а) 6; б) 10. **390.** На 25 %. **391.** 100 км. **393.** На 60%. **394.** 3,6 л. **406.** 2,6 с. **407.** 1,2 с. **424.** а) 0,35; б) 0,32. **425.** а) 0,111; б) 0,083. **429.** а) 0,17; б) 0,14.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
ГЛАВА 1. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ.	4
§ 1. Рациональные неравенства	4
§ 2. Множества и операции над ними	10
§ 3. Системы неравенств	16
§ 4. Совокупности неравенств	24
§ 5. Неравенства с модулями	27
§ 6. Иррациональные неравенства	32
§ 7. Неравенства с параметрами	36
ГЛАВА 2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ	44
§ 8. Уравнения с двумя переменными	44
§ 9. Неравенства с двумя переменными	53
§ 10. Основные понятия, связанные с системами уравнений и неравенств с двумя переменными	55
§ 11. Методы решения систем уравнений	60
§ 12. Однородные системы. Симметрические системы	68
§ 13. Иррациональные системы. Системы с модулями	70
§ 14. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций	74
ГЛАВА 3. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ	83
§ 15. Определение числовой функции. Область определения, область значений функции	83
§ 16. Способы задания функций	92
§ 17. Свойства функций	102
§ 18. Чётные и нечётные функции	113
§ 19. Функции $y = x^m$ ($m \in \mathbb{Z}$), их свойства и графики	121
§ 20. Функция $y = \sqrt[m]{x}$, её свойства и график	130
ГЛАВА 4. ПРОГРЕССИИ	135
§ 21. Числовые последовательности	135
§ 22. Свойства числовых последовательностей	142

§ 23. Арифметическая прогрессия	147
§ 24. Геометрическая прогрессия	156
§ 25. Метод математической индукции	168

ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 172

§ 26. Комбинаторные задачи	172
§ 27. Статистика: дизайн информации	177
§ 28. Простейшие вероятностные задачи	183
§ 29. Экспериментальные данные и вероятности событий	187

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ. 192

Ответы	264
------------------	-----

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Николаев Николай Петрович,
Звавич Леонид Исаакович,
Рязановский Андрей Рафаилович,
Александрова Лидия Александровна,
Семенов Павел Владимирович

АЛГЕБРА

9 класс

УЧЕБНИК

для общеобразовательных организаций
(углублённый уровень)

В двух частях

Часть 2

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*

Редакторы *С. В. Бахтина, В. В. Черноуцкий*

Оформление: *Т. С. Богданова*

Художественный редактор *Е. А. Адамов*

Технический редактор *О. Б. Резчикова*

Корректоры *В. И. Антонов, А. В. Дёмина*

Компьютерная вёрстка и графика: *А. А. Борисенко*

Формат 70×90 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».

Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,06.

Тираж 10 000 экз. (1-й завод — 1—5000 экз.). Заказ № 3301.

Издательство «Мнемозина».

111033, Москва, ул. Волочаевская, 40г.

Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.

E-mail: ioc@mnemozina.ru

www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.

Тел.: 8 (495) 783 8284.

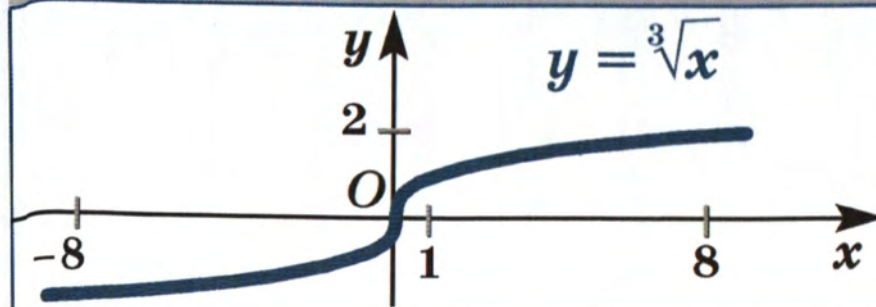
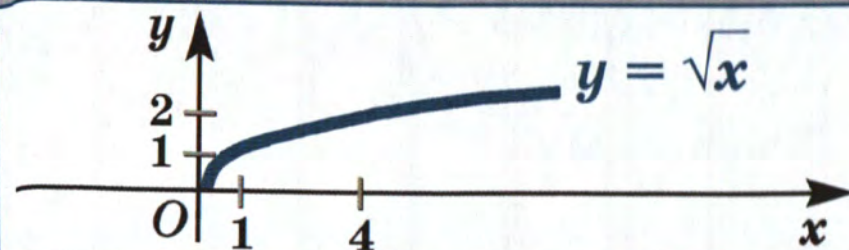
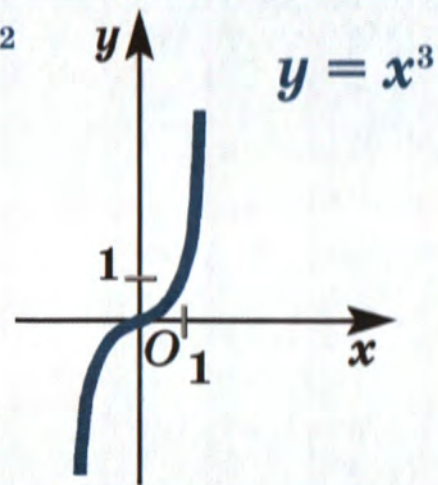
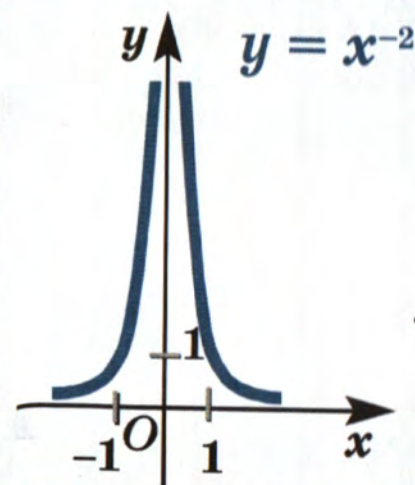
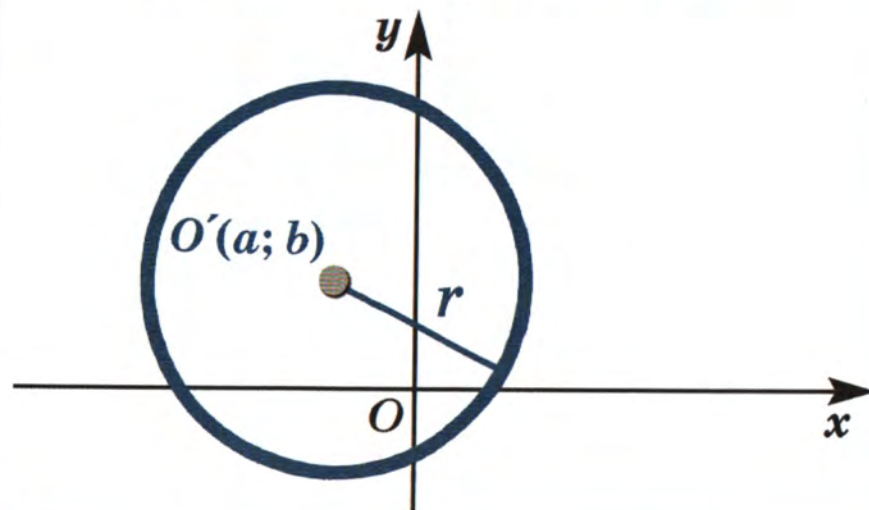
www.shop.mnemozina.ru

Отпечатано в филиале «Тверской полиграфический комбинат
детской литературы» АО «Издательство «Высшая школа»
Российская Федерация, 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} < 0$$



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$





2019475037

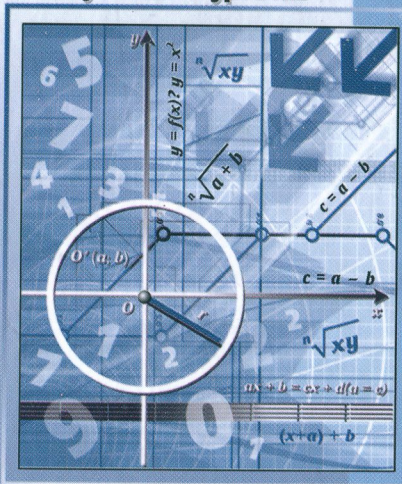


Алгебра

9

часть
2

Углублённый уровень



А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев
П. В. Семенов

Алгебра

9

часть
2



ISBN 978-5-346-04597-7



9 785346 045977

