

СПЕЦИАЛЬНЫЙ
ФИЗИЧЕСКИЙ
ПРАКТИКУМ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ **ФИЗИЧЕСКИЙ** **ПРАКТИКУМ**

Часть 3

ПОД РЕДАКЦИЕЙ А. А. ХАРЛАМОВА

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физических специальностей высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1977

Рецензенты:
кафедра взаимодействия излучения с веществом МФТИ

Специальный физический практикум, ч. 3, изд. 3.
М., Изд-во Моск. ун-та, 1977.
382 с. 212 ил. Библиогр. 118 назв.

Третья часть «Специального физического практикума» представляет собой руководство к практическим занятиям по генерации и усилению СВЧ-колебаний, распространению СВЧ-волн в нелинейных средах и основным методам измерения в СВЧ-диапазоне, по квантовой радиофизике, голографии и методам цифрового и аналогового счета. Этот самый современный раздел отсутствовал в предыдущих изданиях «практикума». В книге даны описания практических работ с газовым лазером, работы по модуляции света и нелинейной оптике, по изучению физических принципов голографии и методов исследования, основанных на голографической интерферометрии, цикл физических задач, предназначенных для освоения методик численного эксперимента на цифровых и аналоговых ЭВМ.

Учебное пособие рассчитано на студентов старших курсов университетов, педвузов и вузов.

С $\frac{60406-096}{077(02)-77}$ 70-77

© Издательство Московского университета, 1977 г.

Содержание

Предисловие	5
I. Физика сверхвысоких частот	7
1. Отражательный клистрон	7
2. Лампа с обратной волной	23
3. Лампа с бегущей волной	41
4. Измерения в волноводном тракте	62
5. Невзаимные свойства волноводных ферритовых устройств	77
II. Квантовая радиофизика	96
1. Свойства излучения неон-гелиевого лазера	96
2. Линейный электрооптический эффект	116
3. Генерация второй оптической гармоники	128
III. Голография	141
Физические принципы голографии	141
Описания задач по голографии	190
1. Голографирование трехмерных непрозрачных объектов и исследование их изображений	192
2. Получение голограмм по методу встречных световых пучков и исследование восстановленных изображений	194
3. Получение и исследование голограмм плоской волны	198
4. Исследование малых деформаций методом голографической интерферометрии	206
5. Изучение диффузии в жидкости методом голографической интерферометрии	210
IV. Электронное моделирование	218
Введение	218
1. Изучение движения заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях	222
2. Колебания в нелинейной системе с одной степенью свободы	232
3. Автоколебательная система второго порядка	241
4. Изучение автоколебательной системы с инерционной нелинейностью	247
5. Динамические модели роста микроорганизмов	261
6. Моделирование трехчастотных волновых взаимодействий в средах с квадратичной нелинейностью	275
7. Исследование формы импульса нестационарной параметрической генерации света	284
8. Оптимизация динамической системы управления	296
V. Численный эксперимент на ЭЦВМ	309
Введение	309
1. Расчет КПД генерации второй гармоники света пучками, ограниченными по времени и пространству	311

2. Распространение световых пучков в фокусирующих и дефокусирующих средах	315
3. Расчет генератора гармонических колебаний на туннельном диоде	324
4. Расчет амплитудных характеристик при принудительной синхронизации одноконтурного генератора	332
5. Восстановление входного воздействия на линейный прибор по выходному сигналу методом быстрого преобразования Фурье	336
6. Расчет характеристик распространения ультразвуковых волн в кристаллах	349
7. Расчет электронных траекторий в иммерсионной электростатической линзе	361
8. Вычисление пространственного распределения параметров плазмы при исследовании ее оптическими методами	364
9. Вычисление распределения амплитуды электромагнитного поля при взаимодействии встречных волн в активном плоском слое	374

ПРЕДИСЛОВИЕ

Третья часть «Специального физического практикума» содержит описания практических работ по физике СВЧ-колебаний, квантовой радиофизике, голографии и методике цифрового и аналогового счета. Последние два раздела преследуют не только чисто вычислительные цели, но связаны с определенными физическими проблемами и носят характер численного эксперимента. Работы выполняются студентами старших курсов радиофизического отделения физического факультета МГУ.

Описания этой части составлены преподавателями физического факультета. I. Физика сверхвысоких частот: 1 — В. Ф. Марченко; 2 — В. А. Ванке; 3 — В. И. Канавец; 4 — М. Н. Девятков; 5 — А. И. Пильщиков. II. Квантовая радиофизика: 1 — Д. П. Криндач; 2 — В. С. Соломатин; 3 — А. И. Ковригин, В. В. Фадеев. III. Голография: 1, 2, 3, 4, 5 — И. А. Яковлев, Т. Г. Черневич, К. А. Баранский, Т. С. Величкина, М. В. Педанов, О. А. Шустин. IV. Электронное моделирование: Введение — В. П. Кандидов, Ю. В. Пономарев; 1 — В. П. Кандидов; 2 — Ю. В. Пономарев; 3 — Ю. В. Пономарев; 4 — Л. Н. Капцов, М. С. Полякова; 5 — Н. В. Степанова; 6 — Г. А. Ляхов, С. В. Кириянов, М. С. Полякова; 7 — Ю. Е. Дьяков, Н. А. Искандеров, Н. В. Степанова; 8 — А. В. Приезжев. V. Численный эксперимент на ЭЦВМ: Введение — Б. Б. Буховцев; 1 — А. И. Ковригин; 2 — А. П. Сухоруков; 3 — К. К. Лихарев; 4 — В. Н. Парыгин; 5 — В. А. Буров; 6 — В. Е. Лямов, 7 — Н. Н. Седов; 8 — А. Ф. Александров, А. Т. Савичев; 9 — В. И. Канавец.

I. ФИЗИКА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

1. ОТРАЖАТЕЛЬНЫЙ КЛИСТРОН

Измеряются области генерации, пусковые токи, диапазон электронной и механической перестройки частоты 10-см отражательного клистрона.

§ 1. Введение

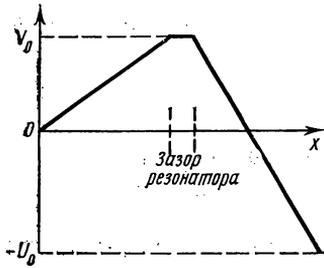
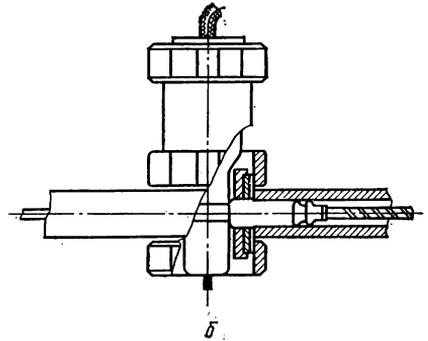
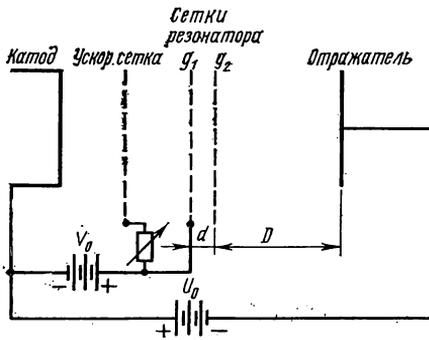
Клистрон представляет собой электронный прибор, предназначенный для генерирования, усиления и преобразования частот колебаний в диапазоне сверхвысоких частот. Клистроны перекрывают диапазон длин волн от нескольких миллиметров до метра и имеют мощность от нескольких милливатт до десятков киловатт в непрерывном режиме. Основные отличия клистрона от обычных ламп радиодиапазона заключаются в следующем.

1. Время пролета электронов между электродами соизмеримо с периодом колебаний. Это определяет механизм действия клистрона, основанный на скоростной модуляции и оптимальной фазовой группировке электронов в пространстве взаимодействия с СВЧ-полем.

2. Длина волны соизмерима с геометрическими размерами электродов. С этим связаны конструктивные особенности клистрона, в котором в качестве колебательных контуров используются объемные резонаторы, а в качестве передающих линий — волноводы или коаксиальные линии.

Эти особенности характерны и для ряда других приборов СВЧ: магнетронов, ламп с бегущей волной и их разновидностей.

Отражательный клистрон (рис. 1, а) состоит из катода, эмиттирующего электроны 1, ускоряющей сетки 2, объемного резонатора, играющего роль колебательного контура 3, и электрода-отражателя 4. Как правило, клистроны, рассчитанные на длину волны 3—5 см и короче, имеют резонатор, целиком находящийся внутри вакуумной оболочки клистрона. На больших длинах волн используется внешний резонатор. Наиболее распространен вывод энергии с помощью петли, введенной в индуктивную часть резонатора. Схема подачи напряжений, питания на электроды показана на рис. 1, а (все напряжения отсчитываются относительно катода).



а

Рис. 1. Отражательный клистрон и схема подачи напряжений на его электроды (а). Разрез клистрона 10-см диапазона, помещенного в резонатор, призматического типа переменной длины с укорачивающей емкостью (б)

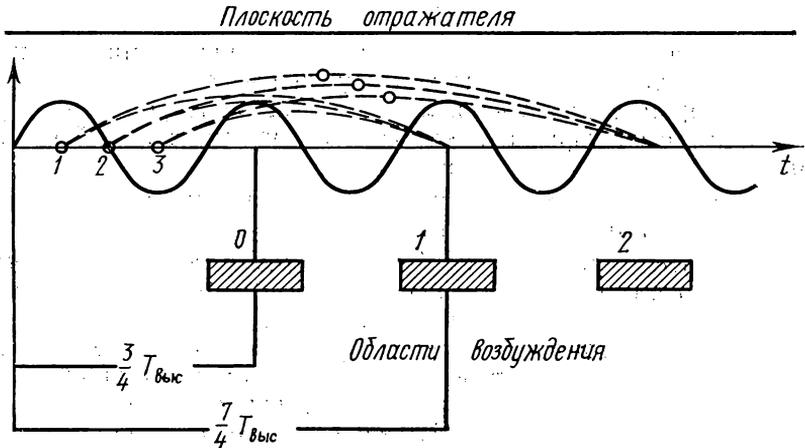


Рис. 2. Группирование электронов в пространстве между сеткой резонатора и отражательным электродом

Рассмотрим качественно механизм самовозбуждения отражательного клистрона. В узкий зазор между сетками резонатора попадает однородный поток электронов, скорость которых определяется напряжением V_0 . Пусть в зазоре имеются сверхвысокочастотные колебания напряжения $u = U \sin \omega t$. Если скорости электронов, подлетающих к зазору, можно приближенно считать одинаковыми, то после пролета через зазор их скорости будут меняться во времени в зависимости от фазы высокочастотного напряжения. Будем считать зазор достаточно узким. Электроны, влетающие в зазор в ускоряющий полупериод высокочастотного поля, будут выходить из него с увеличенными скоростями (электрон 1 на рис. 2), а электроны, пролетающие в зазор в тормозящий полупериод (электрон 3), — с уменьшенными скоростями. Электроны, пролетающие через зазор в момент, соответствующий изменению знака переменного напряжения, не будут испытывать ни торможения, ни ускорения (электрон 2). Именно вокруг этих электронов при движении пучка на выходе резонатора будут образовываться электронные сгустки. Образование сгустков возможно благодаря тому, что электроны, влетающие с разными скоростями в пространство между резонатором и отражателем, находящимся под отрицательным потенциалом, будут находиться в нем неодинаковое время. В результате электроны 1—3 могут возвратиться к сеткам резонатора в один и тот же момент времени. Таким образом, модуляция потока электронов по скорости превращается в области группирования в модуляцию потока по плотности, причем частота повторения сгустков в области зазора равна частоте переменного напряжения в зазоре.

Поскольку электроны дважды пронизывают сетки резонатора, сам резонатор выполняет одновременно две функции: модуляции электронного потока и преобразования его кинетической энергии в энергию электромагнитного поля. Такое преобразование эффективно при выполнении условий: 1) возвращающиеся в зазор электроны сформируются в сгустки и 2) фаза высокочастотного напряжения на сетках в моменты времени возвращения будет тормозящей. Подбором напряжений V_0 и U_0 время пролета электронов в области группирования можно сделать таким, чтобы электронные сгустки попадали или в ближайшую тормозящую фазу (см. рис. 2), или в любую другую, отстоящую от ближайшей на целое число периодов высокочастотного поля. Благодаря этому зависимость мощности генерации от напряжения на отражателе носит прерывистый характер. Имеются нулевая зона (область генерации), первая, вторая и т. д.

КПД отражательных клистронов обычно не превышает нескольких процентов, что является следствием совмещения в одном зазоре сразу двух процессов (модуляции и отбора энергии электронов потока), условия для которых не могут быть одновременно оптимальными. Эффективность группирования электронов значительно выше в многорезонаторных прямопролетных клистронах, в

которых модуляция и отбор энергии осуществляются различными резонаторами. КПД таких приборов достигает 70%!

§ 2. Теория

При теоретическом анализе процессов в клистронном генераторе обычно делают ряд упрощающих предположений. Допустим, что зазор резонатора, пронизываемый электронами, можно рассматривать как плоский конденсатор. Пренебрежем влиянием объемного заряда на распределение потенциалов, вторичными электронами и электронами, оседающими на сетках или стенках резонатора. Примем, что электроны только дважды могут пройти через сетки резонатора: один раз на пути к отражателю и другой раз — на обратном пути.

1. Движение электронов в резонаторе и в электрическом поле отражателя. Движение электрона между сетками описывается уравнением

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = \frac{eU}{d} \sin \omega t \quad (1)$$

при начальных условиях

$$t = t_0, \quad x(t_0) = 0, \quad v(t_0) = v_0, \quad (2)$$

где $t=t_0$ — время влета электронов в резонатор; d — расстояние между сетками g_1 и g_2 ; e и m — величины заряда и массы электрона.

Интегрируя уравнение (1) при условиях (2), найдем скорость электрона в момент его вылета из резонатора $t=t_1$:

$$\begin{aligned} v(t_1) &= v_0 \left[1 + \frac{U}{2\varphi_0 V_0} (\cos \omega t_0 - \cos \omega t_1) \right] \approx \\ &\approx v_0 \left[1 + \frac{1}{2} \xi M \sin \left(\omega t_1 - \frac{\varphi_0}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

(здесь использована малость отношения $\xi = U/V_0 \ll 1$). $\varphi_0 = \omega d/v_0 \approx \omega(t_1 - t_0)$ — «статический» (т. е. при $U=0$) угол пролета электронов в зазоре, в рабочих условиях обычно $\varphi_0 = (0,6-0,8)\pi$. Величина $M = \frac{\sin \varphi_0/2}{\varphi_0/2}$, которую называют иногда просто коэффициентом модуляции, численно равна отношению скорости, приобретаемой электронами в реальном зазоре при напряжении U , к скорости, которую они приобрели бы в бесконечно узком зазоре при том же напряжении.

Движение электронов в пространстве отражателя происходит в постоянном поле $E_0 = (V_0 - U_0)/D$, где D — расстояние между сеткой g_2 и плоскостью отражателя. Если электрон возвращается в резонатор в момент времени $t=t_2$, обладая скоростью $v(t_2)$, то

время нахождения электрона в поле отражателя $T = t_2 - t_1$ можно найти из условия

$$v(t_2) = -v(t_1) = v(t_1) - \frac{eE_0}{m} T,$$

где

$$T = \frac{2v(t_1)}{\frac{e}{m} E_0}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что электрон будет двигаться в поле отражателя тем дольше, чем больше была его начальная скорость $v(t_1)$.

Величина $\Theta = \omega T$ называется пролетным углом в поле отражателя. Используя (3), (4) и вводя средний пролетный угол $\Theta_0 = \frac{2v_0 \omega m}{eE_0}$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \Theta &= \omega(t_2 - t_1) = \Theta_0 \left[1 + \frac{1}{2} \xi M \sin(\omega t_1 - \varphi_0/2) \right] = \\ &= \Theta_0 + X \sin(\omega t_1 - \varphi_0/2), \\ X &= \frac{1}{2} \xi M \Theta_0, \end{aligned} \quad (5)$$

т. е. между временем вылета t_1 и временем влета t_2 электрона в резонатор существует связь

$$\omega t_2 = \omega t_1 + \Theta_0 + X \sin(\omega t_1 - \varphi_0/2). \quad (6)$$

2. Условия фазовой фокусировки. Зависимость ωt_2 от ωt_1 может быть многозначной, что физически означает нагон одних электронов другими, т. е. группирование электронов. Для удобства будем рассматривать пролет электронов между плоскостью середины зазора резонатора и плоскостью отражателя. Запишем равенство (6) в виде

$$Y = \omega t_2 - \Theta'_0 = \Phi + X \sin \Phi, \quad (7)$$

где

$$\Theta'_0 = \Theta_0 + \varphi_0/2, \quad \Phi = \omega t_1 - \varphi_0/2.$$

График $Y = Y(\Phi)$ при разных значениях параметра группировки X приведен на рис. 3. При $X = 0$ Y зависит от X линейно, что свидетельствует об однородности прямого и обратного потоков. При возрастании X наблюдается пульсация зависимости $Y(\Phi)$ около прямой $Y = \Phi$, а распределение фаз возврата ωt_2 отличается от распределения фаз прямого пролета через зазор. Начиная с $X = 1$ эта зависимость становится неоднозначной: электроны, прошедшие зазор в прямом направлении в разные моменты времени, возвра-

щаются в него одновременно. Такое группирование электронов называют фазовой фокусировкой.

Учтем теперь, что промодулированный по плотности поток электронов в центре зазора представляет собой периодическую по фазе Y последовательность импульсов, т. е. содержит целый спектр частотных гармоник. Можно записать разложение тока в ряд Фурье:

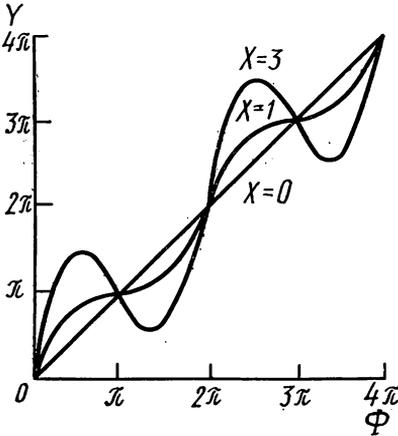


Рис. 3. Зависимость фаз возврата электронов в резонатор от фаз вылета их из резонатора

$$I(Y) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nY,$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} I(Y) \cos(nY) dY,$$

$$dY = \omega dt_2 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где $I(Y)$ — ток при фазе возвращения Y . Обозначив через I_0 невозмущенный ток при фазе вылета Φ , воспользуемся равенством $I(Y) dY = I_0 d\Phi$, следующим из закона сохранения заряда. Тогда с учетом (7) получим

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} I_0 \cos[n(\Phi + X \sin \Phi)] d\Phi = 2 \cdot (-1)^n I_0 J_n(nX),$$

где $J_n(nX)$ — функция Бесселя первого рода n -го порядка.

Поскольку для модуляции и отбора энергии в отражательном клистроне используется один и тот же достаточно добротный резонатор, высшими гармониками (кроме первой) можно пренебречь. Таким образом, переменная составляющая конвекционного тока пучка равна

$$I_1 \approx 2I_0 J_1(X) \cos[\omega t_2 - (\Theta_0 + \varphi_0)]. \quad (9)$$

Оптимальным условиям фазовой фокусировки соответствует максимум амплитуды первой гармоники, который достигается при значении параметра группировки

$$X = \frac{1}{2} \xi M \Theta_0 = \frac{4U_0}{V_0 - U_0} \cdot \frac{D}{d} \sin \varphi_0 / 2 = 1,84.$$

3. Условия самовозбуждения. Электронные сгустки являются вынуждающей периодической силой, поддерживающей незатухающие колебания в резонаторе. Вычислим среднюю мощность P_e ,

отдаваемую сгруппированным электронным пучком полю резонатора. Мгновенная мощность взаимодействия высокочастотного поля с заряженными частицами во всем объеме взаимодействия (в данном случае — в плоском зазоре) равна

$$P_d(t) = \int_0^d IE dx.$$

Учитывая, что ток меняется при движении частиц в зазоре, т. е. $I = I(x, t)$, а поле E в зазоре однородно, получим

$$P_d(t) = \int_0^d I(x, t) \frac{u(t)}{d} dx = \frac{u(t)}{d} \int_0^d I(x, t) dx = u(t) I_H(t). \quad (10)$$

Величина $I_H(t)$ называется наведенным током и определяется изменением всего заряда, движущегося в зазоре, т. е. усредненным по зазору конвекционным током $I(x, t)$. Здесь учтено то обстоятельство, что при конечном времени пролета между сетками резонатора часть тока во внешней цепи, которая обусловлена движением зарядов внутри зазора, не равна конвекционному току пучка.

В простейшем случае, когда изменением скорости электронов внутри зазора можно пренебречь, несложно получить простое выражение наведенного тока для любой гармоники конвекционного тока. Считаем, что время t и координата x связаны линейной зависимостью $t = t_2 + x/v_0$, t_2 — момент входа электронов в резонатор в точке $x = 0$ (отсчет ведется здесь от сетки g_2). Тогда для первой гармоники тока

$$I(x, t) = A_1 \cos(\omega t - \psi_0) = A_1 \cos\left(\omega t_2 - \omega \frac{x}{v_0} - \psi_0\right),$$

$$I_H(t) = \frac{1}{d} \int_0^d A_1 \cos\left(\omega t_2 - \omega \frac{x}{v_0} - \psi_0\right) dx \simeq 2MI_0 J_1(X) \cos(\omega t_2 - \psi_0),$$

$$\psi_0 = \Theta_0 + \Phi_0. \quad (11)$$

Множитель M характеризует в данном случае эффективность взаимодействия электронного потока с электрическим полем зазора конечной толщины, величина его была определена ранее. Поэтому искомое выражение для мощности взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} P_e &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_d(t) d(\omega t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2I_0 U J_1(X) \cos(\omega t - \psi_0) \sin \omega t d(\omega t) = \\ &= -I_0 M U J_1(X) \sin(\theta_0 + \varphi_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Максимуму P_e отвечает условие

$$\sin(\Theta_0 + \varphi_0) = -1.$$

Отсюда находим оптимальные условия генерации

$$\Theta_{0n} + \varphi_0 = 2\pi \left(n + \frac{3}{4} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Пренебрегая фазой пролета электрона в зазоре φ_0 , выражение (13) легко привести к виду, удобному для расчетов:

$$2022 \frac{\sqrt{V_0}}{(V_0 - U_0)} \frac{D}{\lambda} = n + \frac{3}{4}, \quad (14)$$

где напряжение выражено в вольтах. Поддержание колебаний в резонаторе возможно и в том случае, когда момент времени влета сгустка в зазор несколько отличается от момента времени, соответствующего максимуму тормозящего поля. Максимальное отклонение угла пролета от оптимального $\delta = \Theta_0 - \Theta_{0n}$ определяется в конечном счете потерями в резонаторе и нагрузке и, очевидно, не превышает $|\delta| \leq \pi/2$. Величина среднего пролетного угла Θ_0 электронов при заданной геометрии клистрона определяется только их начальной скоростью и потенциалами резонатора и отражателя. Следовательно, выполнить условие (14), соответствующее максимальной мощности генерируемых колебаний, можно, изменяя оба потенциала. Практически настройку клистрона производят, изменяя потенциал отражателя. Область значений напряжений отражателя U_0 , при которых клистрон генерирует, называют областью возбуждения, или зоной генерации. Число n называют номером зоны.

В реальных лампах напряжение на отражателе U_0 не превышает по абсолютной величине ускоряющее напряжение; наиболее эффективной работе клистрона соответствуют значения $0,2 V_0 \leq |U_0| \leq V_0$. При меньших значениях U_0 возможно возникновение тока в цепи отражателя. При больших значениях $|U_0| \geq U_0$ группирование электронов происходит в непосредственной близости у выходной сетки, где поле имеет значительную неоднородность. Этими соображениями и определяется рабочая область значений U_0 .

При отрицательном напряжении на отражателе имеет место мягкий режим самовозбуждения клистрона [1]. При $U_0 > 0$ возможен жесткий режим, при котором колебания начинаются скачком с некоторой конечной амплитудой. Жесткий режим нежелателен и обычно в практических схемах не используется.

4. Рабочие характеристики клистронного генератора. Приведенная выше теория движения электронов в отражательном клистроне выясняет физику явления самовозбуждения высокочастотных колебаний, однако она недостаточна для получения выражений, характеризующих выходную мощность и частоту генерируемых колеба-

ний. Один из путей полного расчета отражательного клистрона, как и всякого автогенератора, — это использование понятий комплексной электронной проводимости [1, 2].

Вблизи собственной резонансной частоты резонатор клистрона можно представить эквивалентным ему колебательным контуром с сосредоточенными параметрами L , C и G_0 . Величина емкости C

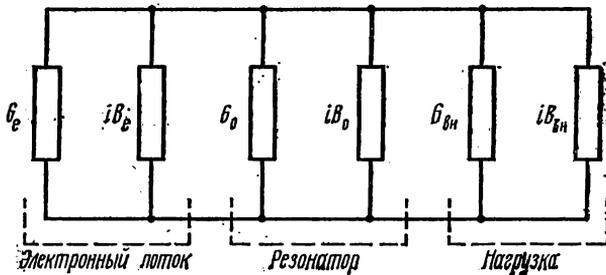


Рис. 4. Эквивалентная схема отражательного клистрона в сечении зазора резонатора

определяется в основном емкостью зазора резонатора, где сосредоточена большая часть энергии электрического поля, а индуктивность L — остальной частью резонатора, в которой сосредоточена почти вся энергия магнитного поля (такое представление справедливо для низшего типа колебаний). Проводимость G_0 — эквивалент активных потерь в резонаторе. В практических схемах клистрон через вывод энергии связан с внешней нагрузкой, которая потребляет его высокочастотную мощность. Влияние внешней нагрузки можно учесть, введя эквивалентную проводимость нагруженного резонатора (рис. 4)

$$Y_n = Y_0 + Y_{вн},$$

где Y_0 — комплексная проводимость одиночного резонатора; $Y_{вн}$ — комплексная проводимость, вносимая нагрузкой. Электронная проводимость определяется соотношением $Y_e = I_n(t)/u(t)$. Переходя к комплексной форме (14)

$$u(t) = \text{Im}[Ue^{i\omega t}],$$

$$I_n(t) = \text{Im}[(2I_0MJ_1(X) \cos \psi_0 + i2MI_0 J_1(X) \sin \psi_0) e^{i\omega t}]$$

и используя выражение для U из формулы (5), получим

$$Y_e = G_e + iB_e = \frac{I_0 M^2 J_1(X) \Theta_0}{V_0 X} \sin \Theta_0 - i \frac{I_0 M^2 J_1(X) \Theta_0}{V_0 X} \cos \Theta_0 \quad (15)$$

(далее везде пренебрегаем фазой пролета электрона в зазоре ψ_0).

В стационарном режиме генерации выполняется закон сохранения энергии (баланс комплексных мощностей):

$$P_e = P_n. \quad (16)$$

Это условие с учетом зависимостей

$$P_e = \frac{1}{2} Y_e U^2, \quad P_n = \frac{1}{2} Y_n U^2 \quad \text{и} \quad Y_n = G_n + iB_n$$

можно переписать в виде

$$G_e + G_n = 0 \quad (\text{баланс амплитуд}), \quad (17a)$$

$$B_e + B_n = 0 \quad (\text{баланс фаз}). \quad (17б)$$

Приведем конечные результаты полного анализа соотношений (17), содержащиеся в [1, 3].

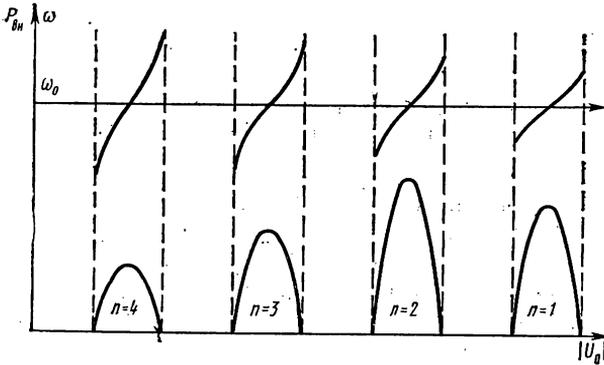


Рис. 5. Области генерации клистрона, работающего на внешнюю нагрузку, и кривые изменения частоты внутри каждой области генерации

Высокочастотная мощность, отдаваемая клистроном во внешнюю нагрузку, равна $P_{вн} = P_e - P_0$, где P_0 — средняя мощность, теряемая в собственном резонаторе клистрона. Используя (12) и выражение $U^2 = 4V_0 X^2 / M^2 \Theta_0$, получим

$$P_{вн} = \frac{2I_0 V_0}{\Theta_0} \left[X J_1(X) - \frac{Y_0 V_0 X^2}{I_0 M^2 \Theta_0} \right] = \frac{2I_0 V_0}{\Theta_0} F(X). \quad (18)$$

Если параметры генератора фиксированы, а меняется лишь величина внешней нагрузки $Y_{вн}$, то будет меняться амплитуда напряжения U и, следовательно, параметр X . Максимум функции $F(X)$ достигается при $X = 1,84$ (ср. (9)), при этом проводимости резонатора клистрона и внешней нагрузки равны $Y_0 = Y_{вн}$. Таким образом, при заданном режиме работы клистрона и фиксированных параметрах его резонатора всегда можно подобрать такую величину внешней активной нагрузки, при которой мощность, поступающая в нагрузку, максимальна. На практике такую настройку

осуществляют, меняя, например, величину связи резонатора клистрона с внешним трактом (нагрузкой). Максимальная мощность достигается не в крайней области генерации, а в одной из промежуточных областей.

В конкретных схемах сильная связь с нагрузкой может оказаться нежелательной, поскольку при этом ухудшается стабильность частоты генератора. Это связано с наличием реактивной составляющей нагрузки, изменение которой влечет за собой изменение частоты колебаний ω_0 . Для уменьшения влияния внешней нагрузки автогенератор СВЧ обычно «развязывают» с помощью дополнительного аттенюатора или ферритового вентиля, включенного непосредственно на выходе генератора.

Мощность колебаний, поступающая в этих условиях непосредственно в нагрузку, меньше максимальной мощности, определяемой формулами (12) и (18).

Величина пускового тока может быть качественно оценена из соотношения (17а):

$$I_{\text{пуск}} \approx \frac{V_0 G_{\text{н}}}{M^2 \pi \left(n + \frac{3}{4} \right)}. \quad (19)$$

Нарастание колебаний происходит при условии $I_0 > I_{\text{пуск}}$. Пусковой ток клистрона тем меньше, чем меньше суммарная активная проводимость резонатора и нагрузки и ускоряющее напряжение V_0 . При малых пороговых амплитудах высокочастотного напряжения при возрастании номера n плотность сгустков также возрастает, поскольку время накопления «модуляции» увеличивается. Поэтому с увеличением номера n условия самовозбуждения клистрона улучшаются.

Важное свойство отражательного клистрона — зависимость генерируемой частоты от напряжения на отражателе. При $\omega \approx \omega_0$ (ω_0 — собственная частота колебаний резонатора) имеем из соотношений (17):

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{B_e}{2Q_{\text{н}} G_e} \right) \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q_{\text{н}}} \text{ctg} \Theta_0 \right), \quad (20)$$

$Q_{\text{н}}$ — нагруженная добротность резонатора клистрона.

При максимальной мощности, генерируемой клистроном, в пределах каждой области, т. е. при $\Theta_0 = \Theta_{0\text{н}} = 2\pi(n + 3/4)$, частота колебаний равна резонансной частоте контура, поскольку $\text{ctg} \Theta_{0\text{н}} = 0$. При других значениях пролетного угла появляется отличная от нуля реактивная составляющая электронной проводимости, и условие (17б) выполняется для частот, отличных от ω_0 . При $\Theta_0 < \Theta_{0\text{н}}$ $\omega > \omega_0$, т. е. частота колебаний увеличивается, при $\Theta_0 > \Theta_{0\text{н}}$ частота колебаний уменьшается.

Можно получить приближенную формулу, связывающую изменение напряжения на отражателе $\Delta U_0 = U_0 - U_{0\text{н}}$ ($U_{0\text{н}}$ — напряже-

ние, соответствующее центру области генерации) с изменением частоты, генерируемых колебаний. Для малых отклонений $\delta = \Theta_0 - \Theta_{оп}$, используя разложение в ряд

$$\Theta_0 = \Theta_{оп} + \left. \frac{\partial \Theta_0}{\partial U_0} \right|_{U_0=U_{оп}} \cdot \Delta U_0 = \frac{\Theta_{оп}}{V_0 - U_{оп}} \Delta U_0,$$

получим

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_H} \operatorname{tg} \delta \right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_H} \operatorname{tg} \frac{2\pi \left(n + \frac{3}{4} \right) \Delta U_0}{V_0 - U_{оп}} \right). \quad (21)$$

Регулировка частоты, генерируемой клистроном в пределах каждой области генерации с помощью изменения потенциала отражателя, называется электронной настройкой. Диапазон электронной настройки отражательного клистрона приблизительно равен полосе пропускания колебательного контура, эквивалентного нагруженному резонатору, т. е. имеет порядок $\sim \omega_0 / 2\pi Q_H$. Такая перестройка, составляющая 0,05—1% от средней частоты колебаний, практически безынерционна, не требует затраты мощности и достигается изменением напряжения на отражателе всего на несколько десятков вольт. Крутизна электронной перестройки у современных клистронов составляет десятые доли или единицы мегагерц на вольт.

Подавая на отражатель низкочастотное переменное напряжение, на выходе клистрона получим колебания, модулированные как по частоте, так и по амплитуде (см. рис. 5). Вид амплитудной и частотной модуляции определяется формой модулирующего напряжения; наиболее распространена модуляция пилообразным или прямоугольным напряжением; в последнем случае возможна чисто амплитудная модуляция.

Помимо электронной перестройки менять частоту клистронного генератора в значительно более широких пределах можно с помощью механической перестройки, которая заключается в изменении собственной частоты резонатора путем изменения его объема, например с помощью подстроечных винтов или поршней. При перестройке собственной частоты резонатора необходимо производить регулировку напряжения на отражателе, чтобы получить максимум генерируемой мощности. Поэтому диапазон механической перестройки ограничивается допустимыми пределами изменений напряжения на отражателе (см. п. 2) и достигает 10—20% от средней частоты.

§ 3. Описание экспериментальной установки

Изучение отражательного клистрона проводится в двух режимах:

1) в режиме немодулированных колебаний (к электродам клистрона извне подводятся только постоянные напряжения);

2) в режиме колебаний, модулированных по частоте и амплитуде (во втором случае кроме постоянного напряжения на отражатель подается пилообразное напряжение низкой частоты). Этим же переменным напряжением производится развертка луча осциллографа, что дает возможность наблюдать на экране осциллографа области возбуждения клистрона.

Установка для изучения работы клистрона в режиме немодулированных колебаний (рис. 6, а) состоит из следующих частей:

1) клистронного генератора; 2) блока питания клистрона; 3) высокочастотного тракта; 4) резонансного волномера.

Клистрон типа К-12 включен в резонансный контур призматического типа с укорачивающей емкостью (см. рис. 1, б). Для механической настройки на определенную длину волны резонансный контур снабжен двумя поршнями, передвигающимися в запердельном для рабочей частоты волноводе. Для вывода высокочастотной энергии из контура в последний ввинчена бокса с петлей связи. Глубина погружения петли определяет величину связи генератора с внешним трактом.

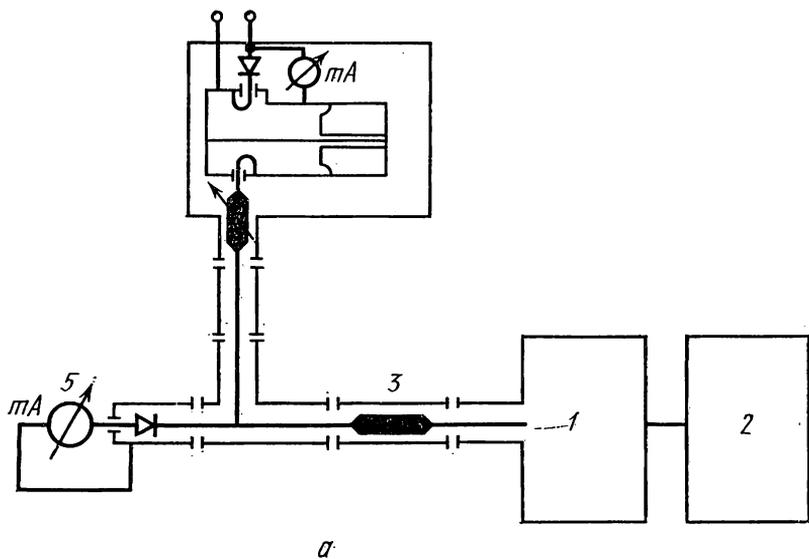
Блок питания клистрона состоит из двух выпрямителей для питания цепей катод-резонатор и катод-отражатель, которые имеют электронную стабилизацию и регулировку напряжений в пределах 180—300 и 50—300 В (см. рис. 1, а). Изменение тока резонатора до срыва генерации осуществляется с помощью изменения напряжения на ускоряющей сетке.

Высокочастотная энергия, поступающая из резонансного контура клистронного генератора, попадает через аттенюатор в тройник, один из выходов которого соединен через аттенюатор с детекторной секцией. В цепь детектора включен микроамперметр, предназначенный для индикации высокочастотных колебаний в СВЧ-тракте. Детектор имеет примерно квадратичную характеристику, так что выпрямленный ток пропорционален квадрату высокочастотного напряжения, т. е. падающей мощности.

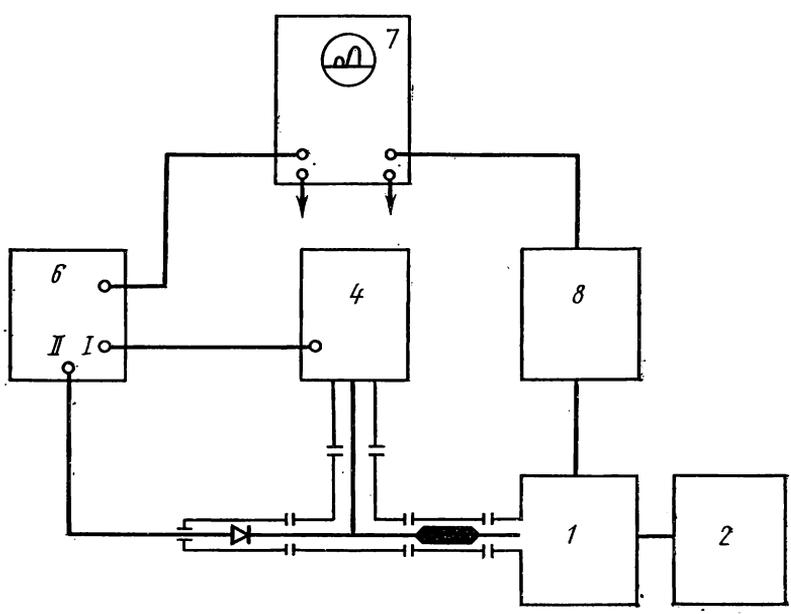
Со второго выхода тройника высокочастотная энергия поступает через аттенюатор и коаксиальный кабель в резонансный волномер. Применение аттенюатора вызвано необходимостью исключения взаимного влияния приборов, подключенных к тракту.

Резонансный волномер служит для измерения длины волны колебаний, генерируемых клистроном. Волномер представляет собой высокочастотный коаксиальный резонатор, объем которого меняется при помощи поршня. С этим резонатором связан детектор, ток через который служит для индикации настройки волномера. Длина волны определяется из калибровочного графика, связывающего показания шкалы волномера и длину волны, соответствующей резонансу.

Схема для изучения работы клистрона в режиме колебаний, модулированных по частоте и амплитуде, приведена на рис. 6, б. Она отличается от схемы а) наличием генератора пилообразного напряжения, суммирующего *усилителя и осциллографа. Напря-



a



б

Рис. 6. Блок-схемы экспериментальной установки для исследования клистронного генератора в режиме непрерывных (*a*) и модулированных (*б*) колебаний:
 1 — клистронный генератор, 2 — блок питания, 3 — высокочастотный тракт, 4 — волномер, 5 — микроамперметр, 6 — суммирующий усилитель, 7 — осциллограф, 8 — генератор пилообразного напряжения

жения с детектора, связанного с резонатором волномера, и с детекторной секции поступают на суммирующий усилитель соответственно на входы *I* и *II*. Сумма этих напряжений после усиления поступает на вход вертикального отклонения луча осциллографа и дает картину областей возбуждения клистрона с наложенным на них сигналом волномера.

§ 4. Упражнения

Определите назначение каждого из приборов, проверьте правильность сборки схемы. Выход детекторной секции должен быть подключен к микроамперметру. Ручку регулировки напряжения резонатора поверните до отказа влево, это соответствует минимальному напряжению. Ручку регулировки ускоряющей сетки поверните до отказа вправо; ток резонатора при этом максимален.

Включите стабилизированный выпрямитель питания клистрона тумблером «сеть». Спустя 3—5 мин включите тумблер «анод», при этом на электроды клистрона будет подано напряжение. Для значений напряжений на отражателе, соответствующих областям возбуждения клистрона, должно наблюдаться отклонение стрелки прибора в цепи детектора.

1. Изучение областей возбуждения отражательного клистрона и электронной перестройки в режиме немодулированных колебаний. В упр. 1—3 поршни резонатора клистрона ввернуты до фиксатора и остаются неизменными. Положение петли связи соответствует, за исключением п. 4, упр. 2, максимальному погружению.

1. Снимите зависимость в цепи детектора $I_{\text{дет}}$ и длины волн генерируемых колебаний λ от напряжения на отражателе U_0 при постоянном напряжении на резонаторе V_0 . Эти зависимости следует снять для четырех значений напряжений на резонаторе $V_0 = 180, 200, 225$ и 250 В. Напряжение ускоряющей сетки соответствует максимальному току резонатора. Постройте графики: а) $I_{\text{дет}} = I_{\text{дет}}(U_0)$; б) $f = f(U_0)$ для указанных V_0 , f — частота генерируемых колебаний.

2. Определите порядок областей возбуждения n по формуле (14). Расстояние между отражателем и сеткой резонатора $D = 0,3$ см.

3. Рассчитайте для одной из областей возбуждения (по указанию преподавателя) зависимость частоты от напряжения на отражателе по формуле (21). Величину нагруженной добротности возьмите равной $Q_{\text{п}} \approx 100$.

2. Наблюдение областей возбуждения осциллографическим методом.

1. Включите дополнительные приборы на схеме рис. 6, б, получите осциллограмму областей возбуждения клистрона и зарисуйте

ее. Изменяя постоянное напряжение на отражателе, проследите за изменениями картины на экране осциллографа и объясните их.

2. Определите, каким значениям напряжения на отражателе соответствуют характерные точки области генерации: точки максимума мощности и точки срыва колебаний. Для этого, постепенно уменьшая амплитуду пилообразного напряжения с помощью ручки «амплитуда», изменением напряжения на отражателе помещайте выбранную точку в центре экрана осциллографа. Для предельно малых амплитуд модулирующего напряжения зафиксируйте значения напряжения отражателя U_0 . Эти измерения проведите для двух наибольших по мощности областей генерации и сравните полученные результаты с данными упр. 1.

3. Изменяя частоту волномера, добейтесь появления сигнала волномера на экране осциллографа и определите относительную ширину электронной перестройки клистрона по уровню половинной мощности.

4. Поставьте напряжение $V_0=250$ В. Изменяя глубину погружения петли связи, установите оптимальную связь с нагрузкой, соответствующую максимальной мощности в центре первой области возбуждения. Выясните, каким образом меняется мощность в других областях возбуждения при плавном изменении положения петли связи.

3. Измерение пусковых токов клистронного генератора.

1. Получите осциллограмму областей возбуждения клистрона.

2. Уменьшите ток резонатора до минимума изменением напряжения на ускоряющей сетке. В этом режиме генерация клистрона отсутствует.

3. Постепенно увеличивая ток резонатора, наблюдайте поочередное появление областей генерации. Измерьте пусковые токи клистрона для каждой области. Эти измерения сделайте для напряжений резонатора V_0 , равных 180, 200 и 250 В.

4. Механическая перестройка клистрона. Выдвижением поршней резонатора клистрона и регулировкой напряжения отражателя добейтесь изменения частоты генерируемых колебаний приблизительно на 10%. При перестройке непрерывно контролируйте на экране осциллографа поведение областей генерации и ход метки волномера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гвоздовер С. Д. Теория электронных приборов сверхвысоких частот. М., Гостехиздат, 1956, гл. VIII, IX.
2. Лебедев И. В. Техника и приборы сверхвысоких частот, т. II. М., «Энергия», 1964, гл. V.
3. Гайдук В. К., Палатов К. И., Петров Д. М. Физические основы электроники СВЧ. М., «Сов. радио», 1971.

2. ЛАМПА С ОБРАТНОЙ ВОЛНОЙ

Изучаются принцип действия лампы с обратной волной в режиме генерации и ее основные характеристики: диапазон электрической перестройки, амплитудно-частотная зависимость, пусковые токи и т. д.

§ 1. Принцип действия

В отличие от СВЧ-триодов и клистронов существует класс приборов СВЧ, основанных на длительном взаимодействии потока электронов с полем бегущей электромагнитной волны. Среди них наибольшее распространение получили лампы с бегущей волной (ЛБВ) и лампы с обратной волной (ЛОВ). Схемы этих приборов изображены на рис. 1.

СВЧ-сигнал вводится в специальную замедляющую систему, в которой уменьшается фазовая скорость электромагнитной волны, распространяющейся в направлении движения электронного потока. Если скорость пучка v_0 близка к фазовой скорости волны v_ϕ , электроны могут находиться в синхронизме и взаимодействовать с полем этой волны в течение нескольких десятков или даже сотен периодов СВЧ-колебаний. В начале поле волны модулирует пучок по скорости, затем эта модуляция перерастает в модуляцию по плотности, т. е. происходит образование электронных сгустков. При определенных условиях эти сгустки локализуются преимущественно в тормозящих полупериодах поля волны, отдают ей часть энергии своего продольного движения и, следовательно, приводят к усилению или генерации сигнала.

В замедляющих системах могут распространяться электромагнитные волны, имеющие как одинаково-, так и противоположнонаправленные фазовую v_ϕ и групповую $v_{гр}$ скорости. Первые из них используются в ЛБВ, последние — в ЛОВ (рис. 1, б и в).

В ЛОВ-усилителях и генераторах фазовая скорость волны в замедляющей системе направлена вдоль направления движения электронного потока, групповая — навстречу ему (рис. 1, б, в). Это означает, что система регенеративна, т. е. содержит положительную обратную связь. Любая флуктуация плотности пространственного заряда в потоке будет двигаться вместе с электронным пучком со скоростью v_0 и индуцировать в замедляющей системе переменное высокочастотное напряжение, которое распространяется по замедляющей системе уже навстречу электронному потоку, в свою очередь, воздействуя на него, и т. д. Электронный пучок выполняет здесь двоякую роль: роль источника энергии и цепи, по которой осуществляется обратная связь.

ЛОВ-усилители обычно узкополосны, но перестраиваются в широком диапазоне частот путем изменения потенциала замедляющей системы. Они могут использоваться в качестве входного усилителя-фильтра с целью увеличения помехозащищенности радиоприемных систем.

При увеличении регенерации (например, с ростом тока пучка) ЛОВ-усилитель превращается в ЛОВ-генератор. Генерируемая частота определяется условием синхронизма, а диапазон электрической перестройки — областью прозрачности замедляющей си-

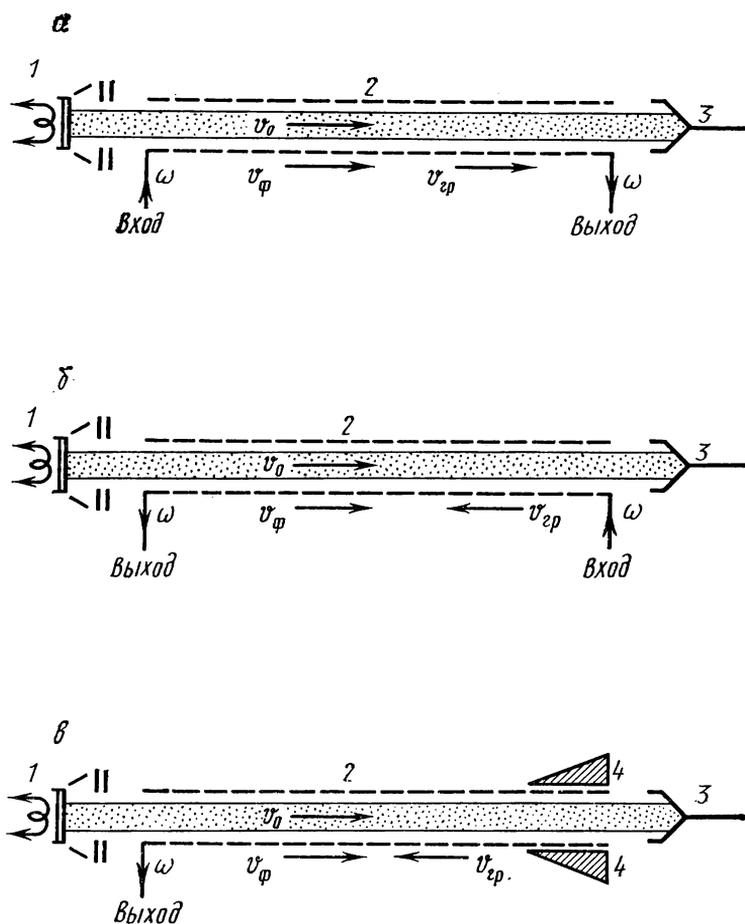


Рис. 1. Схемы ЛТВ (а), ЛОВ-усилителя (б), ЛОВ-генератора (в):
 1 — электронная пушка, 2 — замедляющая система, 3 — коллектор, 4 — согласованная нагрузка

стемы для рабочего компонента волны. ЛОВ-генераторы широко используются в качестве СВЧ-генераторов преимущественно малой и средней мощности в дециметровом, сантиметровом, миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн. Такие генераторы можно безынерционно электрически перестраивать по частоте в широкой полосе, порядка октавы и более.

§ 2. Замедляющие системы. Пространственные гармоники

Замедляющие системы, используемые в ЛОВ и ЛБВ, служат для уменьшения фазовой скорости электромагнитной волны, распространяющейся вдоль электронного потока $\left(\left| \frac{v_{\phi}}{c} \right| \ll 1, c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \right)$ — скорость света в вакууме). Независимо от конкретной конструкции все они периодичны в пространстве по направлению вдоль электронного пучка.

Любую величину, характеризующую поле волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси z с фазовой скоростью v_{ϕ} на частоте ω , можно представить в виде

$$A(x, y, z, t) = A_0(x, y, z) e^{i(\omega t - \beta_0 z)}, \quad \beta_0 = \frac{\omega}{v_{\phi}}. \quad (1)$$

В силу периодичности системы вдоль оси z , функция $A_0(x, y, z)$ должна быть периодической по z с периодом, равным периоду системы D . Если теперь разложить $A_0(x, y, z)$ в ряд Фурье по пространственной координате z , то величину $A(x, y, z, t)$ можно представить в виде суммы пространственных гармоник

$$A(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n(x, y) e^{i(\omega t - \beta_n z)}, \quad (2)$$

где $\beta_n = \beta_0 + 2\pi n/D$ — постоянная распространения пространственной гармоники с номером n , $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

$$A_n(x, y) = \frac{1}{D} \int_0^D A_0(x, y, z) e^{i \frac{2\pi n}{D} z} dz. \quad (3)$$

В любой периодической структуре существует, таким образом, бесконечное число пространственных гармоник с различными фазовыми скоростями $v_{\phi n}$, но с единой групповой скоростью $v_{\text{гр}}$:

$$v_{\phi n} = \frac{\omega}{\beta_n}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\beta_n} = \frac{d\omega}{d\beta_0}. \quad (4)$$

Пространственные гармоники, для которых $\beta_n > 0$, имеют однонаправленные фазовую и групповую скорости и называются прямыми пространственными гармониками. Пространственные гармоники, для которых $\beta_n < 0$, носят название обратных и имеют противоположнонаправленные фазовую и групповую скорости.

Следует отличать пространственные гармоники от временных, а также от различных типов волн, возможных в волноводах с гладкими ограничивающими поверхностями. Как временные гармоники, так и различные типы волн в волноводах могут возбуждаться и существовать независимо, в то время как пространственные гармоники являются компонентами единой сложной волны, и

только их сумма удовлетворяет граничным условиям на поверхности периодической замедляющей системы.

Важной характеристикой замедляющих систем является дисперсионная характеристика, т. е. зависимость $v_{\phi n}(\omega)$, которую часто представляют в виде зависимости коэффициента замедления $c/v_{\phi n}$ от длины волны λ . Из (2) можно записать

$$\frac{c}{v_{\phi n}} = \frac{\lambda}{2\pi D} [\psi(\lambda) + 2\pi n], \quad (5)$$

где $\psi(\lambda) = \beta_0(\lambda)D$ — изменение фазового угла на длине периода системы для основной пространственной гармоники. На рис. 2, а

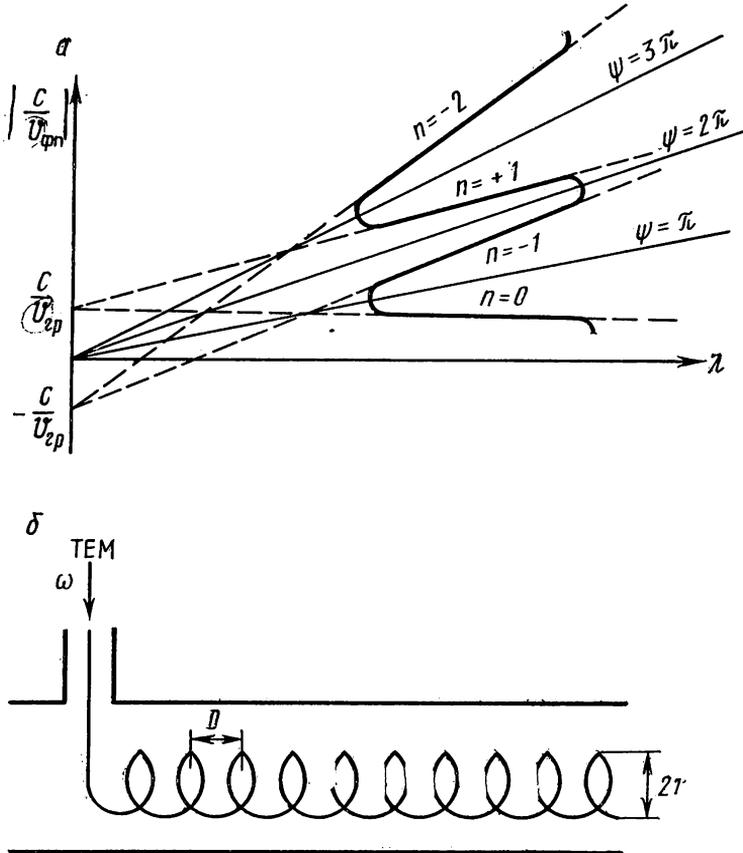


Рис. 2. Типичные дисперсионные характеристики (а); спиральная замедляющая система с коаксиальным входом (б)

приведены типичные дисперсионные характеристики, построенные в координатах $| \frac{c}{v_{\phi n}} | = f(\lambda)$. Групповая скорость для всех про-

пространственных гармоник одинакова и может быть определена по отрезку, отсекаемому на оси ординат касательной к дисперсионной кривой в данной точке.

Эффективность взаимодействия той или иной пространственной гармоники с электронным пучком принято характеризовать сопротивлением связи

$$R_n = \frac{\frac{1}{S_0} \iint_{S_0} |E_{zn}|^2 ds}{2\beta_n^2 P}. \quad (6)$$

Здесь S_0 — площадь поперечного сечения электронного потока; E_{zn} — пространственная гармоника компоненты напряженности

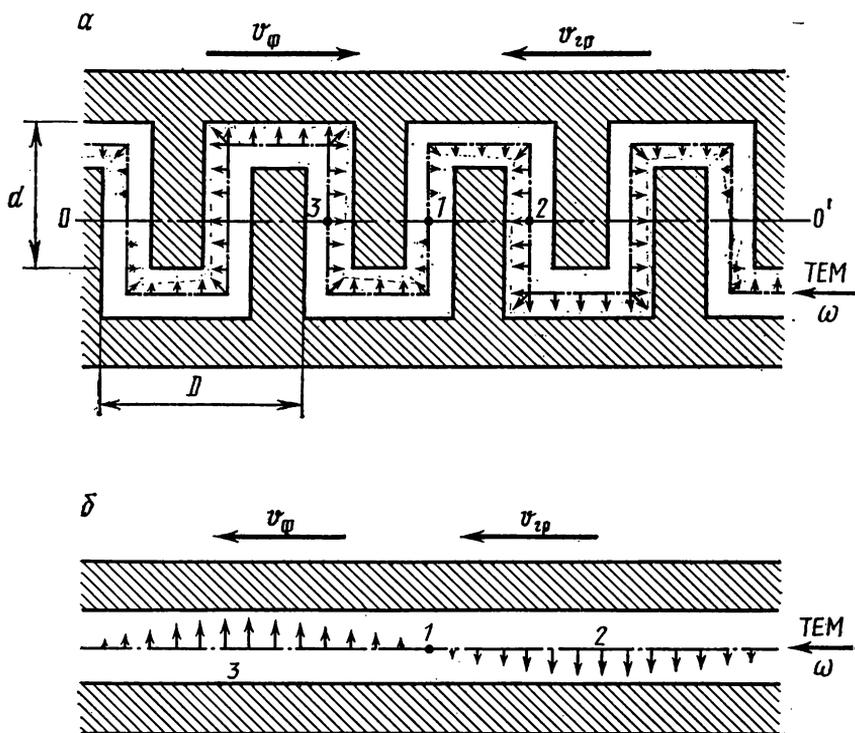


Рис. 3. Мгновенное распределение напряженности электрического поля в замедляющей системе типа «встречные штыри» (а) и двухпроводной линии (б)

высокочастотного электрического поля, направленного вдоль электронного пучка; P — суммарный поток мощности через поперечное сечение замедляющей системы.

Исторически первой появилась замедляющая система в виде круглой спирали (рис. 2, б). Сопротивление связи спиральной замедляющей системы максимально для нулевой пространственной гармоник, поэтому она находит широкое применение в ЛБВ. И хотя обратные пространственные гармоники здесь также присутствуют, сопротивление связи для них значительно ниже. Поэтому

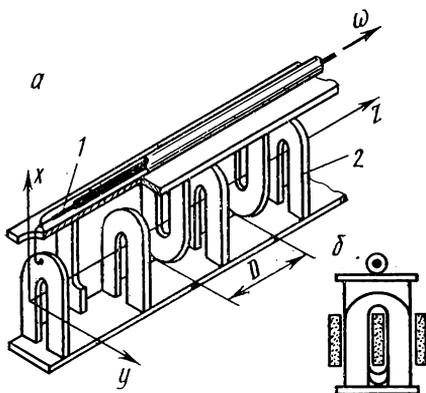


Рис. 4. Замедляющая система типа «встречные петли» (а) (1 — ступенчатый трансформатор импедансов, согласующий волновые сопротивления замедляющей системы и коаксиальной линии, 2 — элемент замедляющей системы — «петля») и расположение электронных пучков (б)

точник электромагнитного излучения (ТЕМ-волна) находится справа и, следовательно, справа налево направлены групповые скорости волн. В фиксированный момент времени выделим область 1 с нулевым значением вектора напряженности электрического поля на оси системы, а затем проследим фазу поля в этой области в последующие моменты времени.

В двухпроводной линии направление вектора напряженности электрического поля станет отрицательным — примет значение, которое ранее было в области 2, т. е. перемещение фазы происходит справа налево и, следовательно, в этом случае фазовая скорость волны совпадает по направлению с групповой.

Для замедляющей системы «встречные штыри» ситуация иная. Через интервал времени $\Delta t = (D/2 + d)/c$, необходимый для перемещения волны из области 2 в 1, направление вектора напряженности электрического поля в области 1 станет таким, каким оно было в исходный момент времени в области 3. Это соответствует перемещению фазы поля вдоль оси $00'$ слева направо, т. е. направление фазовой скорости противоположно групповой.

в ЛОВ-усилителях и генераторах используют обычно более сложные замедляющие системы (типа двухзаходной спирали, «встречных штырей» (рис. 3, а), «встречных петель» (рис. 4, а) и др.), для которых основная пространственная гармоника — гармоника с $n = \pm 1$.

Замедляющая система «встречные штыри» (рис. 3, а) в первом приближении может быть рассмотрена как вариант деформированной двухпроводной линии (рис. 3, б). Качественно можно убедиться, что для волны, распространяющейся вдоль оси $00'$ на рис. 3, а, т. е. в области локализации электронного пучка, групповая и фазовая скорости противоположны друг другу. Пусть в обоих случаях (рис. 3, а, б) источник

Напряженность электрического поля $E_{z,-1}$ быстро падает по величине при удалении от поверхности замедляющих систем, поэтому на практике для увеличения сопротивления связи часто используют полые цилиндрические либо ленточные электронные пучки.

В данной задаче изучается ЛОВ-генератор с замедляющей системой типа «встречные петли» (рис. 4, а), которая, по существу, есть конструктивная модификация «встречных штырей» и позволяет использовать систему трех ленточных электронных потоков (рис. 4, б).

Строгий расчет сопротивления связи основывается на решении волнового уравнения с граничными условиями, соответствующими конфигурации проводящих поверхностей замедляющей системы в каждом конкретном случае.

§ 3. Элементы теории

Исторически возникли различные математические подходы к анализу физических явлений в ЛОВ. В описании использован метод связанных волн, явившийся обобщением малосигнальных подходов и позволяющий с единой точки зрения рассмотреть ряд задач электроники СВЧ [1].

Ограничимся анализом движения электронного потока в простейшем одномерном случае, когда все основные векторные величины (скорости отдельных электронов, сила кулоновского взаимодействия, внешнее электрическое поле и т. д.) направлены вдоль оси z и не зависят от поперечных координат. Физически это ближе всего соответствует случаю, когда равномерно заряженный по сечению электронный пучок помещен во внешнее постоянное и однородное магнитное поле, ориентированное вдоль оси z . Причем величина его настолько велика, что любыми поперечными движениями в потоке можно пренебречь.

Тогда уравнение движения и уравнение непрерывности приобретают вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{e}{m} E, \quad (7)$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

где $v(z, t)$ — скорость электронного пучка; $e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19}$ К — абсолютная величина заряда электрона; $m \simeq 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона; E — напряженность электрического поля; $J(z, t)$, $\rho(z, t)$ — соответственно плотность тока и плотность пространственного заряда, которые для упрощения записи будем считать положительными, причем

$$J(z, t) = v(z, t)\rho(z, t), \quad I(z, t) = S_0 J(z, t). \quad (9)$$

Здесь I , S_0 — полный ток и площадь поперечного сечения электронного пучка.

В малосигнальном приближении v , ρ , J , I могут быть представлены в виде постоянных и малых переменных составляющих:

$$\begin{aligned} v(z, t) &\simeq v_0 + v_1(z) e^{i\omega t}, & \rho(z, t) &\simeq \rho_0 + \rho_1(z) e^{i\omega t}, \\ I(z, t) &\simeq J_0 + J_1(z) e^{i\omega t}, & I(z, t) &\simeq I_0 + I_1(z) e^{i\omega t}, \\ E(z, t) &= E_1(z) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (10)$$

причем

$$|v_1| \ll v_0, \quad |\rho_1| \ll \rho_0, \quad |J_1| \ll J_0, \quad |I_1| \ll I_0. \quad (11)$$

Отбрасывая произведения второго порядка малости, из (7)–(11) получим

$$\frac{\partial}{\partial z} (v_0 v_1) + i\omega v_1 = -\frac{e}{m} E_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial z} + i\omega \rho_1 = 0, \quad (13)$$

$$J_1 = v_1 \rho_0 + v_0 \rho_1, \quad J_0 = v_0 \rho_0. \quad (14)$$

Амплитуда напряженности электрического поля E_1 , входящая в уравнение (12), включает в себя как поле кулоновских сил расталкивания, так и продольную составляющую высокочастотного электрического поля, наложенного извне на пучок:

$$E_1 = E_{1к} + E_{1вн}. \quad (15)$$

Для одномерной модели амплитуда высокочастотной составляющей напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_{1к}$ не зависит от поперечных координат x , y и, следовательно, $[\text{rot} \mathbf{H}_{1к}]_z \equiv 0$. Тогда, учитывая, что ток создается движением отрицательно заряженных электронов, получим

$$-J_1 + i\varepsilon_0 \omega E_{1к} = 0. \quad (16)$$

Из (12), (15), (16) и (13), (14) находим

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + i\beta_e \right) V_1 &= i \frac{J_0}{\varepsilon_0 \omega I_0} I_1 - E_{1вн}, \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + i\beta_e \right) I_1 &= i\beta_e \frac{I_0}{2V_0} V_1, \end{aligned} \right. \quad (18)$$

где $\beta_e = \omega/v_0$ — электронная постоянная распространения; $V_1 = mv_0 v_1/e$ носит название кинетического потенциала; $V_0 = mv_0^2/2e$ — потенциал потока, соответствующий скорости v_0 .

1. Собственные колебания в электронном потоке. При отсутствии внешних полей ($E_{1вн} \equiv 0$) система (17), (18) замкнута и из

нее следует, что в дрейфующем пучке любая модуляция по скорости неизбежно приводит к модуляции тока, т. е. к образованию пространственных уплотнений — сгустков. Наоборот, модуляция по плотности вызывает модуляцию по скорости. Этот колебательный механизм порожден кулоновским взаимодействием в пучке. Величины V_1 , I_1 здесь однозначно связаны. Естественнее описывать электронный поток в терминах таких переменных, которые преобразуют систему (17), (18) при $E_{1вн} \equiv 0$ в два независимых дифференциальных уравнения. Физически это эквивалентно выделению собственных, нормальных колебаний в свободно дрейфующем электронном пучке.

Вводя для этого амплитуды нормальных волн в виде

$$a_{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{2}Z_{\pi}} (V_1 \pm Z_{\pi} I_1), \quad (19)$$

где $\beta_p = \frac{\omega_p}{v_0}$, $Z_{\pi} = \frac{2V_0}{I_0} \frac{\omega_p}{\omega}$, $\omega_p = (e\rho_0/\epsilon_0 m)^{1/2}$ — плазменная частота, т. е. частота собственных колебаний неограниченной по объему плазмы с однородной плотностью ρ_0 , из (17) — (19) получим

$$\left[\frac{d}{dz} + i(\beta_{\epsilon} \mp \beta_p) \right] a_{\pm} = 0. \quad (20)$$

Решение (20) имеет вид двух бегущих волн

$$a_{\pm} = a_{0\pm} e^{-i(\beta_{\epsilon} \mp \beta_p)z}, \quad a_{0\pm} = \text{const}_{\pm} \quad (21)$$

(временной множитель $e^{i\omega t}$ опущен ранее) с различными фазовыми скоростями

$$v_{\phi\pm} = v_0 \left[1 \mp \frac{\omega_p}{\omega} \right]^{-1}, \quad (22)$$

но единой групповой скоростью

$$v_{гp\pm} \equiv v_0. \quad (23)$$

Каждая из этих волн может существовать независимо от другой, и, наоборот, распространение любого возмущения в дрейфующем потоке может быть описано комбинацией из этих волн. Волна a_+ носит название быстрой волны пространственного заряда ($v_{\phi+} > v_0$), a_- — медленной ($v_{\phi-} < v_0$).

Для быстрой волны V_1 и I_1 находятся в фазе (см. (19)), и, следовательно, максимумы скорости совпадают с максимумами плотности тока, т. е. в пучке преобладают электроны со скоростью, большей, чем v_0 . Для медленной волны V_1 , I_1 противофазны и преобладают электроны, скорость которых меньше v_0 .

Процесс усиления электромагнитной волны при взаимодействии ее с электронным потоком связан всегда с передачей части энергии продольного движения пучка волне, т. е. с торможением элек-

тронов и, следовательно, с нарастанием медленной волны пространственного заряда. И наоборот, нарастание быстрой волны соответствует ускорению электронов, т. е. поглощению энергии электромагнитной волны.

Конечные поперечные размеры пучка, наличие вблизи него металлических поверхностей (труба дрейфа, замедляющая система

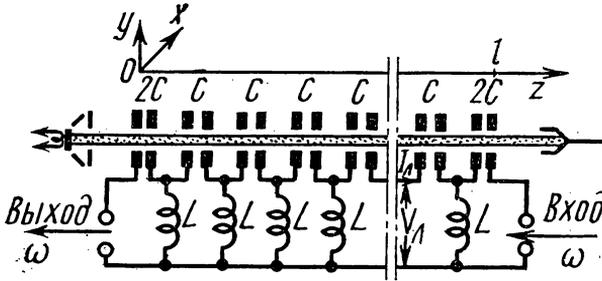


Рис. 5. Эквивалентная схема ЛОВ

и т. д.) в первом приближении не меняют общей картины распространения нормальных волн, приводя лишь к уменьшению частоты плазменных колебаний в потоке, и могут быть учтены заменой ω_p на так называемую редуцированную плазменную частоту ω_q , причем $\omega_q = R\omega_p$, $R \ll 1$ — коэффициент редукиции.

На этом основании мы везде в уравнениях далее заменим формально ω_p на ω_q ; β_p на $\beta_q = \omega_q/v_0$.

2. Взаимодействие с замедляющей системой. В пределах сделанных допущений свободно дрейфующий электронный поток подобен некоторой линии передачи, по которой могут распространяться волны a_+ и a_- . В свою очередь, замедляющая система для $n = -1$ пространственной гармоники также может быть представлена линией передачи, в том числе и в виде простейшего фильтра верхних частот, поскольку фазовая и групповая скорости волн в такой системе всегда противоположны друг к другу.

Задачу о взаимодействии электронного потока с электрическим полем замедляющей системы можно свести, таким образом, к задаче о взаимодействии двух линий передачи, связанных между собой (рис. 5). В этом случае в уравнения (17), (18) должно быть введено внешнее электрическое поле, действующее со стороны линий на пучок

$$E_{1\text{вн}} = - \frac{dV_{\text{л}}}{dz}, \quad (24)$$

тогда, подобно (20), получим

$$\left[\frac{d}{dz} + i(\beta_e \mp \beta_q) \right] a_{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{2Z_n}} \frac{dV_{\text{л}}}{dz}. \quad (25)$$

А в уравнении для комплексных амплитуд напряжения и тока в линии необходимо добавить ток, наводимый электронным пучком

$$\frac{dV_n}{dz} = i \frac{1}{\omega C} I_n, \quad \frac{dI_n}{dz} = i \frac{1}{\omega L} V_n - \frac{d(-I_1)}{dz}. \quad (26)$$

Обозначая

$$A_{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{2Z_n}} (V_n \pm Z_n I_n), \quad (27)$$

где $Z_n = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — волновое сопротивление ненагруженной линии, находим

$$\left[\frac{d}{dz} \mp i\beta_n \right] A_{\pm} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{Z_n} \frac{dI_1}{dz}, \quad (28)$$

где

$$\beta_n = 1/\omega \sqrt{LC}.$$

Если связь с электронным потоком отсутствует ($\frac{dI_1}{dz} \equiv 0$), решение (28) имеет вид двух бегущих волн с постоянными амплитудами:

$$A_{\pm} = A_{0\pm} e^{\pm i\beta_n z}, \quad A_{0\pm} = \text{const}_{\pm}, \quad (29)$$

которые называются собственными, или нормальными, волнами линии. Для каждой из них фазовые и групповые скорости направлены противоположно друг другу, а $1/2 \text{Re}(I_n V_n^*) = \pm |A_{\pm}|^2$ — поток средней мощности, переносимой той или иной волной вдоль линии.

Используя (19), (27) и заменяя V_n и I_1 в (25), (28) через A_{\pm} , a_{\pm} , получим систему дифференциальных уравнений для четырех связанных волн:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d}{dz} + i(\beta_e \mp \beta_q) \right] a_{\pm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_n}{Z_n}} \frac{d}{dz} (A_+ + A_-), \quad (30) \\ \left[\frac{d}{dz} \mp i\beta_n \right] A_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_n}{Z_n}} \frac{d}{dz} (a_+ - a_-). \quad (31) \end{array} \right.$$

В реальных конструкциях ЛОВ-усилителей и генераторов длинна области взаимодействия пучка с полем электродинамической системы составляет обычно несколько десятков так называемых замедленных длин волн Λ :

$$\Lambda = \lambda \left| \frac{v_{\phi,-1}}{c} \right|, \quad \lambda = 2\pi c/\omega, \quad (32)$$

а относительное изменение модулей амплитуд волн A_{\pm} , a_{\pm} мало на длине Λ . Это соответствует случаю слабой связи между волнами пучка и структуры. Правая часть уравнений (30), (31) носит характер малого возмущения

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_{\pi}}{Z_{\pi}}} \ll 1 \quad (33)$$

по отношению к основным колебательным процессам, описываемым левыми частями этой системы.

Обычно не все из волн равнозначно участвуют в процессе энергообмена пучка с полем замедляющей системы.

Фазовая скорость волны с амплитудой A_{+} направлена навстречу электронному потоку, т. е. эта волна далека от синхронизма и практически не взаимодействует с пучком.

Усиление всегда связано с торможением электронного потока, т. е. с нарастанием медленной волны пространственного заряда a_{-} . Именно с фазовой скоростью этой волны должен быть обеспечен синхронизм волны A_{-} в замедляющей системе. Фазовая скорость быстрой волны пространственного заряда a_{+} в условиях слабой связи потока с линией обычно достаточно далека от синхронизма, и ее участием в процессе энергообмена можно пренебречь.

Условие (33) позволяет в правых частях системы уравнений (30), (31) ограничиться членами первого порядка и приближенно считать

$$\frac{dA_{-}}{dz} \simeq -i\beta_e A_{-}, \quad \frac{da_{-}}{dz} \simeq -i\beta_e a_{-} \quad (\beta_e \simeq \beta_{\pi}, \beta_q \ll \beta_e). \quad (34)$$

С учетом этих замечаний из (30), (31) получим

$$\left\{ \left[\frac{d}{dz} + i(\beta_e + \beta_e) \right] a_{-} = -i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_{\pi}}{Z_{\pi}}} \beta_e A_{-}, \right. \quad (35)$$

$$\left. \left[\frac{d}{dz} + i\beta_{\pi} \right] A_{-} = -i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_{\pi}}{Z_{\pi}}} \beta_e a_{-}. \right. \quad (36)$$

Интегрирование такой системы уравнений должно быть выполнено при граничных условиях

$$a_{-}(0) = 0, \quad A_{-}(l) = A_0, \quad (37)$$

где A_0 — входное значение амплитуды волны в линии; l — длина области взаимодействия.

Результат интегрирования для квадрата модуля амплитуды волны в линии имеет вид

$$|A_{-}(z)|^2 = \frac{1 - F \sin^2 kz}{1 - F \sin^2 kl} |A_0|^2, \quad (38)$$

где

$$F = \left[1 + (\beta_e + \beta_q - \beta_n) \frac{2V_0\beta_q}{I_0Z_{\text{л}}\beta_e^3} \right]^{-1},$$

$$k = \frac{1}{2} \left[(\beta_e + \beta_q - \beta_n)^2 + \frac{I_0Z_{\text{л}}\beta_e^3}{2V_0\beta_q} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

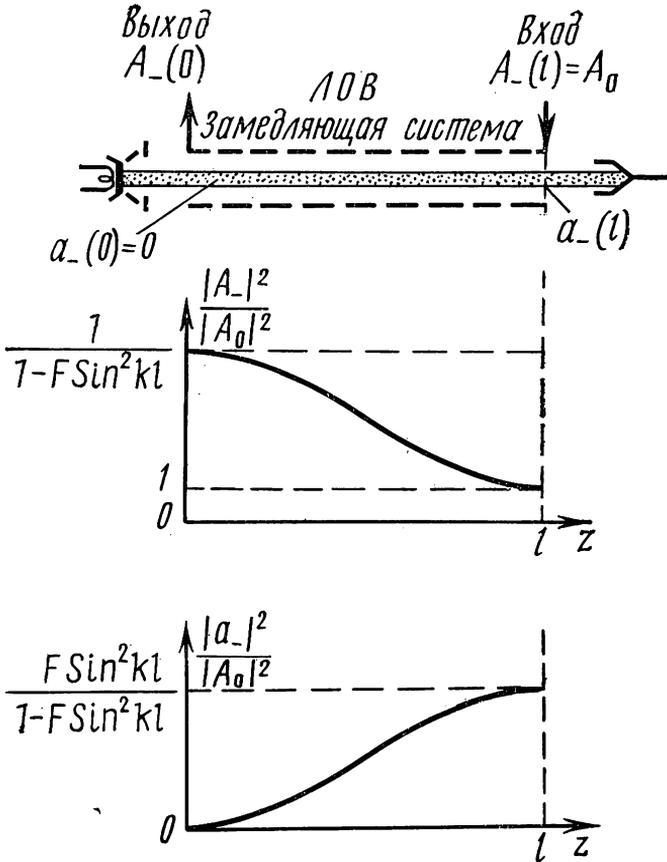


Рис. 6. Распределение квадратов модулей амплитуд волн вдоль оси ЛОВ

Распределение квадратов модулей амплитуд волн в потоке и в замедляющей системе изображено на рис. 6. Коэффициент усиления ЛОВ из (38) равен

$$G = \frac{|A_-(0)|^2}{|A_-(l)|^2} = \frac{1}{1 - F \sin^2 kl}. \quad (40)$$

Если одновременно

$$F = 1 \text{ и } kl = \frac{\pi}{2} (2s + 1), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (41)$$

то $G \rightarrow \infty$, т. е. ЛОВ-усилитель превращается в ЛОВ-генератор. Условие $F=1$ выполняется только в том случае, когда

$$\beta_{\pi} \equiv \beta_e + \beta_q, \quad (42)$$

т. е. генерация возникает на частоте, при которой фазовая скорость волны в замедляющей системе (линии) точно равна фазовой скорости медленной волны пространственного заряда:

$$v_{\Phi, -1}(\omega) \equiv v_0 \left[1 + \frac{\omega_q}{\omega} \right]^{-1}. \quad (43)$$

Здесь

$$v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m} V_0}; \quad (v_0 \text{ (см/с)} \simeq 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{V_0}),$$

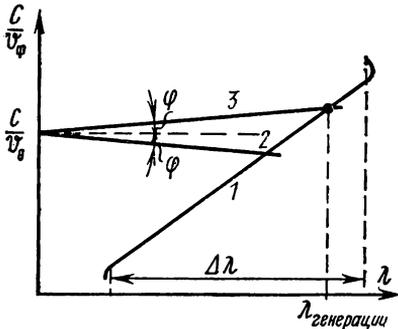


Рис. 7. Дисперсионные характеристики $n=-1$ пространственной гармоники замедляющей системы (1) и прямые быстрой и медленной волны пространственного заряда в электронном потоке (2, 3); $\Delta\lambda$ — максимальная область перестройки ЛОВ

V_0 — напряжение замедляющей системы (в вольтах).

Электрическая перестройка частоты генерации ЛОВ осуществляется обычно изменением потенциала замедляющей системы V_0 . На рис. 7 это соответствует перемещению точки c/v_0 вдоль оси ординат с соответствующим изменением $\lambda_{\text{ген}}$. При изменении тока луча I_0 меняется плазменная частота ω_q , т. е. угол φ , но это обычно приводит лишь к сравнительно небольшим изменениям $\lambda_{\text{ген}}$.

Второе условие (41) при $s=0$ позволяет определить значение пускового тока, т. е. минимального тока, при котором возникает генерация:

$$\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 = \frac{Z_{\pi} I_{0\text{пуск}} \omega^3}{4 \frac{e}{m} V_0^2 \omega_{q\text{пуск}}}, \quad (44)$$

причем плазменная частота тоже зависит от тока луча

$$\omega_q = \gamma \sqrt{I_0} / \sqrt{V_0}, \quad (45)$$

где γ — коэффициент, связанный с конкретной конструкцией прибора (коэффициент редукции, площадь поперечного сечения луча и т. д.).

Из (44), (45)

$$I_{0\text{пуск}} = \gamma^2 \frac{\left(\frac{e}{m}\right)^2}{4\pi^2 c^6} \cdot \frac{\lambda^6 V_0^2}{Z_{\text{л}}^2 l^4}. \quad (46)$$

Пусковой ток, таким образом, резко падает при увеличении длины замедляющей системы и величины сопротивления связи, которое в данном анализе совпадает с $Z_{\text{л}}$.

Линейная теория не в состоянии описать амплитудную характеристику ЛОВ-генератора. Ограничение амплитуды колебаний в генераторе всегда связано с проявлением нелинейности его характеристик. Качественно можно указать два основных механизма, вызывающих ограничение амплитуды колебаний в ЛОВ-генераторе: первый — с ростом амплитуды сигнала все большая энергия отбирается от потока и, следовательно, все сильнее тормозится электронный пучок, постепенно выходя из синхронизма с полем замедляющей системы; второй — при больших амплитудах нарастание плотности сгустков в электронном потоке начинает ограничиваться расталкивающим действием кулоновских сил.

Оба эти механизма не учтены в использованной здесь линейной теории, так как расстройка ($\beta_e + \beta_q - \beta_{\text{л}}$) считалась неизменной вдоль оси z , а на степень модуляции потока наложены ограничения (11).

Наличие отраженных волн в замедляющей системе вызывает появление стоячих волн и, следовательно, связано с чередованием минимумов и максимумов напряжения на выходном конце замедляющей системы ($z=0$), т. е. приводит к «волнистости», изрезанности амплитудно-частотной характеристики ЛОВ-генератора.

§ 4. Описание установки

В непрерывном режиме (упр. 1, 2, 3) с блока питания на электроды исследуемой ЛОВ (рис. 8) подаются постоянные, стабилизированные напряжения. Блок питания позволяет регистрировать и регулировать ток электронного потока (изменяя напряжения на первом аноде ЛОВ) и напряжение замедляющей системы. Контроль генерируемой мощности осуществляется микроамперметром 12, показания которого пропорциональны падающей мощности, так как используется квадратичный участок характеристики детектора 13. Отсчет длины волны производится по волномеру 10 при максимальном отклонении стрелочного индикатора 11.

$$\left| \frac{c}{v_{\phi, -1}}(\lambda) \right| \simeq 4,07 \cdot \lambda [\text{см}] - 10,74. \quad (47)$$

Для данного образца ЛОВ-генератора:

$$\omega_q \simeq 1,2 \cdot 10^9 \sqrt{I_0 [mA]} / \sqrt[4]{V_0 [B]}, \quad (48)$$

$$Z_{л}^{\text{ЭКВ}} \simeq 10 / \sqrt{\lambda [\text{см}]}, \quad l = 6,0 \text{ см.} \quad (49)$$

Для фокусировки электронных потоков ЛОВ-генератор помещен во внешнее однородное магнитное поле, создаваемое постоянным магнитом.

§ 6. Упражнения

Перед выполнением упражнений внимательно ознакомьтесь с экспериментальной установкой и ее блок-схемой на рис. 8, определите назначение каждого из узлов. Изучите конструкцию ЛОВ-генератора, обратите внимание на способ возбуждения замедляющей системы, расположение электронных потоков и т. д.

1. Область перестройки и калибровочная кривая ЛОВ-генератора. Поставьте переключатель режима работы на блоке питания Π_1 и переключатель волномера Π_2 в положение «непрерывно» и включите тумблер «сеть» на блоке питания. После двухминутного прогрева установка автоматически включается и загорается лампа с надписью «подогрев». Снимите зависимость генерируемой длины волны от напряжения на замедляющей системе в пределах 220—700 В при постоянном токе электронного потока 15, 20 и 25 мА¹. Отсчет длины волны производите по волномеру при максимальном отклонении стрелки индикатора. Атенуатор волномера устанавливайте в положение, соответствующее минимальному затуханию ($\times 1$), и лишь при необходимости («зашкаливание» индикатора) вводите его ($\times 2$, $\times 5$ и т. д.). Используя (43), (47) и (48), постройте теоретические кривые $\lambda(V_0)$. Нанесите экспериментальные точки. Объясните полученные результаты.

2. Влияние тока луча на длину генерируемой волны. При фиксированном напряжении на замедляющей системе 300, 400, 500 и 600 В снимите зависимость $\lambda(I_0)$, меняя ток пучка в пределах 15—25 мА. Используя (43), (47) и (48), постройте теоретические кривые и нанесите экспериментальные точки. Объясните полученные результаты.

Примечание. Обратите внимание на точность установки напряжения на замедляющей системе (по зеркальной шкале вольтметра).

3². Амплитудно-частотная характеристика ЛОВ-генератора. Снимите зависимость мощности генерации от длины волны при

¹ По указанию преподавателя здесь и в последующих упражнениях значения напряжений и токов могут быть изменены.

² Может выполняться одновременно с упражнением 1.

постоянном токе луча 15, 20 и 25 мА. Отсчет мощности в относительных единицах производите по стрелочному индикатору на передней панели блока питания, меняя напряжение на замедляющей системе в пределах 220—700 В с шагом 20 В и измеряя в каждой точке длину волны волномером. Постройте графики и укажите наиболее вероятные причины, приводящие к изрезанности амплитудно-частотной характеристики ЛОВ-генератора.

4. Визуальное наблюдение пусковых режимов. Пусковые токи. Включите осциллографический индикатор и прогрейте его в течение 15—20 мин. Поставьте ручку «напряжение замедляющей системы» в крайнее правое по часовой стрелке положение, а ток электронного потока установите равным 10 мА. Переверните переключатель входа осциллографа Π_3 в положение «волномер», а переключатель режима работы на блоке питания Π_1 и переключатель выхода волномера Π_2 — в положение «сви́пирование».

Откалибруйте сетку экрана осциллографа по следующей схеме:

1) отцентрируйте положение и размер горизонтальной развертки осциллографа точно по крайним красным вертикальным рискам сетки экрана, пользуясь ручками «смещение X», «смещение Y» и «усиление X» на передней панели осциллографа;

2) установите на волномере 9,5 см и ручкой «напряжение замедляющей системы» совместите метку волномера с риской 9,5 на сетке экрана осциллографа;

3) установите на волномере 11,0 см и совместите метку волномера на экране осциллографа с цифрой 11 на сетке, пользуясь ручкой «усиление X» осциллографа. Убедитесь в соответствии шкалы осциллографа показаниям волномера, в противном случае повторите калибровку более тщательно.

Поставьте теперь переключатель входа осциллографа Π_3 в положение «ЛОВ» и наблюдайте в координатах мощность — длина волны смещение с начала генерации при изменении тока луча в пределах 6—14 мА. Зарисуйте наиболее характерные картины и объясните их. Снимите зависимость $I_{0\text{пуск}}(\lambda)$ для интервала значений токов 6—14 мА с шагом 0,5 мА, пользуясь для более точного определения длины волны меткой волномера, плавно подводя ее со стороны больших длин волн к области начала генерации. Для практических расчетов удобно (46) записать в виде

$$I_{0\text{пуск}} = \frac{\gamma^2 c}{16\pi^2 \left(2 \frac{e}{m}\right)^{3/2}} \frac{[1 + \omega_q/\omega]^7}{\lambda Z_n^2 l^4} \Lambda^7, \quad (50)$$

где $\Lambda = \lambda \left| \frac{v_{\phi,-1}}{c} \right|$ — замедленная длина волны. В области пусковых режимов ω_q/ω ведет себя плавно, оставаясь величиной малой по сравнению с единицей. В пределах разумной для практики точности можно упростить (50), используя среднее значение $\omega_q/\omega \simeq 0,04$ с учетом (48), (49), это дает

$$I_{\text{опуск}} [mA] \simeq 1,35 \cdot 10^4 \cdot \Lambda^7 [cm]. \quad (51)$$

Постройте теоретическую кривую, нанесите экспериментальные точки. Объясните полученные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Люисселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М., ИЛ, 1963.
2. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ, т. I. М., «Высшая школа», 1970.
3. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ, т. II. М., «Высшая школа», 1972.
4. Альтшулер Ю. Г., Татаренко А. С. Лампы малой мощности с обратной волной. М., «Сов. радио», 1963.
5. Червяков Ю. Г., Кузмичев Н. П. Лампы обратной волны типа О малой мощности. М., «Сов. радио», 1966.
6. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М., «Сов. радио», 1966.
7. Роу Дж. Е. Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот. М., «Сов. радио», 1969.
8. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М., «Сов. радио», 1973.
9. Кацман Ю. А. Приборы сверхвысоких частот. М., «Высшая школа», 1973.

3. ЛАМПА С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ

Изучаются основные свойства лампы с бегущей волной (ЛБВ) — маломощного электронно-лучевого усилителя электромагнитных колебаний сантиметрового диапазона длин волн.

§ 1. Введение

Лампа с бегущей волной — это широкополосный усилитель с длительным взаимодействием электронного пучка и электромагнитного поля замедляющей системы. Маломощные ЛБВ используются в приемниках СВЧ-диапазона для усиления слабых сигналов, в том числе сигналов, находящихся на уровне собственных шумов усилителя.

В задаче изучаются свойства ЛБВ 10-см диапазона длин волн малой мощности с коэффициентом усиления порядка 20—30 дБ и значительной полосой пропускания — свыше 500 МГц.

Аксиально-симметричный электронный поток, создаваемый многоэлектродной пушкой (рис. 1), фокусируется продольным магнитным полем соленоида, проходит внутри спиральной замедляющей системы и попадает на коллектор. Выбор потенциала системы позволяет обеспечить длительное синхронное взаимодействие электронов и замедленной волны. Колебания СВЧ, поданные на вход ЛБВ, возбуждают прямую волну спирали. Продольная составляющая электрического поля волны длительное время воздействует на электронный поток, модулируя его по скорости. Скоростная модуляция приводит к возникновению переменной составляющей тока. В свою очередь, переменный ток наводит дополнительные

заряды и токи в спирали. Если фазовая скорость волны в спирали $v_{оф}$ близка к средней скорости электрона v_0 , то наведенные заряды и токи «суммируются», происходит нарастание амплитуды волны с продольной координатой.

Ввод и съем энергии сигнала в ЛБВ осуществляются с помощью прямоугольных волноводов, в которых распространяется

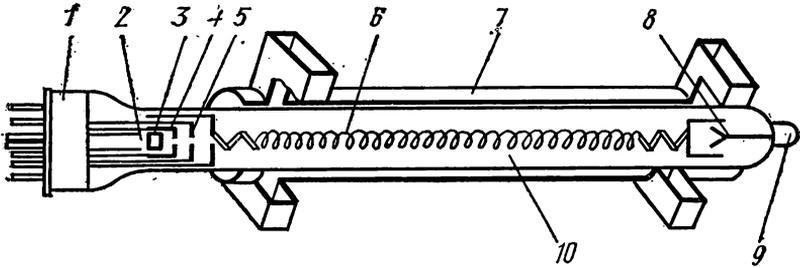


Рис. 1. Устройство ЛБВ:

1 — цоколь, 2 — накал, 3 — катод, 4 — управляющий электрод, 5 — анод 1, 6 — спираль (анод 2), 7 — арматура ЛБВ, 8 — коллектор, 9 — вывод коллектора, 10 — баллон лампы

волна H_{10} , имеющая составляющую электрического поля, направленную перпендикулярно широким стенкам. Волноводы согласуются со спиралью с помощью антенн, находящихся внутри колбы лампы, и участка спирали с переменным шагом. Для уменьшения просачивания СВЧ-энергии в область пушки и коллектора используются два четвертьволновых дросселя.

В реальных условиях никогда не достигается идеальное согласование на входе и выходе лампы: возникают отраженные волны, которые могут привести к самовозбуждению усилителя. Для уменьшения влияния отражений замедляющая система или окружающий ее диэлектрик на некотором расстоянии от входа лампы покрывается слоем поглощающего вещества. Прямая волна спирали почти полностью в нем затухает, затем вновь наводится модулированным по плотности потоком. Встречная волна, отраженная от выходного конца спирали, затухает в поглотителе и вновь практически не наводится, так как ее фазовая скорость отличается от скорости электронов.

§ 2. Усиление слабого сигнала в ЛБВ

Линейная теория различных приборов с длительным взаимодействием электронного потока с замедленными электромагнитными волнами может быть построена с единой точки зрения, если воспользоваться методом связанных волн. Метод основан на совместном решении приближенных уравнений электромагнитного

поля и электронного пучка, проводимом при следующих упрощающих предположениях:

а) электронный поток, фокусируемый магнитным полем, движется вдоль оси z системы, радиальными смещениями электронов можно пренебречь;

б) в замедляющей системе распространяется только одна основная волна, пространственные и временные гармоники не рассматриваются;

в) с полем спирали взаимодействуют только две волны плазменных колебаний пучка: медленная и быстрая. Их скорости мало отличаются от средней скорости электронов.

Подробный вывод уравнений связанных волн дается в описании задачи 2. В общем случае получается система четырех урав-

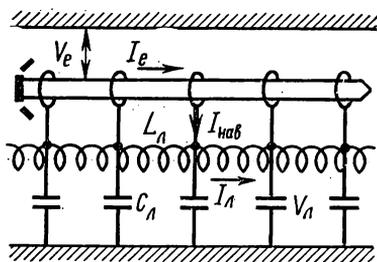


Рис. 2. Эквивалентная схема ЛБВ

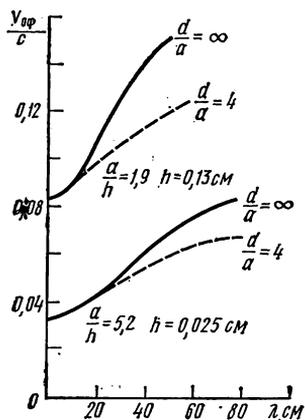


Рис. 3. Дисперсионные кривые спирали ЛБВ

нений первого порядка, описывающих взаимодействие двух волн электронного пучка — медленной и быстрой и двух волн замедляющей системы — прямой и обратной.

В маломощных ЛБВ замедляющие структуры имеют положительную дисперсию, электронный поток взаимодействует с прямой волной. Структура представляется эквивалентным фильтром низких частот, возбуждаемым наведенным током (рис. 2).

Замедляющей системой ЛБВ малой мощности обычно служит проводящая спираль, помещенная в волновод. Как и для всякой периодической структуры, поле спирали представляется в виде суммы пространственных гармоник. Однако ввиду «геометрического» характера замедления высшие пространственные гармоники малы, имеют подчиненное значение и в дальнейшем не рассматриваются. Фазовая скорость основной волны (нулевой простран-

ственной гармонике) в широком интервале частот дается выражением

$$v_{0\phi} = ch/2\pi a, \quad (1)$$

где h и a — шаг спирали и ее радиус; c — скорость света в свободном пространстве. Физический смысл указанного соотношения состоит в следующем: за время распространения волны вдоль одного витка со скоростью c на расстояние $2\pi a$ фаза волны вдоль оси спирали проходит меньший путь, равный шагу спирали h .

В применении к реальной спирали соотношение (1) приближенное, так как не учитывает влияния зарядов и токов различных витков друг на друга, что приводит к зависимости фазовой скорости основной волны от частоты сигнала, т. е. к появлению дисперсии. Типичные дисперсионные кривые спирали, находящейся в волноводе радиуса d , приведены на рис. 3. Параметрами кривых служат отношения d/a и h/a .

Эквивалентный фильтр нижних частот, заменяющий спирально проводящую систему, содержит последовательно включенные индуктивные сопротивления $i\omega L_{\pi}$ и параллельные емкостные проводимости $i\omega C_{\pi}$ (L_{π} и C_{π} — погонные индуктивности и емкости). Постоянная распространения дается формулой $\beta_{\pi} = \omega \sqrt{L_{\pi} C_{\pi}}$. Волновое сопротивление имеет вид $Z_{\pi} = \sqrt{L_{\pi}/C_{\pi}}$. Для нахождения L_{π} и C_{π} приравниваются постоянные распространения реальной спирали и эквивалентного фильтра, а также волновое сопротивление Z_{π} сопротивлению связи спирали. Сопротивление связи выражается через квадрат продольной составляющей напряженности электрического поля, мощность волны и ее постоянную распространения (см. задачу 2).

Система уравнений четырех связанных волн ЛБВ имеет вид [1]

$$\left[\frac{d}{dz} + i(\beta_e \mp \beta_q) \right] a_{\pm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_{\pi}}{Z_n}} \frac{d}{dz} (A_+ + A_-), \quad (2a)$$

$$\left[\frac{d}{dz} \pm i\beta_{\pi} \right] A_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_{\pi}}{Z_n}} \frac{d}{dz} (a_+ - a_-), \quad (26)$$

где a_- и a_+ — комплексные амплитуды медленной и быстрой волн пространственного заряда с постоянными распространения $\beta_e + \beta_q$ и $\beta_e - \beta_q$; $\beta_q = \omega_q/v_0$, ω_q — частота плазменных колебаний с учетом спирали; A_+ и A_- — комплексные амплитуды прямой и обратной волн замедляющей системы с постоянными распространения $\pm \beta_{\pi}$; Z_{π} — волновое сопротивление пучка, рассматриваемого в качестве линии передачи, $Z_n = \frac{2V_0}{I_0} \frac{\omega_q}{\omega}$; V_0 — ускоряющий потенциал; I_0 — ток пучка.

Комплексные амплитуды определяются соотношениями

$$a_{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{2Z_n}} (V_e \pm Z_n I_e), \quad A_{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{2Z_n}} (V_{\pi} \pm Z_n I_{\pi}), \quad (3)$$

где V_e и I_e — напряжение и ток эквивалентной линии передачи, заменяющей пучок (кинетический потенциал и амплитуда первой гармоники тока); V_{π} и I_{π} — напряжение и ток эквивалентного фильтра (см. рис. 2).

Дальнейшее теоретическое описание процессов в ЛБВ строится при упрощающих предположениях:

энергообмен в ЛБВ определяется связью прямой волны A_+ и двух волн электронного пучка a_{\pm} ;

выполняется условие слабой связи $1/2 \sqrt{Z_{\pi}/Z_{\pi}} \ll 1$.

При слабой связи волн амплитуды A_+ и a_{\pm} медленно меняются с координатой. В правых частях системы уравнений (2) справедлива замена $d/dz = -i\beta_e$. Уравнения (2) приобретают вид

$$\left[\frac{d}{dz} + i(\beta_e \mp \beta_q) \right] a_{\pm} = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{Z_{\pi}}{Z_{\pi}}} \beta_e A_+, \quad (4a)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + i\beta_{\pi} \right) A_+ = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{Z_{\pi}}{Z_{\pi}}} \beta_e (a_+ - a_-). \quad (4б)$$

Решение стационарных уравнений (4) производится для граничных условий на входе ЛБВ ($z=0$) $a_{\pm}(0) = 0$ $|A_+(0)| = A_{вх}$, соответствующих возбуждению ЛБВ гармоническим сигналом $A_{вх} e^{i\omega t}$ на входе замедляющей системы. Для дальнейшего анализа проведем замену параметров

$$\beta_{\pi} = \beta_e (1 + Cb), \quad \beta_q = \beta_e C \sqrt{4QC}, \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_{\pi}}{Z_{\pi}}} = \frac{C}{\sqrt{2} (4QC)^{1/4}},$$

где b — параметр расстройки скоростей; C — параметр усиления теории ЛБВ, $C^3 = \frac{Z_{\pi} I_0}{4V_0}$; QC — параметр пространственного заряда.

Решение (4) будем искать в виде $e^{-\Gamma z}$, где $\Gamma = i\beta_e (1 + iC\delta)$. Условие разрешимости (4) — обращение в нуль детерминанта системы. Это приводит к кубическому уравнению относительно поправки к постоянной распространения:

$$(\delta^2 + 4QC)(i\delta - b) = 1. \quad (5)$$

Корни (5) записываются в виде двух комплексных величин $\delta_{1,2} = \pm x_{1,2} + iy_{1,2}$, соответствующих возрастающей и затухающей волнам, и действительной величины δ_3 , относящейся к волне, распространяющейся с постоянной амплитудой. Постоянная возрастающей волны дана в виде графиков $x_1(b)$ (рис. 4) для $QC = 0; 0,25; 0,5; 1,0$. При малых QC максимальное значение x_1 равно $\sqrt{3}/2$. С увеличением QC фазовые скорости медленной и быстрой волн пучка $v_{\phi \mp} = \frac{v_0}{1 \pm C \sqrt{4QC}}$ начинают все более отличаться, и при $QC \gg 1$ прямая волна спираль взаимодействует главным обра-

зом с медленной волной пучка. Усиление падает и наблюдается только при положительных расстройках ($b > 0$).

Двухволновой механизм усиления ЛБВ при $QC \gg 1$ может быть легко проанализирован. Уравнения двух связанных волн A_+ и a_-

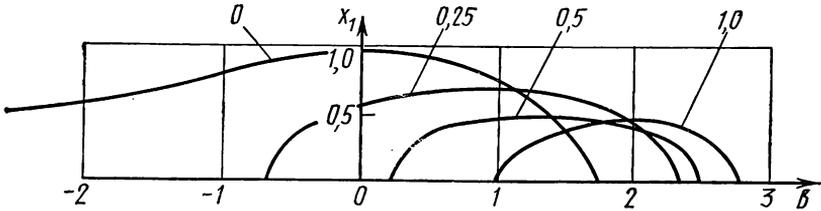


Рис. 4. Зависимость параметра нарастающей волны x_1 от расстройки b

при подстановке $e^{-\Gamma z}$ позволяют найти постоянные распространения:

$$\delta_{1,2} = \pm x_{1,2} + iy_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{4QC}} - \left(\frac{b - \sqrt{4QC}}{2}\right)^2} - i\left(\frac{b + \sqrt{4QC}}{2}\right). \quad (6)$$

Если выполняются условия синхронизма медленной волны и волны спирали $\beta_{\pi} = \beta_e + \beta_q$, $b = \sqrt{4QC}$, то постоянная $|x_{1,2}|$ достигает максимума, $|x_{1,2}|_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{4QC}}}$. Амплитуда волны нарастает с координатой

$$e^{-\text{Re}\Gamma_1 z} = e^{\frac{\beta_e C z}{\sqrt{2}(4QC)^{1/4}}}.$$

Волна в замедляющей структуре переносит положительную мощность в направлении оси z . Медленная волна пучка в системе координат, движущейся со скоростью v_0 , распространяется в отрицательном направлении ($-z$). Увеличение ее амплитуды приводит в среднем к уменьшению потока энергии электронов. Так как групповая скорость пучка всегда положительна, $v_{\text{гр}} = v_0$, медленной волне следует приписать отрицательную энергию $E_- < 0$ и мощность $P_{e-} = E_- v_{\text{гр}} < 0$. В теории связанных волн показывается, что в пучке сохраняется полная безразмерная мощность P , равная сумме мощностей взаимодействующих волн:

$$P = P_+ + P_{e-} = (|A_+|^2 - |a_-|^2). \quad (7)$$

Экспоненциальное увеличение амплитуды $|A_+|$ должно сопровождаться экспоненциальным возрастанием по модулю амплитуды медленной волны $|a_-|$.

При синхронизме с быстрой волной $b = -\sqrt{4QC}$ связь волн A_+ и a_+ сопровождается не усилением, а периодической перекачкой энергии между волнами (как в направленном ответвителе).

Общее решение двухволновой задачи при учете формулы (4а) имеет вид

$$a_- = d_1 e^{-\Gamma_1 z} + d_2 e^{-\Gamma_2 z}, \quad (8)$$

$$A_+ = i\sqrt{2}(4QC)^{\frac{1}{4}} [d_1 (\delta_1 + i\sqrt{4QC}) e^{-\Gamma_1 z} + d_2 (\delta_2 + i\sqrt{4QC}) e^{-\Gamma_2 z}],$$

где d_1 и d_2 — постоянные интегрирования. Используя граничные условия на входе ($z=0$)

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 0, \quad A_+(0) = A_{\text{вх}} = \\ &= i\sqrt{2}(4QC)^{\frac{1}{4}} [d_1 (\delta_1 + i\sqrt{4QC}) + d_2 (\delta_2 + i\sqrt{4QC})], \end{aligned}$$

можно найти d_1 и d_2 . Выражения для мощностей двух взаимодействующих волн спирали и пучка принимают вид

$$P_+(z) = |A_+|^2 = A_{\text{вх}}^2 \left(1 + \frac{\text{sh}^2 \beta_e C x_1 z}{2\sqrt{4QC} x_1^2} \right), \quad (9)$$

$$P_{e-}(z) = A_{\text{вх}}^2 - P_+(z).$$

На больших расстояниях мощность волны в спирали $P_+(z)$ быстро нарастает. На выходе ЛБВ при $z=L$ и $b = \sqrt{4QC}$

$$P_+(L) = A_{\text{вх}}^2 \exp^2 (\beta_e C x_1 L). \quad (10)$$

Коэффициент усиления ЛБВ без поглотителя при условии синхронизма $b = \sqrt{4QC}$ дается выражением

$$G \text{ (дБ)} = 10 \lg \frac{P_+(L)}{P_+(0)} \approx 54,6 x_{1m} C N - 6, \quad (11)$$

где $x_{1m} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{4QC}}}$, $N = \frac{\beta_e L}{2\pi}$ — число электронных длин волн, укладываемых в спирали, за вычетом поглотителя.

По мере усиления мощность пучка уменьшается на величину P_{e-} , но не может стать отрицательной. Таким образом, линейная теория справедлива, пока мощность медленной волны по модулю гораздо меньше постоянной составляющей мощности пучка, $|P_{e-}| \ll P_0 = I_0 V_0$.

При выводе формулы (11) не учитывались распределенные потери в спирали и потери в локальном поглотителе. Кроме того, она применима лишь при условии $QC \gg 1$, в то время как в реальных условиях работы лампы возможны режимы, для которых $QC \ll 1$.

Все это может быть учтено при более полном трехволновом решении задачи для ЛБВ с поглотителем, которое (например, [1—3]) дает выражение для коэффициента усиления ЛБВ (в децибелах):

$$G = 54,6 \left(x_1 - \frac{d_x}{3} \right) CN - 14,5, \quad (12)$$

где x_1 — параметр нарастающей волны; d_x — параметр «холодных» потерь в спирали, зависящий от конструкции лампы (обычно

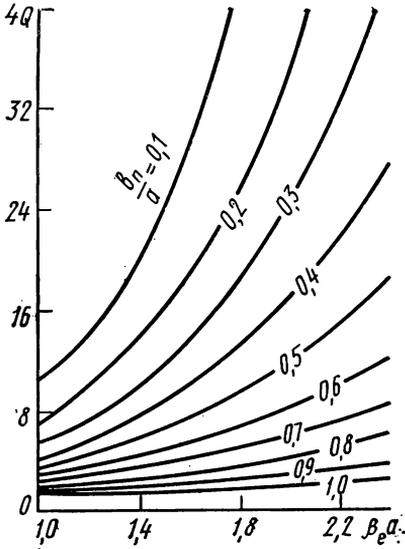


Рис. 5. Зависимость параметра $4Q$ от $\beta_e a$

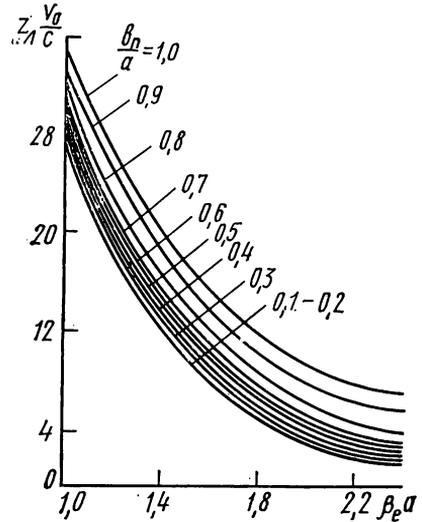


Рис. 6. Зависимость $\frac{v_0}{c} Z_L$ от $\beta_e a$

$d_x \sim 1$). Коэффициент $1/3$ означает, что потери в ЛБВ меньше «холодных» потерь. Это легко объяснить, так как энергия поля передается не только по спирали, но и по пучку. Зависимость x_1 от QC при условии синхронизма и для $QC < 1$ записывается в виде простого выражения

$$x_{1m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{4}{3} QC \right),$$

соответствующего огибающей, проводимой по максимумам кривых (см. рис. 4). В трехволновом режиме усиления мощность входного сигнала распределяется по большему числу волн, чем в двухволновом режиме, поэтому в формуле (12) параметр начальных потерь $G_{\text{нп}} = -14,5$ превышает соответствующий параметр $G_{\text{нп}} = -6$ формулы (11).

Для вычисления коэффициента усиления G (дБ) по формуле (12) необходимо знать параметры $4QC$ и C . Параметр $4QC$ находится по данным рис. 5 для различных отношений b_{π}/a , где b_{π} — радиус электронного пучка. Параметр C зависит от сопротивления Z_{π} , т. е. $C = \sqrt[3]{I_0 Z_{\pi} / 4V_0}$. Зависимость $Z_{\pi} v_0 / c$ от $\beta_e a$ приведена на рис. 6;

$$c/v_0 = 505/\sqrt{v_0(B)}.$$

§ 3. Коэффициент шума

Коэффициент шума ЛБВ определяется выражением

$$F = 1 + \left| \frac{A_{+1}^{(e)}(L)}{A_{+1}^{(a)}(L)} \right|^2, \quad (13)$$

где $|A_{+1}^{(e)}|^2$ — мощность, переносимая возрастающей волной замедляющей системы, зависящая от флуктуаций тока $I_e(0)$ и скорости $\tilde{v}_e(0)$ (кинетического потенциала $V_e(0) = \frac{m}{e} v_0 \tilde{v}_e(0)$) на входе в замедляющую систему при $A_{\text{вх}} = 0$; $|A_{+1}^{(a)}|^2$ — мощность возрастающей волны, возбуждаемая только шумом эквивалентной антенны, согласованной со входом ЛБВ и находящейся при комнатной температуре. Мощность шумов антенны дается соотношением

$$P_{\text{ш}} = kT \Delta f, \quad (14)$$

где Δf — полоса пропускания ЛБВ. Мощность $P_{\text{ш}}$ определяет начальную амплитуду прямой волны на входе спирали $|A_+(0)| = \sqrt{P_{\text{ш}}}$.

Шум в пучке определяется дробовым эффектом на катоде, эффектами токораспределения (оседания) на электроды и спираль, пульсациями электронных траекторий при недостаточно хорошей фокусировке электронов.

Для нахождения амплитуд $A_{+1}^{(e)}(L)$ и $A_{+1}^{(a)}(L)$ решается задача о возбуждении трех волн на входе ЛБВ ($z=0$) с соответствующими граничными условиями. Вместо задания кинетического потенциала $V_e(0)$ и тока $I_e(0)$ в теории связанных волн задаются амплитуды $a_+(0)$ и $a_-(0)$. Связь $V_e(0)$ и $I_e(0)$ с $a_+(0)$ и $a_-(0)$ следует из определения комплексных амплитуд (3):

$$a_{\pm}(0) = \frac{1}{2\sqrt{2Z_{\pi}}} (V_e(0) \pm Z_{\pi} I_e(0)). \quad (15)$$

Переменные составляющие напряженности электрического поля, тока и скорости, заданные во входном сечении спирали ЛБВ, возбуждают три волны с постоянными Γ_i ($i=1, 2, 3$), находимыми при решении дисперсионного уравнения (5).

Условие непрерывности переменных составляющих в сечении $z=0$ при учете трех волн можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 A_+(0) &= \sum_{i=1}^3 A_{+i}(0), \\
 a_+(0) &= \sum_{i=1}^3 a_{+i}(0) = \sum_{i=1}^3 \frac{A_{+i}(0)}{g_{+i}}, \\
 a_-(0) &= \sum_{i=1}^3 a_{-i}(0) = \sum_{i=1}^3 \frac{A_{+i}(0)}{g_{-i}},
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

где g_{+i} и g_{-i} находятся при использовании уравнений (4а), записанных для волн номера i , и замене d/dz на $-\Gamma_i$ ($g_{\pm i} = \frac{A_{+i}}{a_{\pm i}}$). Разрешая систему уравнений (16), находятся амплитуды возрастающих волн $A_{+1}^{(a)}$ и $A_{+1}^{(e)}$.

В электронной пушке дробовые шумы преобразуются. Пушка ЛБВ (кроме специальных малошумящих ламп) работает в режиме ограничения тока пространственным зарядом и имеет минимум потенциала у катода. В теории шумов установлено, что средний квадрат флуктуации скорости в минимуме потенциала зависит от температуры катода T_K и равен [4]

$$\tilde{v}_e^2 = \gamma(4 - \pi) \frac{e}{m} \frac{kT_K \Delta f}{I_0},
 \tag{17}$$

где γ — коэффициент подавления шумов в минимуме потенциала ($\gamma < 1$).

Максимальное относительное значение флуктуаций скорости на выходе пушки \tilde{v}_m^2 зависит от угла пролета в ней Θ_1 [4]:

$$\rho_m = \frac{\tilde{v}_m^2}{\tilde{v}_e^2} = 1 + \Theta_1^2 4QC^3.
 \tag{18}$$

Область между входом в спираль и последним электродом пушки является областью дрейфа. При движении в ней электронов спектральные плотности флуктуаций тока и скорости периодически изменяются, образуя картину стоячих волн плазменных колебаний, причем волны тока и скорости сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Вследствие этого при полной корреляции флуктуаций тока и скорости в поперечном сечении пучка, где флуктуации скорости максимальны, флуктуации тока равны нулю. Пусть флуктуации скорости максимальны в сечении с координатой $-z_0$ относительно входа в спираль и равны \tilde{v}_m^2 . Тогда флуктуации скорости (кинетического потенциала) и тока на входе в спираль ($z=0$) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}_e(0) &= \sqrt{\tilde{v}_m^2} \cos \frac{\omega_q}{v_0} z_0 \exp(-i\beta_e z_0), \quad V_e(0) = \frac{m}{e} v_0 \tilde{v}_e(0), \\ I_e(0) &= -i \frac{\omega}{\omega_q} \frac{I_0}{V_0} \sqrt{\tilde{v}_m^2} \sin \frac{\omega_q}{v_0} z_0 \exp(-i\beta_e z_0). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим (19) в (15) и (15) в (16). Воспользуемся условием $A_{\text{вх}}=0$. После решения системы уравнений (16) находится амплитуда $|A_{\pm 1}^{(e)}(0)|$. Далее при условии $a_{\pm}(0)=0$ $A_{\text{вх}}=\sqrt{P_{\text{ш}}}$ находится $|A_{\pm 1}^{(a)}(0)|$. Выражение для коэффициента шума (13) принимает вид (пренебрегаем дополнительными источниками шумов)

$$F = 1 + \frac{\gamma}{2} (4 - \pi) \frac{T_{\text{к}}}{T} \frac{p_m}{C} B(z_0), \quad (20)$$

где функция $B(z_0)$ периодична по z_0 с периодом $\Lambda_q = \pi \frac{v_0}{\omega_q}$ — длиной стоячей волны плазменных колебаний. В выражении для $B(z_0)$ учтены коэффициенты $g_{\pm i}$.

Детальный анализ хода зависимостей $B(z_0)$ при различных величинах QC показывает, что минимальное значение B_{min} слабо зависит от изменения QC и при его вариации от нуля до единицы убывает от 0,25 до 0,2. Отношение $B_{\text{max}}/B_{\text{min}}$ изменяется значительно сильнее и быстро убывает с увеличением QC (рис. 7).

Минимальное значение коэффициента шума получается из (20) при учете (18)

$$F_{\text{min}} = 1 + \frac{\gamma}{2} (4 - \pi) \frac{T_{\text{к}}}{T} \frac{1 + \Theta_1^2 4QC^3}{C} B_{\text{min}}. \quad (21)$$

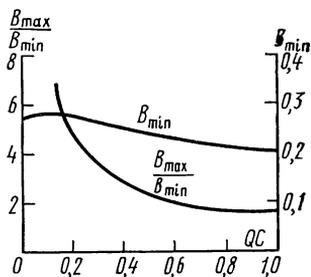


Рис. 7. Зависимость шумовых параметров $B_{\text{max}}/B_{\text{min}}$ и B_{min} от QC

§ 4. Влияние нелинейных процессов на усиление в ЛБВ

Важной характеристикой ЛБВ малой мощности является динамический диапазон — диапазон изменения мощности входного сигнала, при котором усиление остается приблизительно постоянным. В режиме слабых сигналов коэффициент усиления не зависит от величины входного сигнала. При увеличении мощности выше определенного уровня начинают сказываться нелинейные свойства электронного пучка, и усиление падает. Спектр сигнала обогащается комбинационными составляющими.

При больших сигналах линейная теория ЛБВ несправедлива. Если оставаться в рамках аналитического подхода к нелинейной

теории, то в исходных уравнениях необходимо дополнительно учитывать произведения переменных величин (например, $\tilde{\rho}\tilde{v}$ в выражении для плотности тока $i = \rho v = \rho_0\tilde{v} + v_0\rho + \tilde{\rho}\tilde{v}$). Такое построение теории удовлетворительно только при малых нелинейных поправках. Современная нелинейная теория ЛБВ, справедливая при любых нелинейностях, основана на использовании дискретных моделей электронного пучка (модели крупных частиц). Наибольшее распространение получила одномерная дисковая модель аксиально-симметричного потока. В этой модели участок пучка в одну электронную длину волны разбивается на определенное число заряженных сечений — дисков и прослеживается движение дисков от катода до коллектора. Знание положения частиц в каждый момент времени позволяет найти гармоники тока и решать задачу о возбуждении поля спирали. Нелинейная теория дала возможность определить зависимость усиления от мощности входного сигнала, рассчитать КПД ЛБВ, найти изменение амплитуды и фазы полей вдоль системы и т. д. [5].

1. Зависимость коэффициента усиления от мощности входного сигнала. В нелинейной теории установлено, что по мере увеличения мощности входного сигнала усиление ЛБВ падает, а мощность сигнала на выходе достигает максимума. Его величина зависит от многих факторов, однако для большинства ламп изменяется в небольших пределах около значения

$$P_m = |A_{+1}(L)|^2 = \kappa C I_0 V_0, \quad (22)$$

где κ зависит от параметров пучка и замедляющей системы. Обычно $\kappa \sim 1$. Электронный КПД ЛБВ $\eta_e = P_m / I_0 V_0$ по порядку величины близок к параметру усиления C . Качественная оценка КПД может быть получена, если принять во внимание, что

$$P_m \simeq |P_e| = \frac{1}{2} (I_e)_m^2 Z_n, \quad Z_n = \frac{V_0}{I_0} 2C \sqrt{4QC}.$$

Отсюда

$$\eta_e = \left(\frac{I_e}{I_0} \right)_m^2 C \sqrt{4QC}.$$

Так как для большинства ламп $4QC \sim 1$ и $I_e/I_0 \sim 1$, то $\eta_e \sim C$. Зависимость коэффициента усиления по мощности от уровня входного сигнала при малых нелинейных амплитудных искажениях представляется в виде разложения в ряд по степеням относительных значений мощности входного сигнала (в децибелах):

$$G = G_0 + G_1 P_{\text{вх}}^2 + G_2 P_{\text{вх}}^3 + \dots, \quad (23)$$

где G_0 дается выражением (12), $G_1 < 0$, $P_{\text{вх}} = 10 \lg \left(\frac{|A_+(0)|^2}{I_0 V_0} \right)$. Если выходной сигнал близок к максимальному, выполняются прибли-

женные соотношения $P_m(\text{дБ}) = G_0 P_{\text{вхп}}$, $G_1 P_{\text{вхп}}^2 \sim 1$ дБ, которые можно использовать для оценки параметра G_1 :

$$G_1 \cong \frac{1}{P_{\text{вхп}}^2}, P_m [\text{дБ}] = 10 \lg \left(\frac{|A_{+1}(L)|^2}{I_0 V_0} \right), G_1 \cong \left(\frac{G_0}{10 \lg \kappa C} \right)^2. \quad (24)$$

2. Фазовые искажения и преобразование спектра близких частот. Наряду с амплитудными искажениями, описываемыми формулой (23), большую роль играют фазовые искажения — зависимость фазы выходного сигнала от амплитуды сигнала на входе. Нелинейный фазовый сдвиг $\Delta\psi_{\text{н}}$ всегда имеется в ЛБВ, даже при слабых сигналах, когда амплитудные искажения пренебрежимо малы. Механизм сдвига фаз можно понять, рассматривая энергетические соотношения. По мере увеличения мощности возрастающей волны в ЛБВ $P_+(z) = |A_{+1}(z)|^2$ средняя мощность пучка убывает на такую же величину $\Delta P_e(z) = -|A_{+1}(z)|^2$. Торможение потока может быть охарактеризовано изменением среднего ускоряющего потенциала $\overline{\Delta V_0(z)}$, которое связано с $\overline{\Delta P_e(z)}$ соотношением

$$\overline{\Delta V_0(z)} I_0 = \overline{\Delta P_e(z)}.$$

Амплитуда возрастающей волны в сечении z выражается через амплитуду на выходе

$$|A_{+1}(z)| = |A_{+1}(L)| e^{\text{Re} \Gamma_1 (L-z)}.$$

Для относительного изменения потенциала потока вдоль лампы получаем соотношение

$$\frac{\overline{\Delta V_0(z)}}{V_0} = - \frac{|A_{+1}(z)|^2}{I_0 V_0} = - \frac{|A_{+1}(L)|^2}{I_0 V_0} e^{2\text{Re} \Gamma_1 (L-z)} = - \eta_e e^{2\text{Re} \Gamma_1 (L-z)}.$$

Изменение средней скорости на участке Δz изменяет фазу сигнала на величину $\Delta\psi_1(z)$:

$$-\Delta\psi_1(z) = \Delta \text{Im} \Gamma_1 \Delta z \cong \Delta \beta_e \Delta z = - \frac{\Delta v_0}{v_0} \beta_e \Delta z \cong - \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta V_0(z)}}{V_0} \beta_e \Delta z. \quad (25)$$

Общий нелинейный фазовый сдвиг $\psi_{\text{н}}$ получается после интегрирования (25) по всей длине лампы:

$$\psi_{\text{н}} = \int_0^L d\psi_1(z) = - \frac{1}{2} \eta_e \beta_e \int_0^L \exp(2\text{Re} \Gamma_1 (L-z)) dz \cong \frac{\eta_e \beta_e}{4 \text{Re} \Gamma_1}.$$

При малых QC в центре области синхронизма

$$\text{Re} \Gamma_1 = - \beta_e C x_{1m} = - \frac{\sqrt{3}}{2} \beta_e C.$$

Изменение фазы $\psi_{\text{н}}$ определяется КПД и параметром усиления

$$\psi_{\text{н}} = -0,3 \eta_e / C. \quad (26)$$

Если на вход ЛБВ подается сложный узкополосный сигнал, то нелинейный сдвиг фаз (26) приведет к появлению комбинационных составляющих. Покажем это на примере преобразования спектра двух сигналов равных амплитуд и близких частот $\omega_{1,2} = \omega_0 \mp \Omega/2$, $A_{\text{вх}}(t) = A_0(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$. На входе ЛБВ результирующий сигнал медленно изменяется по амплитуде $A_{\text{вх}}(t) = 2A_0 \cos \Omega/2t \cos \omega_0 t$. На выходе лампы изменение по амплитуде сопровождается периодическим увеличением фазы на величину ψ_n , определяемую формулой (26):

$$-\psi_n = \frac{0,3 |A(L)|^2}{Cl_0 V_0} = \frac{1,2 A_0^2 G_A^2}{Cl_0 V_0} \cos^2 \frac{\Omega}{2} t = m(1 + \cos \Omega t),$$

где $G_A = 10 \frac{G_0}{20}$ — усиление по амплитуде, $m = \frac{0,6 A_0^2 G_A^2}{Cl_0 V_0}$. Выходной сигнал промодулирован по амплитуде и фазе

$$A_{\text{вых}}(t) = 2A_0 G_A \cos \frac{\Omega}{2} t \cos(\omega_0 t - m - m \cos \Omega t). \quad (27)$$

После тригонометрических преобразований и использования разложений

$$\cos(m \cos \Omega t) = J_0(m) - 2J_2(m) \cos 2\Omega t + 2J_4(m) \cos 4\Omega t + \dots$$

$$\sin(m \cos \Omega t) = 2J_1(m) \cos \Omega t - 2J_3(m) \cos 3\Omega t + 2J_5(m) \cos 5\Omega t + \dots$$

выходной сигнал представляется в виде спектра основных частот ω_1 и ω_2 и частот комбинационных составляющих $\omega_1 - k\Omega$ и $\omega_2 + k\Omega$ ($k=1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} A_{\text{вых}}(t) / A_0 G_A = & J_0(m) [\cos(\omega_1 t - m) + \cos(\omega_2 t - m)] - \\ & - J_1(m) [\sin(\omega_1 t - m) + \sin(\omega_2 t - m) + \\ & + \sin(\omega_1 t - \Omega t - m) + \sin(\omega_2 t + \Omega t - m)] + \\ & + J_2(m) [\cos(\omega_1 t - \Omega t - m) + \cos(\omega_2 t + \Omega t - m) + \\ & + \cos(\omega_1 t - 2\Omega t - m) + \cos(\omega_2 t + 2\Omega t - m)] - \\ & - J_3(m) [\sin(\omega_1 t - 2\Omega t - m) + \sin(\omega_2 t + 2\Omega t - m) + \\ & + \sin(\omega_1 t - 3\Omega t - m) + \sin(\omega_2 t + 3\Omega t - m)] + \dots \quad (28) \end{aligned}$$

§ 5. Описание установки

Блок-схема установки для экспериментального изучения ЛБВ показана на рис. 8. Установка включает в себя: 1 — ЛБВ, 2 — волноводный тракт и арматуру ЛБВ, 3 — генератор шума, 4 — блок питания и индикации, 5 — два генератора стандартных сигналов (ГСС), 6 — спектр-анализатор, 7 — развязывающие элементы.

1. Лампа с бегущей волной. Использованная в задаче ЛБВ представляет собой широкополосный высокочувствительный усилитель со сплошным аксиально-симметричным электронным пучком, проходящим внутри спиральной замедляющей системы см. рис. 1). Высокочастотный сигнал, подаваемый на вход ЛБВ, воз-

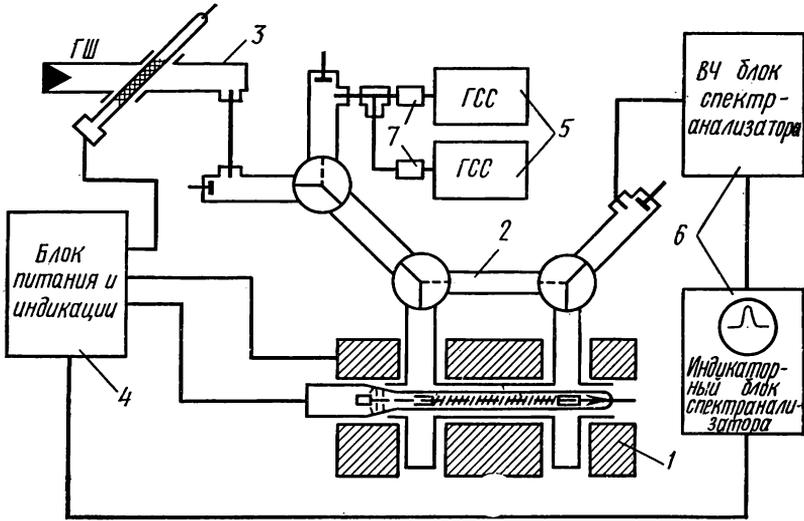


Рис. 8. Блок-схема установки

буждает антенну, соединенную с началом спирали. Волна в спирали замедляется по сравнению со скоростью света в вакууме примерно в 30 раз. Усиление лампы достигает максимума при ускоряющем потенциале около 350 В. Точное значение потенциала синхронизации зависит от тока луча, величины входного сигнала и напряженности магнитного поля.

При малом входном сигнале (менее микроватта) ЛБВ работает в режиме линейного усиления. Коэффициент усиления не зависит от мощности входного сигнала. При сигналах на входе в несколько десятков микроватт и более ЛБВ переходит в нелинейный режим, усиление падает, выходной сигнал может достичь насыщения.

Коэффициент шума зависит от дробовых шумов пушки и шумов токораспределения, возникающих из-за пульсаций электронных траекторий и оседаний части электронов на электроды лампы. При определенных величинах потенциалов на управляющем электроде и первом аноде пушки пульсации становятся минимальными и вклад шумов токораспределения невелик. Если изменить потенциал какого-либо электрода, то зависимость коэффициента шума от потенциала будет проходить через минимум. Проводя на-

стройку, можно достигнуть абсолютного минимума коэффициента шума.

2. Волноводный тракт и арматура ЛБВ. Волноводный тракт включает в себя волноводно-коаксиальные переходы, три переключателя, два перехода волновод-вход (или выход) ЛБВ и развязывающие элементы (см. рис. 8). Высокочастотные колебания, поступающие через развязывающие элементы и тройник от ГСС или от генератора шума, изменением положения переключателей могут быть поданы на ЛБВ или непосредственно, минуя ЛБВ, на вход спектр-анализатора.

Арматура ЛБВ, помимо волноводов входа и выхода, включает в себя катушку соленоида, центральную трубку, куда вставляется ЛБВ, служащую одновременно волноводом для спирали, механизм центрирования ЛБВ с помощью винтов, щиток распределения и цоколь ЛБВ.

3. Генератор шума. Генератором шума служит газоразрядная лампа ГШ, помещенная в отдельном волноводе (см. рис. 8). Для уменьшения отражений лампа размещена под острым углом к широкой стенке волновода, а к концу волновода подключена согласованная нагрузка. Разряд рассматривается в качестве источника белого шума с температурой 19 000 К, определяемой температурой электронного газа. Отношение спектральной плотности шума разряда к спектральной плотности шума согласованной нагрузки при комнатной температуре равно 65.

4. Блок питания и индикации. Блок включает источники питания ЛБВ и генератора шума, цепь регулировки тока соленоида и компенсационное измерительное устройство. Напряжения питания ЛБВ могут регулироваться около оптимальных значений: на управляющем электроде 10 В, на первом аноде 60 В, на втором аноде, соединенном со спиралью, 350 В. На коллекторе поддерживается неизменное напряжение 450 В.

С выхода источника питания генератора шума снимаются напряжения накала и напряжения, подаваемые на анод газоразрядной лампы. Для облегчения зажигания разряда на анод подается импульс повышенного напряжения.

В состав цепи регулировки тока соленоида входят реостат, амперметр и выключатель цепи, выведенные на переднюю панель. При изменении сопротивления реостата ток соленоида меняется от 1 до 2,5 А. Рабочий ток соленоида около 2 А.

Компенсационное измерительное устройство 14 (рис. 9) служит для измерения сигнала на выходе второго детектора спектр-анализатора. Отклонение стрелки микроамперметра устройства в отсутствие компенсации дает сумму значений постоянных составляющих собственного шума спектр-анализатора и усиленного входного сигнала. Компенсация собственного шума производится подключением к микроамперметру постоянного напряжения, вызывающего обратное отклонение стрелки. Отклонения регулируются специальными потенциометрами. Чувствительность измерительно-

го устройства может быть понижена включением шунта микроамперметра. Для увеличения чувствительности при измерении со слабыми сигналами предусмотрено выключение частотной модуляции гетеродинного клистрона спектр-анализатора 7.

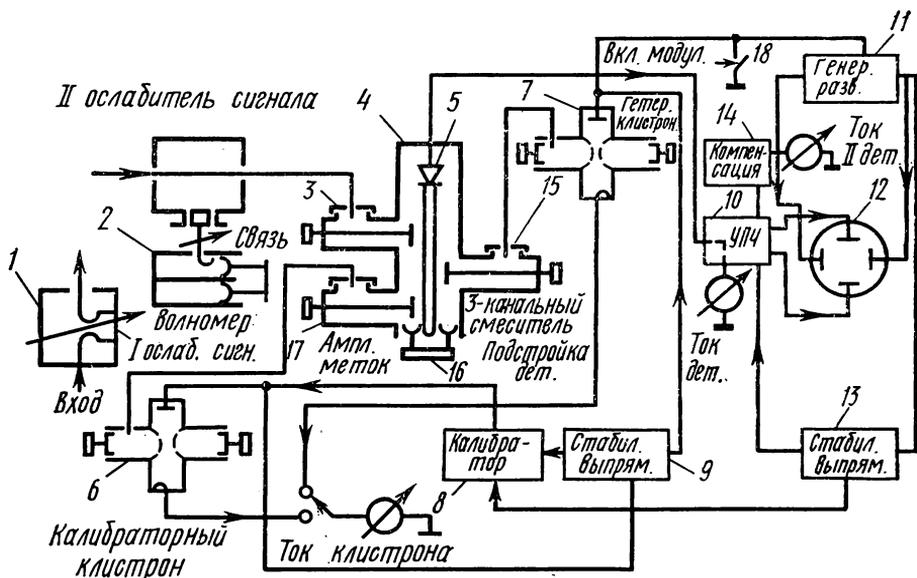


Рис. 9. Блок-схема спектр-анализатора

5. Генераторы стандартных сигналов. В задаче использованы два одинаковых генератора стандартных сигналов 10-см диапазона длин волн. Их следует включать в режиме калиброванных непрерывных колебаний. Регулировка мощности осуществляется аттенуатором в пределах от 10^{-4} до 10^{-13} Вт.

6. Спектр-анализатор позволяет получать осциллографическое изображение спектра в координатах «частота — мощность». Его разрешающая способность по частоте — 60 КГц, определяется полосой пропускания усилителя промежуточной частоты. Чувствительность прибора 10^{-9} Вт.

Спектр-анализатор состоит из двух блоков: высокочастотного и индикаторного (см. рис. 8).

Исследуемый высокочастотный сигнал поступает через ослабители I и II (см. рис. 9) во входное устройство анализатора и смешивается в кристаллическом смесителе 4 с сигналом гетеродина 7. Начальное затухание первого ослабителя 20 дБ, затухание во втором ослабителе 10—30 дБ.

Первый гетеродин приемника, работающий на отражательном клистроне, модулируется по частоте пилообразным напряжением,

которое поступает от генератора 11 горизонтальной развертки луча электронно-лучевой трубки 12. При подаче на вход спектроанализатора сложного высокочастотного сигнала через усилитель промежуточной частоты приемника 10 проходят те составляющие спектра, которые в данный момент времени образуют с меняющейся частотой первого гетеродина промежуточную частоту 40 МГц. Для получения узкой полосы пропускания 60 КГц применяется второе преобразование частоты. Разность частот между характерными точками спектра на экране осциллографа определяется с помощью меток от калибраторного клистрона 6.

§ 6. Упражнения

1. Включение и настройка ГСС и спектр-анализатора. Перед включением установки подключается шунт компенсационного измерительного устройства.

Включите один из генераторов стандартных сигналов для работы в режиме непрерывных колебаний и спектр-анализатор в режиме наблюдения областей генерации. Волноводные переключатели переведите в положение, соответствующее подаче колебаний с выхода генератора на вход спектроанализатора, минуя ЛБВ. Подключите выход ЛБВ на вход второго ослабителя спектроанализатора.

Включите модуляцию в спектроанализаторе. Выключите калибраторный клистрон. Установите максимальное значение частотной девиации. Настройте гетеродинный клистрон на генерацию колебаний с частотой около 3000 МГц.

Картина областей генерации клистрона по вертикали может выйти за пределы экрана. Уменьшите сигнал изменением связи со смесителем 15 (см. рис. 9). Регулируйте усиление промежуточной частоты до появления на экране собственных шумов спектроанализатора.

Установите частоту колебаний ГСС примерно равной частоте гетеродинного клистрона. Регулируйте затухание в ГСС до появления на экране осциллографа узкой спектральной линии. Проверьте, что сигнал идет по основному каналу. Сигнал зеркального канала УПЧ будет иметь гораздо меньшую амплитуду. Изменяя частоту сигнала, поместите спектральную линию в центр области генерации клистрона. Регулируя напряжение отражателя, переместите центр области генерации на центр экрана осциллографа.

Перейдите к наблюдению спектра колебаний. Установите ток кристаллического смесителя 0,2—0,5 мА по прибору на индикаторном блоке. Уменьшая сигнал ГСС, настройте спектроанализатор на максимальную чувствительность.

2. Определение коэффициента усиления ЛБВ.

1. Включение ЛБВ. Включите магнитное поле соленоида и установите ток 2 А. Включите накал и питание ЛБВ. Установите оптимальные напряжения на электродах, приведенные в п. 4 § 1.

Стрелка прибора «ток коллектора» не должна выходить за пределы шкалы. Если это случится, то уменьшите напряжение управляющего электрода.

2. *Измерение усиления в центре области синхронизма.* Переведите волноводные переключатели в положение, соответствующее прохождению СВЧ-колебаний через ЛБВ. Вводя attenuатор ГСС, добейтесь, чтобы на экране осциллографа был виден один основной сигнал без нелинейных искажений. Регулируя напряжение спирали, получите максимальное значение сигнала на выходе ЛБВ. Еще раз настройте спектр-анализатор на максимальную чувствительность. Прибор настроен правильно, если спектральная линия на экране уверенно фиксируется при максимально введенном затухании attenuатора ГСС.

Выключите шунт выходного микроамперметра. Зафиксируйте величину затухания в attenuаторе ГСС N_1 . Запишите значение тока I_1 . Отключите сигнал ГСС от входа ЛБВ. Запишите отклонение стрелки I_0 , вызванное собственным шумом ЛБВ. Подайте сигнал на вход спектр-анализатора, минуя ЛБВ. Увеличивая сигнал ГСС, добейтесь получения отклонения, равного разности $I_1 - I_0$. Запишите новое значение затухания N_2 . Разность двух затуханий $N_2 - N_1$ дает усиление ЛБВ в центре области синхронизма:

$$G = N_2 - N_1. \quad (29)$$

При большом входном сигнале вместо записи показаний микроамперметра следует фиксировать высоту спектральной линии на экране осциллографа. При проведении измерений следите, чтобы отсутствовало насыщение в спектр-анализаторе, заметное по искажению сигнала на экране осциллографа.

3. *Определение области синхронизма ЛБВ.* Выберите величину сигнала ГСС, достаточную для уверенного проведения измерений с помощью экрана осциллографа. Снимите зависимость усиления ЛБВ от напряжения спирали в интервале от 250 до 450 В. При каждом значении напряжения спирали изменяйте затухание в attenuаторе ГСС, чтобы получить прежнее значение высоты спектральной линии (или прежнее отклонение стрелки микроамперметра). Разность полученного затухания N_3 и найденного ранее затухания в центре области синхронизма N_2 дает усиление (или ослабление) сигнала в ЛБВ:

$$G = N_2 - N_3. \quad (30)$$

Постройте график зависимости усиления ЛБВ от напряжения спирали и найдите область синхронизма, внутри которой усиление отличается от максимального в 2 раза (на 3 дБ).

4. *Нахождение зависимости усиления ЛБВ от величины входного сигнала.* Снимите зависимость коэффициента усиления ЛБВ от мощности входного сигнала в центре области синхронизма. При входных сигналах, меньших 10^{-8} Вт, следуйте рекомендациям п. 2. При больших сигналах подключите первый attenuатор спектр-

анализатора. Измерьте его затухание N . Далее воспользуйтесь прежней методикой, внося поправку на затухание,

$$G(\text{дБ}) = N_2 - N_1 - N. \quad (31)$$

Постройте график зависимости усиления ЛБВ в децибелах от мощности входного сигнала также в децибелах.

3. Изучение преобразования спектра двухчастотного сигнала. Включите второй генератор стандартных сигналов. Установите уровень затухания в обоих генераторах примерно 50 дБ. Подайте сигналы в спектр-анализатор через первый ослабитель, установив в нем затухание 10 дБ. Сближая частоты генераторов, добейтесь, чтобы на экране осциллографа были видны две близкие линии основных сигналов и ряд боковых линий комбинационных составляющих. Регулируя усиление УПЧ и затухание во втором ослабителе, избавьтесь от нелинейных искажений спектральных линий на экране спектр-анализатора. Регулируя затухание в одном из ГСС, сделайте линии сигналов основных частот близкими по амплитуде. Запишите значение амплитуды. Уменьшая затухание в первом аттенюаторе, добейтесь, чтобы сигналы первых боковых комбинационных составляющих стали равными отмеченному значению амплитуды. Запишите значение затухания. Уменьшая затухание первого аттенюатора, проделайте те же самые измерения с более высокими комбинационными составляющими. Повторите цикл измерений для нескольких значений мощности входных сигналов ГСС. Зарисуйте типичные спектры колебаний. Постройте зависимости приращений затухания первого ослабителя для различных спектральных компонент от мощности входного сигнала в децибелах.

4. Определение коэффициента шума ЛБВ.

1. Включение источника шума. Включите накал генератора шума. После трехминутного прогрева подайте анодное напряжение и зажгите разряд. Установите ток разряда 100—150 мА, регулируя анодное напряжение.

2. Настройка спектр-анализатора. Подключите генератор шума ко входу ЛБВ. Сигнал с выхода ЛБВ подайте на вход второго ослабителя спектр-анализатора. Полностью выведите ослабитель, получите на экране спектр-анализатора спектр шумового сигнала в виде выброса, занимающего область генерации клистрона. Последовательно отключая газоразрядную лампу от входа ЛБВ и ЛБВ от входа спектр-анализатора с помощью переключателей, убедитесь, что шумовой сигнал складывается из сигнала собственных шумов спектр-анализатора, собственных шумов ЛБВ и усиленного шума газоразрядной лампы.

Выключите частотную девиацию в спектр-анализаторе и подстройте гетеродинный клистрон. Включите устройство компенсации. Компенсируя до нуля отклонение стрелки микроамперметра «ток второго детектора», вызванное собственным шумом спектр-анализатора, изменяйте усиление промежуточной частоты, доби-

ваясь, чтобы шумовой сигнал с выхода ЛБВ давал удобное для измерений показание прибора (примерно на половину шкалы). Если нет ошибок в настройке аппаратуры, то спектр-анализатор работает в режиме линейного усиления промежуточной частоты и квадратичного детектирования. Отклонение стрелки микроамперметра пропорционально мощности сигнала на входе спектр-анализатора.

3. *Измерение коэффициента шума ЛБВ.* Скомпенсируйте собственные шумы спектр-анализатора. Запишите показания стрелки микроамперметра «ток второго детектора», соответствующие усиленным шумам ЛБВ и газоразрядного источника шумов N_1 . Запишите новое показание микроамперметра в отсутствие шумов газоразрядной лампы N_2 . Коэффициент шума

$$F = 1 + \frac{N_2}{N_1 - N_2} \frac{P_{ш}}{P_{ш0}}, \quad (32)$$

где $P_{ш}/P_{ш0} = 65$ — отношение спектральной плотности шумов газоразрядной лампы к спектральной плотности шумов согласованной нагрузки, находящейся при комнатной температуре.

4. *Определение зависимости коэффициента шума ЛБВ от потенциалов электродов пушки.* Проведите измерение коэффициента шума для ряда значений управляющего напряжения, взятых через 2 В при потенциалах первого анода 25, 50, 75, 90 В. Постройте семейство графиков зависимости коэффициента шума от потенциала управляющего электрода. Найдите минимальное значение коэффициента шума. Перед каждым измерением проверяйте правильность компенсации собственных шумов спектр-анализатора.

5. Сравнение теории с экспериментом.

1. Сравните экспериментально найденные значения коэффициента усиления ЛБВ с теоретическими, вычисленными по формуле (12). Параметры

$$b_{п} = 0,1 \text{ см}, \quad a = 0,13 \text{ см}, \quad \frac{c}{v_0} = \frac{505}{\sqrt{V_0(\text{В})}}, \quad d_{\text{х}} = 1,0.$$

Величины $4Q$ и $Z_{л}$ вычисляются с помощью графиков рис. 5 и 6.

2. Проведите сравнение экспериментальной и теоретической зависимостей коэффициента усиления от параметра расстройки (ускоряющего напряжения) (см. рис. 4). Оцените величину ширины области синхронизма (по уменьшению усиления на 3 дБ).

3. Определите уровень входного сигнала, при котором достигается насыщение усиления в ЛБВ, воспользовавшись результатами измерений в упр. 2 п. 4 и упр. 3. Найдите этот уровень теоретически, пользуясь формулой (22). Определите параметр G_1 по формуле (24). Постройте теоретическую зависимость усиления от мощности входного сигнала с учетом двух первых членов формулы (23). Сравните теоретическую зависимость с экспериментальной.

4. Оцените величину параметра фазовой модуляции

$$m = 0,6 A_0^2 G_A^2 / C I_0 V_0,$$

где $A_0 \cong \sqrt{P_{\text{вх}}}$; $P_{\text{вх}}$ — мощность сигнала с выхода ГСС; G_A — усиление ЛБВ; $G_A = 10^{G/20}$. Для нескольких m убедитесь, что соотношение мощностей комбинационных составляющих номеров n , s близко к отношению квадратов функции Бесселя $J_n^2(m)/J_s^2(m)$ (при малых мощностях входного сигнала см. (28)).

5. По формуле (21) найти минимальное значение коэффициента шума ЛБВ. Температура катода $T_k = 1000$ К. Угол пролета в пушке $\Theta_1 = 60^\circ$. Параметр $V_{\text{мин}}$ находится с помощью графика рис. 7. Сравните теоретическое и экспериментально найденное минимальное значение коэффициента шума. Оцените величину параметра подавления шумов γ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лопухин В. М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М., ГИТТЛ, 1953.
2. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М., ИЛ, 1963.
3. Пирс Дж. Лампа с бегущей волной. М., «Сов. радио», 1952.
4. Ван-дер-Зил. Флуктуации в радиотехнике и физике. М., Госэнергоиздат, 1958.
5. Цейтлин М. Б., Кац А. М. Нелинейная теория ЛБВ. М., «Сов. радио», 1964.

4. ИЗМЕРЕНИЯ В ВОЛНОВОДНОМ ТРАКТЕ

Задача знакомит с различными волноводными устройствами 3-см диапазона волн, а также с рядом наиболее распространенных видов измерений.

§ 1. Введение

В диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ), к которому относится участок спектра электромагнитных волн, соответствующий частотам от $3 \cdot 10^8$ до $3 \cdot 10^{12}$ Гц, основными видами передающих трактов являются коаксиальные линии и волноводы. Коаксиальные линии применяются в основном на частотах $\leq 3 \cdot 10^9$ Гц (длины волн порядка 10 см и более); на более высоких частотах, как правило, используются волноводы.

Волновод представляет собой полую металлическую трубу с хорошо проводящими стенками, внутри которой может распространяться электромагнитная волна. Форма сечения трубы может быть различной и выбирается в зависимости от конкретного применения волновода. Наиболее распространенный вид волновода — трубки прямоугольного сечения.

Тип волны, т. е. та или иная конфигурация электрических и магнитных полей, устанавливающаяся в волноводе, определяется фор-

мой волновода и соотношением его размеров с длиной волны, а также способом возбуждения (поляризацией излучателя). Иными словами, распространяться могут только такие волны, поля которых отвечают задаваемым волноводом граничным условиям. Характерным отличием волн в волноводах от волн в свободном пространстве или в коаксиальной линии является наличие продольной составляющей электрического или магнитного поля, а также наличие зависимости фазовой скорости от частоты. Простейший тип волны в рассматриваемом нами примере волновода прямоугольного сечения — волна H_{10} . Мгновенное распределение полей показано на рис. 1 (\vec{E} и \vec{H} обозначают амплитуды полей). Индексы, определяющие тип волны, обозначают количество максимумов напряженности поля по координатам поперечного сечения (по « x » — один, по « y » — нуль), причем имеется в виду то поле, которое в данной волне поперечное (здесь — электрическое).

При заданных размерах волновода по нему могут распространяться волны типа H_{10} , длина волны которых в свободном пространстве не превышает удвоенного расстояния между узкими стенками, т. е. длина волны $\lambda_{кр} = 2a$ является предельной, или критической.

Фазовая скорость волны, распространяющейся вдоль волновода, больше скорости света, поэтому волна в волноводе характеризуется и большей длиной. Она определяется формулой

$$\lambda_{в} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}, \quad (1)$$

где $\lambda_{в}$ — длина волны в волноводе; λ_0 — длина волны в свободном пространстве; $\lambda_{кр}$ — критическая длина волны.

На сверхвысоких частотах передача энергии по волноводу не может быть охарактеризована значением токов и напряжений. При прохождении волны по волноводу величины токов и напряжений зависят от точек измерений и не являются однозначными характеристиками. К тому же нет надежных способов, позволяющих измерить на таких частотах абсолютные значения напряжений и токов. Последнее относится и к измерению напряженностей магнитного и электрического полей, которые, вообще говоря, более естественные характеристики волн в волноводах, чем токи и напряжения. Поэтому основной характеристикой в различных видах изме-

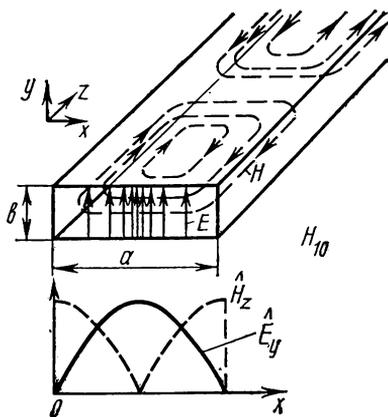


Рис. 1. Распределение полей в прямоугольном волноводе

рений чаще выступает величина мощности, переносимой волной. Другой характеристикой передающего тракта является его волновое сопротивление (полное сопротивление, или импеданс), которое определяется как отношение поперечных компонент электрического и магнитного полей: $Z = E_{\text{попер}}/H_{\text{попер}}$. Для однородного тракта сопротивление одинаково в любом поперечном сечении. Соотношение сопротивлений различных элементов тракта и включенных в него устройств определяет эффективность передачи энергии. Так, передача мощности максимальна только при равенстве волновых сопротивлений всех элементов; отличие в сопротивлениях приводит к возникновению отражений. Поскольку волновое сопротивление в общем случае зависит от частоты, отражение от различных элементов может также характеризоваться частотной зависимостью.

§ 2. Основные виды и методы измерений

Из сказанного выше вытекают и основные виды измерений: измерение мощности, длины волны или частоты, импеданса (степени согласования).

Наиболее распространенные методы измерения мощности основаны на преобразовании энергии волны в тепло. Так, измерение температуры воды, протекающей в трубке, проходящей через волновод, используется для определения мощности в так называемых калориметрических измерителях, которые используются, как правило, на уровнях мощности порядка ватта и выше. Изменения сопротивления тонкой металлической проволоки (баретора) или «бусинки» из полупроводникового материала (термистора) при их нагреве за счет поглощения СВЧ-энергии используются в болометрических измерителях. Болометрические измерители, в которых применяются чувствительные мостовые схемы, рассчитаны обычно на измерения малых уровней мощности (микроватты, милливатты). Привлекательным качеством тепловых измерителей мощности является возможность их калибровки постоянным током или переменным током на низкой частоте, когда через баретор (термистор) пропускают ток такой величины, чтобы изменение сопротивления этого элемента было равно изменению его сопротивления при поглощении СВЧ-сигнала. Рассеянная мощность постоянного тока, которую определить легко, практически равна поглощенной мощности СВЧ. Для измерения относительных уровней мощности могут также использоваться детекторы, но, необходимо знать характер зависимости величины отклика от величины падающей мощности, т. е. детекторную характеристику.

Методы измерения длины волны и частоты основаны либо на непосредственном определении пространственной периодичности стоячей волны, либо на использовании калиброванных резонаторов, либо на сравнении частоты измеряемого сигнала с частотой эталонированного источника. Если перекрыть волновод коротко-

замыкающей стенкой и создать тем самым в нем стоячую волну, а затем измерять с помощью перемещаемого вдоль волновода зонда распределение напряженности поля, то удвоенное расстояние между двумя соседними узлами или пучностями будет равно длине волны. Но следует иметь в виду, что это длина волны в волноводе. Для определения частоты колебаний необходимо предварительно рассчитать по измеренному значению $\lambda_{\text{в}}$ длину волны в свободном пространстве λ_0 по формуле (1).

Более точны и удобны для измерения частоты или длины волны прямоотсчетные волномеры, основанные на использовании коаксиальных или объемных резонаторов. Именно такой волномер входит в состав СВЧ-генератора, используемого в данной задаче. Он представляет собой коаксиальный резонатор (рис. 2), связанный с волноводным трактом.

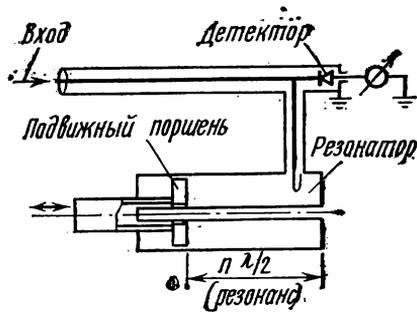


Рис. 2. Схема волномера

Резонанс наступает тогда, когда длина резонатора (она может изменяться передвижением одной из стенок) становится равной $\lambda_0/2$. Наличие резонанса индицируется по максимуму тока детектора, связанного с резонатором (см. рис. 2). Значения частоты при резонансе отсчитываются по лимбу, сопряженному с устройством перестройки резонатора.

Методы измерения полного сопротивления по существу являются методами определения согласования. Они базируются на исследовании «профиля» волны вдоль волновода, т. е. на измерении амплитуды волны как функции продольной координаты. Если сопротивление всех элементов тракта одинаково, то отражений в нем не возникает и амплитуда волны постоянна вдоль волновода (измеряться она должна в одних и тех же точках поперечного сечения). При различии в значениях сопротивления одного из элементов и остального тракта возникает отраженная волна, которая интерферирует с волной падающей. Результирующая интерференционная картина характеризуется периодичностью изменения амплитуды суммарного поля вдоль волновода, а расшифровка этой картины стоячей волны позволяет определить значение волнового сопротивления того элемента, от которого возникает отражение. Коэффициент отражения в данном сечении тракта, определяемый как отношение мгновенных значений напряженностей полей отраженной ($E_{\text{отр}}$) и падающей ($E_{\text{пад}}$) волн, связан с импедансом:

$$\Gamma = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{Z - Z_{\text{в}}}{Z + Z_{\text{в}}},$$

где $Z_{\text{в}}$ — волновое сопротивление однородного волноводного тракта, в котором наблюдается «профиль» волны; Z — сопротивление элемента, вызывающего отражение. Поскольку отраженная волна может иметь различные фазы по отношению к фазе падающей волны, то коэффициент отражения — величина комплексная. При измерениях чаще определяется не коэффициент отражения, а так называемый коэффициент стоячей волны (по напряженности поля) — КСВН. Он равен $r = \hat{E}_{\text{max}} / \hat{E}_{\text{min}}$, где \hat{E}_{max} и \hat{E}_{min} — амплитудные значения суммарного поля падающей и отраженной волн в максимуме и минимуме интерференционной картины (стоячей волны), а $r = (1 + |\Gamma|) / (1 - |\Gamma|)$. Отсюда видно, что по измеренному значению КСВН можно определить только модуль коэффициента отражения. Определить его фазу, т. е. соотношение фаз падающей и отраженной волн, можно по расстоянию от первого минимума (максимума) стоячей волны до того участка, где возникает отражение. Знание комплексного коэффициента отражения и волнового сопротивления основного тракта позволяет определить импеданс любого элемента или устройства. Однако на практике чаще бывает нужно определять не значение волнового сопротивления, а

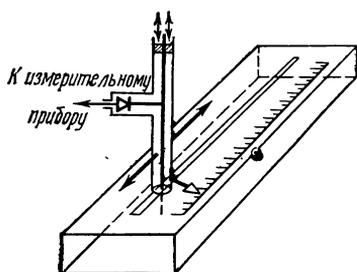


Рис. 3. Волноводная измерительная линия

просто степень согласования. В этом случае достаточная информация содержится в значении КСВН (при идеальном согласовании — отражений нет — $r=1$, при полном рассогласовании — вся энергия отражается — $r=\infty$). Так, зная КСВН какого-либо устройства — «потребителя» СВЧ-энергии — позволяет определить, какая часть мощности падающей (от генератора) волны ($P_{\text{пад}}$) выделяется в этом устройстве ($P_{\text{выд}}$):

$$P_{\text{пад}} = P_{\text{выд}} \frac{(r+1)^2}{4r}. \quad (2)$$

Для измерения КСВН используются так называемые измерительные линии. Волноводная измерительная линия (рис. 3) представляет собой отрезок волновода, внутрь которого через узкую щель в средней части широкой стенки введен зонд — штыревая антеннка, сигнал с которого поступает на детектор. Напряжение, возникающее на зонде, пропорционально напряженности поля в той области волновода, куда он помещен. Зонд может перемещаться вдоль волновода, причем его координата фиксируется точным отсчетным устройством. Сигнал, снимаемый с детектора, обычно пропорционален квадрату напряжения на зонде, если детектор квадратичный, и следовательно, квадрату напряженности

поля волны. Это необходимо учитывать при получении информации об относительной напряженности поля при измерении ее распределения вдоль волновода, т. е. КСВН должен определяться как

$$r = \sqrt{\frac{J_{\text{дет. max}}}{J_{\text{дет. min}}}}, \quad (3)$$

где $J_{\text{дет. max}}$, $J_{\text{дет. min}}$ — значения тока детектора (или пропорциональный току отсчет на каком-либо измерительном приборе, реги-

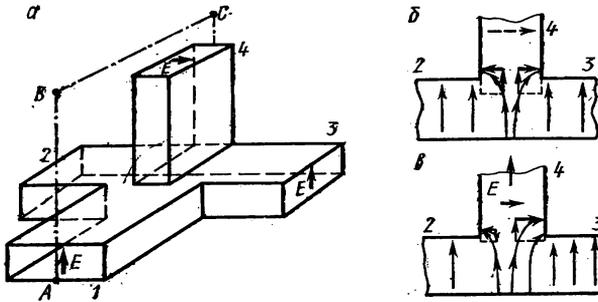


Рис. 4. Двойной тройник (двойной Т-мост)

стрирующем сигнал с детектора) в максимуме и минимуме стоячей волны. Измерительная линия включается в тракт между генератором и тем элементом или устройством, импеданс или КСВН которого необходимо определить.

Кроме измерительной линии для подобных измерений используются и другие устройства, например направленные ответвители, которые позволяют отдельно определить падающую и отраженную мощность.

Интересный метод определения импеданса методом сравнения основан на использовании так называемого «двойного тройника» или «двойного Т-моста».

Устройство двойного тройника показано на рис. 4, а. Сигнал, поступающий через плечо 1, разветвляется в симметричные относительно плоскости ABC плечи 2 и 3, длина которых строго одинакова (будем называть их «плечами сравнения»). При этой структуре волны такова (H_{10}), что напряженность электрического поля в области соединения плеч 1, 2 и 3 не имеет составляющей, которая могла бы возбудить волну в плече 4 (индикаторное плечо), отличающемся плоскостью поляризации (она повернута на $\pi/2$). Если к плечам сравнения подключены элементы, не согласованные с основным трактом, но равные по величине волнового сопротивления, то отраженные от них волны придут в область подключения плеча 4 с равными амплитудами и в одинаковых фазах.

Суммарный вектор электрического поля также не будет иметь компоненты, способной возбудить волну в индикаторном плече (см. рис. 4, б). Когда амплитуды или фазы (или то и другое) волн, отраженных в плечах сравнения, различны, результирующий вектор E будет иметь компоненту, соответствующую поляризации волны в индикаторном плече (см. рис. 4, в).

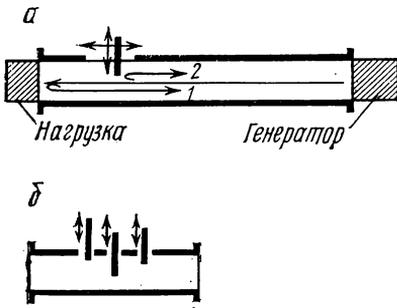


Рис. 5. Импеданс-трансформатор

Импеданс-трансформаторы находят применение не только для измерения импедансов, но и в целом ряде других балансных измерительных схем.

Существуют различные методы улучшения согласования тех или иных элементов и устройств с волноводным трактом. Наиболее универсальным среди них является использование так называемых импеданс-трансформаторов, или трансформаторов полных сопротивлений. Это название они получили потому, что формально их действие подобно действию обычных трансформаторов на низких частотах. Физический принцип действия импеданс-трансформатора можно пояснить на следующем примере. В волноводе, к которому подключена несогласованная нагрузка, возникает отраженная от нее волна, условно показанная (рис. 5, а) стрелкой 1. Через широкую стенку волновода в него введен металлический штырь, глубина погружения которого может изменяться и который может перемещаться вдоль волновода. При этом возникает еще одна волна 2, отраженная от штыря, ее амплитуда зависит от глубины погружения штыря, а фаза — от его продольного перемещения. Можно подобрать такие условия, когда волны 1 и 2, т. е. отраженная от нагрузки и отраженная от штыря, будут обладать равными амплитудами и противоположными фазами. Интерферируя, они полностью гасят друг друга, и в результате в тракте между генератором и штырем останется лишь одна бегущая волна; это соответствует максимальной передаче мощности генератора в нагрузку. Другими словами, в системе «нагрузка — штырь» возникает резонанс на данной частоте; при этом вся мощность рассеивается на эквивалентной активной проводимости такого контура. Рассмотренный

здесь штырь и представляет собой импеданс-трансформатор. Правда, на практике редко делают трансформаторы с перемещением штыря вдоль волновода. Чаще встречаются устройства с несколькими штырями, расположенными на фиксированных расстояниях друг от друга, но с регулируемой глубиной погружения (см., например, рис. 5, б, где схематически показан так называемый трехшлейфовый импеданс-трансформатор). Однако принцип их действия остается, по существу, таким же, как и в рассмотренном

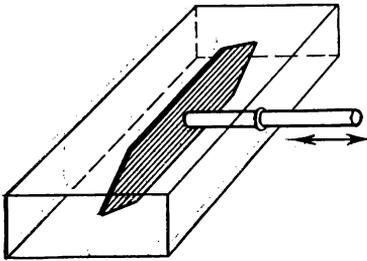


Рис. 6. Переменный аттенюатор

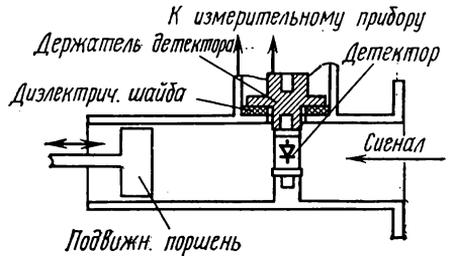


Рис. 7. Детекторная секция

выше примере. Из-за собственных потерь в реальном согласующем устройстве абсолютного согласования, т. е. передачи всей мощности в нагрузку, нельзя достичь даже в узком интервале частот.

Кроме рассмотренных здесь волномера, измерительной линии, двойного тройника и импеданс-трансформатора в установке, на которой выполняется данная задача, есть еще ряд элементов, принципиальное устройство которых мы здесь рассмотрим.

Для регулировки уровня мощности, а также для развязки, т. е. для уменьшения взаимной связи генератора и не вполне согласованной нагрузки, в тракт включаются так называемые аттенюаторы (ослабители). Аттенюаторы бывают фиксированные, вносящие в тракт определенное заданное затухание, и переменные (рис. 6).

На тонком диэлектрическом стержне, введенном в волновод через отверстие в узкой стенке, укреплена диэлектрическая пластинка, ориентированная так, чтобы ее поверхность была параллельна вектору E волны, бегущей по волноводу (т. е. параллельно узким стенкам волновода). Пластинка покрыта тонким слоем поглощающего материала, например графита или платины. При прохождении волны в поглощающем слое наводятся токи, и энергия волны рассеивается за счет омических потерь. Если пластинка помещена в центре волновода, где для волны H_{10} электрическое поле максимально, то она вносит наибольшие потери. Смещение пластинки к узкой стенке уменьшает затухание, и если она достаточно тонка и плотно прижата к стенке, где электрическое поле волны равно нулю, потери вообще могут практически отсутство-

вать. Концы пластинки делаются скошенными для уменьшения отражения.

Для индикации сигнала, определения относительного уровня его мощности или для выделения низкочастотной огибающей модулированного сигнала в СВЧ-диапазоне применяются кристаллические детекторы (полупроводниковые диоды). Детектор помещается в специальную секцию (рис. 7). Детектор укреплен на спе-

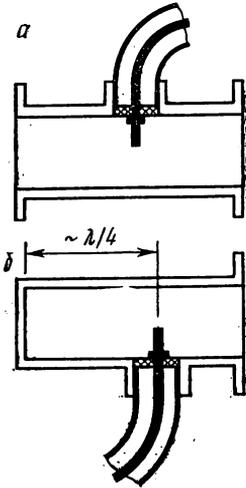


Рис. 8. Волноводно-коаксиальные переходы

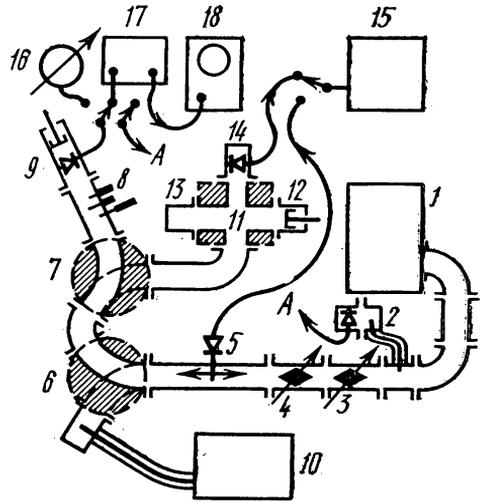


Рис. 9. Блок-схема установки
 1 — СВЧ-генератор; 2 — контрольный детектор; 3 — переменный аттенюатор (калиброванный); 4 — переменный аттенюатор (калиброванный); 5 — измерительная линия; 6, 7 — волноводные переключатели; 8 — согласующее устройство (трехшлейфовый импеданс-трансформатор); 9 — детекторная секция; 10 — измеритель мощности; 11 — двойной Т-мост; 12 — переменная реактивная нагрузка; 13 — измеряемая реактивная нагрузка (короткозамкнутый отрезок волновода); 14 — детекторная секция; 15 — измерительный усилитель; 16 — микроамперметр («ток детектора»); 17 — индикаторный усилитель; 18 — осциллограф

циальном держателе и помещен в волновод так, чтобы его выводы, между которыми включен выпрямляющий контакт, были коллинеарны вектору E волны. Настройка детекторной секции осуществляется подвижным короткозамыкающим поршнем, положение которого выбирается таким образом, чтобы детектор оказался в пучности электрического поля стоячей волны. Держатель детек-

тора отделен от корпуса детекторной головки тонкой диэлектрической прокладкой. Этот элемент конструкции образует емкость, шунтирующую по СВЧ цепь, идущую к индикаторному прибору. Подключение к волноводному тракту контрольного детектора и измерителя мощности в нашем случае осуществляется с помощью гибких коаксиальных кабелей, через посредство так называемых адаптеров проходного (рис. 8, *a*) и оконечного (рис. 8, *б*) типов. Связь коаксиальных линий с волноводом обеспечивается в этих адаптерах штыревой антенной, ориентированной коллинеарно вектору E волны и введенной в волновод через широкую стенку.

§ 3. Описание установки

Блок-схема экспериментальной установки представлена на рис. 9. Генератор СВЧ 1 работает в 3-см диапазоне волн. Источником излучения в нем служит отражательный клистрон. Встроенный в генератор волномер позволяет производить измерение частоты генерации во всем интервале перестройки клистрона. В генераторе предусмотрена возможность работы как в режиме непрерывных колебаний, так и с различными видами модуляции. При выполнении упражнений используются два режима работы генератора: непрерывный и модулированный по амплитуде симметричными прямоугольными импульсами. Атенюаторы 3 и 4 используются в упражнении по измерению затухания методом замещения и для изменения уровня мощности в упражнении по определению характеристик детектора. Кроме того, с их помощью уменьшается уровень поступающей в измерительный тракт мощности и при выполнении других упражнений с целью предотвращения перегрузки детекторов и уменьшения влияния отраженной волны на работу генератора.

Измерительная линия 5 используется для определения длины волны в волноводе и для измерения коэффициента стоячей волны (КСВ), характеризующего степень согласования того или иного устройства с основным трактом. Поскольку сигнал, снимаемый с зонда, мал, измерения КСВ проводятся только в режиме амплитудной модуляции генератора СВЧ, что позволяет для определения величины протектированного сигнала, идущего от измерительной линии, пользоваться селективным измерительным усилителем 15. При работе с измерительной линией он должен быть настроен на частоту модуляции СВЧ-сигнала. Отсчет величины сигнала, поступающего на вход, производится по вольтметру усилителя.

С помощью волноводных переключателей 6 и 7 тракт, идущий от генератора, может либо замыкаться накоротко (для осуществления в основном тракте режима чисто стоячей волны), либо соединяться с различными элементами установки.

Для измерения мощности, проходящей по основному тракту, используется стандартный измеритель мощности 10, соединенный

с волноводным трактом коаксиальным кабелем. Мощность измеряется в режиме непрерывной генерации.

Детекторная секция 9 используется для определения относительного уровня мощности при калибровке аттенюатора, а также в упражнении по определению характеристики детектора.

Трехшлейфовый импеданс-трансформатор 8, включенный в тракт перед детекторной секцией, служит для ее согласования с трактом.

Двойной Т-мост 11 используется в данной задаче для измерений с реактивными нагрузками в плечах сравнения. Одна из них представляет собой отрезок волновода с перемещающимся короткозамыкающим поршнем 12, другая — короткозамкнутый отрезок волновода фиксированной длины 13.

Индикаторный усилитель 17 служит для предварительного усиления сигналов, снимаемых с детекторов 2 и 9, при работе СВЧ-генератора в режиме модулированных колебаний.

§ 4. Упражнения

Подготовка установки к работе

Руководствуясь блок-схемой, определите назначение каждого элемента и устройства. Установите с помощью калиброванного аттенюатора 4 затухание в тракте, равное примерно 20 дБ. Установите волноводные переключатели в положения, соединяющие основной тракт с детекторной головкой 9. Включите питание измерителя мощности, установив предварительно переключатель «работа-арретир» на его лицевой панели в положение «арретир», а переключатель «множитель в шкале» — в положение « $\times 10$ ». Включите питание СВЧ-генератора. Установите переключатель «род работы» в положение «нг» (непрерывная генерация), переключатель «детектор-волномер» — в положение «детектор». Включите питание индикаторного усилителя и осциллографа. Установите переключатель делителя напряжения измерительного усилителя в положение, соответствующее наименьшей чувствительности, и включите питание усилителя.

Настройка узлов волноводного тракта и аппаратуры

Настройка СВЧ-генератора. Пользуясь ручками «коррекция» и «отражатель», настройте генератор на максимум отдаваемой мощности, ориентируясь при этом по току детектора (на индикаторном приборе). Поставьте переключатель «род работы» в положение «внП». Мощность генерируемого сигнала при этом модулируется напряжением звуковой частоты (1 КГц) в форме симметричных прямоугольных импульсов. Пронаблюдайте форму огибающей СВЧ-сигнала, подавая сигнал с контрольного детектора через индикаторный усилитель на осциллограф.

Настройка детекторной секции 9 производится в режиме модулированных колебаний. Соедините с помощью переключателей 6 и 7 тракт детекторной головки с основным трактом, идущим от

СВЧ-генератора. Сигнал с детектора через индикаторный усилитель подайте на осциллограф (сигнал с контрольного детектора при этом отключите). Настраивающим поршнем детекторной головки, а затем перестройкой трех штырей импеданс-трансформатора добейтесь максимальной величины сигнала на экране осциллографа.

Настройка измерительной линии (режим модулированных колебаний). Подключите детектор измерительной линии ко входу измерительного усилителя. Поставьте волноводный переключатель *б* в положение, соединяющее основной тракт с измерителем мощности. Проверив установку нуля вольтметра измерительного усилителя, регулировками делителя входного напряжения и усиления установите удобную для наблюдения величину измеряемого сигнала на приборе. Переключателем диапазона частот и плавной регулировкой частоты настройте усилитель на частоту сигнала (частота модуляции) по максимуму сигнала. Пользуясь регуляторами настройки детекторной секции измерительной линии, добейтесь максимальной величины сигнала, снимаемого с измерительной линии.

Настройка измерителя мощности производится в режиме непрерывной генерации. Установив переключатель измерителя мощности «множитель к шкале» в положение «0», переключателем «установка нуля грубо» и ручкой «установка нуля точно» установите нуль прибора. Поставив переключатель «работа-арретир» в положение «работа», установите нуль окончательно. Поставьте переключатель «множитель к шкале» в положение « $\times 10$ » (при недостаточном уровне мощности можно переходить на следующие пределы, соответствующие большей чувствительности). Настройтесь на максимальные показания измерителя тремя ручками «настройка» на лицевой панели измерителя мощности.

В дальнейшем при измерениях мощности *регулярно проверяйте установку нуля.*

1. 1. Измерение длины волны в волноводе (проводится в режиме модулированных колебаний). Для измерения длины волны в волноводе используется измерительная линия. Поставьте волноводный переключатель *б* в положение, промежуточное между положениями, соединяющими основной тракт с переключателем *7* и измерителем мощности. При этом волновод оказывается короткозамкнутым, и в нем устанавливается чисто стоячая волна. Перемещая каретку измерительной линии вдоль волновода и отсчитывая показания прибора измерительного усилителя, постройте график зависимости «напряжение, снимаемое с детектора измерительной линии (в относительных единицах) — координата вдоль оси волновода». Объясните эту зависимость. Определите длину волны.

2. Измерение частоты с помощью волномера (проводится в режиме немодулированных колебаний). Установите переключатель «волномер-детектор» на лицевой панели генератора в положение «волномер». Перестройкой волномера найдите резонанс по наи-

большему значению тока на индикаторном приборе и считайте значение частоты с лимба волномера. Вычислите значение λ_0 . Сопоставьте это значение с длиной волны, определенной с помощью измерительной линии; объясните получившийся результат. Проверьте, соответствуют ли результаты измерений соотношению между длиной волны в волноводе λ_v и длиной волны в свободном пространстве λ_0 , даваемому формулой (1). При определении критической длины волны учтите, что размер поперечного сечения волновода, используемого в данной установке, равен 10×23 мм.

2. Калибровка переменного аттенюатора (определение затухания методом замещения). Калибровка производится в режиме непрерывной генерации. Суть измерений затухания (ослабления) методом замещения сводится к тому, что в тракт, соединяющий генератор с детектором, включается попеременно объект с неизвестным затуханием и калиброванный аттенюатор, с помощью которого проходящая мощность ослабляется до того же значения тока детектора, что и в случае включения измеряемого объекта (в данном упражнении некалиброванного аттенюатора 3).

Поставьте волноводные переключатели 6 и 7 в положение, соединяющие основную тракт с детекторной головкой 9. Включите выход детектора на микроамперметр 16. Регулируя уровень падающей мощности калиброванным аттенюатором 4, установите достаточную для надежной индикации величину тока детектора. Зафиксируйте ослабление, вносимое калиброванным аттенюатором, воспользовавшись его градуировочным графиком. Вводя затухание с помощью исследуемого аттенюатора, уменьшайте затухание, вводимое калиброванным аттенюатором так, чтобы детекторный ток оставался равным первоначально зафиксированной величине.

Уменьшение затухания калиброванного аттенюатора равно затуханию, вносимому исследуемым аттенюатором.

Постройте графики калибровки аттенюатора 3.

3. Измерение характеристики детектора. Для измерения характеристики детектора, т. е. зависимости тока детектора от поступающей на него мощности СВЧ, необходимо точно определить уровень этой мощности с поправкой на отражения в тракте, воспользовавшись формулой (2).

Для измерения характеристики детектора необходимо проводить следующие операции.

1. Определите КСВН в тракте, нагруженном на детекторную головку. КСВН определяется с помощью измерительной линии: перемещая каретку с зондом вдоль волновода, фиксируют максимальное и минимальное значения тока детектора (в относительных единицах, по прибору измерительного усилителя) и вычисляют r по формуле (3). Если значение КСВН существенно больше единицы, т. е. отсчет $I_{\text{дет. max}}$ и $I_{\text{дет. min}}$ не может быть с достаточной точностью произведен в пределах одной шкалы, то для его определения следует воспользоваться формулой

$$r = \frac{\lambda_{\text{в}}}{2\pi\Delta x},$$

где $\lambda_{\text{в}}$ — длина волны в волноводе; Δx — расстояние между точками по обе стороны от минимума стоячей волны, в которых ток детектора измерительной линии равен удвоенному значению тока детектора в минимуме.

2. Определите КСВН в тракте, нагруженном на измеритель мощности. Генератор должен работать в режиме модулированных колебаний. При измерениях руководствуйтесь тем, что показания вольтметра измерительного усилителя пропорциональны току детектора.

3. Переключив генератор в режим немодулированных колебаний, соедините основной тракт с измерителем мощности, полностью выведите оба аттенюатора и определите величину мощности, поступающей в измеритель. С учетом КСВН тракта, нагруженного на измеритель мощности, а также с учетом того, что кабель, соединяющий измеритель с трактом, вносит ослабление 6 дБ, вычислите полную мощность, отдаваемую в тракт генератором.

4. Введите калиброванным аттенюатором ослабление порядка 20 дБ. Соедините основной тракт с детекторной секцией. Отрегулируйте аттенюатор так, чтобы ток детектора давал отклонение на всю шкалу подключенного к нему микроамперметра. Пользуясь градуировочным графиком этого аттенюатора и зная мощность генератора, определите мощность, проходящую при этом в детекторную секцию. С учетом КСВН тракта, нагруженного на детекторную секцию, определите по формуле (2) мощность, выделяющуюся на детекторе.

5. Уменьшая мощность, поступающую в детекторную секцию с помощью калиброванного аттенюатора, постройте зависимость тока детектора от выделяющейся на нем мощности СВЧ. Определите по характеристике, при каких уровнях мощности детектор может считаться квадратичным.

Определите максимальную токовую чувствительность (отношение тока детектора к мощности вызвавшего этот ток СВЧ-сигнала) в «амперах на ватт» (А/Вт).

4. **Измерение сопротивления реактивного элемента с помощью двойного Т-моста.** Балансная схема на двойном Т-мосте позволяет определять сопротивление некоторого элемента путем сравнения его с известным, эталонным. В качестве эталонного в данном упражнении используется сопротивление короткозамкнутого отрезка стандартного волновода. Известно, что реактивное сопротивление короткозамкнутой линии длиной l равно

$$jX = jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda_{\text{в}}},$$

где $\lambda_{\text{в}}$ — длина волны в волноводе; $Z_{\text{в}}$ — волновое сопротивление волновода. Последнее связано с волновым сопротивлением свобод-

ного пространства Z_0 (для волноводов, возбуждаемых на волнах типа H , в нашем случае H_{10}) следующим образом:

$$Z_{\text{в}} = \frac{\lambda_{\text{в}}}{\lambda_0} Z_0$$

(λ_0 — длина волны в свободном пространстве; $Z_0=377$ Ом — волновое сопротивление свободного пространства в системе СИ).

Из приведенной выше формулы видно, что, перемещая короткозамыкающий поршень (меняя l), можно получить любое значение X , причем величина его однозначно определяется l , считывающейся непосредственно со шкалы подвижки поршня (отсчет идет от плоскости входного фланца волноводной секции с поршнем, в миллиметрах).

1. Приступая к измерениям, переключите генератор в режим модулированных колебаний. С помощью переключателей 6 и 7 соедините основной тракт с трактом, идущим к двойному Т-мосту. Подключите детектор детекторной секции 14 ко входу измерительного усилителя. Подстройте по вольтметру измерительного усилителя детекторную головку 14 на максимум сигнала.

2. Перемещая поршень 12, найдите положение, соответствующее минимуму сигнала детектора. По мере уменьшения сигнала переходите на более чувствительные пределы усилителя и увеличивайте усиление (можно также уменьшать ослабление, введенное в тракт аттенуатором 4). Для более точного определения координаты постройте зависимость сигнала детектора (в относительных единицах) от положения поршня — в пределах $\pm 0,5$ мм от первоначального. Зафиксируйте значение l_{min} , соответствующее минимуму сигнала на выходе двойного Т-моста.

3. Найденное положение l_{min} соответствует равенству реактивных сопротивлений в плечах сравнения.

Определите величину сопротивления короткозамкнутого отрезка волновода 13, воспользовавшись приведенными выше формулами для расчета сопротивления эталонной нагрузки (используйте также значения $\lambda_{\text{в}}$ и λ_0 , полученные в первом упражнении). По вычисленному значению сопротивления определите, какой характер имеет исследованная реактивная нагрузка — емкостный или индуктивный.

При сдаче задачи должны быть представлены следующие результаты:

- 1) график зависимости тока детектора измерительной линии от координаты (вдоль волноводного тракта);
- 2) измеренное значение длины волны в волноводе и измеренное значение частоты и длины волны в свободном пространстве, сопоставленное с расчетным значением длины волны в волноводе;
- 3) график калибровки переменного аттенуатора: зависимость ослабления (в дБ) от положения указателя ручки регулировки (в делениях лимба);
- 4) КСВН тракта, нагруженного на измеритель мощности;

- 5) измеренное значение мощности и полная мощность генератора;
- 6) КСВН тракта, нагруженного на детекторную головку;
- 7) значение мощности, выделяющейся на детекторе, при максимальном токе детектора (соответствующее отклонению на всю шкалу микроамперметра);
- 8) характеристика детектора — график зависимости тока детектора от абсолютной величины выделяющейся на нем мощности;
- 9) значение максимальной токовой чувствительности детектора;
- 10) график зависимости детекторного сигнала на выходе двойного Т-моста (в относительных единицах) от длины перестраиваемого короткозамкнутого отрезка волновода и значение l_{\min} ;
- 11) значение сопротивления X , соответствующее балансу моста.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзтон Э. Л. Измерения на сантиметровых волнах. М., ИЛ, 1960.
2. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ, т. I. М., «Высшая школа», 1970.
3. Клингер Г. Сверхвысокие частоты. М., «Наука», 1969.
4. Тишер Ф. Техника измерений на сверхвысоких частотах. М., Физматгиз, 1963.

5. НЕВЗАИМНЫЕ СВОЙСТВА ВОЛНОВОДНЫХ ФЕРРИТОВЫХ УСТРОЙСТВ

Изучаются невзаимные свойства волноводных ферритовых устройств в диапазоне длин волн ~ 3 см: эффект Фарадея в круглом волноводе с ферритовым стержнем, свойства циркулятора поляризационного типа, невзаимный фазовый сдвиг в прямоугольном волноводе с ферритовой пластиной.

§ 1. Введение

В современной физике и технике широко применяются новые магнитные материалы — ферриты (соединения окислов металлов с кристаллической структурой). Намагниченность их (магнитный момент единицы объема) в основном определяется нескомпенсированными магнитными моментами электронов металлических ионов. Между этими электронами существует сильное обменное взаимодействие, благодаря которому устанавливается упорядоченная ориентация магнитных моментов и появляется спонтанная намагниченность. С макроскопической точки зрения магнитные свойства ферритов аналогичны свойствам ферромагнетиков. В отличие от металлических ферромагнетиков в ферритах отсутствуют свободные электроны, и поэтому они обладают большим удельным сопротивлением порядка 10^5 — 10^{13} Ом·см (для железа удельное сопротивление 10^{-5} Ом·см). Глубина проникновения переменного поля для ферритов в 10^5 — 10^9 раз больше, чем для металлических

ферромагнетиков, и даже в диапазоне сантиметровых и миллиметровых волн они почти прозрачны при толщине, достигающей нескольких сантиметров.

Большая намагниченность и глубина проникновения обеспечивают эффективное взаимодействие ферритов с магнитными полями сверхвысоких частот (СВЧ). Это позволило создать ферритовые устройства различного назначения:

- а) невзаимные волноводные устройства, обладающие неодинаковыми условиями распространения для прямой и обратной волн;
- б) устройства с быстропеременными параметрами (переключатели, модуляторы, перестраиваемые резонансные системы).

Принцип работы этих устройств основан на использовании анизотропных свойств относительно переменных полей феррита, намагниченного постоянным полем. Условия распространения электромагнитных волн в ферритовой среде зависят от направления их распространения и величины постоянного поля, благодаря чему возможно в широких пределах варьировать эти условия, изменяя постоянное поле.

§ 2. Ферромагнитный резонанс (ФМР)

Прежде чем определить условия распространения электромагнитных волн в феррите, необходимо установить связь между переменной магнитной индукцией и переменным полем, т. е. определить магнитную проницаемость. Для этого воспользуемся уравнением движения намагниченности \mathbf{M} , которое по аналогии с уравнением движения магнитного момента электрона записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}, \quad (1)$$

где \mathbf{H} — сумма всех полей, действующих на намагниченность; $\gamma = 1,76 \cdot 10^7$ (э·с)⁻¹ — гиромагнитное отношение для электрона.

Рассмотрим собственные колебания намагниченности безграничной ферритовой среды, намагниченной до насыщения однородным постоянным полем \mathbf{H}_0 . В отсутствие постоянного поля среда предполагается изотропной. Выберем оси прямоугольной системы координат так, чтобы ось z была направлена вдоль постоянного поля \mathbf{H}_0 (рис. 1). Предполагая собственные колебания зависящими от времени по гармоническому закону, запишем выражение для намагниченности в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m} e^{i\omega_0 t}, \quad (2)$$

где ω_0 — собственная частота системы; \mathbf{M}_0 — постоянная составляющая; \mathbf{m} — переменная составляющая намагниченности. Подставляя (2) в (1), получим два уравнения

$$\mathbf{M}_0 \times \mathbf{H}_0 = 0; \quad i\omega_0 \mathbf{m} = -\gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_0. \quad (3)$$

Первое уравнение определяет условие равновесия $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}_0$, а второе — колебания намагниченности около положения равновесия.

Проектуруя второе уравнение (3) на оси координат, получим систему уравнений

$$i\omega_0 m_x + \gamma H_0 m_y = 0, \quad -\gamma H_0 m_x + i\omega_0 m_y = 0, \quad m_z = 0, \quad (4)$$

где m_x , m_y и m_z — проекции переменной намагниченности на оси координат. Из условия совместности системы уравнений (4) следует выражение для частоты собственных колебаний

$$\omega_0 = \gamma H_0. \quad (5)$$

Подставляя (5) в одно из уравнений (4), получим соотношение между компонентами намагниченности

$$m_y = -im_x. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что собственные колебания намагниченности представляют собой правую круговую прецессию вектора намагниченности \mathbf{M} вокруг поля \mathbf{H}_0 с частотой ω_0 (рис. 1).

Рассмотрим малые вынужденные колебания намагниченности. На феррит действует заданное переменное и постоянное поле, следовательно, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_0 e^{i\omega t}$. Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m} e^{i\omega t}. \quad (7)$$

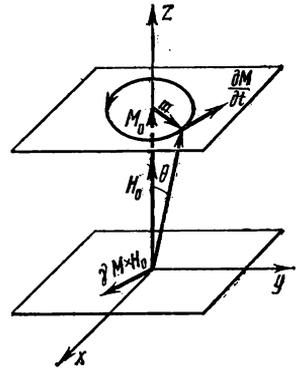


Рис. 1. Прецессия намагниченности

Предположение о малости колебаний означает, что $|h| \ll H_0$, $|m| \ll M_0$. Решая уравнение (1) в линейном приближении (пренебрегаем членами второй степени относительно m и h), получим для компонент переменной магнитной индукции $\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}$ выражения [1]:

$$\begin{aligned} b_x &= \mu h_x + i\mu_a h_y, \\ b_y &= -i\mu_a h_x + \mu h_y, \\ b_z &= \mu_2 h_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, в феррите связь переменной магнитной индукции с полем определяется несимметричным тензором магнитной проницаемости $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mu} \mathbf{h}$, где

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Среда, в которой магнитная проницаемость определяется тензором вида (9), называется гиромагнитной. Потери приводят к тому, что компоненты тензора становятся комплексными: $\mu = \mu' - i\mu''$, $\mu_a = \mu'_a - i\mu''_a$, $\mu_z = \mu'_z - i\mu''_z$. Практический интерес представляют ферриты с малыми потерями, для которых выражения для компонент тензора μ имеют вид [1]:

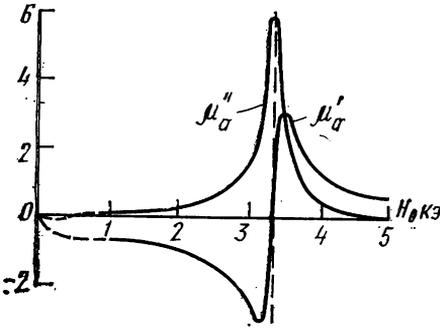
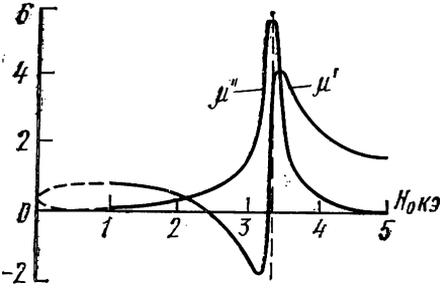


Рис. 2. Зависимости компонент тензора магнитной проницаемости от постоянного поля ($\omega = \text{const}$)

фиксированном постоянном поле и от постоянного поля при фиксированной частоте имеют резонансный характер. Наибольший интерес представляет последний случай (рис. 2), из которого следует возможность в широких пределах изменять компоненты тензора магнитной проницаемости, меняя постоянное поле. Из (10) и рис. 2 видно, что при

$$\omega = \omega_0 = \gamma H_0 \quad (11)$$

мнимые части компонент тензора достигают максимального значения

$$\begin{aligned} \mu' &= 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \\ \mu'' &= 4\pi\chi_0 \frac{\omega_r \omega (\omega_0^2 + \omega^2)}{\Delta}, \\ \mu'_a &= 4\pi\chi_0 \frac{\omega \omega_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \\ \mu''_a &= 4\pi\chi_0 \frac{2\omega_r \omega_0 \omega^2}{\Delta}, \\ \mu'_z &= 1, \quad \mu''_z = 0, \quad \Delta = \\ &= (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_r^2 \omega^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\chi_0 = M_0/H_0$ — статическая магнитная восприимчивость; ω_r — коэффициент затухания. При выводе (10), использовано условие малых потерь: $\omega_r \ll \omega_0$, $\omega_r \ll \omega_0$.

Как видно из (10), компоненты тензора магнитной проницаемости зависят от намагниченности M_0 , частоты переменного поля ω , постоянного поля H_0 и коэффициента затухания ω_r . Зависимости компонент тензора от частоты при

$$\mu''_{\text{рез}} = \mu''_{\text{арез}} = 2\pi\chi_0 \omega_0/\omega_r.$$

Часто качество феррита определяется шириной резонансной кривой ΔH , которая определяется как разность полей, соответствующих значениям μ'' , равным половине максимальной величины. Используя выражение для μ'' (10) и $\mu''_{\text{рез}}$, получим

$$\Delta H = 2\omega_r/\gamma, \mu''_{\text{рез}} = \mu''_{\text{арез}} = 4\pi M_0/\Delta H.$$

Для ферритов, используемых в диапазоне СВЧ, ΔH имеет значение от нескольких десятых долей эрстеда (монокристалл иттриевого граната) до нескольких сотен эрстед (поликристаллические ферриты).

В ферритовых волноводных устройствах используются неодинаковые условия взаимодействия феррита с полями различной поляризации. Поэтому предварительно рассмотрим взаимодействие с полями круговой поляризации $h_y^\pm = \pm ih_x^\pm$, знак плюс соответствует левой, а знак минус — правой поляризации по отношению к оси Oz , т. е. направлению поля \mathbf{H}_0 . Из (8) получим выражения для магнитной индукции в виде

$$\mathbf{b}^\pm = (\mu \mp \mu_a) \mathbf{h}^\pm, \mathbf{b}_y^\pm = \pm ib_x^\pm. \quad (12)$$

Следовательно, если на феррит действует внешнее поле круговой поляризации, то магнитная индукция будет иметь ту же круговую поляризацию, а магнитная проницаемость становится скалярной величиной. Однако магнитные проницаемости для левой и правой поляризации поля различны. Если для правой поляризации магнитная проницаемость $\mu_+ = \mu + \mu_a$ имеет резонансные зависимости от постоянного поля и частоты, аналогичные зависимостям компонент тензора магнитной проницаемости, то для левой поляризации магнитная проницаемость $\mu_- = \mu - \mu_a$ слабо меняется с полем [1]. Это определяется тем, что собственным колебанием намагниченности является правая круговая прецессия, и поэтому поле с правой круговой прецессией сильно взаимодействует с ним, а поле с левой поляризацией — слабо.

Известно, что мнимая часть комплексной проницаемости μ определяет поглощение энергии поля веществом. При $\omega = \gamma H_0$ частота прецессии совпадает с частотой внешнего поля, это обеспечивает наиболее эффективное взаимодействие поля правой круговой поляризации с намагниченностью и, следовательно, максимальное поглощение энергии этого поля ферритом. Явление резонансного поглощения энергии высокочастотного поля ферромагнетиком называется ферромагнитным резонансом (ФМР).

§ 3. Распространение электромагнитных волн в безграничной ферритовой среде

Начнем с решения уравнений Максвелла для безграничной среды, учитывая, что связь между магнитной индукцией и полем

определяется тензором магнитной проницаемости (8), (9). Предполагаем, что объемные заряды и сторонние токи отсутствуют. Рассматривая распространение плоской волны, запишем зависимости составляющих поля волны от времени и координат в виде $e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$. Среда в плоскости xy изотропна, направление осей x и y можно выбрать произвольно, поэтому выберем их так, чтобы волновой вектор \mathbf{k} лежал в плоскости yz (см. рис. 1). В этом случае уравнения Максвелла можно записать в виде системы линейных уравнений относительно составляющих поля в виде [1]:

$$k_y e_z - k_z e_y - \frac{\omega}{c} (\mu h_x + i \mu_a h_y) = 0, \quad (13^1)$$

$$k_z e_x - \frac{\omega}{c} (\mu h_y - i \mu_a h_x) = 0, \quad (13^2)$$

$$k_y e_x + \frac{\omega}{c} \mu_z h_z = 0, \quad (13^3)$$

$$k_y h_z - k_z h_y + \frac{\omega}{c} \varepsilon e_x = 0, \quad (13^4)$$

$$k_z h_x + \frac{\omega}{c} \varepsilon e_y = 0, \quad (13^5)$$

$$k_y h_x - \frac{\omega}{c} \varepsilon e_z = 0, \quad (13^6)$$

где e и h — комплексные амплитуды электрического и магнитного полей; ε — диэлектрическая проницаемость (для ферритов $\varepsilon = 10-15$).

В общем случае распространения волн в произвольном направлении уравнения (13) имеют решение в виде двух волн с различными постоянными распространения и структурами поля и намагниченности. Намагниченность в этих волнах прецессирует вокруг постоянного поля, причем для волны, которую называют обыкновенной, будет левая эллиптическая прецессия, а для необыкновенной — правая. Такой характер прецессии приводит к тому, что постоянная распространения обыкновенной волны слабо зависит от постоянного поля и частоты, а для необыкновенной имеет сильную (резонансную) зависимость от поля и частоты. Эти волны — нормальные волны намагниченного феррита, и поэтому распространение любой волны может быть представлено в виде суперпозиции их.

В качестве практически важных примеров рассмотрим условия распространения волн в направлениях: вдоль поля \mathbf{H}_0 и перпендикулярно ему.

а) *Распространение волны вдоль поля \mathbf{H}_0 .* В этом случае $k_y = 0$, $k_z = k$ и из уравнений (13) получим

$$\frac{(h_x)_{1,2}}{(h_y)_{1,2}} = -\frac{(e_y)_{1,2}}{(e_x)_{1,2}} = \frac{(m_x)_{1,2}}{(m_y)_{1,2}} = \pm i, \quad (14)$$

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\mu \pm \mu_a)}. \quad (15)$$

Знаки плюс в (14) и (15) соответствуют индексам 1, а знаки минус — индексам 2. Волны, распространяющиеся вдоль поля, имеют круговую поляризацию полей и переменной намагниченности, и условия распространения их определяются эффективными магнитными проницаемостями μ_+ и μ_- (12). Следствием различия постоянных распространения волн с правой и левой круговой поляризацией является вращение плоскости поляризации линейно-поляризованной волны (эффект Фарадея). Угол поворота плоскости поляризации волны ψ , прошедшей расстояние l , определяется выражением [1]:

$$\psi = \frac{k_1 - k_2}{2} l. \quad (16)$$

Если $k_1 > k_2$, то плоскость поляризации повернется в левую сторону (если смотреть в направлении поля \mathbf{H}_0) при распространении волны как в направлении поля, так и в противоположном направлении. Эффект Фарадея в устройствах СВЧ очень часто используется при слабых намагничивающих полях, не обеспечивающих намагничивание феррита до насыщения. В этом случае теория ФМР (см. § 2) может быть применена, если намагниченность феррита M , соответствующую полю H_0 . Так как $H_0 \ll \omega/\gamma$, то потери, связанные с ФМР, будут малы, и, считая $\omega_r = 0$, получим из (10) и (12) выражения для эффективных магнитных проницаемостей в виде

$$\mu_+ = 1 - \omega_M/\omega, \quad \mu_- = 1 + \omega_M/\omega,$$

где $\omega_M = \gamma 4\pi M$. Для 3-см диапазона волн и ферритов с $4\pi M < 1500$ Гс $\omega_M/\omega \ll 1$, и тогда из (16) получим приближенное выражение для угла поворота плоскости поляризации

$$\psi = \frac{\omega}{2c} \sqrt{\varepsilon} \left(\sqrt{1 + \omega_M/\omega} - \sqrt{1 - \omega_M/\omega} \right) l \cong \frac{4\pi\gamma M}{c} \sqrt{\varepsilon} l. \quad (17)$$

Следовательно, при изменении постоянного поля угол поворота плоскости поляризации будет меняться за счет изменения намагниченности, и зависимость $\psi(H)$ будет подобна кривой намагничивания феррита $M(H)$.

Если учесть различное затухание нормальных волн, то линейно-поляризованная волна по мере распространения в феррите станет уже эллиптически поляризованной волной. Углом поворота поляризации будет угол между большими (или малыми) осями

эллипсов и при малых потерях приближенно определяется выражением (17).

б) *Распространение волны в направлении, перпендикулярном полю H_0 ($k_z=0, k_y=k$)*. Из уравнения (13⁵) следует, что $e_y=0$, а оставшаяся система уравнений распадается на две группы уравнений: (13^{3,4}) для e_x, h_z и (13^{1,2,6}) для e_z, h_x, h_y . Первая группа описывает обыкновенную волну, для которой $k_1 = \omega/c\sqrt{\epsilon\mu_z}$ и не зависит от поля ($\mu_z=1$). Постоянная распространения необыкновенной волны $k_2 = \omega/c\sqrt{\epsilon\mu_{\perp}}$.

Эффективная магнитная проницаемость $\mu_{\perp} = (\mu^2 - \mu_a^2)/\mu$ имеет резонансные зависимости от поля и частоты, аналогичные зависимостям μ и μ_{\pm} . Максимум компоненты μ_{\perp} наступает при условии $\omega^2 = \gamma^2 H_0 (H_0 + 4\pi M)$. Резонансное поглощение энергии волны, распространяющейся в направлении, перпендикулярном полю, называется поперечным ФМР. При фиксированной частоте этот резонанс наступает в более слабом поле, чем обычный резонанс, и его величина определяется не только частотой, но и намагниченностью.

Из (13²) следует, что $b_y=0$, т. е. магнитная индукция имеет линейную поляризацию, а собственное магнитное поле волны — левую эллиптическую поляризацию $h_y = i\mu_a h_x/\mu$. Из этого следует, что так как $b = h + 4\pi m$, то переменная намагниченность для этой волны имеет правую эллиптическую поляризацию.

§ 4. Распространение электромагнитных волн в волноводе, заполненном ферритом

При создании различных взаимных и невзаимных волноводных устройств используются свойства волноводов, частично заполнен-

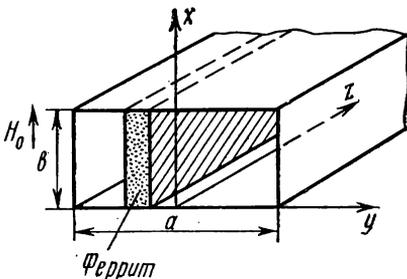


Рис. 3. Прямоугольный волновод с ферритовой пластинкой

ных намагниченным ферритом: круглый волновод с коаксиальным ферритовым стержнем и прямоугольный волновод с ферритовой пластинкой (рис. 3). Рассмотрим свойства этих волноводных элементов.

Решение электродинамической задачи о распространении волн в волноводе, в полости которого имеется гиромангнитная среда, связано с большими математическими трудностями, возникающими

из-за дополнительных граничных условий на поверхности волновода и феррита. Для круглого волновода радиуса r_b с коаксиальным цилиндрическим стержнем из феррита радиуса r_f , на-

магнитного вдоль оси, методами теории возмущения ($r_\phi/r_b \ll 1$) удастся решить задачу о распространении волн типа H_{11} . В таком волноводе могут распространяться две волны H_{11} с правой и левой круговой поляризацией (вся структура поля волны H_{11} вращается в правую или левую сторону относительно H_0). Постоянные распространения этих волн различны, и, следовательно, при распространении линейно-поляризованной волны (плоскость поляризации совпадает с электрическим полем в центре волновода) будет происходить вращение плоскости поляризации. Решение этой задачи для слабых намагничивающих полей в приближениях, использованных при выводе (17), приводит к выражению для угла поворота плоскости поляризации [1]:

$$\psi \cong k_b \left(\frac{r_\phi}{r_b} \right)^2 \frac{\omega_M}{\omega} l, \quad (18)$$

где $k_b = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1,84}{r_b}\right)^2}$ — постоянная распространения волны H_{11} в пустом волноводе [2, 3].

Следовательно, для круглого волновода с ферритом угол поворота плоскости поляризации, так же как и в безграничной среде, пропорционален намагниченности, однако для волновода появляется зависимость его от частоты. Эта зависимость определяется свойствами волновода k_b и феррита ω_M/ω .

Для выяснения условий распространения прямой и обратной волн в прямоугольном волноводе с ферритовой пластинкой, намагниченной постоянным полем H_0 , рассмотрим структуру магнитного поля в двух точках A и B , расположенных на широкой стенке волновода симметрично относительно его оси (рис. 4). Предполагается, что в волноводе может распространяться только волна H_{10} . На рис. 4 слева изображено распределение магнитного поля волны H_{10} в плоскости широкой стенки в некоторый момент времени [2, 3]. При распространении волны все это распределение магнитного поля перемещается вдоль волновода. Последовательные ориентации магнитного поля через четверть периода (1—2—3—4) при движении волны слева направо показаны на схеме *a*: внизу — для точки A , вверху — для точки B . На схеме *b* показаны ориентации поля в тех же точках при движении волны в обратном направлении. Из этих схем видно, что: а) в фиксированной точке магнитное поле имеет эллиптическую поляризацию, причем направление этой поляризации для прямой и обратной волн противоположно; б) в симметричных точках волновода для одного и того же направления распространения волны поля имеют противоположные направления эллиптической поляризации, т. е. поле прямой волны в точке B эквивалентно полю обратной волны в точке A .

Если в волновод поместить тонкую ферритовую пластинку несимметрично относительно его оси (см. рис. 3), то в зависимости от направления распространения волны магнитное поле ее будет

иметь правую или левую эллиптическую поляризацию относительно постоянного поля. Это приведет к различному взаимодействию волн с ферритовой пластинкой, и, следовательно, набег фазы и затухание для прямой и обратной волн в такой системе будут различными (невзаимные свойства). Невзаимность будет максимальной при положениях пластинки, приблизительно соответствующих

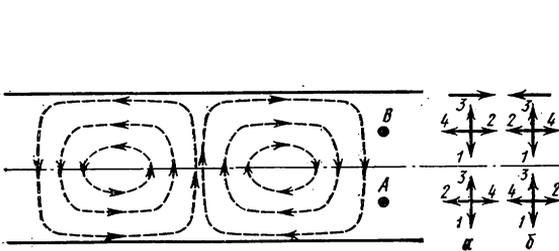


Рис. 4. Структура магнитного поля волны H_{10} в прямоугольном волноводе (вид со стороны широкой стенки)

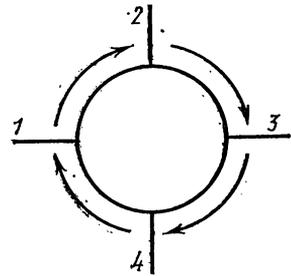


Рис. 5. Схема передачи энергии в циркуляторе: 1—4 — плечи циркулятора

круговой поляризации поля, и будет отсутствовать при положении пластинки в центре и около узкой стенки волновода (линейная поляризация поля). При изменении направления поля на противоположное или при перемещении пластинки в положение, симметричное первоначальному, условия распространения прямой волны станут эквивалентными условиям распространения, которые были для обратной волны, и наоборот.

Параметры рассмотренных выше волноводных элементов с ферритом (вращение плоскости поляризации, взаимные и невзаимные сдвиги фаз и потери) можно в широких пределах регулировать изменением величины и направления постоянного поля.

§ 5. Поляризационный циркулятор

В технике СВЧ для направленной передачи энергии используются устройства, называемые циркуляторами [3]. Схема передачи энергии в четырехплечном циркуляторе показана на рис. 5. Волна, поступающая в плечо 1, передается только в плечо 2 и не ответвляется в плечи 3 и 4, из плеча 2 — только в плечо 3 и т. д., т. е. осуществляется передача энергии по схеме 1—2—3—4—1. В циркуляторах используются различные свойства волноводных элементов, в частности вращение плоскости поляризации в круглом волноводе с ферритовым стержнем (см. § 4), и поэтому такие циркуляторы называются поляризационными (рис. 6). Размеры волноводов выбраны так, что на рабочей частоте в прямоугольных вол-

новодах плеч распространяется только волна H_{10} , а в круглом волноводе, содержащем феррит, — только волна H_{11} . Постоянное поле соленоида обеспечивает поворот плоскости поляризации на 45° .

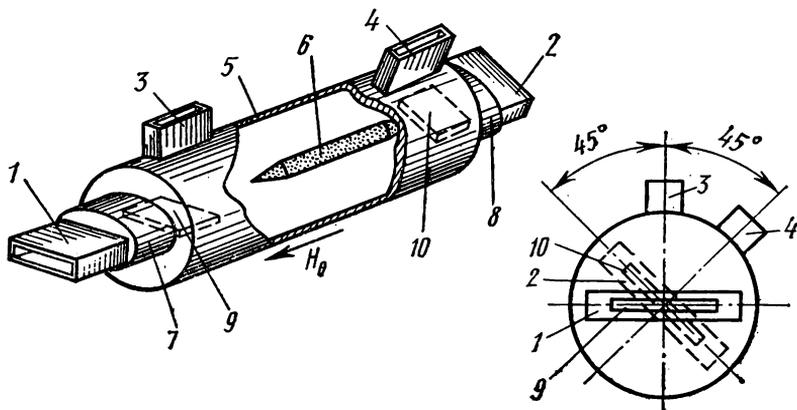


Рис. 6. Поляризационный циркулятор

Рассмотрим условия распространения волн в циркуляторе. Волна H_{10} , поступающая из плеча 1, в переходе 7 преобразуется в волну H_{11} круглого волновода 5. Плоскость поляризации этой волны (совпадает с электрическим полем в центре волновода) перпендикулярна широкой стенке волновода 1. После прохождения участка с ферритовым стержнем 6 волна будет иметь плоскость поляризации, повернутую на 45° , и через переход 8 пройдет в волновод плеча 2 (при соответствующем выборе направления постоянного поля). В волноводы плеч 3 и 4 энергия не будет передаваться, так как поля этой волны H_{11} имеют структуру, при которой в них возбуждаются только волны высших типов [2, 3] (рис. 7). Плоскости металлических пластинок 9 и 10 перпендикулярны электрическому полю рассматриваемой волны, и поэтому пластинки не будут влиять на распространение ее.

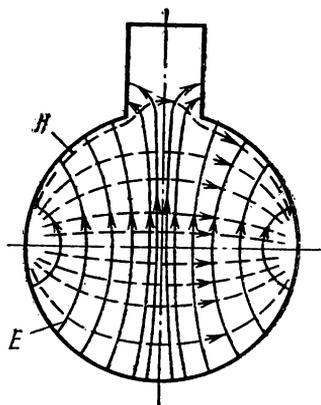


Рис. 7. Распределение поля волны H_{11} в круглом волноводе в сечении плеч 3 и 4

Если волна поступает из плеча 2, то для соответствующей волны в круглом волноводе, после прохождения участка с ферритом, плоскость поляризации повернется на 45° в ту же сторону. Вектор

электрического поля ее будет параллелен плоскости пластинки 9, широкой стенке волновода плеча 1 и узкой стенке волновода плеча 3. Следовательно, такая волна не возбudit плечо 1, отразится от пластинки 9 и возбudit волну H_{10} в волноводе плеча 3. Положение пластинки 9 выбрано так, чтобы около волновода 3 был максимум электрического поля и тем самым обеспечивалось эффективное возбуждение его. Проводя аналогичные рассуждения, легко установить, что волна из плеча 3 пойдет только в плечо 4, а из плеча 4 — в 1.

Следовательно, при определенном выборе направления и величины постоянного поля в поляризованном циркуляторе обеспечивается передача энергий по схеме 1—2—3—4—1. Если изменить направление постоянного поля на противоположное, то передача энергии будет происходить уже по схеме 1—4—3—2—1. Такой циркулятор можно использовать в качестве быстродействующего переключателя и модулятора. Действительно, меняя направление постоянного поля, можно передавать энергию волны из плеча 1 в плечо 2 или в плечо 4, к которым присоединены согласованные нагрузки.

При работе в режиме модулятора необходимо изменять постоянное поле во времени по определенному закону, и тогда в плечах 2 и 4 будут распространяться волны, модулированные по амплитуде.

В реальных устройствах из-за потерь в феррите и нарушения симметрии расположения волноводов не удастся достигнуть точного выполнения циркуляционной передачи энергии. Поэтому, например, при передаче энергии из плеча 1 в плечо 2 часть ее ответвляется в плечи 3 и 4. При передаче энергии по схеме 1—2—3—4—1 качество циркулятора определяется следующими параметрами:

а) прямое затухание при передаче энергии из плеча 1 в плечо 2 (рис. 8, а):

$$\alpha_{12} = 10 \lg(P_1/P_2); \quad (19)$$

б) обратное затухание; затухание, соответствующее передаче энергии из плеча 2 в плечо 1 (рис. 8, б):

$$\beta_{21} = 10 \lg(P_2/P_1); \quad (20)$$

в) развязка плеч — параметр, характеризующий ответвление энергии в плечи 3 и 4 при передаче энергии из плеча 1 в плечо 2 при согласованной нагрузке в нем (рис. 8, а):

$$\gamma_{13} = 10 \lg(P_1/P_3), \quad \gamma_{14} = 10 \lg(P_1/P_4). \quad (21)$$

Иногда циркулятор используется как направленный ответвитель для измерения сигнала, отраженного от нагрузки. В этом случае энергия от генератора подается в плечо 1, к плечу 2 присоединена нагрузка, к плечу 3 — детектор, к плечу 4 — согласованная нагрузка (рис. 8, в).

Циркулятор обеспечивает не только направленную передачу сигнала, отраженного от нагрузки в плечо 3, но работает и как вентиль, развязывающий генератор от нагрузки, так как в плечо 1 отводится незначительная часть отраженной мощности.

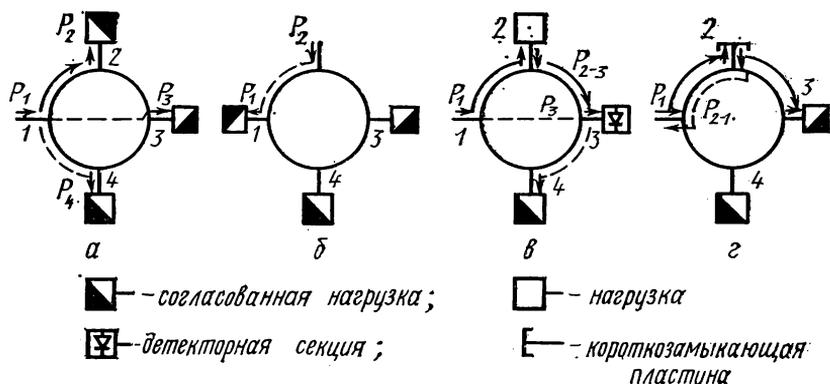


Рис. 8. Схемы, поясняющие определение параметров циркулятора

Рабочие параметры направленного ответвителя: прямое затухание α_{12} ; направленность

$$\eta = 10 \lg (P_{23}/P_3) \quad (22)$$

и развязка генератора от нагрузки (рис. 8, г)

$$\xi = 10 \lg (P_1/P_{21}). \quad (23)$$

§ 6. Описание экспериментальной установки

Установка состоит из трех самостоятельных установок, предназначенных для изучения: 1) эффекта Фарадея в круглом волноводе; 2) поляризационного циркулятора; 3) невязимного сдвига фаз в прямоугольном волноводе с ферритовой пластинкой. Каждая установка имеет свою высокочастотную часть, индикаторные устройства и питание соленоидов и электромагнита объединены для всех трех установок.

1. Высокочастотная часть установки (рис. 9). В качестве генератора СВЧ-колебаний 5 используется клистронный генератор малой мощности 3-см диапазона, работающий в режиме модуляции прямоугольными импульсами (меандр). На выходе генератора стоит ферритовый вентиль 6, обеспечивающий развязку генератора от нагрузки. С помощью волноводных переключателей 7 энергию от генератора можно подводить к одной из трех установок.

1) Установка для изучения эффекта Фарадея состоит из перехода 9 от прямоугольного волновода к круглому, круглого волно-

вода с коаксиальным ферритовым стержнем 10 и соленоидом L_1 , создающим постоянное продольное магнитное поле, вращающегося соединения с устройством для отсчета углов поворота 11, поворотной детекторной секции 12 и согласованной нагрузки круглого волновода 13. В детекторной секции связь детектора с продольной составляющей магнитного поля волны осуществляется петлей.

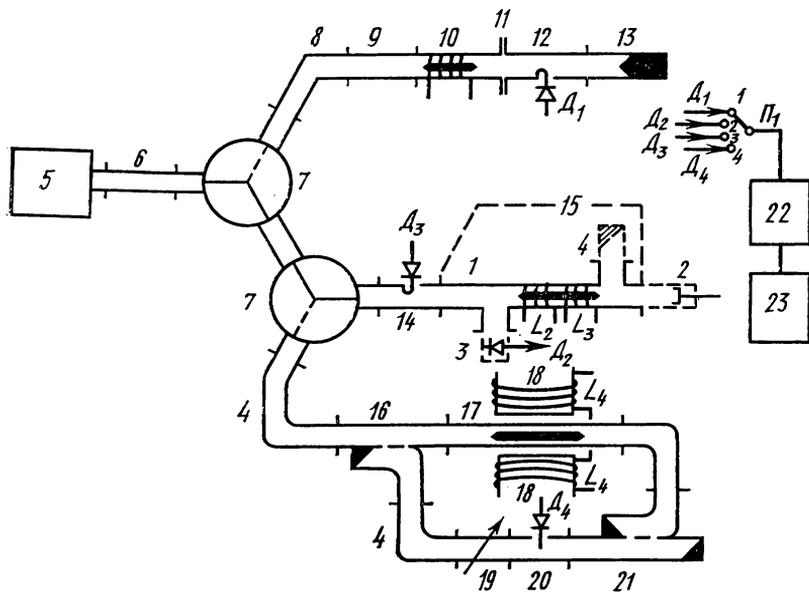


Рис. 9. Высокочастотная часть экспериментальной установки

Волна, поступающая от генератора через переход 9, преобразуется в волну H_{11} круглого волновода. На участке волновода с ферритовым стержнем 10 волна из линейно-поляризованной преобразуется в эллиптически-поляризованную волну. Большая ось этого эллипса будет составлять угол ψ с плоскостью поляризации волны на входе 10. Продольная составляющая магнитного поля волны изменяется с азимутальным углом φ пропорционально $\cos\varphi$ [2, 3]. Так как детектор имеет квадратичную характеристику, то ток детектора можно записать в виде

$$I = I_0 + I_1 \cos^2 \varphi,$$

где I_0 соответствует малой оси, а $I_0 + I_1$ — большой оси эллипса. Поворот плоскости поляризации можно фиксировать по положению малой или большой оси эллипса.

2) Установка для изучения циркулятора 15 состоит из входной детекторной секции 14, циркулятора с двумя соленоидами L_2 (постоянное поле) и L_3 (поле модуляции). Обмотки соленоида рав-

номерно намотаны вдоль участка от плеча 3 до плеча 4. Кроме этого в установке имеется комплект сменных элементов волноводного тракта (показаны пунктиром), которые можно присоединить к любому плечу 2, 3, 4 циркулятора. В этот комплект входят: две согласованные нагрузки, реактор (волноводная секция с подвижным поршнем), детекторная секция и две пластинки для короткого замыкания волновода [3].

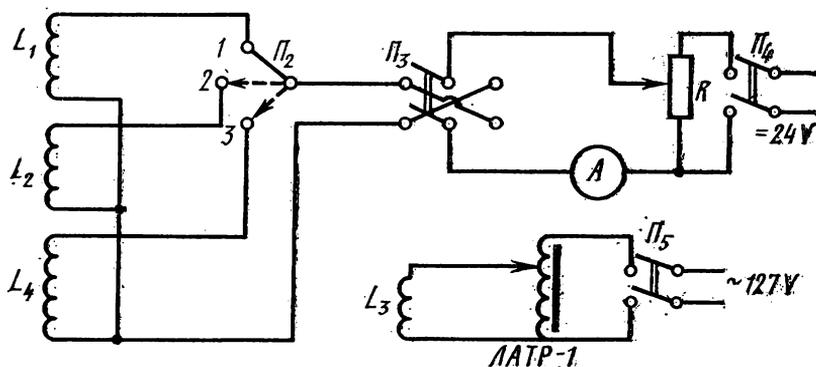


Рис. 10. Схемы питания соленоидов и электромагнита.

3) Установка для изучения невязанного сдвига фаз состоит из двух направленных ответвителей 16 и 21, волноводной секции с ферритом 17, электромагнита 18 с обмотками L_4 , переменного аттенюатора 19 и измерительной линии 20. Волноводная секция с ферритом выполнена в виде отрезка прямоугольного волновода, через узкую стенку которого проходит диэлектрический стержень-держатель, закрепленный одним концом на микрометрическом винте отсчетного приспособления. Внутри волновода на держателе приклеена ферритовая пластинка. При помощи микрометрического винта пластинку можно перемещать от одной узкой стенки волновода до другой. Волноводная секция помещена между полюсами электромагнита 18 (поле электромагнита перпендикулярно широкой стенке волновода). Для измерения изменения фазы волны, прошедшей через волноводную секцию с ферритом, используется опорная волна. В направленном ответвителе 16 волна, пришедшая от генератора, разделяется на две волны: прямую, поступающую в волноводную секцию с ферритом, и ответвленную, являющуюся опорной волной. Обе волны поступают на противоположные входы измерительной линии 20. Положение минимума и максимума стоячей волны в измерительной линии определяется соотношением фаз противоположно направленных волн. Так как фаза опорной волны постоянна, а фаза прямой волны зависит от положения ферритовой пластинки в волноводе, то смещение минимума или

максимума стоячей волны Δl однозначно определяется изменением фазы $\Delta\varphi$ в волноводной секции с ферритом

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda_B},$$

где λ_B — длина волны в волноводе измерительной линии.

2. Индикаторная часть установки (см. рис. 9). При помощи переключателя P_1 можно выход любой детекторной секции присоединить ко входу измерительного усилителя 22. Осциллограф 23 и вольтметр измерительного усилителя являются регистрирующими приборами.

3. Схема питания соленоидов и электромагнита (рис. 10). Соленоиды L_1 , L_2 и обмотки электромагнита L_4 питаются от источника постоянного напряжения 24 В. Питание соленоида L_3 осуществляется через автотрансформатор от сети 50 Гц. Потенциометр R служит для изменения напряжения на L_1 , L_2 и L_4 от 0 до 24 В, а переключатель P_3 — для изменения направления тока.

§ 7. Упражнения

В начале каждого упражнения при включениях и переключениях токов в соленоидах и обмотках электромагнита обязательно поставьте потенциометр и автотрансформатор в положения, при которых напряжение на соответствующих нагрузках минимально.

Включите клистронный генератор в режиме модуляции меандром, осциллограф и измерительный усилитель и прогрейте их 10—15 мин.

1. Изучение эффекта Фарадея в круглом волноводе. Поставьте первый волноводный переключатель 7 в положение, при котором сигнал от генератора поступает в установку для изучения эффекта Фарадея. Переключатели P_1 и P_2 поставьте в положение 1, реостат R — в положение, соответствующее минимальному току через соленоид L_1 . Наблюдая сигнал от детектора D_1 на осциллографе, поворотом детекторной секции найдите положение минимума или максимума сигнала. По шкале устройства для отсчета углов определите показания для этого положения детекторной секции 12. Включите переключатели P_3 и P_4 . Меняя величину тока в соленоиде, снимите зависимость угла поворота плоскости поляризации ψ от постоянного тока. Снимите эту же зависимость для обратного направления тока. Пользуясь связью между током через соленоид и напряженностью магнитного поля, постройте зависимость $\psi(H)$ для двух направлений поля.

2. Изучение схемы передачи энергии в циркуляторе. При помощи переключателей 7 соедините установку циркулятора с генератором. К плечам циркулятора присоедините сменные элементы волноводного тракта по схеме рис. 11, а. Переключатели P_1 и P_2 поставьте в положение 2. Изменяя ток в соленоиде L_2 , снимите зависимость мощности P_2 , проходящей в плечо 2, от тока в соле-

ноиде. Прodelайте то же самое для обратного направления тока. Из сравнения полученных зависимостей выберите направление и силу тока, при которых мощность, проходящая в плечо 2, имеет максимум при наименьшей силе тока (поворот плоскости поляри-

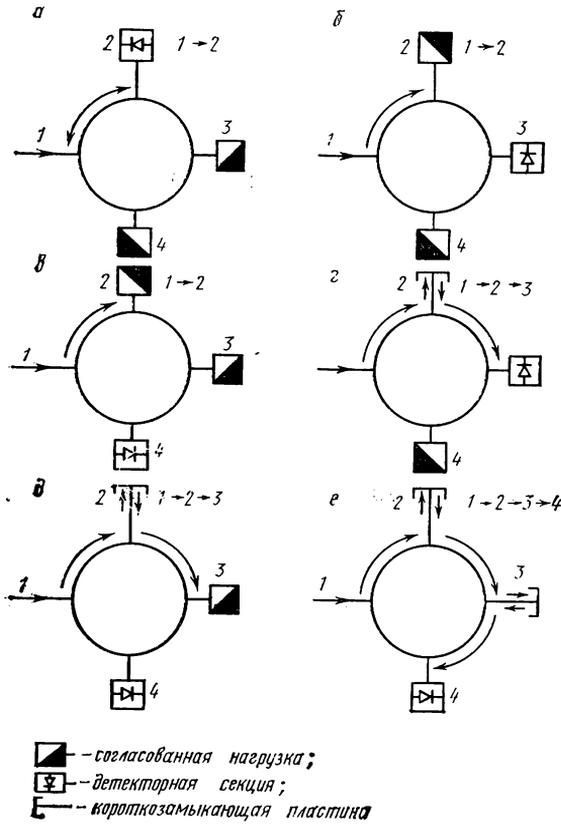


Рис. 11. Схемы соединений для проверки порядка передачи энергии в циркуляторе

зации на угол 45°). Установив этот ток, проверьте схему передачи энергии в циркуляторе (см. рис. 5), используя различные варианты соединений сменных элементов с циркулятором (рис. 11). Выберите самостоятельно аналогичные варианты соединений и проверьте схему передачи энергии при обратном направлении поля. Постройте график $P_2(H)$, используя данные соленоида L_2 ($H = aI$).

3. Измерения рабочих параметров циркулятора (коэффициентов направленности и развязки). Для определения коэффициента

направленности соберите схему соединений (рис. 8, в), заменив нагрузку в плече 2 волноводной секцией с поршнем. Установите ток соленоида, соответствующий схеме передачи энергии 1—2—3—4—1. На детектор в плече 3 будет действовать поле E , являющееся суммой полей двух волн: E_0 — поле волны, отраженной от короткого замыкания в плече 2 (волна P_{23}), и E_1 — поле волны, прошедшей из плеча 1 в плечо 3 (P_3). Если перемещать поршень в плече 2, то фаза отраженной волны будет изменяться, а фаза волны, прошедшей из плеча 1 в плечо 3, будет постоянна. Можно найти положения поршня, при которых отраженная волна и прошедшая будут в фазе, тогда $|E| = |E_0| + |E_1|$ и ток детектора будет максимальным I_{\max} , или волны будут в противофазе $|E| = |E_0| - |E_1|$ и ток будет минимальным I_{\min} . Коэффициент направленности, согласно (23), равен $\eta = 10 \lg(|E_0|^2/|E_1|^2)$ или, если обозначить $m = (|E_0| - |E_1|)/(|E_0| + |E_1|)$ и учесть квадратичную зависимость тока детектора от напряженности поля, $m = (I_{\min}/I_{\max})^{1/2}$, то

$$\eta = 20 \lg \frac{1+m}{1-m}.$$

Для определения коэффициента развязки генератора от нагрузки следует проделать аналогичные измерения, используя уже детектор D_3 на входе циркулятора (P_3 в положении 4). При выполнении упражнения в качестве индикатора следует использовать вольтметр измерительного усилителя.

4. Циркулятор в режиме модулятора. Положения всех переключателей и соединения смежных элементов такие же, как в упр. 2 (рис. 11, а). По графику зависимости $P_2(H)$, полученной в упр. 2, определите ток соленоида L_2 , соответствующий средней рабочей точке линейной части этой зависимости. Установите ток соленоида L_2 , равный этому значению. Включите выключатель P_5 . С помощью автотрансформатора подберите амплитуду переменного тока, при которой на экране осциллографа наблюдается неискаженный модулированный сигнал (амплитудная модуляция синусоидой с частотой 50 Гц). Изменяя амплитуду модуляции, зарисуйте форму выходных сигналов, наблюдаемых на экране осциллографа. То же самое проделайте, меняя положение рабочей точки (ток в соленоиде L_2). Объясните форму полученных сигналов при помощи зависимости $P_2(H)$, полученной при выполнении упр. 2.

5. Изучение невзаимного сдвига фаз в прямоугольном волноводе с ферритовой пластинкой. Невзаимный сдвиг фаз определяется как разность набега фаз для прямой и обратной волн, прошедших отрезок волновода с ферритовой пластинкой. Переключателями 7 соедините генератор с установкой измерительной секции 17. Поставьте переключатели P_1 в положение 4, P_2 — в положение 3. При помощи реостата установите ток в электромагните, соответствующий постоянному магнитному полю, равному 350 Э (по гра-

дуировочной кривой электромагнита). Ферритовую пластинку поместите вблизи узкой стенки волноводной секции. Передвигая зонд вдоль измерительной линии и регулируя аттенуатором 19 амплитуду опорной волны, добейтесь четкого минимума тока детектора D_4 . В качестве индикатора удобнее использовать осциллограф. По положению двух соседних минимумов l_1 и l_2 определите длину волны в волноводе $\lambda_w = 2|l_1 - l_2|$. С помощью микрометрического винта перемещайте ферритовую пластинку, фиксируя ее положение через 1—2 мм. При каждом положении ферритовой пластинки измерьте положение минимума стоячей волны. Следите за тем, чтобы измеряться сдвиг одного и того же минимума.

Измерения проделать для двух противоположных направлений поля. По полученным данным постройте графики зависимости смещения минимума от положения пластинки для двух направлений поля. Вычислите невзаимный сдвиг фаз $\Delta\varphi$ и постройте зависимость его от положения пластинки в волноводе. В той же последовательности проведите измерения для поля, равного 750 Э.

В отчете должны быть представлены:

- 1) график зависимости поворота плоскости поляризации от поля;
- 2) графики зависимости мощности, прошедшей в плечо 2 циркулятора, от поля;
- 3) значения рабочих параметров циркулятора;
- 4) форма сигналов на выходе циркулятора при различных режимах модуляции;
- 5) графики зависимости набега фазы от положения пластинки;
- 6) графики зависимости невзаимного сдвига фаз от положения пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М., «Наука», 1973, гл. 1, § 5.1; 5.2; 6.1; 6.2.
2. Ширман А. Д. Радиоволноводы и объемные резонаторы. М., Связьиздат, 1959.
3. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ, т. I. М., «Высшая школа», 1970.

II. КВАНТОВАЯ РАДИОФИЗИКА

1. СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ НЕОН-ГЕЛИЕВОГО ЛАЗЕРА

Изучаются пространственная и временная структуры генерации непрерывного неон-гелиевого лазера в зависимости от характеристики его оптического резонатора.

§ 1. Введение

Лазер, или оптический квантовый генератор, — источник оптического излучения, когерентного, направленного, монохроматического и мощного.

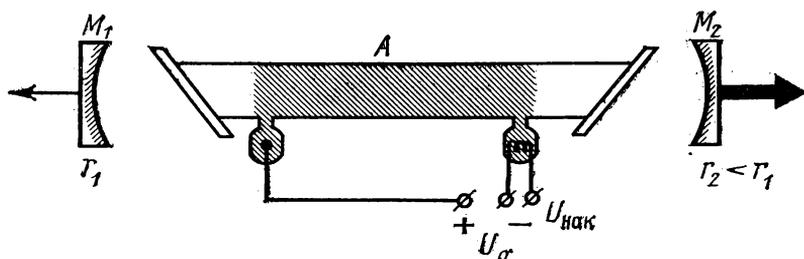


Рис. 1. Принципиальная схема газоразрядного лазера:
 A — плазма разряда, активная среда; M_1 , M_2 — зеркала оптического резонатора; r_1 , r_2 — коэффициенты отражения зеркал

Прибор содержит два принципиально важных элемента: активную среду, являющуюся источником световой энергии, и оптический резонатор, внутри которого находится эта среда (рис. 1). Активная среда может быть твердой, жидкой или газообразной, но обязательно обладает свойством усиливать свет на частоте генерации¹. Для получения оптического усиления требуется реализация определенных условий.

¹ Это свойство нашло отражение и в названии прибора: Laser-Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (световое усиление благодаря стимулированному испусканию излучения).

Основное назначение резонатора — осуществление положительной обратной связи: его зеркала возвращают часть световой энергии, излученной активной средой, обратно. Если усиление на один проход превосходит полные потери, возникает оптическая генерация — направленное яркое когерентное излучение с определенной длиной волны. Достаточным условием для появления стационарной генерации является обеспечение оптической системой резонатора определенного распределения светового поля в пространстве и спектре, не меняющегося при многократных отражениях. Выполнение этого условия характеризует так называемую устойчивость резонатора.

Все свойства лазерного излучения зависят исключительно от совокупности действия активной среды и резонатора. Выбор активной среды определяет длину волны генерации, предельные мощность и КПД, выбор резонатора — пространственную и спектральную структуры излучения, реальную мощность и КПД.

Данная лабораторная работа знакомит студентов с некоторыми характеристиками лазерного излучения на примере неон-гелиевого лазера.

§ 2. Теория

1. Оптическое усиление. Активная среда Ne—He-лазера. Прохождение света через любую материальную среду сопровождается обычно его поглощением:

$$I_\nu = I_{0\nu} e^{-k_\nu z}, \quad (1)$$

где $I_{0\nu}$ — интенсивность падающей волны; I_ν — интенсивность прошедшей волны; z — длина пути в среде; k_ν — коэффициент поглощения. Индекс ν указывает на частотную зависимость величин.

Усиление — процесс, обратный поглощению. В этом случае коэффициент k_ν отрицателен ($k_\nu < 0$) и происходит экспоненциальное нарастание интенсивности:

$$I_\nu = I_{0\nu} e^{|k_\nu|z}. \quad (2)$$

При микроскопическом подходе процессы поглощения и усиления связываются с процессами вынужденного поглощения и испускания кванта.

Определим требования для реализации оптического усиления в газовой среде. Рассмотрим два произвольных уровня E_1 и E_2 атомной системы, переход между которыми разрешен, $h\nu = E_2 - E_1$. Пусть N_2 и N_1 — число атомов, находящихся в единице объема в состоянии 2 и 1. Через участок среды от z до $z + dz$ проходит параллельный пучок монохроматического света. Время прохождения участка фазовым фронтом волны есть $dt = \frac{dz}{c} n$, n — коэффи-

коэффициент преломления. Пусть для определенности в знаках имеет место поглощение. Тогда интенсивность пучка уменьшится на величину

$$-dI_\nu = h\nu(B_{12}N_1 - B_{21}N_2) \frac{dz}{c} n_\nu, \quad (3)$$

где B_{21} и B_{12} — коэффициенты Эйнштейна для вынужденного испускания и поглощения кванта. Спонтанное излучение не учитывается, так как оно не связано с проходящим пучком:

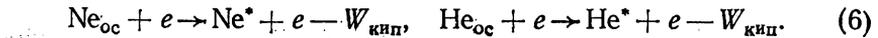
$$-\frac{1}{I_\nu} \frac{dI_\nu}{dz} = \frac{h\nu n}{c} (B_{12}N_1 - B_{21}N_2). \quad (4)$$

Из (1) следует $k_\nu dz = -\frac{dI_\nu}{I_\nu}$, поэтому, так как $B_{12} = B_{21}$,

$$k_\nu \simeq \frac{h\nu n}{c} B_{21}(N_1 - N_2). \quad (5)$$

Отсюда следует, что при обычной заселенности уровней, когда $N_1 < N_2$, проходящее излучение поглощается $k > 0$. Для получения оптического усиления ($k_\nu < 0$) требуется осуществить инверсию в заселенностях уровней: $N_2 > N_1$.

Рассмотрим, каким образом создается инверсия населенности в плазме Ne—He-разряда. Рабочим газом является Ne, состояния которого, как и дополнительного газа He, возбуждаются в основном электронным ударом



Если бы все состояния возбужденного неона имели одинаковые характеристики, они заселялись бы приблизительно в соответствии с законом Больцмана.

$$N_i = N_0 e^{-\frac{E_i - E_0}{kT}}, \quad (7)$$

т. е. чем выше энергетический уровень, тем ниже концентрация возбужденных атомов.

Однако различные состояния имеют разное время жизни, различное сечение возбуждения электронным ударом, переходы с испусканием кванта возможны не между произвольными уровнями, а лишь с учетом правил отбора и т. д. Поэтому населенность уровней неона в разряде может существенно отличаться от больцмановской.

С точки зрения создания инверсии населенности целесообразно, чтобы верхний рабочий уровень имел большее сечение возбуждения и большее время жизни по сравнению с нижним.

Наиболее подходящими с этой точки зрения оказались следующие переходы в неоне (рис. 2):

$$3s_2 - 2p_4 \quad \lambda = 0,6328 \mu (6328 \text{ \AA}),$$

$$2s_2 - 2p_4 \quad \lambda = 1,1523 \mu,$$

$$3s_2 - 3p_4 \quad \lambda = 3,3914 \mu.$$

При разряде в чистом неоне при давлении газа $\sim 10^{-3}$ мм рт. ст. на этих линиях получена генерация, но довольно слабая. Значительное увеличение мощности обеспечивает добавка гелия.

Роль гелия сводится к следующему. Состояния 2^1S_0 и 2^3S_1 гелия являются метастабильными (см. рис. 2) — переходы с этих уровней в основное состояние запрещены в дипольном приближении, а других уровней, лежащих между основным состоянием и 2^1S_0 и 2^3S_1 , нет. Поэтому в результате переходов с верхних уровней (на рис. 2 не показаны) атомы скапливаются в этих состояниях.

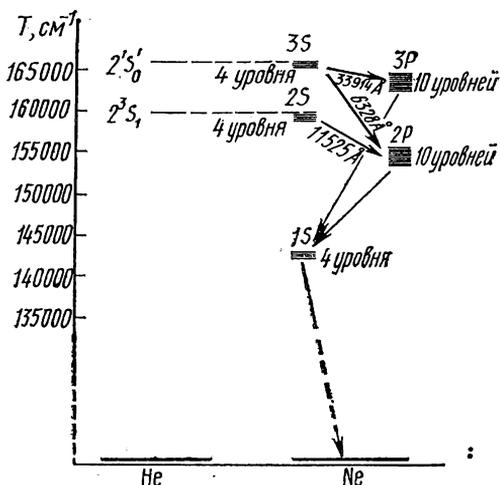
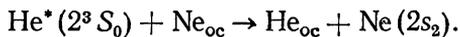
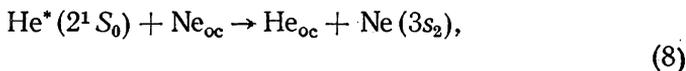


Рис. 2. Упрощенная схема энергетических уровней неона и гелия

В энергетическом спектре неона состояния $2s_2$ и $3s_2$ случайно оказались совпадающими с метастабильными уровнями гелия. Благодаря этому при разряде в смеси гелия и неона происходит интенсивный обмен энергией, носящий резонансный характер,



В результате неупругих столкновений с неоном метастабильные состояния гелия разрушаются, а неон возбуждается в нужные $3s_2$ и $2s_2$ состояния. В обратном направлении передача энергии не идет, так как вероятность столкновения в разряде $\text{Ne}(2s_2, 3s_2)$ и He_{oc} значительно меньше.

Приведем некоторые спектральные характеристики излучения неона в смеси с гелием на длине волны $0,63 \mu$, определяющие возможности Ne-He -лазера.

1. Оптическое усиление $G = (I/I_0 - 1) \times 100\%$ на этом переходе в трубке метровой длины достигает единиц процентов. Мощность генерации такого лазера около 10 мВт (0,01 Вт). Следует отме-

тить, что ненасыщенный коэффициент усиления определяется максимальной величиной инверсии (5), в то время как мощность генерации зависит от эффективности механизма передачи энергии на верхний уровень (8). Так, генерация того же лазера на инфракрасном переходе $\lambda=3,39 \mu$, обусловленная тем же механизмом, имеет такую же мощность с метра разряда, в то время как усиление на ИК-переходе достигает $G \sim 10000 \%$.

2. Ширина полосы усиления (ширина линии излучения) на переходе $\lambda=0,63 \mu$ неон-гелиевого лазера определяется эффектом Допплера:

$$\Delta \nu_{\text{доп}} \simeq 7,18 \cdot 10^{-7} \nu_0 \sqrt{\frac{T}{M}} = 0,03 \div 0,05 \text{ см}^{-1} (800 \div 1200 \text{ МГц}), \quad (9)$$

где M — масса атома неона; T — атомная температура в разряде; $\nu_0 \equiv 1/\lambda_0$ — центральная частота перехода. Естественная ширина линии этого перехода, определяемая суммарной шириной верхнего и нижнего уровней, гораздо меньше: $\delta \nu_{\text{ест}} \simeq 6 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$ (16 МГц).

Поскольку вклад в излучение на различных частотах в пределах полосы усиления вносят различные группы атомов неона, отличающиеся величиной проекции скорости движения на направление излучения, такое уширение называется неоднородным.

Наибольшее однородное уширение на переходе $\lambda=0,63 \mu$ обусловлено столкновением атомов в разряде. Величина этого уширения достигает $\Delta \nu_{\text{столк}} \simeq 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ (100 МГц).

2. Оптический резонатор Фабри—Перо. Простейший лазерный резонатор состоит из двух плоских или сферических зеркал, установленных параллельно друг другу или таким образом, чтобы их оптические оси совпадали. Характерные для резонатора распределения световой энергии в пространстве и в спектре носят название типов колебаний, или мод. Обозначаются они символом TEM_{qr} , где TEM —transversal electromagnetic, индекс « q » определяет спектр резонансных частот, а индексы « r » и « l » — пространственный характер распределения поля в поперечном направлении (по поверхности зеркал, например).

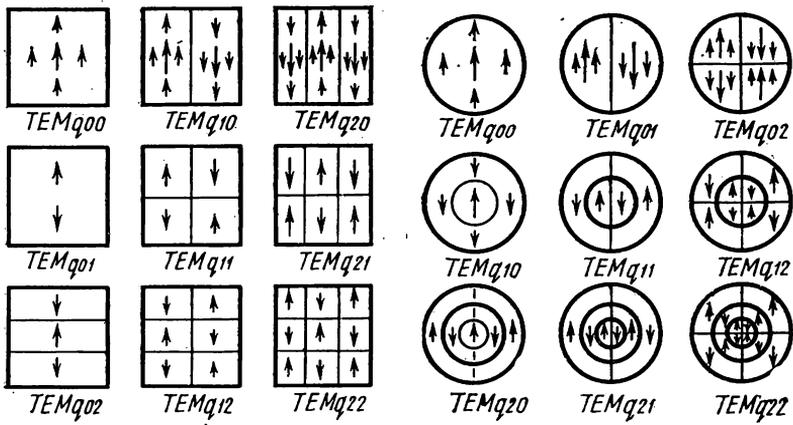
Если коэффициент усиления активной среды близок к единице, типы колебаний возбужденного и невозбужденного лазерного резонатора практически не отличаются.

Оптическая система, состоящая из двух параллельных зеркал, известна в оптике давно, задолго до появления лазеров. Она была предложена еще в 1897 г. французами Фабри и Перо и получила название интерферометра Фабри—Перо.

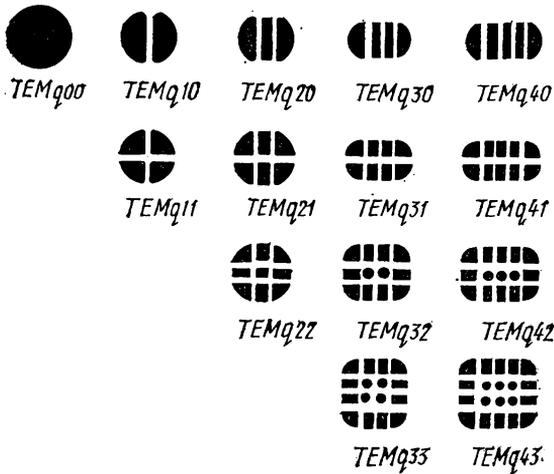
Несмотря на общность оптической системы, лазерный резонатор и интерферометр Фабри—Перо имеют два существенных отличия.

1. Диаметр зеркал интерферометра Фабри—Перо обычно того же порядка, что и расстояния между ними. Лазерный резонатор

Фабри—Перо имеет сильно вытянутую конфигурацию — его длина значительно превосходит поперечные размеры.



a



b

Рис. 3. Сечение различных пучков генерации неон-гелиевого лазера (поперечные моды); *a* — расчетные (для квадратных и круглых апертур), стрелка определяет поляризацию излучения; *b* — реальные (для квадратных апертур)

Сильная дифракция в лазерном резонаторе приводит к тому, что различные типы колебаний в нем имеют различный порог возбуждения и легко могут быть выделены (рис. 3). Типы колеба-

ний интерферометра Фабри—Перо пространственно не разрешены, и поэтому его теория может быть построена с помощью плоских волн [2].

2. Интерферометр Фабри—Перо является пассивным резонатором. Световая энергия направляется на него извне, и его роль сводится лишь к селекции волн по частоте и направлению. Лазерный резонатор является активным. Источник света находится внутри него, и структура излучения определится типами колебаний, возбуждаемыми в резонаторе.

Оба отличия касаются прежде всего пространственной структуры излучения. Спектр резонансных частот для лазерного резонатора и интерферометра Фабри—Перо в первом приближении одинаков — см. далее (11) и (12).

3. **Интерферометр Фабри — Перо.** Резонансным условием, приводящим к прохождению света сквозь интерферометр, будет

$$q\lambda = 2nl \cos \theta, \quad (10)$$

где θ — угол между направлением волны и осью интерферометра; nl — оптическая длина интерферометра; n — показатель преломления (обычно $n \simeq 1$); q — порядок интерференции.

Если фиксировать длину волны λ , то в пространстве можно наблюдать кольца равного наклона. Их можно видеть непосредственно глазом или с помощью зрительной трубы, установленной «на бесконечность». Так как $\cos \theta$ принимает максимальное значение при $\theta=0$, то центральному кольцу соответствует наибольший порядок интерференции q .

Если фиксировать направление распространения света, например $\theta=0$, то через интерферометр пройдут только те волны, частоты которых $\nu \equiv 1/\lambda$ образуют эквидистантный спектр значений

$$\nu_q = \frac{q}{2l}. \quad (11)$$

Интервал между соседними частотами равен

$$\Delta \nu = \frac{1}{2l}. \quad (12)$$

Для интерферометра Фабри—Перо эта величина носит название области дисперсии прибора.

Распределение интенсивности в спектре или пространстве для света, прошедшего через интерферометр (рис. 4) или отраженного им, определяется выражением Эйри в случае, когда можно пренебречь диссипативными потерями:

$$I_{\theta, \nu}^{\text{прош}} = I_0 \frac{1}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \frac{\Phi}{2}}, \quad (13)$$

$$I_{\theta, \nu}^{\text{отр}} = I_0 \frac{\frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \frac{\Phi}{2}},$$

где $\Phi \equiv \frac{4\pi l \cos \theta}{\lambda}$ — разность хода между интерферирующими лучами; r — коэффициент отражения зеркал. Величина $4r/(1-r)^2$ определяет резкость колец интерференции (или линий в спектре) и носит название «коэффициента резкости».

На практике пользуются понятием спектрального разрешения интерферометра Фабри—Перо:

$$\delta \nu^{\text{теор}} = \frac{1}{2l} \frac{1-r}{\pi \sqrt{r}}. \quad (14)$$

Это минимальный спектральный интервал, который может быть разрешен данным интерферометром в соответствии с критерием

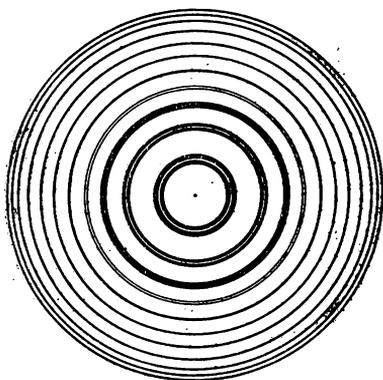


Рис. 4. Картина колец света, прошедшего через интерферометр Фабри—Перо, наблюдаемая глазом (интерферограмма)

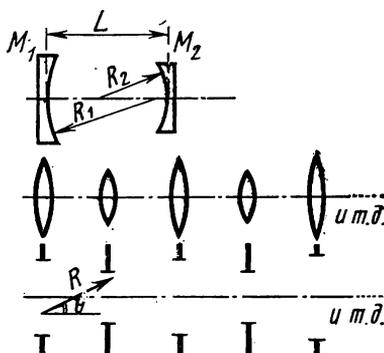


Рис. 5. Эквивалентная схема резонатора Фабри—Перо произвольной конфигурации. Фокусные расстояния линз $f_{1,2} = R_{1,2}/2$, $R_{1,2}$ — радиусы кривизны зеркал. Размер диафрагм определяется действующим размером зеркал

Рэля и формулами (13). Реальное разрешение прибора всегда хуже из-за неточной юстировки, дефектов в поверхностях зеркал, поглощения и рассеяния света зеркальными слоями.

4. **Лазерный резонатор Фабри—Перо** [3]. Задача о нахождении типов колебания произвольного лазерного резонатора в общем виде не решена — аналитические решения существуют лишь для ограниченного числа частных случаев. Обычно же для нахождения

распределения энергии излучения в пространстве и спектре используются методы численного интегрирования.

Суть метода сводится к следующему. Если пренебречь поглощением и рассеянием света, резонатор Фабри—Перо можно представить в виде эквивалентной прозрачной бесконечно протяженной среды, содержащей набор линз и диафрагм (рис. 5). Волна, проходящая через такую систему, будет периодически фокусироваться и испытывать дифракцию.

Если произвольно задать поле $E^{(1)}$ на поверхности первой линзы (диафрагмы), то можно вычислить поле $E^{(2)}$ на поверхности второй линзы (диафрагмы) — после однократного прохождения волной $E^{(1)}$ резонатора.

Например, в случае плоских зеркал поле $E^{(2)}$ в зоне Френеля определяется поверхностным интегралом

$$E^{(2)} = \frac{ik}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{-ikR}}{R} (1 + \cos \theta) E^{(1)} dS_1, \quad (15)$$

где смысл R и θ ясен из рис. 5, а интегрирование ведется по поверхности зеркала 1.

Зная $E^{(2)}$, можно найти поле на поверхности третьей линзы (диафрагмы), т. е. после двукратного прохождения резонатора световой волной, и т. д.

Если резонатор устойчивый, после многократных прохождений должно установиться стационарное распределение поля, практически не меняющееся при последующих отражениях:

$$E^{(m)}(\rho, \varphi) = \gamma^m E(\rho, \varphi), \quad (16)$$

где m — число отражений; γ — комплексная постоянная, не зависящая от координат ρ и φ , но характеризующая затухание волны (дифракционные потери) и фазовый сдвиг при прохождении резонатора.

Для резонатора с одинаковыми зеркалами интегральное уравнение имеет вид

$$\gamma E(\rho_1, \varphi_1) = \int_{S_2} K(\rho_1, \varphi_1, \rho_2, \varphi_2) E(\rho_2, \varphi_2) dS_2. \quad (17)$$

Индексы указывают на принадлежность величин к первому или второму зеркалу.

Нахождение типов колебания резонатора сводится к вычислению собственных функций и собственных значений подобного уравнения. Собственные функции $E_{pl}(\rho, \varphi)$ определяют поперечные моды (поперечные типы колебаний) лазера. Для круглых зеркал распределение интенсивности в поперечном направлении выражается через полиномы Лагерра:

$$E_{pe}^2(\rho, \varphi) \sim I_{pe}(\rho, \varphi) = \left(\sqrt{2} \frac{\rho}{a} \right)^{2l} \left\{ L_p^l \left(2 \frac{\rho^2}{a^2} \right) \right\}^2 e^{-2 \frac{\rho^2}{a^2}} \cos^2 l\varphi, \quad (18)$$

где p, l — целые числа, соответствующие радиальному и угловому индексам моды; a — параметр, характеризующий масштаб распределения; L'_p — полином Лагерра.

$$L'_0(x) = 1,$$

$$L'_1(x) = l + 1 - x,$$

$$\bar{L}'_2(x) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2) - (l+2)x + \frac{1}{2}x^2.$$

Как видно, распределение интенсивности (поля) лазерного пучка в поперечном направлении описывается функцией Гаусса для нижней моды TEM_{00} и «осциллирующей» функцией Гаусса для TEM_{pl} ($p, l \neq 0$).

Собственные значения γ_{pl} определяют продольные моды лазера, соответствующие определенной поперечной моде TEM_{pl} .

Каждая поперечная мода имеет спектр, представляющий почти эквидистантный ряд частот — см. (11) и (12). Однако для различных поперечных мод эти ряды оказываются сдвинутыми по абсолютной шкале частот, так как фазовый сдвиг волны на один проход в общем случае различен для различных $TEM_{p,e}$:

$$\begin{aligned} \nu_q^{(p,e)} &= \frac{q + \frac{\beta_{pe}}{\pi}}{2L} \approx \\ &\approx \frac{1}{2L} \left\{ q + (2p + l + 1) \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right)} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $R_{1,2}$ — радиусы кривизны зеркал, а L — длина резонатора. Величина сдвига определяется конфигурацией резонатора: для резонатора с плоскими зеркалами ($R_1 = R_2 = \infty$) сдвиг равен нулю, для концентрического резонатора ($R_1 = R_2 = L/2$) сдвиг равен $1/2L$, для конфокального ($R_1 = R_2 = L$) — величине $1/4L$.

Спектр генерации лазера ограничивается шириной полосы усиления. Как уже отмечалось, для перехода $\lambda = 0,63$ м неон-гелиевого лазера линия излучения неоднородно уширена вследствие эффекта Доплера, $\Delta f_{\text{доп}} = 800 - 1200$ МГц, а максимальная величина однородного уширения определяется процессами столкновения, $\Delta f_{\text{столк}} = 60 - 100$ МГц.

Если резонатор лазера имеет длину $L = 1$ м, то частота межмодового разделения $\Delta f = c/2L = 150$ МГц. Это означает, что в пределах линии усиления могут генерировать $\Delta f_{\text{доп}}/\Delta f = 5 - 8$ продольных мод (рис. 6). Поскольку межмодовое разделение превышает величину однородного уширения линии, энергия, приходящаяся на долю каждой продольной моды, будет ограничиваться контуром

линии однородного уширения, центр которой совпадает с центром данной продольной моды.

5. Свойства пучка с гауссовским профилем. Рассмотрим, как меняются с продольной координатой характеристики пучка, интенсивность которого в произвольном сечении z описывается функцией Гаусса:

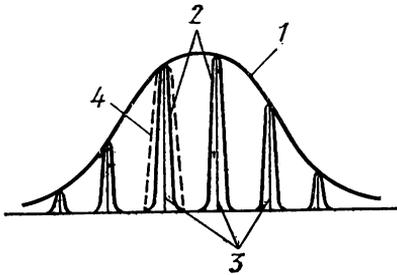


Рис. 6. Спектральная структура генерации неон-гелиевого лазера: 1 — доплеровский контур линии усиления активной среды $\Delta f_{\text{доп}}=800$ МГц; 2 — продольные моды резонатора; их ширина определяется добротностью резонатора, а расстояние между ними для $L=1$ м

$$\Delta f = \frac{c}{2L} = 150 \text{ МГц};$$

3 — продольные моды, генерируемые лазером; их ширина может достигать нескольких Гц; 4 — контур линии неоднородного уширения $\Delta f_{\text{столк}}=100$ МГц, в пределах которого одна продольная мода может «собирать» энергию

$$I(\rho, z) = I(0, z) e^{-\frac{\rho^2}{a^2(z)}}. \quad (20)$$

Математический аппарат такого рассмотрения приведен в [3]. Как следует из этой работы, пучок имеет наиболее узкое сечение (перетяжку) только в одном месте. Перенесем туда начало координат (рис. 7, а) и пусть $a(0) \rightarrow a_0$:

$$I(\rho, 0) = I(0, 0) e^{-\frac{\rho^2}{a_0^2}}.$$

Зависимость радиуса пучка от продольной координаты z можно записать в виде

$$a(z) = a_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{2\pi a_0}\right)^2}, \quad (21)$$

а кривизна волнового фронта пучка

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{2\pi a_0^2}{\lambda z}\right)^2 \right]. \quad (22)$$

Последние две формулы определяют пространственную структуру TEM_{00} -пучка генерации. Характерно следующее.

1. Волновой фронт пучка плоский в точках $z=0$ и $z \rightarrow \infty$ и сферический в остальных сечениях. В точке $z=2\pi a_0^2/\lambda$ кривизна волнового фронта достигает максимального значения.

2. Если в точки $z_{1,2} = \pm \frac{2\pi a_0^2}{\lambda}$ поместить сферические зеркала, радиус кривизны которых равен величине R^{max} (см. рис. 7), то данный пучок оказывается собственным типом колебания такого резонатора. Величина

$$b \equiv \frac{4\pi a_0^2}{\lambda} = R^{\max} \quad (23)$$

носит название конфокального параметра пучка.

3. При распространении пучка в прозрачной среде, когда интенсивность на оси уменьшается только вследствие дифракционной

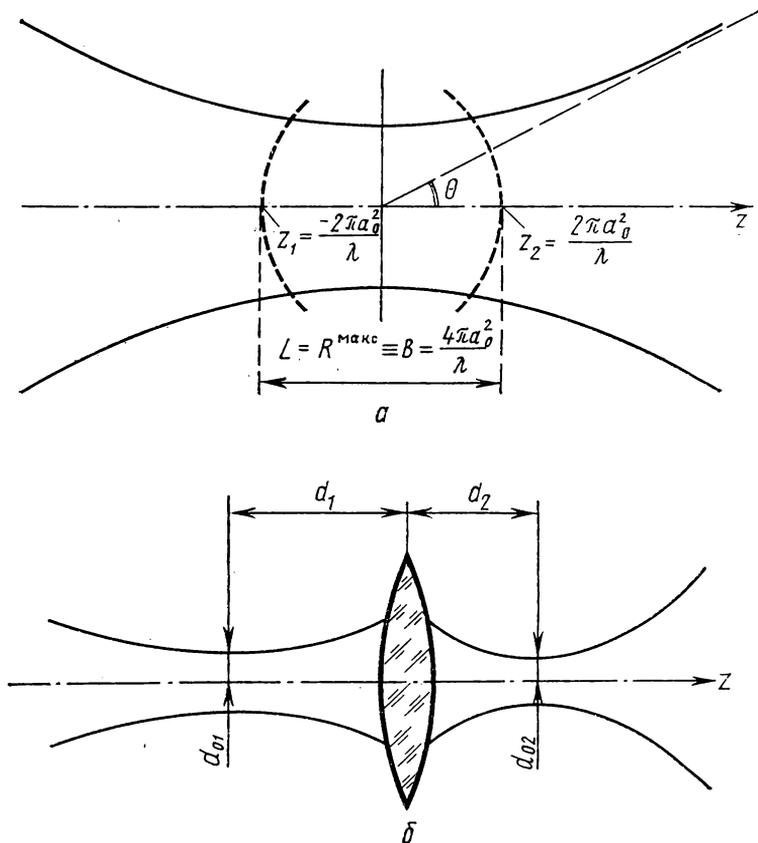


Рис. 7. Гауссовский пучок (TEM_{00} -пучок) (а); преобразование гауссовского пучка тонкой линзой (б)

расходимости, зависимость $a(z)$ имеет вид гиперболы, асимптоты которой наклонены к оси под углами

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{2} a_0}. \quad (24)$$

Эта зависимость принимается за расходимость TEM_{00} -пучка.

При фокусировке гауссовского пучка идеальной линзой меняется его конфокальный параметр (рис. 7, б), характер распределения интенсивности по сечению сохраняется. Предположим, имеется пучок с перетяжкой a_{01} . На расстоянии d_1 от перетяжки установлена линза с фокусным расстоянием f (рис. 7, б). Тогда справа от нее на расстоянии d_2 образуется новая перетяжка a_{02} , причем [3]

$$a_{02} = \frac{a_{01}}{\sqrt{\left(1 - \frac{d_1}{f}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{2f}\right)^2}}; \quad 1 - \frac{d_2}{f} = \frac{1 - \frac{d_1}{f}}{\left(1 - \frac{d_1}{f}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{2f}\right)^2} \quad (25)$$

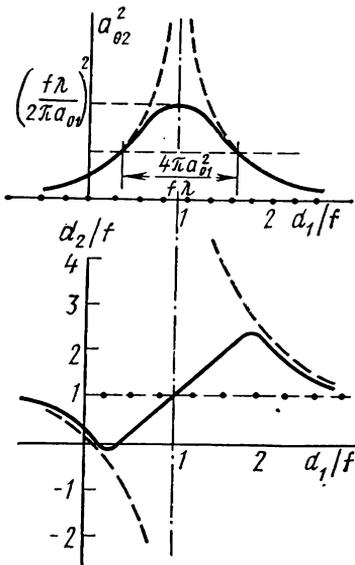


Рис. 8. Радиус a_{02} и положение новой перетяжки d_2 ТЕМ₀₀-пучка, преобразуемого тонкой линзой с фокусным расстоянием f :

— — — — — случай $\frac{b_1}{2} \ll f$;
 случай $\frac{b_1}{2} \gg f$

Соответствующие графики приведены на рис. 8. Особенности фокусировки ТЕМ₀₀-пучка определяются отношением половины конфокального параметра исходного пучка $b_1/2$ к фокусному расстоянию линзы f . Если $b_1/2 \gg f$, фокусировка ТЕМ₀₀-пучка подобна фокусировке широкого «параллельного» пучка света. Если $b_1/2 \ll f$, то (25) подобны формулам, описывающим получение изображения с помощью тонкой линзы, если «предметом» считать перетяжку исходного пучка. Однако в любом случае при установке линзы на расстоянии $d_1 = f$ от перетяжки исходного пучка перетяжка преобразованного пучка будет находиться в правом фокусе линзы: $d_2 = f$, а радиус новой перетяжки

$$a_{02} = \frac{f \lambda}{\pi a_{01}}$$

Воспользовавшись (24), можно рассчитать изменение расходимости ТЕМ₀₀-пучка, вызванное таким действием линзы,

$$\theta_2 = \frac{\lambda}{\pi f \theta_1}, \quad (26)$$

где $\theta_{1,2}$ — расходимости исходного и преобразованного пучков. Эта формула может быть использована при измерении расходимости лазерного излучения.

При генерации лазером поперечных мод более высокого порядка (TEM_{pl} , $p, l \neq 0$) многие характеристики пучка генерации остаются подобными TEM_{00} -пучку. В частности, сохраняются кривизна волнового фронта и характер зависимости $R(z)$. О конфокальном параметре в точном смысле говорить, правда, нельзя, но можно ввести некоторую эквивалентную величину.

За расходимость TEM_{pl} -пучка принимают угол между направлениями максимальных амплитуд для крайних пятен (см. рис. 3). Тем самым расходимость TEM_{pl} -пучка оказывается различной для различных поперечных направлений. Полная расходимость

$$\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2},$$

где поперечные направления OX и OY определяются симметрией в сечении пучка генерации. Для невысоких значений $p, l < 4$ можно использовать приближенную формулу

$$\theta = \frac{\lambda}{\sqrt{2} \pi a_0} \sqrt{p(p+1) + l(l+1)},$$

где a_0 — радиус сечения пучка в перетяжке, $p, l \neq 0$.

Вообще, с увеличением индексов типа колебания p или l расходимость пучка в соответствующем поперечном направлении возрастает.

6. Условие устойчивости резонатора. Условие устойчивости резонатора можно записать в виде¹

$$0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1. \quad (27)$$

Физически это означает, что луч, проходящий через устойчивую систему, периодически фокусируется; поле TEM_{pl} сильно сконцентрировано вблизи оси, и дифракционные потери невелики. В неустойчивом резонаторе луч по мере прохождения эквивалентной системы линз и диафрагм все более и более расширяется; дифракционные потери в неустойчивом резонаторе велики.

Для определения устойчивости резонатора существует простое мнемоническое правило. Если мысленно провести две окружности таких, что диаметры их равны значениям R_1 и R_2 таким образом, чтобы они касались поверхностей зеркал в центре (рис. 9), то для устойчивых резонаторов окружности пересекаются (касаются), а для неустойчивых — нет. Пересечение окружностей указывает местоположение перетяжки генерируемого пучка. В случае конфокального резонатора перетяжка располагается точно посередине.

¹ Радиусы кривизны зеркал резонатора $R_{1,2}$ имеют положительный знак, если вогнутой поверхностью они обращены внутрь резонатора, в противоположном случае — отрицательное значение.

Если задана конфигурация резонатора, размер перетяжки ТЕМ₀₀-пучка можно рассчитать по формуле

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}}. \quad (28)$$

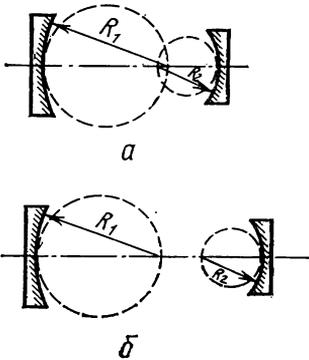


Рис. 9. Устойчивый резонатор (а); неустойчивый резонатор (б)

Различные конфигурации резонаторов используются в соответствии с назначением лазера.

Так, максимальную направленность излучения обеспечивает резонатор с плоскими зеркалами или со сферическими с большими радиусами кривизны ($R_{1,2} \gg L$).

Для получения пучка с наименьшим сечением вблизи выходного зеркала лазера используется резонатор, состоящий из плоского и сферического зеркала, перетяжка в котором расположена всегда на поверхности плоского зеркала.

Для получения максимальной мощности генерации обычно используются два сферических зеркала, кривизна которых выбирается исходя из максимального заполнения активной среды «объемом» ТЕМ₀₀-моды и минимума дифракционных потерь при этом.

ТЕМ₀₀-моды и минимума дифракционных потерь при этом.

§ 3. Описание установки и методика измерений

1. Конструкция неон-гелиевого лазера. В задаче используется лазер, собранный на базе заводского прибора ЛГ-35. Этот прибор, предназначенный для научно-исследовательских работ в лабораториях, выполнен в виде двух блоков: оптического, содержащего разрядную трубку и резонатор, и блока питания. В данной задаче зеркала резонатора 1 и 2 (рис. 10) могут быть вынесены за пределы оптического блока и закреплены в специальных стойках 3 и 4. Стойки крепятся к рельсу оптической скамьи.

Зеркала представляют собой плоские или сферические стеклянные пластины с напыленными на них в вакууме несколькими слоями отражающего диэлектрика. Зеркала хорошо отражают свет лишь вблизи $\lambda = 0,63 \mu$. Общая толщина покрытия достигает нескольких микрон. Механическая прочность слоя невелика, поэтому категорически запрещается касаться зеркальной поверхности пальцами или каким-либо предметом.

Газоразрядная трубка 5 наполнена смесью неона и гелия при общем давлении ~ 1 мм рт. ст. Она имеет катодный узел 6 с подогревом и анод 7. Анод, катод и электрод поджига 8 разрядной

трубки соединены монтажными проводами с разъемами 9, 10, 11 и 12 на кожухе оптического блока. Торцы разрядной трубки вакуумно плотно закрыты оптическими окнами 13, установленными под углом Брюстера по отношению к оси разряда. От пыли окна защищены стеклами 14. Вблизи одного из концов трубки имеет-

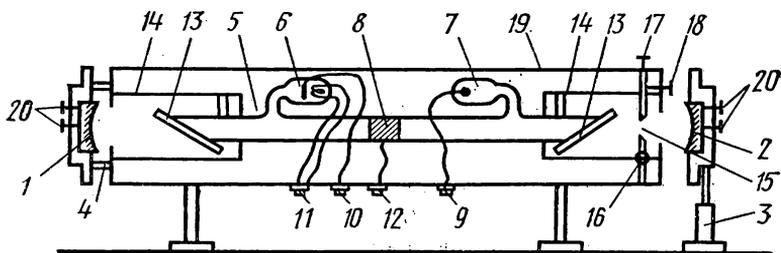


Рис. 10. Схема оптического блока установки

ся диафрагма 15, предназначенная для изменения пространственной структуры излучения. Диафрагма может перемещаться в вертикальной и горизонтальной плоскостях (винты 16 и 17). Изменение размера отверстия диафрагмы производится винтом 18, расположенным на дальнем торце оптического блока. Разрядная трубка установлена таким образом, что ее оптическая ось совпадает с осью оптической скамьи. Оптический блок закрыт кожухом 19, имеющим съемную крышку.

Внимание! Анодное напряжение на трубке достигает 2,3 кВ. Снимать кожух и производить какие-либо операции внутри корпуса оптического блока

КАТЕГОРИЧЕСКИ ЗАПРЕЩАЕТСЯ.

Юстировка зеркал резонатора. Если после включения лазера генерация отсутствует, необходимо произвести юстировку резонатора: установить зеркала таким образом, чтобы их оптические оси совпадали с осью разрядной трубки. Существует несколько способов юстировки.

В задаче зеркала резонатора устанавливаются с помощью юстировочного источника света, дающего направленное излучение. Таким источником может быть другой лазер или сильно ограниченный по апертуре пучок белого света.

Пропустите свет от вспомогательного источника сквозь незажженную разрядную трубку, стараясь, чтобы он проходил вдоль ее оси. Установите в корпусе оптического блока или на скамье дальнюю стойку с зеркалом и, пользуясь юстировочными винтами 20, отразите свет точно в направлении источника. Затем установите ближнюю к источнику стойку (отражающий слой этого зеркала

должен быть обращен к трубке) и придайте ему правильное положение.

Зажгите разряд в трубке. Если операция была проделана аккуратно, должна появиться генерация. Если генерации нет, покачайте слегка зеркала в закрепленных стойках.

Если после юстировки резонатора при нормально горящем разряде генерация все же не появляется, то причин может быть только две.

1. Недостаточно тщательно проделана юстировка зеркал. Повторите операцию еще раз.

2. Загрязнена (запылена) оптика резонатора — поверхности окон и зеркал.

После появления генерации следует более точно совместить оптические оси резонатора и разрядной трубки. Для этого одним из юстировочных винтов какого-либо зеркала уменьшите мощность генерации или даже полностью сорвите ее. Аналогичным винтом другого зеркала попробуйте восстановить генерацию. Если мощность излучения при этом увеличилась, продолжайте операцию. Если мощность уменьшилась или генерация вообще не восстанавливается, поверните юстировочный винт первого зеркала в обратном направлении и компенсируйте наклон этого зеркала наклоном второго до тех пор, пока не получите наиболее мощное излучение.

Проделайте то же самое со второй парой юстировочных винтов, наклоняющих зеркала в перпендикулярном направлении.

При правильной юстировке резонатора пучок генерации в многомодовом режиме имеет приблизительно круглое сечение, а мощность генерации достигает максимального значения.

2. Интерферометр Фабри—Перо. В лабораторной работе используется фабричный интерферометр Фабри—Перо типа ИТ-17а. Прибор установлен на оптический столик, который может наклоняться или разворачиваться в горизонтальном направлении с помощью винтовой подачи. Зеркала интерферометра имеют плоскую поверхность и размещены внутри полированного корпуса. Диэлектрические слои зеркал обращены навстречу друг другу.

Чтобы избежать помех от добавочной интерференции лучей, отражающихся от незеркальных поверхностей, пластины изготовлены так, чтобы две их поверхности составляли угол от 1° до $30'$.

Расстояние между зеркалами в ИТ-17а может варьироваться от 0,3 до 150 мм. Для этой цели в комплект интерферометра входит набор распорных колец, изготовленных из инвара или плавленого кварца — материалов, имеющих минимальный коэффициент теплового расширения. Распорное кольцо имеет с каждой стороны три выступа, прошлифованных до равной толщины с высокой точностью. Степень параллельности очень высока: например, кольцо длиной 150 мм отличается от номинала в различных точках не более чем на 10^{-4} мм. Зеркала прижимаются к выступам на распорном кольце с помощью трех легких юстировочных

винтов, действующих на одно из зеркал через упругие стальные пластины. Второе зеркало жестко фиксируется опорным кольцом.

Для выполнения задачи интерферометр собран с распорным кольцом толщиной $l=150$ мм. Согласно (12), область дисперсии прибора будет

$$\Delta\nu = 3 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1} \quad (\Delta\lambda = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}),$$

а теоретический предел разрешения (14)

$$\delta\nu = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1} \quad (\delta\lambda = 6 \cdot 10^{-4} \text{ \AA})$$

при коэффициенте отражения зеркал $r \approx 0,95$.

Юстировка интерферометра Фабри—Перо. Способы параллельной установки зеркальных поверхностей интерферометра зависят от величины промежутка между пластинами. С увеличением расстояния между зеркалами интерферометра угловой диаметр колец интерференции уменьшается, и их становится трудно различать глазом. Поэтому при больших толщинах распорного кольца пользуются зрительной трубой, установленной «на бесконечность». Кроме того, при увеличении толщины распорного кольца область дисперсии интерферометра уменьшается, в то время как спектральная ширина исследуемого светового источника остается, естественно, неизменной. Поэтому относительная резкость картины интерференционных колец падает.

В данной задаче из-за большого промежутка между зеркалами ($l=150$ мм) юстировка интерферометра производится по общей четкости картины колец. Зрительная труба при этом должна быть особенно тщательно установлена «на бесконечность», а ее апертура не меньше апертуры интерферометра Фабри—Перо. Кольца кажутся нерезкими в том направлении, в котором наклонено зеркало. При этом следует помнить, что обычно используемые зрительные трубы системы Кеплера переворачивают изображение. Юстировку можно считать выполненной, если кольца хотя бы в двух центральных порядках надежно разрешаются в любом месте (рис. 4).

Обработка интерферограммы. Если в падающем на интерферометр Фабри—Перо свете содержится несколько близких спектральных компонент, то каждый порядок в интерференционной картине будет расщеплен на столько же колец (если предел разрешения $\delta\nu$ меньше спектрального интервала между компонентами). Чтобы интерферограмму можно было обработать, общая ширина анализируемого спектра должна быть меньше области дисперсии интерферометра $\Delta\nu$.

Измерив диаметры колец, соответствующих интересующим нас спектральным компонентам («а» и «в»), можно вычислить разность между компонентами в волновых числах (в см^{-1}) по формуле

$$d\nu = \frac{1}{2l} \cdot \frac{D_{b_1}^2 - D_{a_1}^2}{D_{a_2}^2 - D_{a_1}^2},$$

где D_{b_1} и D_{a_1} — диаметры колец одного порядка интерференции, принадлежащих разным частотам; D_{a_2} — диаметр кольца следующего, более низкого порядка, принадлежащего одной из частот.

3. Регистрирующая аппаратура. 1. Измерение мощности генерации лазера производится прибором ИМО-2, описание которого находится у лаборанта.

2. Измерение распределения интенсивности по сечению пучка генерации лазера производится с помощью специального прибора. За малым отверстием помещено фотоспротивление. Диафрагма с фотоспротивлением может перемещаться в горизонтальной плоскости поперек пучка с помощью микрометрического винта. Отсчет ведется по показаниям настольного гальванометра. Интенсивность лазерного излучения может ослабляться нейтральными фильтрами.

3. Фотографическая регистрация лазерного излучения осуществляется зеркальной фотокамерой.

Для фотографирования поперечных мод лазера объектив удаляется из камеры, и излучение лазера при съемке попадает прямо на пленку.

Фотографирование интерференционных колец при изучении продольных мод лазера осуществляется через зрительную трубу—автокollиматор.

§ 4. Упражнения

1. Юстировка резонатора газового лазера. Применяются два зеркала: сферическое «глухое» и плоское для вывода излучения. Укрепите зеркала в юстировочных стойках. Стойка с выходным зеркалом должна быть установлена на оптическом рельсе на расстоянии нескольких сантиметров от оптического блока. Зеркальные слои должны быть обращены в сторону оптического блока, т. е. внутрь.

Произведите юстировку резонатора и добейтесь появления генерации.

Пользуясь диафрагмой в корпусе оптического блока и юстировочными винтами на стойках с зеркалами, получите генерацию на отдельных поперечных модах и сфотографируйте их.

Получите многомодовый режим работы лазера и измерьте мощность генерации с помощью ИМО-2. Приемную головку измерителя мощности следует установить на расстоянии 1—1,5 м от плоского выходного зеркала.

Увеличивайте длину резонатора, постепенно отодвигая плоское зеркало от оптического блока. Измерьте при этом зависимость мощности генерации P от длины резонатора L . При каждом но-

вом. положении выходного зеркала подъюстируйте резонатор. По данным измерения постройте график и объясните его. Оцените ошибку эксперимента.

2. Измерение расходимости лазерного излучения. Укрепите плоское зеркало резонатора лазера в корпусе оптического блока и настройте лазер на генерацию поперечной моды, указанной преподавателем.

После зеркала установите линзу $f=12$ см таким образом, чтобы зеркальная поверхность находилась в ее левом фокусе (предполагается, что излучение направлено слева направо). Измерьте распределение интенсивности по сечению преобразованного пучка справа от линзы, на различных расстояниях от нее (вплоть до $z=5\div 10 f$). Если работа велась с низшей модой TEM_{00} , постройте графическую зависимость радиуса пучка a_2 от расстояния z ; если работа велась с модой TEM_{pl} , где $p, l \neq 0$ — зависимость характерных расстояний между пятнами генерации от z . Объясните характер зависимости.

Из полученного графика определите расходимость преобразованного пучка, как $\theta_2^{\text{экс}} = \left. \frac{d a_2}{d z} \right|_{z \rightarrow \infty}$ и радиус в перетяжке a_{02} . Используя найденное значение a_{02} , рассчитайте теоретическую расходимость пучка по формулам (24) или (25).

Воспользовавшись формулой (26), определите расходимость исходного пучка — пучка генерации лазера. Зная конфигурацию резонатора, по формуле (28) рассчитайте его радиус в перетяжке a_{01} и, следовательно, его расходимость θ_1 .

Оцените ошибку эксперимента. Она зависит от неточности в установке линзы (см. (25) и рис. 9 для случая, когда d_1 не строго равно f) и неточности в измерении распределения интенсивности.

3. Изучение спектральной структуры генерации. Спектральное расстояние между продольными модами лазера может быть измерено с помощью интерферометра Фабри—Перо.

Для выполнения упражнения установите на оптическом рельсе после лазера, генерирующего выбранную моду TEM_{pl} , красный фильтр из набора цветного стекла и короткофокусную линзу для заполнения светом апертуры интерферометра.

Произведите юстировку интерферометра Фабри—Перо с помощью зрительной трубы по общей резкости картины колец. Сфотографируйте их; объектив фотоаппарата должен быть установлен «на бесконечность».

Выбрав наиболее резкий снимок, измерьте на нем диаметры колец с помощью измерительного микроскопа МИР-12 и найдите спектральное расстояние между продольными модами в соответствии с разделом «обработка интерферограмм».

Оцените ошибку эксперимента. Она зависит от качества юстировки интерферометра, качества полученных интерферограмм и неточностей при измерении диаметров колец. Сравните результат с расчетной величиной по формуле (12).

Внимание! Все данные, полученные при выполнении лабораторной работы, и результаты их обработки должны быть занесены в рабочую тетрадь. При сдаче работы необходимо представить отснятые фотопленки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лендъел Б. Лазеры. М., «Мир», 1964.
2. Толанский С. Спектроскопия высокой разрешающей силы. М., ИЛ, 1955, с. 120—123, 154—168.
3. Когельник, Ли. Резонаторы и световые пучки лазеров. — «Зарубежная радиоэлектроника», 1967, № 3, с. 102—133.

2. ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Рассмотрены электрооптический эффект в кристаллах и принципы амплитудной модуляции света.

§ 1. Введение

Явление электрооптического эффекта состоит в изменении показателя преломления среды под действием электрического поля. Это изменение может быть как первого (линейный электрооптический эффект, или эффект Поккельса), так и второго (эффект Керра) порядков относительно приложенного поля.

Изменение показателя преломления среды под действием электрического поля широко используется в лазерной физике и технике. Сюда следует отнести электрооптические затворы для модуляции добротности и активной синхронизации мод лазеров, системы сканирования световых пучков и т. д. Но наиболее важное использование эффекта Поккельса — модуляция света. Переход в оптическую область излучения позволяет существенно расширить полосу пропускания приемно-передающих устройств и резко увеличить информационную емкость систем связи.

Целью настоящей работы является практическое изучение явления электрооптического эффекта в кристаллах. На конкретном примере (кристалле LiNbO_3) рассмотрены принципы построения системы для амплитудной модуляции света. Рассмотренный случай, естественно, не исчерпывает всех возможностей как самого электрооптического эффекта, так и принципов модуляции. Более подробно с этими вопросами можно познакомиться в монографии [1].

Значительное место в задаче уделяется вопросам распространения света в анизотропной среде. Знание основ кристаллооптики и влияния симметрии кристалла на его физические свойства является необходимым при изучении электрооптического эффекта.

§ 2. Теория

1. **Распространение света в анизотропной среде.** В изотропной среде связь между вектором напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектором индукции \mathbf{D} дается соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

где ε — постоянная, не зависящая от направления скалярная величина, называемая диэлектрической проницаемостью. Поэтому вектор \mathbf{D} совпадает по направлению с вектором \mathbf{E} . В случае анизотропной среды это, вообще говоря, не имеет места.

Каждая компонента \mathbf{D} зависит от величины всех трех составляющих электрического поля \mathbf{E} .

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k$$

($i, k=1, 2, 3$ и по одинаковым индексам производится суммирование). Коэффициенты ε_{ik} являются компонентами тензора второго ранга. Всю совокупность возможных значений диэлектрической постоянной можно представить при помощи трехосного эллипсоида с осями x, y, z . Значение диэлектрической постоянной для любого направления выражается длиной радиус-вектора эллипсоида, проведенного по этому направлению. Три значения диэлектрической постоянной $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, соответствующие осям эллипсоида, называются главными значениями диэлектрической постоянной.

Используя связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} , характеризующую анизотропию среды, можно применить теорию Максвелла, составив соответствующие уравнения, причем в качестве осей координат удобно выбрать главные направления диэлектрической постоянной. Не производя соответствующего исследования, которое можно найти, например, в [2], сообщим основные результаты.

1. По данному направлению \mathbf{R} плоская поляризованная волна распространяется с двумя различными фазовыми скоростями, соответствующими двум различным направлениям колебания электрического вектора волны. Эти два направления колебания определяются свойствами кристалла и всегда взаимно перпендикулярны.

2. В плоскости волнового фронта, т. е. в плоскости, перпендикулярной \mathbf{R} , расположен вектор индукции \mathbf{D} и вектор \mathbf{H} , совпадающий по направлению с индукцией $\mathbf{V} = \mu \mathbf{H}$, так как $\mu = 1$. Вектор же напряженности электрического поля \mathbf{E} в анизотропной среде не совпадает с \mathbf{D} и образует некоторый угол α (рис. 1).

Плоскость фронта волны, распространяющейся вдоль \mathbf{R} , есть плоскость \mathbf{DH} . Плоскость \mathbf{EH} , обладающая тем свойством, что перпендикуляр к ней совпадает с направлением распространения лучистой энергии, повернута относительно \mathbf{DH} на угол α . Таким образом, в анизотропной среде в общем случае направление луча

S не совпадает с направлением волновой нормали R . Совпадение имеет место только в том случае, если R направлено вдоль одного из трех главных направлений кристалла.

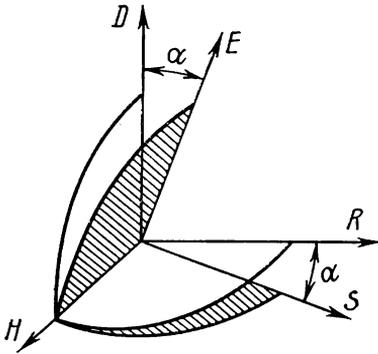


Рис. 1. Расположение векторов D и E в анизотропной среде

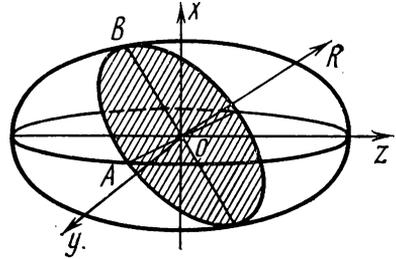


Рис. 2. К определению основного свойства оптической индикатрисы

В оптике часто имеют дело не с диэлектрической постоянной среды, а с показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon}$, определяющем скорость распространения света $v = c/n$.

Для определения показателя преломления в анизотропной среде обычно строят эллипсоид, называемый оптической индикатрисой. Если x, y, z — главные оси кристалла, то уравнение индикатрисы имеет вид

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1,$$

где $n_x = \sqrt{\epsilon_x}$, $n_y = \sqrt{\epsilon_y}$, $n_z = \sqrt{\epsilon_z}$ — главные показатели преломления среды.

Индикатриса имеет следующее важное свойство. Проведем из начала координат прямую OR в произвольном направлении (рис. 2). Построив центральное сечение индикатрисы, перпендикулярное этой прямой, получим эллипс. Тогда показатели преломления для двух волн с волновой нормалью OR равны длинам полуосей этого эллипса OA и OB . Направление поляризации волн совпадает с направлением осей эллипса. Вектор индукции D в плоскополяризованной волне, показатель преломления для которой равен OA , колеблется параллельно OA . Аналогично в волне, для которой показатель преломления равен OB , вектор D колеблется параллельно OB . Отсюда, как частный случай, следует, что для волн

с волновой нормалью x показатели преломления равны n_y и n_z , а вектор \mathbf{D} в этих волнах параллелен соответственно y и z .

Аналогичные рассуждения можно привести и для волн с волновыми нормальями y и z . По этой причине n_x , n_y , n_z и называются главными показателями преломления.

Симметрия кристалла налагает определенные требования на форму и ориентацию оптической индикатрисы. Например, для кубических кристаллов операциями симметрии (после которых кристалл переходит сам в себя) являются повороты относительно всех трех его осей, отсюда следует, что индикатриса кубических кристаллов является сферой. Так как все центральные сечения индикатрисы в этом случае представляют окружности, эти кристаллы не обладают двойным лучепреломлением.

Для гексагональных, тетрагональных (к этому классу относятся кристаллы дигидрофосфата аммония $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ и дигидрофосфата калия KH_2PO_4 ¹) и тригональных (ниобат лития LiNbO_3) кристаллов индикатриса представляет собой эллипсоид вращения вокруг главной оси симметрии [3]. Принимая эту ось за ось z , уравнение индикатрисы можно записать в виде

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1.$$

Центральное сечение, перпендикулярное главной оси (и только это сечение), есть окружность радиуса n_o . Поэтому для света с волновой нормалью, направленной вдоль главной оси Z , двойное лучепреломление отсутствует. Главная ось называется оптической осью, а такие кристаллы — одноосными. Показатели преломления n_o и n_e принято называть обыкновенным и необыкновенным.

Обыкновенная и необыкновенная волны определяются следующим образом. Плоскость, проходящая через оптическую ось кристалла и волновую нормаль, называется главной плоскостью (рис. 3). Для обыкновенной волны вектор индукции \mathbf{D} перпендикулярен главной плоскости (параллелен AO). Волна, для которой вектор индукции лежит в главной плоскости (параллелен BO), называется необыкновенной. Как видно из рис. 3, величина полуоси AO одна и та же при любом направлении волновой нормали. Следовательно, показатель преломления обыкновенной волны не зависит от направления распространения света в кристалле и равен n_o . В то же время показатель преломления для необыкновенной волны

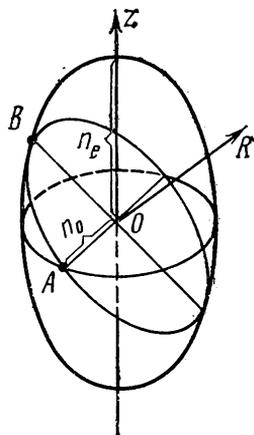


Рис. 3. Индикатриса для положительного одноосного кристалла

¹ Сокращенно ADP и KDP.

зависит от направления волновой нормали и может принимать любое значение между n_o и n_e .

Кристалл называется положительным, если $n_e - n_o > 0$, и отрицательным при $n_e - n_o < 0$ (кристаллы KDP и LiNbO₃ являются отрицательными).

Для трех остальных кристаллографических систем (орторомбической, моноклинной и триклинной) индикатриса является трехосным эллипсоидом. Она имеет два круговых сечения, как показано на рис. 4.

Таким образом, существуют два направления волновой нормали, для которых двойное лучепреломление отсутствует. Эти два направления

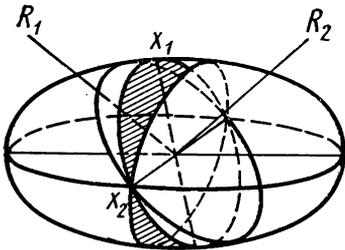


Рис. 4. Оптическая индикатриса двuosного кристалла: R_1 и R_2 — оптические оси (перпендикулярные им сечения окружности)

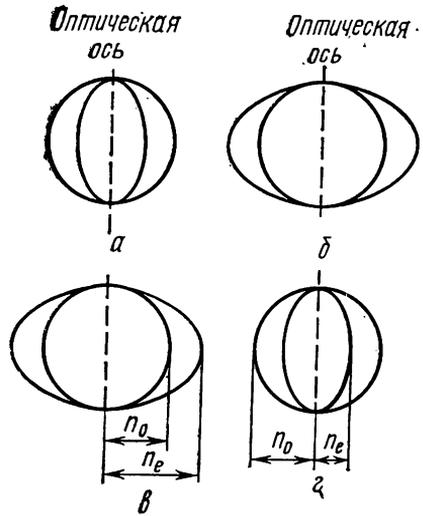


Рис. 5. Сечение волновой поверхности одноосного кристалла (а, б). Сечение поверхности показателей преломления одноосного кристалла (в, г). Положительный кристалл (а, в). Отрицательный кристалл (б, г)

называются оптическими осями, а такие кристаллы — двuosными.

Пусть в некоторой точке O внутри анизотропной среды помещен источник света. Тогда в любом направлении R в среде распространятся два луча с различными скоростями. Пользуясь свойствами кристалла, можно построить поверхность, до которой дойдет к моменту t световое возбуждение, распространяющееся из точки O кристалла, — волновую поверхность. Для одноосного кристалла это двуполостная поверхность, состоящая из сферы и эллипсоида вращения (рис. 5).

Рассмотрим распространение поляризованного излучения в кристаллической пластинке. Линейно-поляризованный свет, падая на кристалл, дает начало двум когерентным волнам, распространяющимся с различной скоростью и приобретающим после про-

хождения пластинки разность фаз, зависящую от толщины кристалла и различия в показателях преломления обоих лучей. Так как колебания в этих волнах взаимно перпендикулярны, то они ведут к образованию эллиптически-поляризованного света. В точках, соответствующих различным разностям хода, форма и ориентация эллипсов могут быть различными, но интенсивность света везде одна и та же. Поместив после кристалла поляризатор, мы от каждого луча пропускаем лишь ту слагающую колебания,

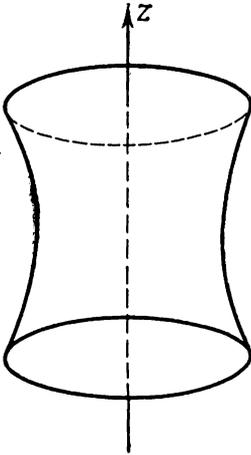


Рис. 6. Изохроматическая поверхность для плоскопараллельной пластинки из одноосного кристалла, вырезанной перпендикулярно оптической оси

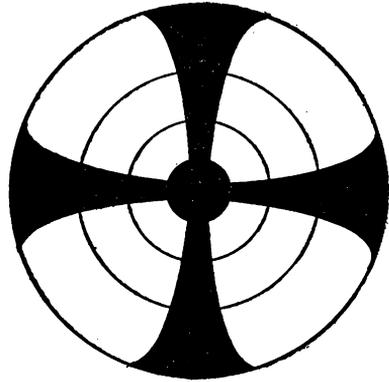


Рис. 7. Коноскопическая картина для плоскопараллельной пластинки из одноосного кристалла, вырезанной перпендикулярно его оси

которая параллельна его главной плоскости. Таким образом, на выходе анализатора мы будем наблюдать интерференцию двух когерентных волн, разность фаз между которыми определяется кристаллом

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 - n_2) l,$$

где n_1, n_2 — показатели преломления для двух лучей; l — его длина.

Если на пластинку падает расходящийся пучок света (что обычно имеет место), то разность фаз между лучами равна

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{(n_1 - n_2) l}{\cos \psi},$$

где ψ — угол луча в кристалле.

Геометрическое место точек, соответствующих постоянной разности фаз ($\Gamma = \text{const}$) в кристалле, образует изохроматическую поверхность. Для одноосного кристалла поверхность эта представляет собой (приблизительно) гиперboloид вращения, ось которого совпадает с осью кристалла (рис. 6). Сечения этой поверхности плоскостью пластинки представляют собой изохроматы (кривые постоянного цвета).

Если пластинка вырезана перпендикулярно к оптической оси, то это — окружности. Таким образом, в случае плоскопараллельной пластинки после анализатора наблюдается картина (коноскопическая картина), состоящая из системы темных и светлых концентрических колец (аналогичных кольцам Ньютона). Однако кольца окажутся разрезанными по двум взаимно перпендикулярным направлениям, определяемым главной плоскостью поляризатора и анализатора. В этих направлениях виден темный крест при скрещенных поляризаторах и светлый при параллельных (рис. 7). Для двuosных кристаллов вид изохроматической поверхности сложнее [1, 3].

2. Линейный электрооптический эффект. Эффект Поккельса возможен лишь в кристаллах, не имеющих центра инверсии. В кристаллах, имеющих центр инверсии, возможен только квадратичный эффект.

В результате наложения электрического поля на кристалл происходят поворот и деформация оптической индикатрисы. Если в качестве координатных осей выбрать главные оси кристалла, то в отсутствие электрического поля уравнение индикатрисы можно записать в виде

$$a_{10}x^2 + a_{20}y^2 + a_{30}z^2 = 1,$$

где $a_{10} = \frac{1}{n_x^2}$, $a_{20} = \frac{1}{n_y^2}$, $a_{30} = \frac{1}{n_z^2}$, а индекс «0» отражает

тот факт, что на кристалл не наложено поле. При наложении электрического поля $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}$ уравнение индикатрисы принимает вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}xz + 2a_{12}xy = 1,$$

где коэффициенты a_{ik} зависят от поля следующим образом:

$$a_{11} - a_{10} = r_{11}E_x + r_{12}E_y + r_{13}E_z,$$

$$a_{22} - a_{20} = r_{21}E_x + r_{22}E_y + r_{23}E_z,$$

$$a_{33} - a_{30} = r_{31}E_x + r_{32}E_y + r_{33}E_z,$$

$$a_{23} = r_{41}E_x + r_{42}E_y + r_{43}E_z,$$

$$a_{31} = r_{51}E_x + r_{52}E_y + r_{53}E_z,$$

$$a_{12} = r_{61}E_x + r_{62}E_y + r_{63}E_z.$$

Коэффициенты r_{ik} называются электрооптическими коэффициентами¹, максимальное число их равно 18, однако число отличных от нуля и число независимых электрооптических постоянных значительно меньше и определяется симметрией кристалла [2].

Рассмотрим электрооптический эффект в кристалле ниобата лития (LiNbO_3), принадлежащего к кристаллографическому классу $3m$. Это одноосный кристалл ($a_{10}=a_{20}$), у которого отличны от нуля следующие компоненты тензора r_{ik} : $r_{13}=r_{23}$; r_{33} ; $r_{42}=-r_{51}$; $r_{22}=-r_{12}=-r_{61}$.

Уравнение оптической индикатрисы для этого класса кристаллов при произвольном направлении электрического поля имеет вид

$$(a_{10} - r_{22}E_y + r_{13}E_z)x^2 + (a_{20} + r_{22}E_y + r_{13}E_z)y^2 + (a_{30} + r_{33}E_z)z^2 + 2r_{42}E_y yz - 2r_{42}E_x xz - 2r_{22}E_x xy = 1. \quad (1)$$

Как видно из (1), при наличии электрического поля оси эллипсоида x' , y' , z' не совпадают с исходными кристаллографическими осями x , y , z . Для того чтобы найти направления x' , y' , z' , необходимо уравнение (1) привести к каноническому виду.

Рассмотрим наиболее интересный в практическом отношении случай. Пусть электрическое поле перпендикулярно оптической оси z , т. е. $E_z=0$; $E_y \neq 0$; $E_x \neq 0$. В этом случае уравнение индикатрисы принимает вид

$$(a_{10} - r_{22}E_y)x^2 + (a_{10} + r_{22}E_y)y^2 + a_{30}z^2 + 2r_{42}E_y yz - 2r_{42}E_x xz - 2r_{22}E_x xy = 1. \quad (2)$$

Если свет распространяется вдоль оптической оси кристалла², то для нахождения главных показателей преломления необходимо рассмотреть сечение оптической индикатрисы плоскостью, перпендикулярной z , т. е. плоскостью $z=0$. Это сечение (как видно из (2)) является эллипсом, удовлетворяющим уравнению

$$(a_{10} - r_{22}E_y)x^2 + (a_{10} + r_{22}E_y)y^2 - 2r_{22}E_x xy = 1. \quad (3)$$

Главные оси эллипса x' , y' повернуты на угол α относительно кристаллографических осей x , y , причем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{E_x}{E_y}. \quad (4)$$

В главных осях уравнение эллипса (3) запишется следующим образом:

$$(a_{10} + r_{22}E)y'^2 + (a_{10} - r_{22}E)x'^2 = 1, \quad (5)$$

¹ r_{ik} — это матричная запись компонент тензора третьего ранга r_{ijk} , которая возможна вследствие симметрии тензора относительно индексов j, k [3].

² Таким образом, поле E приложено перпендикулярно направлению распространения света. Этот случай называют поперечным электрооптическим эффектом.

где $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$. Таким образом, показатели преломления для света, поляризованного в главных направлениях, равны

$$n_{x'} = \frac{1}{\sqrt{a_{10} + r_{22}E}} \simeq n_0 - \frac{1}{2} r_{22} n_0^3 E,$$

$$n_{y'} = \frac{1}{\sqrt{a_{10} - r_{22}E}} \simeq n_0 + \frac{1}{2} r_{22} n_0^3 E.$$

Разность фаз между лучами после прохождения пластинки толщиной l равна

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (n_{x'} - n_{y'}) l = \frac{2\pi}{\lambda} r_{22} n_0^3 l E = \frac{2\pi}{\lambda} r_{22} n_0^3 \frac{l}{d} V, \quad (6)$$

где V — приложенное напряжение; d — размеры кристалла вдоль поля. Следует отметить, что если свет распространяется не точно по оптической оси, то в (6) появляется начальный сдвиг фаз $\Gamma_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 - n^e) l^1$, обусловленный естественной (не связанной с полем) анизотропией.

3. Использование электрооптического эффекта для модуляции света. Как уже указывалось, если на кристаллическую пластинку падает линейно-поляризованный свет, то на выходе ее получается эллиптически-поляризованное излучение. Прикладывая электрическое поле к кристаллу, мы изменяем форму и ориентацию эллипса, т. е. осуществляем модуляцию света по поляризации, но интенсивность света остается неизменной.

Для получения модуляции интенсивности света необходимо после кристалла поместить поляроид. Если анализатор окрещен с поляризатором, то интенсивность света на выходе равна

$$I = I_0 \sin^2 \frac{1}{2} (\Gamma_0 + \Gamma_1), \quad (7)$$

где I_0 — максимальная интенсивность проходящего света; Γ_0 — сдвиг фаз между лучами, вызванный естественным двулучепреломлением; Γ_1 — сдвиг фаз, связанный с полем и определяемый для LiNbO_3 выражением (6).

Зависимость интенсивности света от статического напряжения V_1 изображена на рис. 8. При изменении начального сдвига фаз Γ_0 кривая смещается параллельно оси абсцисс. Это явление может быть использовано для выбора рабочей точки как на квадратичном участке характеристики (точки А и Б на рис. 8), так и на линейном (точка В).

¹ n^e с индексом «е» сверху означает текущее (при произвольном угле между лучом и оптической осью) значение показателя преломления для необыкновенной волны. Отличать от главного — n_e .

Для изменения интенсивности света от нуля до максимального значения необходимо приложить к кристаллу напряжение V_0 (рис. 8). V_0 называется полуволновым напряжением, так как разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами в этом случае равна $\lambda/2$. Из (6) нетрудно определить связь между полуволновым напряжением и параметрами кристалла:

$$V_0 = \frac{1}{2} \frac{\lambda d}{r_{22} n_0^3 l}. \quad (8)$$

Пусть к кристаллу одновременно приложено как постоянное, так и переменное напряжение:

$$V = V_1 + V_2 \sin \Omega t.$$

В этом случае модуляция существенно зависит от выбора рабочей точки на статической характеристике, который может осуществляться как изменением τ_0 , так и изменением постоянного напряжения V_1 .

Если в отсутствие переменного напряжения мы находимся в точке А характеристики, то

$$I \simeq \frac{I_0}{8} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_{22} n_0^3 \frac{l}{d} V_2 \right)^2 + \frac{I_0}{8} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_{22} n_0^3 \frac{l}{d} V_2 \right)^2 \cos 2\Omega t. \quad (9)$$

Таким образом, в точке А осуществляется модуляция интенсивности света с удвоенной частотой. Такая же модуляция происходит и в точке Б.

Если при $V_2=0$ мы находимся на линейном участке характеристики (точка В), то интенсивность света на выходе равна

$$I = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_{22} n_0^3 \frac{l}{d} V_2 \right) \sin \Omega t. \quad (10)$$

Модуляция излучения происходит с частотой приложенного к кристаллу напряжения.

Зная зависимость переменных составляющих интенсивности излучения

$$I_{2\Omega} = \frac{I_0}{8} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_{22} n_0^3 \frac{l}{d} V_2 \right)^2, \quad I_{\Omega} = \frac{I_0}{8} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_{22} n_0^3 \frac{l}{d} V_2 \right), \quad (11)$$

можно определить динамические значения электрооптической константы:

$$r_{22} = \frac{\lambda d \sqrt{2 \frac{I_{2\Omega}}{I_0}}}{\pi n_0^3 l V_2}, \quad r_{22} = \frac{4\lambda d \frac{I_{\Omega}}{I_0}}{\pi n_0^3 l V_2}. \quad (12)$$

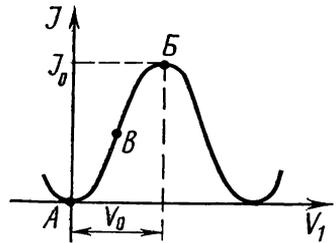


Рис. 8. Статистическая характеристика электрооптического модулятора света

Следует отметить, что формулы (9) и (10) получены в предположении, что $V_2 \ll V_0$. Если переменное напряжение, приложенное к кристаллу, порядка полувольтного напряжения, то изменение интенсивности происходит не по синусоидальному закону.

§ 3. Описание установки

Блок-схема установки для выполнения данной работы приведена на рис. 9. В качестве источника света применен промышленный He—Ne-лазер ЛГ-36. Излучение лазера с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм линейно поляризовано так, что световой вектор колеблется в вертикальной или горизонтальной плоскости.

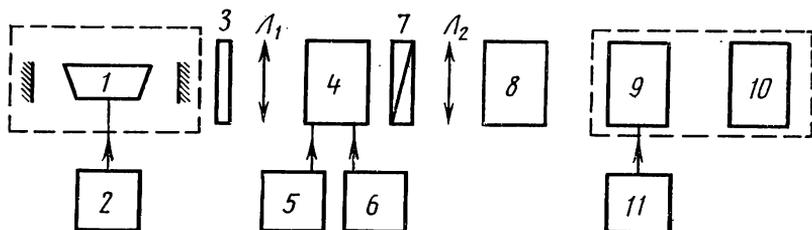


Рис. 9. Блок-схема установки:

1 — лазер ЛГ-36; 2 — блок питания лазера; 3 — механический прерыватель; 4 — кристалл LiNbO_3 ; 5 — УИП; 6 — генератор ГЗ-35; 7 — анализатор; 8 — фотоаппарат; 9 — фотодиод-усилитель; 10 — осциллограф С1-57; 11 — блок питания усилителя; L_1 и L_2 — линзы

Исследуется линейный электрооптический эффект в кристалле LiNbO_3 . Образец имеет размеры $3 \times 3 \times 28$ мм (наибольший размер вдоль оптической оси). Кристалл помещен на оптическом столике, допускающем параллельное перемещение и вращение кристалла в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Ориентация кристалла такова, что электрическое поле приложено вдоль оси x , а свет распространяется по оптической оси. Электрическое поле прикладывается с помощью металлических электродов, между которыми зажимается кристалл. Возможна подача как постоянного (от источника питания УИП-1), так и переменного напряжений (от звукового генератора ГЗ-35).

Измерение интенсивности излучения (в относительных единицах) производится с помощью системы, состоящей из фотодетектора и осциллографа. Фотодетектор имеет высокую чувствительность, но измеряет лишь переменную составляющую интенсивности. Поэтому при снятии статической характеристики используется механический прерыватель (вращающийся диск с отверстиями).

В качестве анализатора применен пленочный дихроичный поляризатор [4], помещенный в специальную оправу, которая может поворачиваться в неподвижном кольце на любой угол.

Все элементы установки укреплены на швеллере. Стойки лазера и фотоаппарата фиксированы непосредственно на швеллере; остальные элементы установлены с помощью рейтеров на отрезке оптического рельса треугольного сечения, прикрепленного к швеллеру. Все юстируемые элементы установки (анализатор, линзы, кристалл, фотоаппарат, фотодетектор) могут перемещаться в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Подробные описания лазера, генератора, осциллографа и источника питания содержатся в инструкциях по эксплуатации.

§ 4. Упражнения

1. Получение коноскопической картины. Для выполнения этого упражнения необходимы: короткофокусная линза L_1 , кристалл, анализатор, линза L_2 , фотоаппарат без объектива, источник постоянного напряжения.

1. В отсутствие кристалла выставить анализатор так, чтобы его плоскость была перпендикулярна поляризации лазера.

2. Отъюстировать кристалл таким образом, чтобы его передняя грань была перпендикулярна лучу (юстировку производить по лучу, отраженному от грани) и свет полностью проходил через кристалл.

3. Перемещением линзы L_2 добиться получения коноскопической картины на экране. (Правильность картины определяется качеством кристалла и обычно хуже изображенной на рис. 7.)

4. Линзой L_2 и перемещением фотоаппарата добиться необходимого размера изображения на шторке фотоаппарата. Сфотографировать коноскопическую картину для трех постоянных напряжений

$$V_1 = 0, \quad V_1 = 300 \text{ В}, \quad V_1 = 600 \text{ В}.$$

2. Снятие статической характеристики. 1. Перемещением фотоприемника и линзы L_2 добиться попадания центра темного креста коноскопической картины на фотодиод.

2. Включить приемную систему.

3. Включить механический прерыватель.

4. Снять статическую характеристику при изменении напряжения от -600 В до $+600 \text{ В}$.

5. Определить полуволновое напряжение.

3. Определение полуволнового напряжения по эффекту удвоения частоты. 1. Включить генератор и подать на кристалл переменное и постоянное напряжение.

2. Изменяя постоянное напряжение, зафиксировать значения V_A и V_B , при которых на экране осциллографа наблюдается сигнал удвоенной частоты (точки А и В статической характеристики). Оценить ошибки в определении напряжений V_A , V_B и V_0 , связанные с появлением постоянной составляющей (первый член в формуле (9)).

3. Определить полуволновое напряжение и сравнить его с результатом упр. 2.

4. Рассчитать электрооптическую константу r_{22} .

4. Снятие динамических характеристик. 1. Подать на кристалл постоянное напряжение так, чтобы рабочая точка находилась в точке А.

2. Снять зависимость переменной составляющей интенсивности света от переменного напряжения V_2 .

3. Аналогичную зависимость получить для точки В статической характеристики (на линейном участке).

4. По формулам (12) определить электрооптическую константу r_{22} для нескольких значений напряжения в обоих случаях и оценить ошибки.

Примечание. Параметры используемого в задаче кристалла таковы:

$$\frac{l}{d} = \frac{291}{3,0}, \quad n_0 = 2,2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Методы модуляции и сканирования света. М., «Наука», 1970.
2. Дитчберн Р. Физическая оптика. М., «Наука», 1965.
3. Най Дж. Физические свойства кристаллов. М., «Мир», 1967.
4. Ландсберг Г. С. Оптика. М., «Наука», 1976.

3. ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ГАРМОНИКИ

Работа знакомит с одним из основных эффектов нелинейной оптики — генерацией второй гармоники излучения лазера. Проводятся измерения угловой структуры излучения второй оптической гармоники.

§ 1. Введение

С появлением мощных источников когерентного излучения оптического диапазона (лазеров) стало возможным наблюдение и использование нелинейных оптических явлений, в которых в отличие от обычной линейной оптики происходит нарушение принципа суперпозиции.

Исследования удвоения частоты в оптическом диапазоне позволили выявить новые закономерности взаимодействия излучения с веществом. Практическим результатом этих исследований явилось создание высокоэффективных (с КПД 50% и более) удвоителей частоты лазерного излучения, а также каскадных умножителей на третью, четвертую и более высокие гармоники, которые находят широкое применение в приборах квантовой электроники.

§ 2. Теория

1. Нелинейная поляризация. Взаимодействие световой волны с веществом на классическом языке описывается вектором поляризации \mathbf{P} . В линейной оптике поляризация связана линейно с напряженностью электрического поля \mathbf{E} световой волны:

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}. \quad (1)$$

Такая связь, естественно, является приближенной. Для того чтобы судить о применимости соотношения (1), надо сравнить \mathbf{E} с напряженностью внутриатомного поля E_a , определяющего степень связи оптических электронов с атомным ядром. Величину E_a можно подсчитать по закону Кулона: $E_a = e/r_0^2$, где r_0 — характерный радиус электронной орбиты. Подставляя $e = 4 \cdot 10^{-10}$ CGSE и $r_0 = 10^{-8}$ см, получаем $E_a \approx 10^9$ В/см, что является максимальной величиной внутриатомного поля, определяющего силы связи, действующие на оптический электрон в атоме водорода. В конденсированных средах, и особенно в полупроводниках, где внешние (оптические) электроны экранированы, E_a значительно слабее и составляет 10^7 — 10^8 В/см.

Сравним с E_a напряженность электрического поля световой волны, излучаемой неодимовым лазером в режиме свободной генерации (в так называемом «пичковом» режиме, см. [2]). В этом режиме интенсивность излучения в импульсе составляет несколько киловатт на см^2 в нефокусированном пучке диаметром порядка 1 см. Такому световому потоку $S = (cn/8\pi)E^2$ (c — скорость света в вакууме, n — показатель преломления среды) соответствует напряженность электрического поля порядка 10^3 В/см, что значительно меньше напряженности внутриатомного поля, и соотношение (1) выполняется с высокой степенью точности. Тем не менее при определенных условиях, одним из которых является высокая когерентность излучения, волна может претерпеть значительные нелинейные искажения, и в частности преобразоваться в волну второй гармоники.

Появление второй гармоники связано с квадратичным членом в разложении поляризации \mathbf{P} по степеням электрического поля световой волны:

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} + \chi \mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \quad (2)$$

Для гармонических колебаний поля световой волны $\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t$ получим из (2) поляризацию на удвоенной частоте

$$P = \chi E^2 = \chi E_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{\chi E_0^2}{2} + \frac{\chi E_0^2}{2} \cos 2\omega t. \quad (3)$$

¹ Запись (2) условна, так как κ и χ , вообще говоря, тензоры соответственно 2-го и 3-го рангов.

Для генерации второй гармоники пригодны вещества, не обладающие центром инверсии. Действительно, когда вещество изотропно или имеет центр инверсии, при изменении направления приложенного электрического поля \mathbf{E} поляризация \mathbf{P} должна менять знак. Чтобы удовлетворить этому требованию, члены, содержащие четные степени в уравнении (2), должны отсутствовать.

Рассмотрим идеальный случай, когда плоская волна излучения основной частоты проходит через безграничный слой кристалла толщиной l (рис. 1). Обозначим поляризацию на частоте 2ω

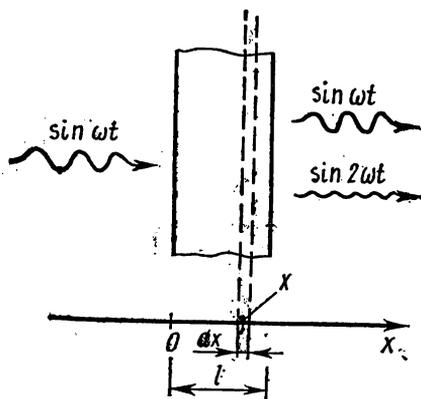


Рис. 1. К расчету электрического поля второй гармоники

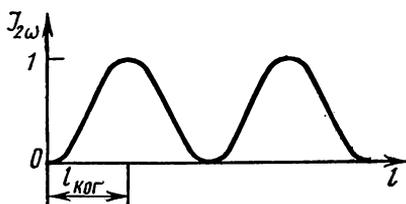


Рис. 2. Зависимость интенсивности второй гармоники от координаты внутри кристалла

через $P^{2\omega}$ и будем искать выражение для интенсивности излучения на выходной поверхности кристалла. Электрическое поле в кристалле на основной частоте есть $E_0 \cos(k_1 x - \omega t)$ и согласно (3)

$$P^{2\omega} \sim \cos(2k_1 x - 2\omega t). \quad (4)$$

Важно отметить, что волна поляризации на частоте 2ω распространяется с той же фазовой скоростью $2\omega/2k_1 = \omega/k_1 = v_\omega$, что и основная волна, а не волна второй гармоники; скорость последней равна $v_{2\omega} = 2\omega/k_2$, где k_2 — волновой вектор излучения второй гармоники внутри кристалла.

Электрическое поле гармоники $dE^{2\omega}$ на выходной поверхности кристалла, созданное гармонической поляризацией $P^{2\omega} dx$ слоя dx (см. рис. 1) в кристалле, дается выражением

$$dE^{2\omega} \sim dx \cos[2k_1 x - 2\omega t + k_2(l - x)], \quad (5)$$

где $k_2(l - x)$ — добавка к фазе, которую приобретает волна второй гармоники при распространении внутри кристалла от слоя dx

до выходной поверхности. Полное электрическое поле гармоники на выходной поверхности кристалла равно

$$\int_0^l d E^{2\omega} \sim \frac{1}{2k_1 - k_2} \sin \left[\frac{l}{2} (2k_1 - k_2) \right] \cos \left[lk_1 + \frac{lk_2}{2} - 2\omega t \right]. \quad (6)$$

Интенсивность излучения второй гармоники на выходной поверхности кристалла соответственно пропорциональна

$$I^{2\omega} \sim \left\{ \frac{\sin [l (2k_1 - k_2)/2]}{(2k_1 - k_2)/2} \right\}^2 \sim \left\{ \frac{\sin [(n_1 - n_2) 2\pi l/\lambda]}{(n_1 - n_2) 2\pi/\lambda} \right\}^2, \quad (7)$$

где λ — длина основной волны в вакууме; n_1, n_2 — показатели преломления среды на основной и удвоенной частотах соответственно.

Важным следствием этого выражения является то, что при $n_1 = n_2$ интенсивность на выходной поверхности кристалла растет прямо пропорционально l^2 :

$$\lim_{(n_1 - n_2) \rightarrow 0} I^{2\omega} \sim l^2.$$

Таким образом, увеличивая длину кристалла l , можно достичь значительного коэффициента преобразования основной волны в волну второй гармоники. Однако при наличии дисперсии $n_1 \neq n_2$ ход зависимости интенсивности второй гармоники от длины кристалла имеет вид биений (рис. 2), а максимально возможная интенсивность такая, какая может быть получена в кристалле с характерной длиной

$$l_{\text{кор}} = \frac{1}{4} \frac{\lambda}{n_1 - n_2},$$

называемой когерентной длиной. Эта длина в оптически прозрачных кристаллах доходит приблизительно до 20 длин волн. Таким образом, когерентная длина оказывается значительно меньше длины кристаллов (обычно несколько сантиметров), которые могли бы быть использованы для получения интенсивного излучения второй гармоники.

Выход из этого положения может быть найден при использовании на основной частоте и на второй гармонике волн различной поляризации в двулучепреломляющих кристаллах.

2. Синхронизм. В некоторых кристаллах можно выбрать такое направление распространения, для которого показатель преломления, например для обыкновенного луча основной частоты, равен показателю преломления необыкновенного луча второй гармоники. На рис. 3 схематически показано сечение поверхностей показателей преломления для отрицательного одноосного кристалла (оптическая ось обозначена через z'). Для него на данной фиксированной частоте $n_e < n_o$ (см. [5—6]). Именно таким кристаллом

является кристалл KDP (дигидрофосфат калия), применяемый в настоящей лабораторной работе.

Текущие значения необыкновенных показателей преломления (при произвольном угле θ между волновым вектором и оптической осью кристалла) мы будем обозначать индексом «e» сверху: n^e . Как видно из рис. 3,

$$n_{ie} = n_i^e |_{\theta=90^\circ}; \quad n_{i0} = n_i^e |_{\theta=0^\circ}; \quad i = 1, 2.$$

Ценным свойством кристалла KDP является то, что для него поверхности $n_o(\omega)$ и $n^e(2\omega)$ пересекаются для частот основного

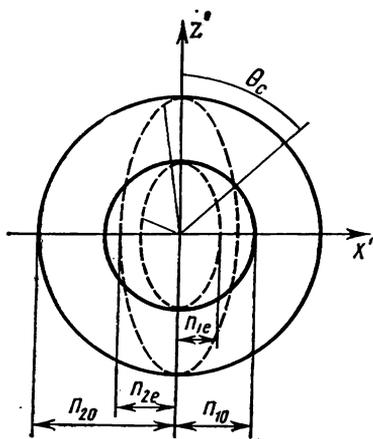


Рис. 3. Сечения поверхностей показателя преломления для отрицательного одноосного кристалла

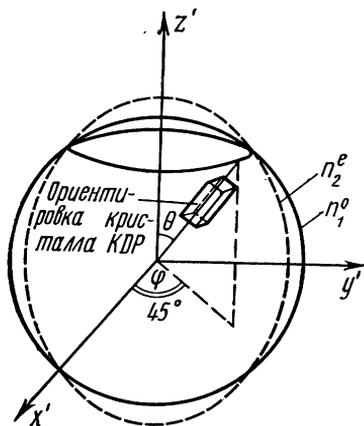


Рис. 4. К расчету угла синхронизма

излучения ω , лежащих в довольно широком интервале (куда, в частности, попадают частоты излучения рубинового и неодимового лазеров). На рис. 3 видно, что $n_{1o} = n^e(\theta)$ при распространении волн с частотами ω и 2ω под некоторым углом θ_c к оптической оси кристалла. Следовательно, по этому направлению выполняется равенство

$$2k_1 = k_2, \tag{8}$$

называемое условием пространственного синхронизма (для рассматриваемого случая). Так как кристалл KDP является одноосным, то условие синхронизма выполняется по всем направлениям вдоль образующей конуса с углом при вершине $2\theta_c$ (см. рис. 4).

Зная главные значения показателей преломления n_{1o} , n_{2o} , n_{2e} , можно рассчитать угол синхронизма θ_c . Поскольку сечение поверхности показателей преломления одноосного кристалла плоскостью

$x'z'$ (см. рис. 3) представляет собой окружность и эллипс (поверхность является двуполостной — см. [4, 5]), то имеет место равенство

$$n_1^o(\theta) \equiv n_{1o}; \quad n_2^e(\theta) = \frac{n_{2e}}{\sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \cos^2 \theta}}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_2 = \sqrt{1 - (n_{2e}/n_{2o})^2}$ — эксцентриситет эллипса.

Подставляя (9) в условие синхронизма $n_1^o = n_2^e$, получаем для взаимодействия « $o_1 o_1 e_2$ » (или просто « ooe »)

$$\cos^2 \theta_c^{ooe} = \frac{1}{\varepsilon_2^2} \left[1 - \left(\frac{n_{2e}}{n_{1o}} \right)^2 \right].$$

Символ « ooe » означает, что две обыкновенные волны основного излучения взаимодействуют с необыкновенной волной второй гармоники. Говоря о двух волнах основного излучения, мы имеем в виду, что генерацию второй гармоники можно рассматривать как генерацию суммарной частоты $\omega + \omega = \omega_2$ двух волн с одинаковой частотой ω . При этом другие характеристики этих волн (ориентация плоскости поляризации, волновые векторы, амплитуды) могут в общем случае быть разными.

Равенство (8) является лишь частным случаем общего условия синхронизма

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}'_1 = \mathbf{k}_2. \quad (10)$$

На языке фотонов равенство (10) означает выполнение закона сохранения импульса, в то время как равенство $\omega + \omega = \omega_2$ отражает закон сохранения энергии.

При взаимодействии « ooe » плоскости поляризации двух волн основного излучения совпадают (обе волны обыкновенные), и если равны их амплитуды, фазы и волновые векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}'_1 , то волны станут неразличимыми, однако следует иметь в виду, что это лишь частный случай.

Для кристалла KDP оказывается возможной синхронная генерация второй гармоники при взаимодействии обыкновенной и необыкновенной волн основного излучения с необыкновенной волной второй гармоники ($o_1 e_1 \rightarrow e_2$). Условие синхронизма для этого взаимодействия имеет следующий вид (если все волны распространяются по одному направлению): $k_{1o} + k_1^e = k_2^e$.

Откуда

$$\frac{n_{1o} + n_1^e}{2} = n_2^e, \quad (11)$$

и угол синхронизма с достаточной степенью точности равен

$$\cos^2 \theta_c^{oee} \simeq 2 \frac{(n_{1o} + n_{1e})/2 - n_{2e}}{n_{2e}\varepsilon_2^2 - n_{1e}^2/2}. \quad (12)$$

3. Угловая ширина синхронизма. На практике излучение лазера обладает конечной расходимостью так, что условие синхронизма не может быть выполнено для всего пучка основного излучения. Распределение интенсивности второй гармоники вблизи направления синхронизма можно получить из (7), найдя зависимость расстройки $\Delta_n = n_2 - n_1$ от угла α , отсчитываемого от θ_c . Для взаимодействия «ооо», дифференцируя (9) для малых α вблизи θ_c , получим:

$$\Delta_n^{ooo} = n_2^e - n_{1o} \simeq \left. \frac{dn_2^e}{d\theta} \right|_{\theta_c} \alpha = \frac{1}{2} n_{2e} \varepsilon_2^2 (\sin 2\theta_c) \alpha = \gamma^{ooo} \alpha. \quad (13a)$$

Для взаимодействия «оee» расстройка определяется как $\Delta_n = n_2^e - \frac{n_{1o} + n_1^e}{2}$ и связана с углом α соотношением

$$\begin{aligned} \Delta_n^{oee} &\simeq \left. \frac{dn_2^e}{d\theta} \right|_{\theta_c} \alpha - \frac{1}{2} \left. \frac{dn_1^e}{d\theta} \right|_{\theta_c} \alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left(n_{2e} \varepsilon_2^2 - \frac{1}{2} n_{1e} \varepsilon_1^2 \right) (\sin 2\theta_c) \alpha = \gamma^{oee} \alpha. \end{aligned} \quad (13b)$$

Распределение интенсивности второй гармоники будет иметь вид полос, так как в направлении, перпендикулярном главной плоскости (проходящей через луч и оптическую ось), Δ_n слабо зависит от угла, а при $\theta_c = 90^\circ$, т. е. в экваториальной плоскости, не зависит совсем.

На рис. 5 представлен график функции (7) в зависимости от угла α вблизи направления синхронизма. Расстояние между минимумами находится из условия обращения в нуль (7), что имеет место при $\frac{2\pi l}{\lambda_1} \Delta_n = \pi; 2\pi; \dots; n\pi$. Отсюда и из (13) ширина каждой полосы (угловое расстояние между соседними минимумами) внутри кристалла равна

$$\delta\alpha = \frac{\lambda_1}{2\gamma l}. \quad (14)$$

Центральная полоса, соответствующая направлению синхронизма, в два раза шире боковых полос. В отличие от минимумов максимумы функции (7), не являются эквидистантными.

Следует отметить, что условие синхронизма может выполняться также при взаимодействии пересекающихся пучков. На практике это имеет место, например, при генерации второй гармоники в фокусированных пучках (основное излучение фокусируется внутри кристалла). В этом случае условие синхронизма записывается в векторном виде (10), так как взаимодействующие пучки распространяются в разных направлениях. Рассмотрим, какой будет угловая структура излучения второй гармоники при фокуси-

ровке основного пучка внутрь кристалла в случае взаимодействия «ооо», когда $\mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_1^{\prime o} = \mathbf{k}_2^e$. Так как волновые числа обыкновенных волн k^o и $k^{\prime o}$ не зависят от направления распространения в кристалле, то волновое число второй гармоники, получающееся при векторном синхронизме, будет меньше, чем при скалярном.

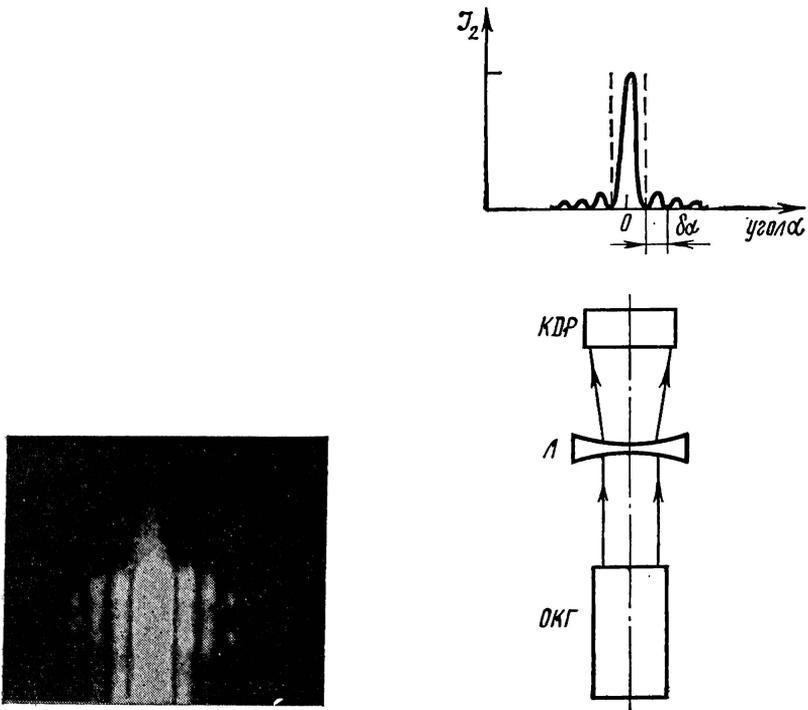


Рис. 5. Зависимость интенсивности второй гармоники от угла в случае расходящихся пучков основного излучения

Следовательно, в случае отрицательного кристалла вторая гармоника излучается под углами к оптической оси, большими, чем θ_c . Подчеркнем еще раз, что речь идет о гармонике, получающейся в результате точного ($\Delta=0$) векторного синхронизма. По этим же направлениям может излучаться гармоника, которая получается при скалярном взаимодействии, но в этом случае точного синхронизма уже не будет, и появится расстройка Δ .

Таким образом, полная картина угловой структуры второй гармоники, получающаяся при фокусировке основного излучения в кристалл, имеет следующий вид: для углов $\theta > \theta_c$ наряду с полосатой структурой наблюдается сплошной фон, обусловленный син-

хронным взаимодействием пересекающихся пучков; для углов $\theta < \theta_c$ — только полосатая структура (рис. 6).

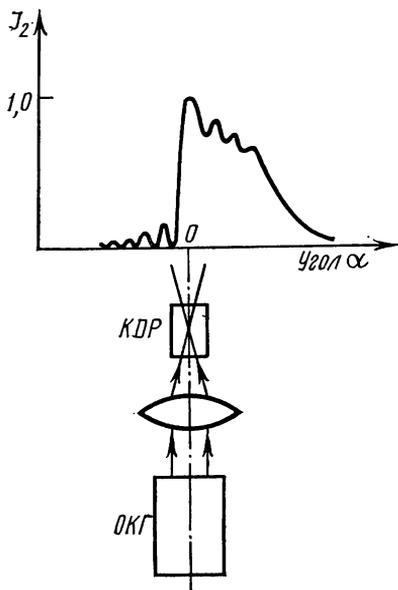


Рис. 6. Зависимость интенсивности второй гармоники от угла в случае пересекающихся пучков основного излучения

§ 3. Описание установки

Данная лабораторная работа выполняется на экспериментальной установке, в состав которой входят (рис. 7):

- 1) лазер;
- 2) нелинейный кристалл для генерации второй гармоники;
- 3) автоколлиматор и осветитель, используемые для юстировки оптической системы;
- 4) калориметр для измерения энергий лазерного излучения;
- 5) оптические элементы (линзы, фильтры).

Лазер состоит из лазерной головки, в которую вмонтированы стержень из стекла с неодимом и импульсные лампы, зеркал и блока питания. Лазер работает в импульсном режиме. От выпрямителя заряжаются накопительные конденсаторы, и при подаче на лампы импульса поджига конденсаторы разряжаются через них.

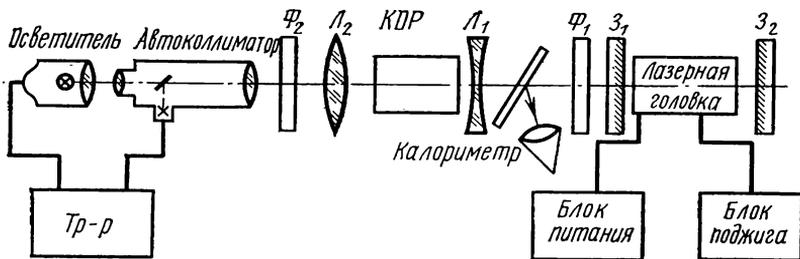


Рис. 7. Блок-схема установки

Длительность вспышки света составляет $\sim 0,5-1$ мсек. Излучение лазера представляет собой набор вспышек — «пичков», длительностью $0,1-0,3$ мксек каждая. Длина волны неодимового лазера лежит в ближнем инфракрасном диапазоне и составляет $10600 \text{ \AA} = 1060 \text{ нм} = 1,06 \text{ мкм}$.

Установка оснащена системой блокировки, исключающей доступ к высоковольтным частям, а также выключающей блок питания лазера с одновременным закорачиванием накопительных конденсаторов во время юстировки оптической системы.

Нелинейный кристалл для удвоения частоты лазерного излучения вырезан так, что нормаль к его торцам приблизительно совпадает с направлением синхронизма (отклонение до 1—2 градусов). При поисках синхронизма и исследовании генерации 2 гармоники в пучках различной структуры используются линзы $L_{1,2}$ (см. рис. 7). Фильтр Φ_1 пропускает инфракрасное излучение лазера и поглощает видимый свет; это устраняет паразитную засветку экрана от импульсных ламп, мешающую наблюдению второй гармоники. Фильтр Φ_2 поглощает излучение лазера и пропускает излучение второй гармоники.

Для крепления оптических элементов установки служит оптическая скамья. Часть из них (лазерная головка, зеркала, кристалл) укреплена на поворотных столиках и в юстируемых оправах. Все элементы можно перемещать по горизонтали и вертикали и тем самым юстировать по лучу света, создаваемого осветителем и коллиматором.

§ 4. Упражнения

1. Юстировка оптической схемы.

а. Выставление оптических элементов по лучу и грубая юстировка на параллельность.

Опорный луч света создается осветителем и автоколлиматором, закрытым крышкой с небольшим отверстием. Элементы схемы, необходимые для выполнения того или иного упражнения, последовательно выставляются по лучу (перемещением в пространстве) и грубо выставляются на параллельность (поворотом) так, чтобы отраженный луч попадал в отверстие в крышке коллиматора. Последнее необходимо для того, чтобы отражение от юстируемой поверхности попало в поле коллиматора (наблюдалось в окуляре).

б. Точная юстировка элементов резонатора лазера.

Выполняется с помощью автоколлиматора путем совмещения крестов, соответствующих лучам, отраженным от юстируемых поверхностей. Цель юстировки — выставить зеркала так, чтобы луч света, перпендикулярный одному зеркалу, после прохождения неодимового стержня падал перпендикулярно и на второе. Если торцы стержня параллельны друг другу, то это условие выполняется при параллельном расположении отражающих поверхностей зеркал и торцов стержня. В случае, если между торцами имеется клин, то зеркала должны составлять друг с другом соответствующий угол. В этом случае крест, соответствующий отражению от одного из зеркал (ближнего к автоколлиматору), совмещается с крестом, соответствующим лучу, прошедшему через стер-

жень, отраженному от второго зеркала и вновь прошедшему через стержень.

2. Измерение энергии излучения лазера и определение порога генерации. Измеряется зависимость энергии излучения лазера от энергии накачки, за которую принимается энергия, запасенная в конденсаторе $W_{\text{нак}} = CV^2/2$ (C — емкость накопительного конденсатора, V — напряжение). Световая энергия, излучаемая импульсными лампами при разряде через них конденсатора, в 2—3 раза меньше электрической. Порог генерации определяется как энергия накачки, при которой генерация возникает (срывается). Энергия генерации измеряется калориметром.

3. Нахождение направления синхронизма в кристалле KDP (визуально).

а. Наблюдая в автоколлиматор отражения от граней кристалла, установить кристалл так, чтобы одно из отражений (торцы кристалла обычно несколько непараллельны друг другу) совпало с крестом коллиматора. Зафиксировать отсчет поворотного барабана в этом положении.

б. После кристалла KDP (т. е. между кристаллом и коллиматором, но как можно ближе к кристаллу) установить собирающую линзу, в фокальной плоскости которой поместить экран. К экрану прикрепить засвеченную фотобумагу (эмульсией к лазеру). Произвести вспышку лазера и отметить положение ожога на фотобумаге¹.

в. Установить перед кристаллом рассеивающую линзу (ее оптическая сила D указана на держателе). Рассеивающая линза увеличивает расходимость излучения лазера, что ускоряет нахождение направления синхронной генерации второй гармоники. Действительно, для того чтобы найти это направление в кристалле KDP, необходимо поворачивать кристалл от вспышки к вспышке на угол, меньший расходимости лазера ($\alpha_{\text{лаз}} \simeq 10'$). В случае использования линзы расходимость луча после нее равна d/f радиан, где d — диаметр лазерного пучка ($d = 10$ мм); f — фокусное расстояние линзы.

Кристалл KDP вырезан так, что отклонение направления синхронизма от нормали к торцу кристалла может достигать нескольких градусов.

Для того чтобы использовать весь конус лучей, линзу следует поместить как можно ближе к кристаллу.

г. После кристалла установить фильтр, пропускающий излучение гармоники ($\lambda_2 = 530$ нм) и «отрезающий» излучение лазера ($\lambda_1 = 1060$ нм).

д. Поворачивая кристалл через интервал, равный половине угла раствора конуса после рассеивающей линзы, найти такое поло-

¹ Во время вспышки ни в коем случае не смотреть на фотобумагу — это ОПАСНО ДЛЯ ЗРЕНИЯ!

жение, при котором на экране появится вертикальная зеленая полоса (излучение гармоники).

е. Измерить расстояние от полосы до ожога, оставленного лазерным лучом (см. п. б). Разделив это расстояние на фокусное расстояние собирающей линзы, получим угол (в радианах), на которых надо повернуть кристалл, чтобы полоса прошла через ожог. Повернуть кристалл и убедиться в совпадении полосы и ожога. Это будет означать, что направление синхронизма выставлено по лучу лазера, и генерация гармоники будет иметь место и без рассеивающей линзы.

ж. Снять рассеивающую линзу и тонкой подстройкой кристалла (шагами порядка $1'$ — $3'$) найти генерацию второй гармоники в коллимированном пучке лазера. Зафиксировать положение кристалла, соответствующее максимуму генерации гармоники.

Основным результатом этого упражнения является определение угла $\Delta\theta$, на который отклонено направление синхронизма от нормали к торцу кристалла. При этом необходимо указать, в какую сторону имеет место это отклонение — пояснить рисунком.

4. Регистрация угловой структуры второй гармоники на фотопленку. Для регистрации угловой структуры второй гармоники используется фотопленка, помещенная в фокальной плоскости объектива автоколлиматора. Для удобства экспозиции и обработки фотопленка заряжается в фотоаппарат, с которого снят объектив. Фотографирование угловой структуры второй гармоники произвести в двух случаях:

без линз между лазером и кристаллом;

в случае, когда перед кристаллом помещена рассеивающая линза.

Негативы, полученные в этих случаях, позволят сделать заключение о следующих характеристиках.

1. О расходимости лазерного луча (на основании пространственной структуры, полученной без линз). За оценочное значение угла расходимости можно принять величину $\alpha = d/f$, где d — размер пятна второй гармоники по вертикали¹.

2. О «полосатой» структуре излучения второй гармоники, т. е. о законе $(\sin\alpha/x)^2$, по которому зависит интенсивность второй гармоники от расстройки (из анализа пространственной структуры, полученной с использованием рассеивающей линзы). Измерением расстояния между максимумами или минимумами полос можно провести сравнение эксперимента с теорией — формула (14) или аналогичная ей (для расстояния между максимумами). Для расчета воспользоваться указанными в табл. 1 значениями показателей преломления.

Эти величины рассчитаны по дисперсионным формулам, приведенным в работе [6].

¹ Для измерений d использовать негатив, имеющий нормальное почернение («на глаз» — умеренно серый).

Таблица 1

$\lambda_{\text{мкм}}$	n_o	n_e
1,06	1,494347	1,460325
0,53	1,512974	1,470974

Расчет провести для взаимодействий «*ooe*» и «*oee*» и сделать заключение о том, какой тип взаимодействия имеет место в нашем образце кристалла КДР (обратить внимание на то, что формула (14) дает угол внутри кристалла).

Все расчетные и экспериментальные данные (включая и промежуточные) должны быть занесены в рабочую тетрадь.

Результаты, которые должны быть представлены при сдаче работы:

1. График зависимости энергии генерации лазера от энергии накачки. Значение пороговой энергии накачки.

2. Рисунок, иллюстрирующий, в какую сторону отклонено направление синхронизма от нормали к торцу кристалла. Величина этого отклонения. Интервал углов, в котором наблюдается вторая гармоника без использования рассеивающей линзы.

3. Негативы угловой структуры второй гармоники с указанием, в каких условиях каждый из них получен.

4. Оценочная величина угла расходимости лазерного луча.

5. Расчетные значения угловой ширины полос в структуре второй гармоники для взаимодействия «*ooe*» и «*oee*».

6. Измеренное значение этой величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтович Ю. Л. Квантовые генераторы света и нелинейная оптика. М., «Просвещение», 1966.
2. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия. М., «Сов. энциклопедия», 1969.
3. Хохлов Р. В., Фадеев В. В. Нелинейная оптика. — В кн.: Наука и человечество. М., «Наука», 1970, с. 170—183.
4. Ландсберг Г. С. Оптика. М., «Наука», 1976, с. 495—525.
5. Най Дж. Физические свойства кристаллов. М., «Мир», 1967.
6. Zernike F. Refractive Indices of Ammonium Dihydrogen Phosphate and Potassium Dihydrogen Phosphate between 2000 Å and 1,5 μ . — JOSA, 54, N 10. 1215, 1964.

III. ГО ЛОГРАФИЯ

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ГОЛОГРАФИИ

1. Метод фотографирования изображений и голография. Когда надо получить оптическим путем информацию о несамосветящемся объекте, этот объект освещают и, используя какую-либо оптическую систему (объектив, хрусталик глаза, вогнутое зеркало, малое отверстие в непрозрачном экране), формируют действительное изображение объекта. Для регистрации полученного изображения применяется фотография.

Научное и практическое значение фотографии и в прошлом и в настоящее время огромно. Нет сомнения в том, что получение оптических изображений и их фотографирование сохраняют свое значение и в будущем как превосходное и простое средство регистрации важнейшей информации.

Однако, несмотря на высокое развитие инструментальной оптики и фотографической техники, возможности этого традиционного метода регистрации оптической информации в некоторых отношениях ограничены. Рассмотрим те ограничения фотографического метода регистрации, которые ему присущи.

1. Для формирования оптического изображения объекта на экране или на фотопластинке необходима оптическая система.

2. Оптическая система формирует плоское изображение трехмерного объекта, причем оптимальные условия формирования изображения соблюдаются только для точек объекта, лежащих в плоскости, перпендикулярной оптической оси системы. В результате этого утрачивается объемность объекта наблюдения.

3. Полученное на экране изображение и его фотография не дают возможности обозреть объект с различных сторон, что можно сделать по отношению к самому объекту.

4. По отношению к полученному на экране оптическому изображению и его фотографии отсутствует эффект параллактического смещения.

Пусть мы наблюдаем два объекта А и В из точки C_1 (рис. 1). Если объект В загораживает часть объекта А, то, переместив точку наблюдения в положение C_2 , мы сможем увидеть ранее загороженную для обзора часть объекта. Видимое из точки C_2 смеще-

ние объекта В вправо и есть эффект параллактического смещения.

Если же из точки C_1 была сделана фотография объектов А и В, то полученное изображение не даст возможности увидеть полностью объект А. Эффект параллактического смещения отсутствует по отношению к изображениям, сформированным на экранах оптических системах.

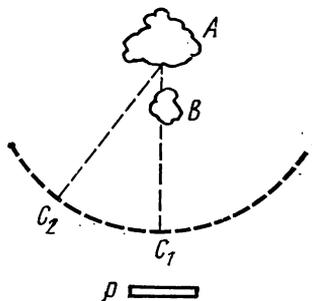


Рис. 1. Схема наблюдения, поясняющая эффект параллактического смещения

5. На каждом участке поверхности фотопластинки фиксируется изображение определенной детали объекта, и с помощью части негатива нельзя наблюдать полное изображение объекта.

6. На одном негативе не имеет смысла фиксировать изображения нескольких объектов, если эти изображения перекрываются. Другими словами: информация об одном объекте, зарегистрированная на фотопластинке, является помехой по отношению к информации о другом объекте, изображение которого получено на том же участке фотопластинки.

7. Для восстановления на экране или на сетчатой оболочке глаза оптического изображения, записанного на негативе, необходимо, просвечивая негатив, применять оптическую систему, аналогичную той, которая использовалась для формирования оптического изображения на фотопластинке. Такой оптической системой может быть объектив, хрусталик глаза и т. д. Восстановленное оптическое изображение подчинено тем же ограничениям, как и первичное изображение, когда оно регистрировалось.

Рассмотрим теперь, с более общей точки зрения, вопрос о том, в какой мере формирование оптических изображений и их фотографирование позволяют исчерпывающим образом использовать всю ту информацию об объекте наблюдения, которую переносит от него к наблюдателю отраженное объектом электромагнитное поле.

Оптическое изображение объекта выявляется распределением освещенности по экрану или по фотопластинке. Освещенность изображения определяется энергией света, падающей в единицу времени на единицу площади каждого участка экрана. При этом, учитывая высокую частоту колебаний оптического электромагнитного спектра, очевидно, что освещенность определяется средним по времени значением потока энергии, падающего на единицу площади изображения.

Очевидно, что фотографическая регистрация распределения освещенности в плоскости изображения не позволяет учесть распределение фаз колебаний в этой плоскости. В самом деле, почерне-

ние фотографического негатива определяется поглощенной им энергией, а последняя зависит от освещенности негатива и времени его экспозиции.

Если объект наблюдения освещен не строго монохроматическим и пространственно-некогерентным светом, то независимость освещенности изображения и почернения негатива от начальных фаз колебаний поля не ведет к утрате какой-либо информации об объекте наблюдения. В этом случае фазы волн, отраженных объектом, распределены в плоскости изображения совершенно хаотически и в пространстве, и во времени и никакой информации об объекте дать не могут.

Но совсем иначе обстоит дело, если объект наблюдения освещен монохроматическим и пространственно-когерентным световым пучком. В этом случае распределение фаз световых волн, отраженных от объекта наблюдения, вполне закономерно, и фазы отраженных волн могут дать о нем информацию, дополнительную к той, которую несут амплитуды этих волн. Например, фазы волн, отраженных от далеких от оптической системы участков объекта наблюдения, будут запаздывать в плоскости изображения по отношению к фазам волн, отраженных от близких к оптической системе точек объекта. Таким образом, различие в фазах волн, отраженных от трехмерного объекта, может давать информацию о протяженности объекта вдоль направления наблюдения.

Как было разъяснено выше, фотографирование не позволяет использовать фазовую информацию. Следовательно, при освещении объектов наблюдения монохроматическим и пространственно-когерентным светом для учета фазовой информации надо искать новые способы ее выявления.

Задаче возможно более полного использования и записи информации, переносимой полем отраженных объектом световых волн посвящена недавно развившаяся отрасль оптики — голография. Первым этапом голографической записи оптической информации является регистрация амплитуд и фаз волнового поля, отраженного объектом наблюдения. Регистрация названных параметров светового поля, распространяющегося от освещенного объекта наблюдения, осуществляется фотографическим методом. При некоторых специальных условиях, о которых подробно будет сказано ниже, оказывается, что запись амплитудных и фазовых характеристик поля может стать доступной фотографии. Фотопластика с этой специальной записью параметров поля называется голограммой. Регистрация параметров светового поля осуществляется без помощи оптических систем и без формирования оптического изображения объекта наблюдения.

Следующим этапом голографирования является извлечение из голограммы той информации об объекте, которая на ней зарегистрирована. Для этого голограмма просвечивается световым пучком. (В некоторых случаях используется отражение света от голограммы.)

Оказывается, что голограмма является своеобразной двумерной (иногда трехмерной) структурой, на которой дифрагирует проходящий сквозь нее (или отраженный от нее) свет. Световой пучок, дифрагировавший на голограмме, может сформировать на экране действительное оптическое изображение объекта без применения каких-либо оптических систем, может также создать волновое поле, эквивалентное распространявшемуся ранее от объекта наблюдения.

В последнем случае для использования такого волнового поля с целью получения информации об объекте наблюдения уже необходима оптическая система. Подробнее о возможности получения с помощью голограммы действительных и мнимых изображений объекта сказано в п. 4.

Замечательным свойством голограммы, соответствующим смыслу ее названия — полная запись, — является большой объем содержащейся в ней информации. Голограмма позволяет полностью восстанавливать волновое поле объекта в его отсутствие. С помощью восстановленного волнового поля можно получить не одно изображение объекта, а такое же множество разнообразных изображений, которое можно наблюдать, изменяя условия наблюдения самого объекта. В этом состоит самое существенное отличие голограммы от обычного фотоснимка.

Поэтому, так же как и при наличии самого объекта наблюдения, можно восстановить эффект объемности при наблюдении трехмерного предмета, наблюдать эффекты параллактического смещения при изменении положения точки наблюдения, восстанавливать окраску поверхности объекта, не прибегая к обычным методам цветной фотографии, и т. д.

Получение оптической информации об объекте путем использования волнового поля последнего, восстановленного при просвечивании голограммы, дало основание приписать этому методу наблюдения еще одно название: получение изображений методом восстановления волнового фронта. Это наименование полнее передает сущность нового метода, чем краткий термин голография.

Очевидно, что подробная и строгая формулировка схематично высказанных общих соображений и тем более решение на их основе конкретных задач должны были потребовать огромной и трудной работы. Приведенный краткий очерк дан только для того, чтобы помочь ориентироваться дальше в большом и сложном новом материале.

2. Метод регистрации фазы волнового поля. Некоторые расчеты распределения фаз в заданной плоскости. Как было указано в предыдущем пункте, прямая регистрация фазы оптических колебаний методами, фиксирующими лишь среднюю по времени интенсивность света, невозможна. Однако известно, что в явлениях интерференции света распределение его интенсивности в интерференционном поле определяется амплитудами и фазами интерферирующих волн. Следовательно, для полной регистрации волнового

поля, после прохождения света сквозь объект, можно использовать явление интерференции света, должным образом реализовав условия, необходимые для ее возникновения.

Стационарная во времени интерференционная картина возникает при интерференции когерентных световых пучков. Поэтому,

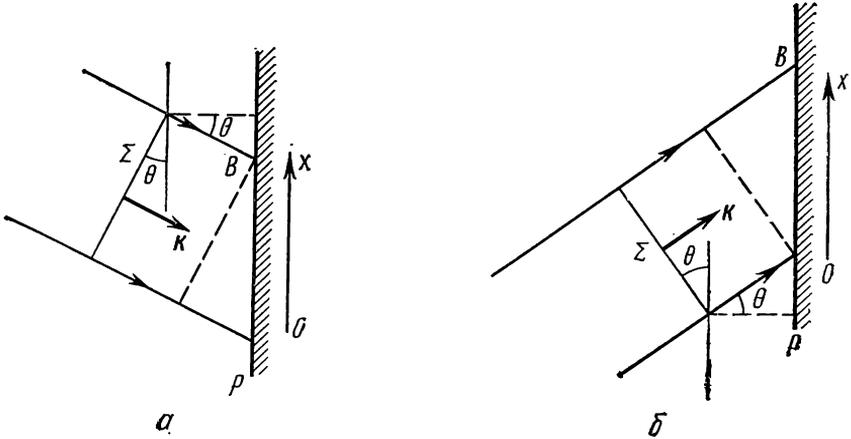


Рис. 2. Распределение фазы на плоскости при наклонном падении плоской волны

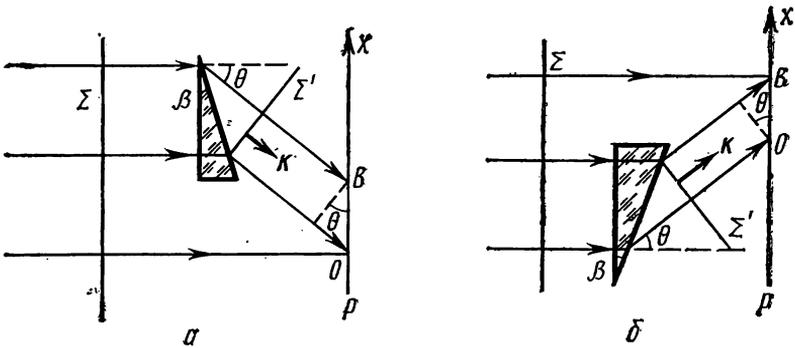


Рис. 3. Реализация наклонного падения волнового фронта с помощью призмы

для того чтобы простейшим образом достигнуть регистрации фазовых соотношений в волновом поле, возмущенном присутствием в нем объекта наблюдения, необходимо, во-первых, чтобы это волновое поле было создано монохроматическим и когерентным в пространстве излучением. Во-вторых, для создания стационарной интерференционной картины (нужной для регистрации всех фаз и амплитуд колебаний в этом поле) необходимо наложить на это

поле еще другой поток излучения, когерентный с исследуемым волновым полем.

Таким образом, оказывается, что для полной регистрации волнового поля необходимо иметь кроме основного еще вспомогательный, так называемый опорный световой пучок, участвующий в формировании нужной интерференционной картины.

О том, как эта основная идея практически реализуется, будет сказано в следующем параграфе. Здесь же необходимо предварительно рассмотреть некоторые соображения и расчеты, нужные для последующего учета фазовых соотношений в волновом поле.

При рассмотрении явления интерференции учитываются фазы интерферирующих волн. Однако обычно учитываются фазы волн вдоль нормалей к их волновым фронтам. Сейчас для будущей задачи и записи уравнения голограммы и для прочтения его физического смысла в отдельных конкретных случаях надо записать распределение фаз в некоторый момент времени в функции координаты, измеренной уже не вдоль нормали к волновому фронту, а на некоторой поверхности (чаще всего плоскости), произвольно ориентированной по отношению к волновой нормали.

1. Пусть плоская волна $A = A_0 e^{-it + i\omega(kr)}$ падает на некоторую плоскость P , плоскость фотопластинки, перпендикулярную плоскости чертежа (рис. 2, *a*). Ось координат x направлена вдоль линии пересечения плоскости P и плоскости рисунка. Фронт волны обзает угол θ с плоскостью P .

На следующем рис. 3, *a* показано, как с помощью стеклянной призмы может быть экспериментально реализовано такое косое падение волнового фронта на плоскость фотопластинки, если исходный световой пучок распространяется нормально к плоскости фотопластинки. Например, если призма, изготовленная из стекла с показателем преломления μ , имеет малый преломляющий угол β , то угол $\theta \approx \beta(\mu - 1)$.

Найдем распределение фазы падающей волны на плоскости в зависимости от координаты x . При этом мы ограничиваем задачу о распределении фаз на нужной плоскости одномерным случаем.

Пусть плоская волна с волновым фронтом Σ (см. рис. 3, *a*) записывается в виде $A = A_0 \exp[-i(\omega t - kr)]$. Примем, что волна имеет нулевую фазу в точке O . Тогда она в точке B с координатой x запишется в виде

$$A^B = A_0 \exp[-i(\omega t + kx \sin \theta)].$$

Вводя обозначение $\alpha = k \sin \theta$, имеем $A^B = A_0 \exp[-i\omega t] \exp[-i\alpha x]$.

Таким образом, если волновая нормаль и параллельный ей волновой вектор k плоского волнового фронта Σ составляют угол θ с нормалью к плоскости P , то в математическом выражении плоской волны этому будет соответствовать наличие множителя $\exp[-i\alpha x]$ при принятой форме записи волны. Следовательно, множитель $\exp[-i\alpha x]$ является как бы «оператором поворота» первоначального волнового фронта Σ на угол θ .

Если волновой фронт падает на фотопластинку так, как это показано на рис. 2, б, распределение фаз световых волн на фотопластинке опишется выражением $\exp[iax]$ со знаком в экспоненте, измененным на противоположный по сравнению с ранее рассмотренным случаем. Этот случай изменения первоначального горизонтального направления распространения волнового фронта может

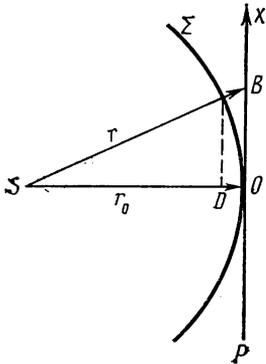


Рис. 4. Распределение фазы на плоскости при падении на нее сферической расходящейся световой волны

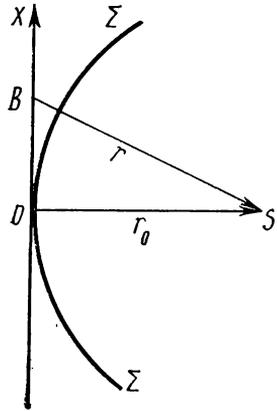


Рис. 5. Распределение фазы на плоскости при падении на нее сходящейся световой волны

быть также реализован с помощью призмы, как показано на рис. 3, б.

2. Пусть сферическая, расходящаяся из точки S волна падает на плоскость P , перпендикулярную плоскости чертежа (рис. 4). На этом рисунке все прочие условия аналогичны указанным выше на рис. 2.

Рассчитаем зависимость фазы световых колебаний от координаты x на плоскости P , приняв за нулевую — фазу колебаний в точке O .

Очевидно, что искомое решение задачи будет аксиально-симметричным относительно нормали SO к плоскости P . Далее, будем считать радиус-вектор r мало отличающимся от r_0 и поэтому будем учитывать их различие только при подсчете фазы волны на плоскости P , но будем пренебрегать зависимостью амплитуды волны от r . Обозначая $SB=r$ и $SO=r_0$, имеем

$$r^2 = r_0^2 + x^2 = r_0^2 \left(1 + \frac{x^2}{r_0^2} \right),$$

откуда $r \approx r_0 + \frac{x^2}{2r_0}$. Поэтому волны в точках O и B можно записать соответственно в следующем виде:

$$A^O = A_0 \exp[-i(\omega t - kr_0)],$$

$$\begin{aligned} A^B &= A_0 \exp[-i(\omega t - kr)] = A_0 \exp\left\{-i\left[\omega t - k\left(r_0 + \frac{x^2}{2r_0}\right)\right]\right\} = \\ &= A_0 \exp[-i(\omega t - kr_0)] \exp\left[i\frac{kx^2}{2r_0}\right] \end{aligned}$$

или, выражая A^B через A^O , имеем

$$A^B = A^O \exp\left[i\frac{kx^2}{2r_0}\right] = A^O \exp\left[i\frac{\pi x^2}{r_0 \lambda}\right].$$

Сделанный расчет показывает, что при принятой нами постановке задачи для описания фазы колебаний расходящейся сфе-

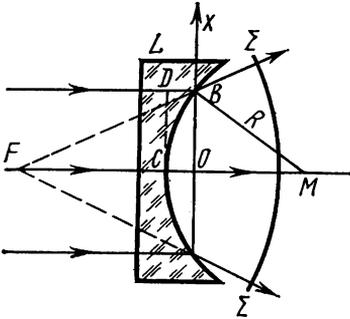


Рис. 6. Осуществление сферической расходящейся световой волны при помощи отрицательной линзы

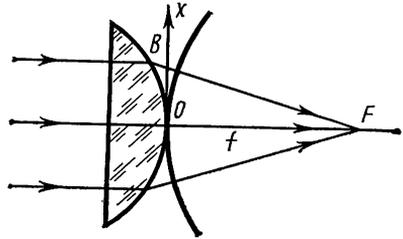


Рис. 7. Осуществление сферической сходящейся световой волны при помощи положительной линзы

рической волны в ее математическую запись входит фазовый множитель вида $\exp[ikx^2/2r_0]$.

Теперь отметим, что если бы мы поставили задачу описать зависимость от координаты x фазы колебаний сходящейся сферической волны (рис. 5), то мы пришли бы к выражению $\exp[-ikx^2/2r_0]$, отличающемуся от полученного ранее лишь знаком минус в экспоненте.

Теперь рассмотрим вопрос о том, каким способом можно фактически реализовать подобную расходящуюся волну, за исключением тривиального использования точечного источника света S . Легко видеть, что подобная расходящаяся волна может быть реализована в случае прохождения плоской волны сквозь тонкую рассеивающую линзу L (рис. 6). Можно и в этом случае рассчитать

аксиально-симметричную зависимость от координаты x фазы световых колебаний в плоскости, проходящей через ось x , расположенной за линзой L и перпендикулярной ее оптической оси.

Колебания вблизи точки B запаздывают по фазе относительно колебаний вблизи точки O в результате того, что соответствующие им оптические пути света в стекле и в воздухе различны. На выходе из линзы разность хода Δ_{BO} этих колебаний будет

$$\Delta_{BO} = DB \cdot \mu - CO = CO \cdot (\mu - 1),$$

где μ — коэффициент преломления света.

Но $CO = R - OM$ и $MO^2 = R^2 - x^2$, откуда $MO \approx R - x^2/2R$, где R — радиус кривизны поверхности линзы. Следовательно, $CO = x^2/2R$ и $\Delta_{BO} = (\mu - 1)x^2/2R$. Искомая разность фаз $\Delta\varphi_{BO}$ колебаний будет

$$\Delta\varphi_{BO} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2}{2R} (\mu - 1) = \frac{kx^2}{2f} = \frac{\pi x^2}{\lambda f},$$

где f — фокусное расстояние линзы, так как $1/f = (1/R) \cdot (\mu - 1)$. Итак, колебания в точке B запаздывают по фазе относительно колебаний в точке O . Поэтому если колебания в точке O описываются выражением $A^o = A_0 \exp[-i\omega t]$, то в точке B они опишутся соответственно выражением

$$A^B = A_0 \exp[-i\omega t] \exp[i\pi x^2/\lambda f].$$

Из полученного выражения видно, что в случае тонкой рассеивающей линзы искомая зависимость фазы колебаний от координаты x на выходе из линзы совпадает с той, которая была найдена ранее для расходящейся сферической волны.

Случай сходящейся сферической волны может быть реализован с помощью тонкой собирающей линзы, через которую проходит плоская волна, как это показано на рис. 7. Сделанный для этого случая расчет зависимости фазы колебаний от координаты x на выходе из линзы даст выражение

$$\exp\left[-i \frac{kx^2}{2f}\right] = \exp\left[-i \frac{\pi x^2}{\lambda f}\right].$$

Резюмируя фазовые расчеты, сделанные в настоящем параграфе, мы видим, что при соответствующем выборе осей координат экспоненциальные выражения вида $\exp[i\varphi(x)]$, на которые может быть умножено выражение, описывающее распространяющуюся плоскую волну $A_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$, описывают некоторое преобразование, которое испытывает фронт этой волны. Линейная функция $\varphi(x)$ соответствует повороту нормали волнового фронта, распространяющейся плоской волны, а квадратичная функция $\varphi(x)$ соответствует преобразованию плоской волны в волну сходящуюся или расходящуюся в зависимости от знака перед членом, содержащим множитель x^2 . Эти выводы будут иметь непосредствен-

ное отношение к прочтению физического смысла уравнения голограммы.

3. Экспериментальные методы получения голограмм. Распределение интенсивности в интерференционном поле. На рис. 8 изображена принципиальная схема установки для получения голограммы просвечиваемого оптически неоднородного объекта наблюдде-

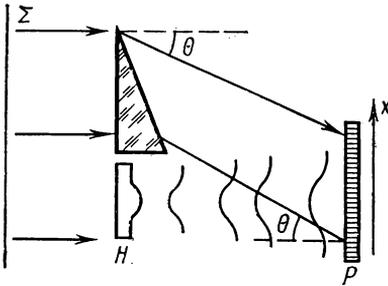


Рис. 8. Схема получения голограммы оптически прозрачного объекта

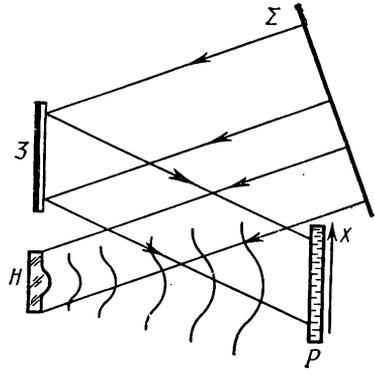


Рис. 9. Схема получения голограммы непрозрачного объекта

ния H , локально изменяющего амплитуду и фазу отдельных участков распространяющегося сквозь него фронта Σ плоской монохроматической волны.

Нужная волна может быть в настоящее время легко реализована с помощью лазерного светового пучка, расширенного до необходимого поперечного сечения специальной оптической системой. Подробнее об этом будет сказано ниже.

Прошедшая сквозь объект волна с локально измененными значениями амплитуды и фазы падает на фотопластинку P , перпендикулярную плоскости чертежа¹. Верхний участок волнового фронта Σ , минуя объект H , проходит через отклоняющую его стеклянную призму и падает на то же место фотопластинки, которого достигают волны, модулированные объектом H . Прошедшая через призму плоская волна служит опорной волной, необходимой для

¹ Заметим, что локальные изменения амплитуды и начальной фазы колебаний световой волны, вызванные ее распространением сквозь объект наблюдений или отражением от него, часто называют соответственно амплитудной и фазовой модуляцией этой волны. Эта терминология заимствована в голографии из радиофизики, но имеет совершенно иной смысл, чем в последней. Именно в радиофизике рассматриваются процессы изменения амплитуды или фазы волны во времени, а в данном случае имеются в виду изменения амплитуды и фазы в пространстве и происходящие по совершенно иным причинам, чем в радиофизике.

регистрации не только амплитуд, но и фаз волнового поля, возмущенного объектом H .

В ходе опыта обычно реализуют условия, при которых амплитуда опорной волны много больше амплитуды волны, распространяющейся после объекта.

Разумеется, фронт опорной волны может быть повернут не только призмой, как показано на рис. 8, но и подходящим образом расположенным плоским зеркалом. Интерференционная картина (голограмма) регистрируется на фотопластинке P .

На рис. 9 представлена аналогичная схема установки для голографирования непрозрачного объекта наблюдения H в отраженном от него свете. Зеркало Z направляет плоскую опорную волну на фотопластинку P , куда приходят и волны, отраженные от объекта H .

Существенно, что на каждую точку освещенной части фотопластинки (рис. 8 и 9) могут падать световые волны, модулированные по амплитуде и фазе любым участком объекта наблюдения и, кроме того, падает опорная волна. Поэтому каждый участок интерференционной картины, возникающей в результате суперпозиции этих двух волн, может содержать полную информацию о всем объекте наблюдения.

Отметим также, что опорная волна не должна быть обязательно плоской волной, как это имеет место на обеих приведенных выше схемах. В некоторых случаях, как будет показано ниже, используется сферическая опорная волна. Голограммы, у которых кривизны волновых фронтов опорной и предметной волн существенно отличаются друг от друга, называются голограммами Френеля, а при равных кривизнах — голограммами Фурье¹.

Реализация описанных выше схем записи голограмм выдвигает определенные требования к спектральному составу используемого в этих опытах излучения. Действительно, поскольку дело всякий раз идет о регистрации интерференционных картин, возникающих при суперпозиции волнового поля, распространяющегося от объекта наблюдения, и поля опорной волны, необходимо обеспечить когерентность этих полей при всех разностях хода, возникающих в ходе голографического опыта. Эти разности хода могут быть значительными.

Если обратиться к геометрическим условиям голографических опытов, то легко видеть (рис. 8, 9), что в плоскости голограммы неизбежно возникает значительная разность хода между полем опорной волны и полем волн, отраженных или пропущенных объектом наблюдения. Макрорельеф отражающего свет объекта наблюдения или его макроскопическая оптическая неоднородность создают эту разность хода.

Если такая разность хода составляет несколько сантиметров, т. е. 10^5 — 10^6 длин световых волн, то, как это следует из формулы

¹ Строгая классификация голограмм приведена в [15].

$d = \lambda^2 / \Delta\lambda$, связывающей разность хода d (длина когерентности лазера), при которой близка к исчезновению видимость интерференционной картины, с длиной световой волны λ и шириной используемого спектрального интервала излучения $\Delta\lambda$, легко оценить необходимые требования к монохроматичности излучения, используемого в голографии. Оказывается, что в рассматриваемом слу-

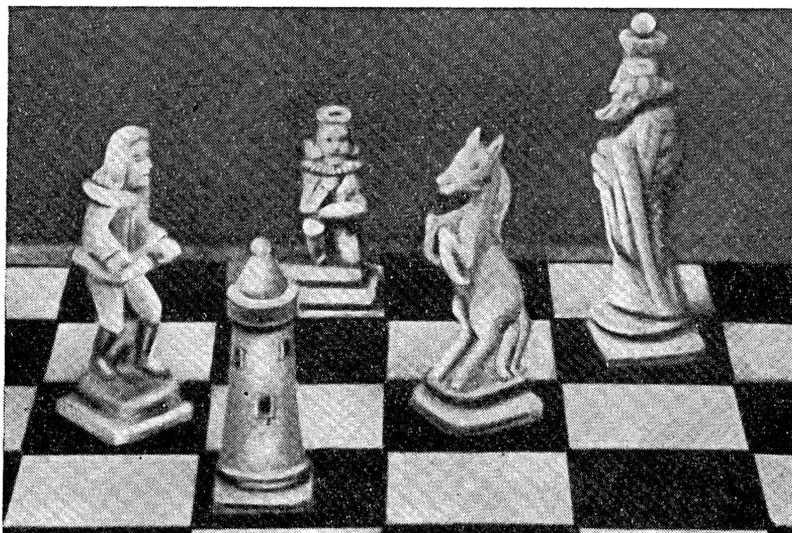


Рис. 10. Фотография голографированного объекта

час величина $\Delta\lambda$ должна быть порядка 10^{-2} Å. Между тем ширина спектральной линии ртутной лампы, даже с невысоким давлением ртутных паров, составляет уже около 300 Å, что соответствует допустимой для наблюдения интерференции разности хода всего около трех микрон.

Из сказанного следует, что источники света так называемого «долазерного периода развития оптики» малопригодны для голографии. Наоборот, с помощью лазеров сравнительно легко реализовать нужные в голографии требования к монохроматичности используемого в ней света. Этим объясняется бурное развитие голографии в последние 10 лет, когда лазеры стали доступны многим лабораториям. Поэтому на всех рассмотренных выше схемах голографических опытов ту исходную волну, с помощью которой формируется поле, освещающее объект наблюдения, и опорную волну следует считать лазерным излучением.

Для того чтобы проиллюстрировать первый этап голографического опыта, приводим два рисунка. На первом из них (рис. 10) методом обычной фотографии изображены объекты исследования,

на втором (рис. 11, а) — фотозапись интерференционной картины — голограмма, полученная для этого объекта с помощью плоской опорной волны. Никакого геометрического сходства между этими двумя картинами, разумеется, нет. Концентрические интер-

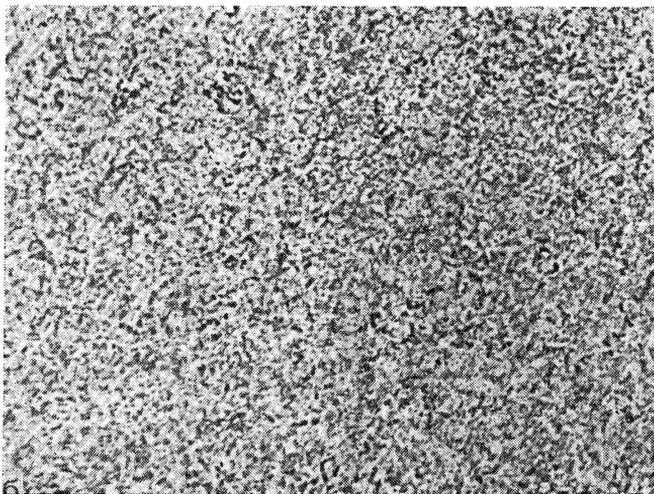
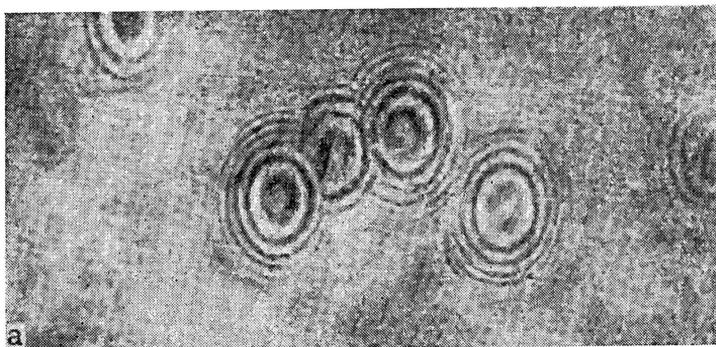


Рис. 11. Вид голограммы (а); увеличенное изображение голограммы (б)

ференционные полосы на голограмме — наиболее выразительные на первый взгляд ее особенности — не относятся к сути дела. Эти полосы — результат дифракции опорной волны на пылинках, случайно оказавшихся на ее пути. Характерный участок голограммы показан с большим увеличением на рис. 11, б.

Рассчитаем распределение интенсивности на фотопластинке в интерференционной картине, созданной волной, промодулированной объектом наблюдения, и плоской опорной волной (см. рис. 8, 9)¹. Очевидно, что временной фактор в записи выражений интерферирующих волн выписывать не имеет смысла, так как мы рассчитываем распределение интенсивности в стационарной интерференционной картине, на плоскости фотопластинки P .

На фотопластинку падают две волны:

а) опорная волна, комплексная амплитуда которой может быть записана в виде

$$A_0 \exp[-i\alpha x], \quad \text{где } \alpha = k \sin \theta,$$

(см. п. 2), A_0 — амплитуда колебаний на волновом фронте Σ ;

б) волна, промодулированная по амплитуде и по фазе объектом H . Полагая, что светопропускаемость объекта H и его оптическая плотность, определяющие амплитуду и фазу прошедшей сквозь него волны, зависят только от координаты x , эту волну можно записать так: $A(x) \exp[i\varphi(x)]$ ².

Результирующая амплитуда поля в плоскости фотопластинки запишется так:

$$A = A_0 \exp[-i\alpha x] + A(x) \exp[i\varphi(x)].$$

Распределение интенсивности света $I(x)$ в этом интерференционном поле будет определяться соотношением $I(x) \sim AA^*$, где символом A^* обозначено комплексно-сопряженное с A значение амплитуды результирующего поля.

$$I(x) \sim A_0^2 + A^2(x) + A_0 A(x) \exp[i\alpha x] \exp[i\varphi(x)] + \\ + A_0 A(x) \exp[-i\alpha x] \exp[-i\varphi(x)],$$

или

$$I(x) \sim A_0^2 + A^2(x) + 2A_0 A(x) \cos[\alpha x + \varphi(x)].$$

Таким образом, распределение интенсивности света, освещающего фотопластинку, приготовленную для регистрации голограммы, определится амплитудой опорной волны A_0 и, что является наиболее существенным, не только амплитудой $A(x)$, но и фазой $\varphi(x)$ волны, модулированной объектом наблюдения.

Фотопластинка экспонируется в этом интерференционном поле, проявляется и фиксируется. Полученный негатив интерференционной картины представляет собой голограмму.

¹ Термин модуляции применяется здесь и ниже в смысле, разъясненном в примечании на с. 150.

² Здесь говорится о волновом поле просвечиваемого объекта наблюдений (см. рис. 8). Очевидно, точно так же можно провести обсуждение и для отражающего свет объекта наблюдения (см. рис. 9). В этом случае амплитуды отраженных волн будут определяться коэффициентами отражения от поверхности объекта, а фазы — геометрическим рельефом объекта.

4. Получение оптических изображений по методу восстановления волнового фронта. Уравнение голограммы. Использование записанной на голограмме информации об объекте наблюдения осуществляется путем просвечивания голограммы, полученной описанным выше способом.

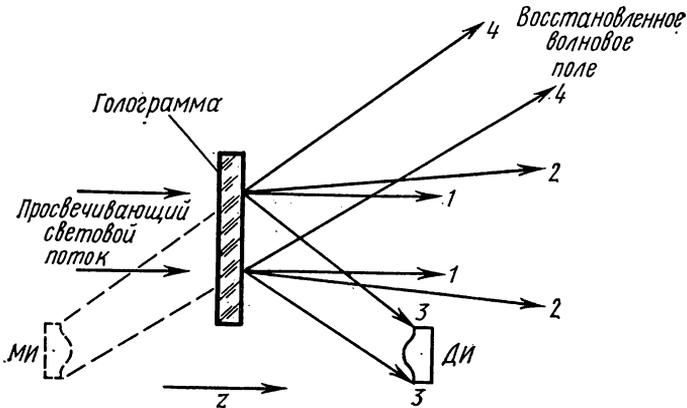


Рис. 12. Схема восстановления голографических изображений

Принципиальная схема нужного опыта изображена на рис. 12. Плоская монохроматическая волна с амплитудой E_0 падает слева, нормально на голограмму¹. В результате распространения света сквозь голограмму и его дифракции на ее неоднородном почернении, за голограммой возникает сложная система световых пучков.

Сходящийся световой пучок 3 формирует без помощи какой-либо оптической системы действительное изображение *ДИ* объекта наблюдения. Это изображение получается на том же расстоянии от голограммы, на котором помещался объект наблюдения от фотопластинки во время его голографирования. Полученное действительное изображение объекта может быть принято на экран или фотопластинку, если его надо зарегистрировать. Изображение *ДИ* можно наблюдать и глазом, аккомодировав глаз на область локализации *ДИ*.

Расходящийся световой пучок 4, если его пропустить через собирающую линзу, может сформировать другое изображение объекта наблюдения. Распределение амплитуд и фаз световых волн в этом пучке 4 соответствует так называемому мнимому изображению *МИ* объекта наблюдения. Изображение *МИ* локализовано

¹ Отметим, что длина волны излучения, используемого для просвечивания голограммы, не обязательно должна совпадать со значением длины волны света, использованного для регистрации голограммы. Подробнее об этом см. п. 5.

перед голограммой, симметрично с действительным изображением $ДИ$ (см. рис. 12). Мнимое изображение $МИ$ можно наблюдать и невооруженным глазом, поместив глаз на пути светового пучка 4 и аккомодировав его на область локализации $МИ$. В этом случае роль собирающей линзы будет выполнять хрусталик глаза, проектирующий изображение на сетчатую оболочку глаза.

Однако здесь необходимо сразу обратить внимание на одну важную особенность получения изображения с помощью голограммы, которая дальше будет разъяснена еще подробнее. Именно одна и та же голограмма может дать не по одному действительному и мнимому изображению первоначального объекта наблюдения. Так, просвечивая разные участки голограммы, можно получать различные действительные изображения объекта с различными параллактическими смещениями его деталей.

Аналогично, перемещая объектив или глаз в расходящемся световом пучке, распространяющемся за голограммой, можно формировать изображение объекта, соответствующее наблюдению этого объекта под разными углами зрения.

Это связано с тем, что на голограмме зарегистрировано не изображение объекта, но распространявшееся от него волновое поле, а за голограммой при ее просвечивании опять-таки восстанавливаются в виде сходящихся или расходящихся световых пучков волновые поля, распространявшиеся ранее от объекта наблюдения.

Световые пучки 1 и 2, из которых первый — параллельный, т. е. служащий продолжением направления распространения плоской волны, просвечивающей голограмму, а второй — слегка расходящийся, не несут интересующей нас информации об объекте наблюдения.

Чтобы выяснить происхождение и важнейшие характеристики распространяющихся за голограмму световых пучков, надо рассмотреть в деталях вопрос о светопропускаемости (прозрачности) голограммы, приведшей к переформированию просвечивающей ее плоской волны в систему световых пучков, образующих действительное и мнимое изображения объекта голографирования. Это переформирование плоской волны есть результат ее дифракции на неоднородном распределении почернений, созданных интерференционной картиной, зарегистрированной на голограмме. Рассмотрение поставленного вопроса приведет нас непосредственно к выводу уравнения голограммы.

Амплитудная прозрачность фотографического негатива $D(x) = E(x)/E_0$, где $E(x)$ — амплитуда световой волны, прошедшей через определенное место фотопластинки, а E_0 — амплитуда падающей на нее волны.

Величина $D(x)$ является определенной функцией энергии Q света, выделившейся на фотопластинке за время ее экспозиции t . Ясно, что величина Q пропорциональна времени t и зависит от интенсивности света $I(x)$, освещавшего фотопластинку.

В области так называемых нормальных почернений $D \sim Q^{-\nu/2}$, где ν — коэффициент контрастности фотоэмульсии. Обычно значение ν заключено в пределах от нескольких десятых до нескольких единиц.

Зависимость D от $I \cdot t$ для фотоэмульсии графически представлена на рис. 13.

Поэтому, полагая, что условия освещения голограммы соответствовали требованиям получения на ее негативе нормальных почернений, для отыскания прозрачности голограммы $D(x)$ необходимо возвести в степень $-\nu/2$ выражение $Q(x)$. При этом будем предполагать, что $A(x)/A_0 \ll 1$, что, как было указано выше, обычно специально реализуется в условиях регистрации голограммы. Записанное выше неравенство позволит нам при возведении в степень $-\nu/2$ выражения $Q(x) \sim I(x)$ применить соотношение $(1+x)^{-m} = 1 - mx$, если $x \ll 1$.

Итак,

$$\begin{aligned} D(x) &\sim [Q(x)]^{-\nu/2} \sim \{A_0^2 + A^2(x) + 2A_0A(x) \cos[\alpha x + \varphi(x)]\}^{-\nu/2} = \\ &= (A_0^2)^{-\nu/2} \left\{ 1 + \frac{A^2(x)}{A_0^2} + 2 \frac{A(x)}{A_0} \cos[\alpha x + \varphi(x)] \right\}^{-\nu/2} \simeq \\ &\simeq A_0^{-\nu} \left\{ 1 - \frac{\nu}{2} \frac{A^2(x)}{A_0^2} - \nu \frac{A(x)}{A_0} \cos[\alpha x + \varphi(x)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} A_0^{-(\nu+2)} \{2A_0^2 - \nu A^2(x) - 2\nu A_0A(x) \cos[\alpha x + \varphi(x)]\}. \end{aligned}$$

Опуская множитель $\frac{1}{2} A_0^{-(\nu+2)}$, можем записать

$$\begin{aligned} D(x) &\sim 2A_0^2 - \nu A^2(x) - 2\nu A_0A(x) \cos[\alpha x + \varphi(x)] = \\ &= 2A_0^2 - \nu A^2(x) - \nu A_0A(x) \exp[-i\alpha x] \exp[-i\varphi(x)] - \\ &\quad - \nu A_0A(x) \exp[i\alpha x] \exp[i\varphi(x)]. \end{aligned}$$

Полученное соотношение носит название уравнения голограммы. Оно было впервые выведено Д. Габором в 1948 г.

Благодаря наличию опорной волны при регистрации голограммы в выражении $D(x)$ учтено амплитудное $A(x)$ и фазовое $\exp[i\varphi(x)]$ изменения волнового поля, вызванные объектом наблюдения H .

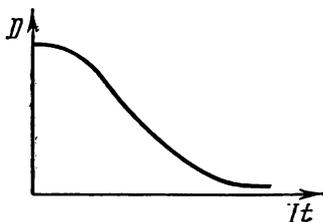


Рис. 13. Зависимость амплитудной прозрачности негатива от энергии падающего света при экспозиции фотопластинки

Сравнивая выражение для $D(x)$ с выражением $I(x)$, легко видеть, что операция возведения в степень $-\gamma/2$ выражения $Q(x)$, сделанная в предположении $A_0 \gg A(x)$, позволяет сделать два вывода. Во-первых, вид полученного выражения для $D(x)$ указывает на то, что вариации значений γ в зависимости от свойств фотоэмульсии или способа ее проявления одинаково линейно изменяют величину трех членов выражения $D(x)$ по отношению к первому члену этого выражения, что, очевидно, не существенно для поставленной задачи. Во-вторых, для первоначального понимания физических свойств голограммы как структуры, на которой происходит дифракция света, можно положить $\gamma = -2$. Тогда без всяких математических выкладок оказывается, что $D(x) \sim I(x)$, что достаточно для обсуждения уравнения голограммы.

Предположение $\gamma = -2$ физически соответствует тому, что с голограммы, сделанной на фотоэмульсии, имеющей коэффициент контрастности $\gamma = 2$, сделан контактный отпечаток на такую же фотопластинку, и ее почернения опять укладываются на линейный участок кривой прозрачности. Подобная операция перехода от «негатива» к «позитиву» для решения предстоящей дифракционной задачи, естественно, не будет иметь значения.

Однако надо подчеркнуть, что сказанное о расчете прозрачности голограммы $D(x)$ в зависимости от выбора участка графика зависимости прозрачности голограммы от интенсивности ее освещения и времени экспозиции имеет лишь весьма приближенный характер. Фактически, в целом ряде случаев, дело обстоит много сложнее (см., например, [17]). Используются также и отбеленные голограммы как фазовые дифракционные структуры.

Обсудим физический смысл уравнения Габора. Если голограмма просвечивается монохроматической плоской волной $E = E_0 \exp[-i(\omega t - kz)]$ (см. рис. 12), то полученное выражение описывает, как изменится волновой фронт этой волны в результате его прохождения сквозь голограмму, т. е. в результате дифракции на неоднородном почернении голограммы.

Математически это значит, что напряженность поля E_0 проходящей сквозь голограмму плоской волны умножается в каждой точке голограммы на комплексный множитель (оператор) $D(x)$.

После просвечивания голограммы за ней будет распространяться волновое поле с распределением фаз, описываемым выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \sim E_0 2A_0^2 - E_0 \gamma A^2(x) - E_0 \gamma A_0 A(x) \exp[-i\alpha x] \exp[-i\varphi(x)] - \\ - E_0 \gamma A_0 A(x) \exp[i\alpha x] \exp[i\varphi(x)]. \end{aligned}$$

Найденный результат описывает преобразование плоской волны в результате прохождения ее через голограмму. Наличие в этом выражении четырех аддитивных членов означает, что на выходе из голограммы, просвечиваемой плоской волной, в результате дифракции на ее неоднородном почернении возникнут четыре

световых пучка с различными направлениями распространения и различными пространственными изменениями их фаз и амплитуд. Геометрической иллюстрацией картины волнового поля за голограммой служит рис. 12.

1. Первый член анализируемого выражения: $2E_0A_0^2$ | физически соответствует плоской волне, распространяющейся после просвечивания голограммы по неизменному направлению. Очевидно, что эта волна никакой информации об объекте наблюдения не несет, и поэтому интереса не представляет.

2. Второй член анализируемого выражения: $\gamma E_0A^2(x)$ — физически соответствует волновому полю, промодулированному по амплитуде объектом наблюдения. Такая модуляция незначительно изменяет плоский фронт просвечивающей голограмму волны, и соответствующий ей световой пучок распространяется практически нормально к голограмме. Этот пучок не дает искомой полной информации о голографируемом объекте наблюдения, так как он не зависит от фазы отраженных от объекта волн.

3. Физический смысл третьего члена анализируемого выражения $E_0\gamma A_0 \exp[-i\alpha x] A(x) \exp[-i\varphi(x)]$ можно прочесть следующим образом. Множитель $\exp[-i\alpha x]$ (см. п. 2) указывает, что общее направление распространения волн, формирующих световой пучок, соответствующий этому выражению, отклонено на угол θ от нормали к голограмме. Таким образом, этот световой пучок не будет накладываться на световые пучки 1 и 2, распространяющиеся почти нормально к голограмме¹.

Множитель $A(x) \exp[-i\varphi(x)]$ описывает амплитудную и фазовую пространственную модуляцию света плоской волны Σ , вызванную объектом наблюдения (см. рис. 8, 9). Однако наличие знака минус в экспоненциальном члене, описывающем фазовую модуляцию светового пучка, указывает на то, что кривизна волновых фронтов в световом пучке, соответствующем этому члену, будет обратной кривизне волновых фронтов, расходящихся от объекта.

Следовательно, обсуждаемое выражение описывает волны, как бы сходящиеся обратно к объекту наблюдения. Эти волны формируют действительное изображение трехмерного объекта наблюдения без помощи каких-либо оптических систем. Это то самое действительное изображение, о котором было сказано выше, как об одном из двух важнейших результатов просвечивания голограммы. Помещая поочередно экран в разных сечениях области локализации действительного изображения трехмерного объекта, можно получать на нем четкие изображения разных деталей объекта. Если нужно зафиксировать эти изображения, то вместо экрана надо помещать в область локализации действительного изображе-

¹ Отметим, что практически выгодное разделение направлений распространения световых пучков 3 и 4 друг от друга и от световых пучков 1 и 2 осуществляется за счет косоугольного падения фронта опорной волны на фотопластинку при регистрации голограммы (см. рис. 8 и 9).

ния фотопластины. Просвечивая разные участки голограммы, можно наблюдать эффект взаимного параллактического смещения разных деталей объекта наблюдения, поскольку на разные части пластины голограммы свет от объекта падал под разными углами.

Рассматривая вопрос о формировании действительного изображения объекта наблюдения с помощью его голограммы, надо

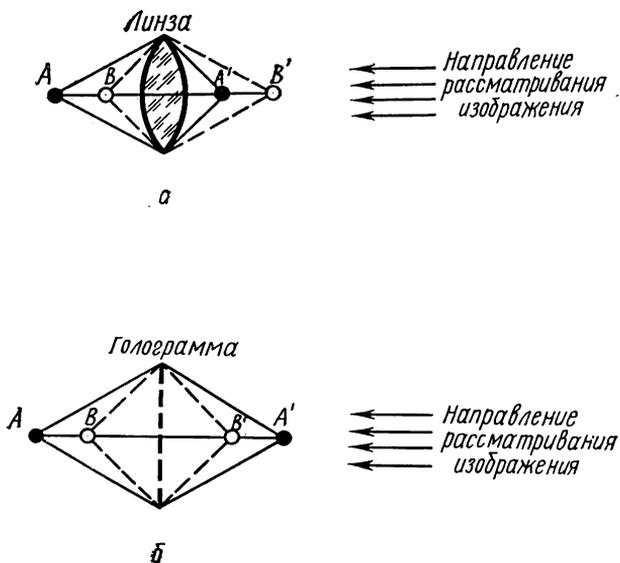


Рис. 14. Расположение деталей изображения, формируемое линзой (а); расположение деталей изображения, формируемое голограммой (б)

отметить одну существенную особенность этого изображения по сравнению с изображениями, получаемыми с помощью методов обычной фотографии. Восстановленное с помощью голограммы действительное изображение будет обладать так называемым эффектом псевдоскопии. Этот эффект заключается в том, что точки предмета, удаленные от голограммы в момент ее регистрации, будут воспроизводиться дальше от голограммы, чем близкие к ней во время изготовления голограммы. В отношении последовательности расположения деталей объекта на нормали к голограмме картина будет обратная той, которая имеет место для изображений, сформированных обычной линзой. Это обстоятельство иллюстрируется рис. 14, а, б.

Однако эффект псевдоскопии действительных изображений, получаемых с помощью голограмм, не является обстоятельством, ве-

дущим к утрате или искажению информации об объекте наблюдения. Поскольку мы наблюдаем действительные изображения, даваемые голограммой на плоском экране, или фиксируем их на плоской фотопластинке, эффект псевдоскопии не существует. Однако существует другой метод получения голограмм и наблюдения получаемых с их помощью изображений, когда эффект псевдоскопии проявляется в полной мере (см. п. 9).

4. Четвертый член рассматриваемого выражения $E_0 \gamma A_0 \exp[i\alpha x] A(x)[i\varphi(x)]$ с точностью до множителя $E_0 \gamma A_0 \exp[i\alpha x]$ описывает распределение амплитуд и фаз в волновом поле, распространяющемся от объекта наблюдения H (см. рис. 8 и 9).

Физически это означает, что в отсутствие объекта H за просвечиваемой голограммой будет воспроизведено то самое волновое поле, которое распространялось от объекта наблюдения H при его освещении. Это волновое поле будет также результатом дифракции просвечивающей голограмму плоской волны на почернениях негатива, соответствующих зарегистрированной на нем интерференционной картине.

В соответствии с физическим смыслом множителя $\exp[i\alpha x]$ общее направление распространения этого поля составляет угол θ с нормалью к голограмме (см. п. 2). Это поле будет распространяться как бы от мнимого изображения объекта MI , что условно показано на рис. 12.

Пользуясь восстановленным волновым полем, можно фотографировать объект или разглядывать его с разных пространственных точек зрения так, как будто бы освещенный объект действительно находился перед наблюдателем или фотоаппаратом. Но очевидно, что в этом случае для формирования действительного изображения объекта на фотопластинке или на сетчатой оболочке глаза нужна оптическая система (объектив, хрусталик глаза), так же как это нужно при обычном наблюдении какого-нибудь освещенного объекта.

Восстановленное волновое поле позволяет наблюдать и регистрировать эффекты параллактического смещения. Для этого нужно либо изменять взаимную пространственную ориентацию голограммы и просвечивающего ее светового пучка, либо перемещать глаза наблюдателя (или объектив фотоаппарата) по отношению к неподвижной голограмме. Прием вариации условий наблюдения совпадает с привычным способом разглядывания наблюдателем предмета или группы освещенных предметов с различных сторон.

Эффект параллактического смещения виден на серии рис. 15. На приведенных photographиях можно отчетливо наблюдать различные видимые картины расположения шахматных фигур. Все изображения получены с помощью одной голограммы, но при фотографировании даваемых ею изображений фотоаппарат устанавливается в разных положениях по отношению к просвечиваемой голограмме. Наблюдаемый эффект тождествен с тем, который бы имел место при перемещениях фотоаппарата или глаз наблюда-

теля относительно самой шахматной доски и расставленных на ней фигур.

Результаты опытов по наблюдению параллактического смещения с помощью единственной голограммы указывают на значительно больший объем информации, зарегистрированный на одной голограмме, чем на обычной фотографии.

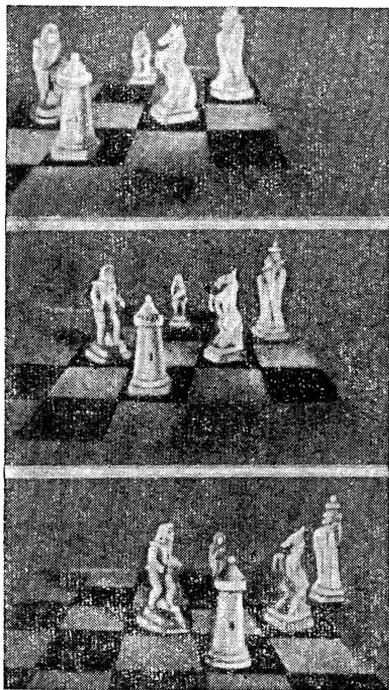


Рис. 15. Демонстрация эффекта параллактического смещения

Надо отметить лишь то обстоятельство, что при существенном уменьшении площади голограммы понижается ее разрешающая способность, т. е. возможность различать мелкие детали структуры на восстанавливаемых с помощью этой голограммы изображениях объекта наблюдения. Эта закономерность станет яснее в п. 6.

В ходе опытов по получению изображений с помощью голограммы можно убедиться также в том, что для голограмм не существует понятий позитива и негатива. Это значит, что, изготовив с готовой голограммы контактным способом отпечаток на другой фотопластинке, можно с его помощью восстанавливать изо-

Отметим еще ряд важнейших особенностей голографического метода регистрации оптической информации.

Описанные опыты по получению оптических изображений путем просвечивания голограмм не требуют использования всей площади голограммы. Просвечивая любую часть голограммы, можно полностью восстановить и действительное и мнимое изображения объекта наблюдения.

В том свойстве голограммы, что отдельная ее часть хранит информацию о всем объекте наблюдения, проявляется коренное отличие голограммы от негатива оптического изображения объекта (см. свойство 5 в п. 1).

Указываемая особенность голограммы является прямым следствием того, что любого участка поверхности фотопластинки, на которой регистрируется голограмма, достигают световые волны, отраженные от всех элементов поверхности объекта наблюдения, и на всю поверхность фотопластинки падает фронт опорной световой волны.

бражения с тем же распределением на них света и тени, как первичной голограммой.

Эта особенность голограмм вытекает из того, что замена в уравнении Габора коэффициента контрастности фотоэмульсии γ на $-\gamma$ не изменит физического смысла оператора $D(x)$. А перемена знака у величины γ как раз соответствует переходу от негатива к позитиву, полученному на той же фотоэмульсии.

Высказанное утверждение строго справедливо, разумеется, только в отношении двумерных дифракционных структур, для которых толщиной слоя фотоэмульсии можно было бы пренебречь. Практически толщина слоя фотоэмульсии составляет величину порядка 10^{-2} см, т. е. на толщине эмульсии укладывается около 100 длин световой волны. Поэтому даже при использовании фотопластинок с тонкослойными эмульсиями некоторые эффекты, соответствующие дифракции на трехмерной решетке, уже проявляются. Так, оптимальные ориентации голограммы по отношению к просвечиваемому ее световому пучку оказываются различными в зависимости от необходимости наблюдать действительные или мнимые изображения объекта. Это же обстоятельство лимитирует возможности размножения голограмм путем использования контактных отпечатков.

Наконец, опыт показывает, что на одной фотопластинке можно записать голограммы нескольких объектов, варьируя ориентацию пластинки по отношению к регистрируемым волновым полям и опорной световой волне. Для того чтобы порознь, без помех восстанавливать с помощью комбинированной голограммы изображения различных объектов, надо просвечивать эту голограмму монохроматическими световыми пучками, падающими на нее под разными углами.

5. Голограмма светящейся точки и восстановление ее изображения. Зонная пластинка. Освещенный протяженный объект наблюдения состоит из совокупности отражающих свет малых элементов поверхности или совокупности точек. Поэтому голограмма точки и восстановление с ее помощью изображения этой точки являются некоторым элементарным этапом более сложного процесса голографирования протяженных объектов. Аналогично обстоит дело и в обычной геометрической оптике.

Здесь надо, однако, отметить, что аналогия между формированием изображения протяженного предмета как совокупности изображений отдельных его точек в голографии и в геометрической оптике имеет лишь ограниченный смысл. В геометрической оптике, как правило, изображение отдельных точек объекта формируется некогерентными световыми пучками, в голографии — когерентными. Поэтому между световыми пучками, формирующими голографические изображения отдельных точек объекта, могут иметь место интерференционные эффекты, и изображение протяженного объекта может в принципе не быть простой геометрической совокупностью изображений отдельных его точек. Однако,

как показывает детальный анализ этих явлений, дополнительные картины, связанные с этими эффектами, не накладываются на основное изображение, даваемое голограммой.

Пусть светящаяся точка S реализована в виде круглого отверстия (диаметр которого значительно меньше длины световой волны) в непрозрачном экране, освещенном плоской волной Σ (рис. 16). Тогда из этого отверстия S распространяется сферичес-

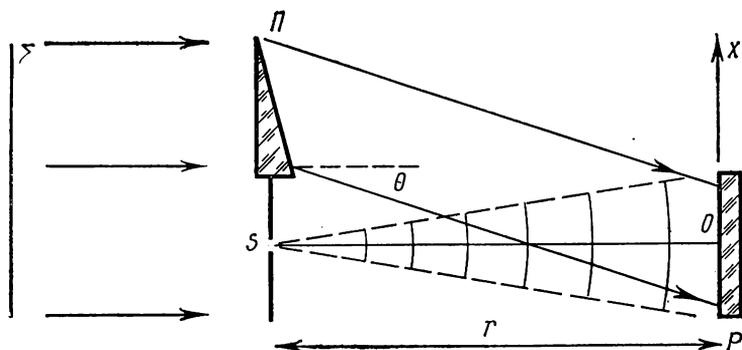


Рис. 16. Схема получения голограммы точечного источника

кая дифрагированная волна. Плоская опорная волна направляется на фотопластинку с помощью призмы Π . Фронт этой волны составляет угол θ с плоскостью P . В таком случае на плоскость пластинки падают две волны $A_0 \exp[-i\alpha x] + A \exp\left[i \frac{\pi x^2}{\lambda r}\right]$, т. е. плоская опорная волна и волна, выходящая из отверстия S . Записывая распределение фаз плоской и сферической волн на плоскости P в зависимости от координаты x , мы пользуемся формулами, найденными в п. 2. Зависимостью амплитуды сферической волны A от r пренебрегаем.

Производя расчет амплитудной прозрачности, полученной в этом опыте голограммы, согласно общему уравнению Габора находим соответствующий комплексный оператор:

$$\begin{aligned}
 D(x) &\sim 2A_0^2 - \gamma A^2 - \gamma A_0 A \exp[i\alpha x] \exp\left[i \frac{\pi x^2}{\lambda r}\right] - \\
 &\quad - \gamma A_0 A \exp[-i\alpha x] \exp\left[-i \frac{\pi x^2}{\lambda r}\right] = \\
 &= 2A_0^2 - \gamma A^2 - 2\gamma A_0 A \cos\left[\alpha x + \frac{\pi x^2}{\lambda r}\right]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что первые два слагаемые оператора соответствуют распространению через голограмму плоской волны по

прежнему направлению, но с измененным значением ее первоначальной амплитуды. Эта волна нас не интересует, так как она не несет нужной информации о точке S .

Следующие два члена выражения $D(x)$ благодаря наличию у них множителей вида $\exp[\pm i\alpha x]$ соответствуют световым пучкам, отклоненным от первоначального направления распространения. Но наличие в каждом из этих членов еще множителей вида $\exp\left[\pm i\frac{\pi x^2}{\lambda r}\right]$ указывает на то, что один из этих отклоненных

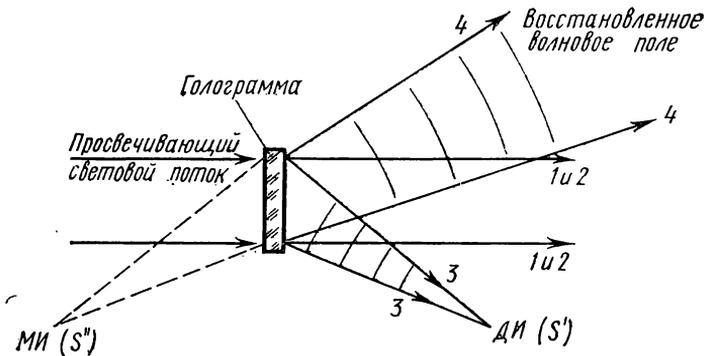


Рис. 17. Схема восстановления изображений точечного источника света

световых пучков будет сходящейся волной, а другой — расходящейся, как это явствует из анализа подобных выражений, проведенного в п. 2.

Множитель вида $\exp\left[\pm i\frac{\pi x^2}{\lambda r}\right]$ в операторе $D(x)$ в зависимости от алгебраического знака в экспоненте физически эквивалентен рассеивающей или собирающей линзе с фокусным расстоянием $f=r$. Для восстановления изображения, записанного на этой голограмме, просветим ее плоской волной, как это показано на рис. 17.

Отклоненный вниз и вместе с тем сходящийся световой пучок формирует действительное изображение S' светящейся точки S (диафрагмы) без помощи какой-либо оптической системы.

Расходящийся световой пучок соответствует мнимому изображению S'' точки S . Используя собирательную линзу или хрусталик глаза, можно, разумеется, и с помощью этого светового пучка получить действительное изображение точки S .

Аналогично формируется голографическое изображение всех точек какого-либо протяженного объекта наблюдения.

Заслуживает отдельного замечания геометрическая структура голограммы светящейся точки. Представление о ней легко получить, немного изменив условия опыта, показанного на рис. 16.

Пусть плоская опорная волна, когерентная с исходящей из S сферической волной, падает нормально на фотопластинку P (рис. 18). На рис. 18 буквой Π обозначена плоскопараллельная

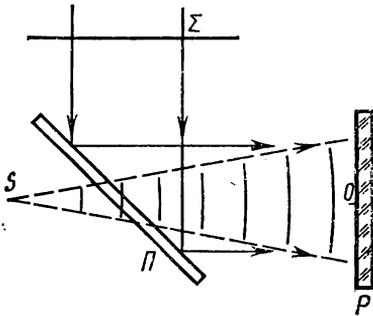


Рис. 18. Схема получения «синусоидальной» зонной пластинки

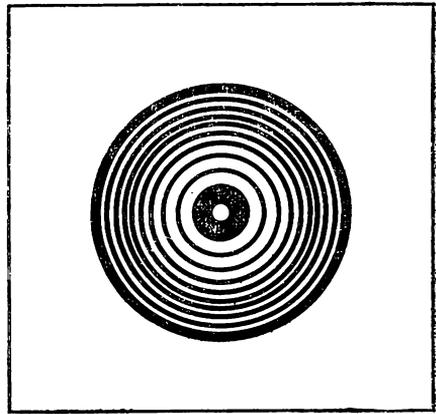


Рис. 19. Фотография «синусоидальной» зонной пластинки

тонкая стеклянная пластинка, изменяющая направление распространения опорной волны. В таком случае очевидно, что плоская волна достигает всей поверхности пластинки P в одной фазе, и голограмма должна обладать строгой аксиальной симметрией относительно нормали SO .

Тогда результат интерференции плоской опорной волны и расходящейся из точки S сферической волны приведет к формированию на пластинке P системы концентрических темных и светлых интерференционных колец. После обработки негатива на нем будет видна интерференционная картина, показанная на рис. 19.

Из выражения (1) легко видеть, что радиусы x_m показанных на рис. 19 светлых и темных интерференционных колец будут равны радиусам четных и нечетных зон Френеля (см. [1]), построенных из точки S на фронте плоской волны, когда он проходит через плоскость P . В самом деле, $x_m^2 = m\lambda r$, таким образом, негатив голограммы светящейся точки S будет в таком случае напоминать черно-белую зонную пластинку (см. § 36 в [1]). Однако если на обычной амплитудной зонной пластинке чередуются полностью прозрачные и полностью непрозрачные зоны, то в данном случае амплитудная прозрачность голограммы будет подчиняться «сину-

соидальному» закону, который легко получить из выражения (1), положив в нем $\alpha=0$.

График, иллюстрирующий амплитудную прозрачность «синусоидальной» зонной решетки $D(x) = a + b\cos^2(\pi x^2/2\lambda r_0)$ в зависимости от x , представлен на рис. 20. Рассмотрим подробнее распространение плоских и сферических волн различной длины волны через этот специальный вид зонной пластинки.

Пусть на зонную пластинку нормально падает плоская волна с амплитудой E_0 , как показано на рис. 21. Зонная пластинка условно показана пунктирной вертикальной линией. Тогда поле за голограммой будет описываться суммой трех членов

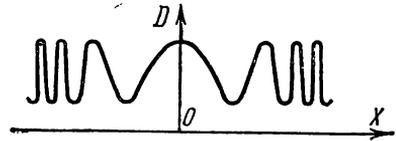


Рис. 20. График амплитудной прозрачности «синусоидальной» зонной пластинки

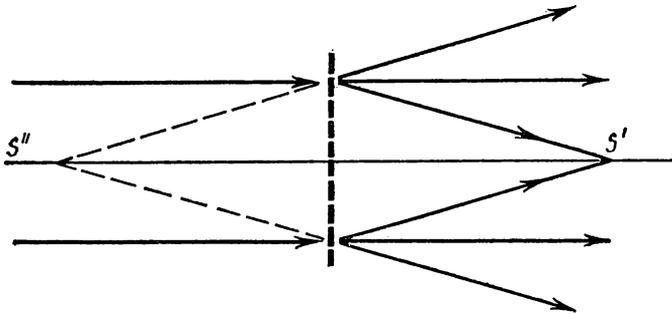


Рис. 21. Дифракция света на «синусоидальной» зонной пластинке

$$E_0(2A_0^2 - \gamma A^2) - E_0\gamma A_0 A \exp[i\pi x^2/\lambda r] - E_0\gamma A_0 A \exp[-i\pi x^2/\lambda r].$$

Это значит, что за зонной пластинкой распространяются плоская волна по прежнему направлению и две сферические волны. Вторая из этих волн будет сходящейся в точке S' , а первая — как бы расходящаяся из точки S'' , расположенной симметрично с точкой S' , но по другую сторону голограммы. В точке S' сфокусирована плоская волна, просвечивающая голограмму. Последний результат отличает действие на плоскую волну «синусоидальной» зонной пластинки от действия обычной зонной пластинки, у которой не один фокус, а целая последовательность фокусов (см. [1]). Таким образом, «синусоидальная» зонная пластинка играет роль сразу двух линз: положительной и отрицательной с фокусными

расстояниями $f = \pm r$ в отличие от множества фокусных расстояний обычной амплитудной зонной пластинки¹.

Если подобную зонную пластинку просвечивать не плоской, а сферической волной $E_0 \exp[i\pi x^2/\lambda p]$, точечный источник которой S находится на оси пластинки и на расстоянии p от нее, то после зонной пластинки будут распространяться три волны:

$$E_0(A_0^2 - \gamma A^2) \exp\left[i \frac{\pi x^2}{\lambda p}\right] - E_0 \gamma A_0 A \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{p}\right) x^2\right] - \\ - E_0 \gamma A_0 A \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right) x^2\right].$$

Очевидно, что расстояние q от зонной пластинки до действительного изображения точки, формируемого волной, соответствующей последнему члену написанного выражения, определится из условия $\frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. Отсюда для расчета положения действи-

тельного изображения S' имеем соотношение $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$. Это значит, что значения величин p , q и f будут связаны между собой так называемой формулой линзы.

Предположим теперь, что голограмма точки — «синусоидальная» зонная пластинка, изготовленная с излучением с длиной волны λ , просвечивается плоской волной с длиной волны λ' . В этом случае экспоненциальные члены, описывающие волновое поле за голограммой, будут иметь вид $\exp[\pm i\pi(1/f\lambda - 1/\lambda'p)x^2]$. Теперь соотношение между p , f и новым значением расстояния q' от зонной пластинки до действительного изображения точки S' запишется так: $1/\lambda f - 1/\lambda' p = 1/\lambda' q'$.

Новое значение фокусного расстояния зонной пластинки можно найти из требования $q' \rightarrow \infty$. В этом случае, очевидно, точечный источник света, излучение которого просвечивает зонную пластинку, должен быть в ее фокусе и величина $p = f'$, т. е. p будет равно новому значению фокусного расстояния зонной пластинки. Следовательно, теперь $1/\lambda f - 1/\lambda' f' = 0$, откуда вытекает важное соотношение $\lambda f = \lambda' f'$ или $\lambda/\lambda' = f'/f$, описывающее зависимость фокусного расстояния зонной пластинки от длины волны просвечивающего ее излучения.

Полученное соотношение можно обосновать и из общих свойств зонных пластинок (см. § 36 в [1]). Действительно, фокусное расстояние обычной зонной пластинки $f_1 = \rho_m^2/m\lambda$, где ρ_m — радиус m -ной зоны Френеля. Поэтому фокусное расстояние зонной пла-

¹ Но, конечно, такое заключение об особенностях «синусоидальной» зонной пластинки справедливо только в том приближении, в каком сделан приведенный здесь расчет. Однако это приближение возможно достаточно хорошо реализовать на опыте, и освещенность в фокусах высших порядков подобной зонной пластинки оказывается весьма малой по сравнению с интенсивностью в фокусе первого порядка.

стинки должно быть обратно пропорционально длине волны просвечивающего ее света, что и было показано выше путем частного применения уравнения Габора.

6. Голографический метод получения увеличенных оптических изображений. Получение увеличенных изображений осуществляется в голографии в два этапа. Сначала регистрируют голограмму

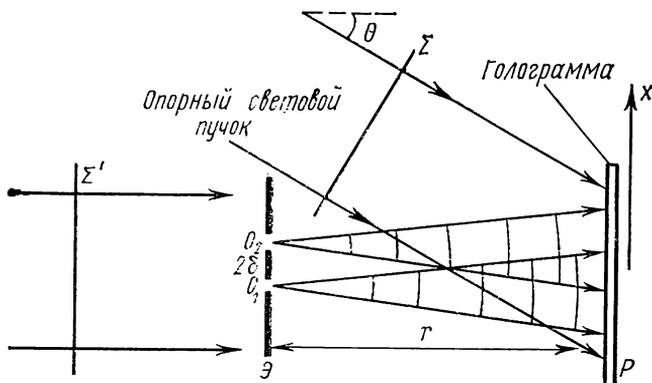


Рис. 22. Схема получения голограммы двух точечных источников света

исследуемого объекта. Затем, просвечивая голограмму способом, отличным от того, каким была осуществлена ее запись, получают увеличенное изображение объекта наблюдения. Рассмотрим последовательно два этапа этого метода.

1. Пусть предметом наблюдения служит объект, представляющий собой совокупность двух малых, так называемых точечных отверстий O_1 и O_2 в непрозрачном экране \mathcal{E} , находящихся на расстоянии 2δ друг от друга (рис. 22). Диаметры отверстий $d \ll \lambda$. На экран падает слева плоская волна. Фронт этой волны обозначен Σ' . Длина волны используемого излучения λ .

Волна дифрагирует на краях малых отверстий, и в результате этого отверстия становятся источниками двух сферических когерентных волн. Эти волны распространяются по направлению к фотопластинке P , на которой должна быть зарегистрирована голограмма. На ту же пластинку падает плоская опорная волна, когерентная с волной, освещающей экран \mathcal{E} .

Результирующее поле световых волн на плоскости фотопластинки запишется в следующем виде:

$$A_0 \exp[-i\alpha x] + A \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda r} (x - \delta)^2 \right] + A \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda r} (x + \delta)^2 \right].$$

Здесь величина α имеет тот же смысл, что в п. 2. Воспользовавшись общим уравнением Габора, можно найти амплитудную прозрачность $D(x)$ проявленной и отфиксированной голограммы:

$$D(x) \sim 2A_0^2 - 2\gamma A^2 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda r} \delta x \right) \right] -$$

$$- \gamma A_0 A \left\{ \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda r} (x - \delta)^2 \right] + \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda r} (x + \delta)^2 \right] \right\} \exp[-i\alpha x] -$$

$$- \gamma A_0 A \left\{ \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda r} (x - \delta)^2 \right] + \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda r} (x + \delta)^2 \right] \right\} \exp[i\alpha x].$$

2. Теперь рассмотрим вопрос получения с помощью голограммы изображения двух точечных отверстий.

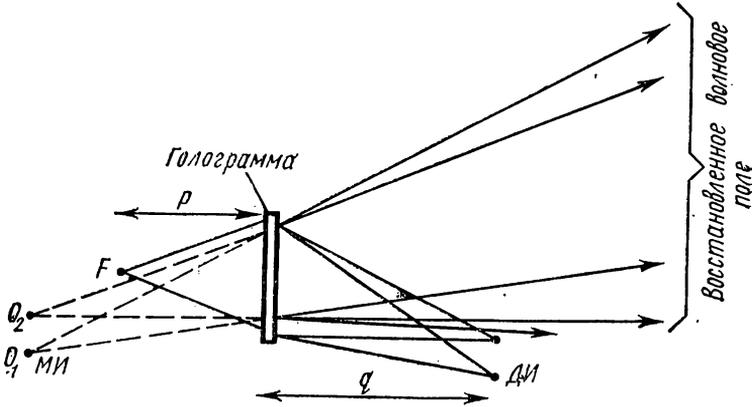


Рис. 23. Схема восстановления голографических изображений двух точечных источников света

Для получения увеличенного изображения выгодно просвечивать голограмму сферической волной, распространяющейся из точечного источника F , расположенного перед голограммой на расстоянии p от нее (рис. 23). Таким источником света может быть, например, фокус собирающей линзы, из которого распространяется прошедший сквозь линзу световой пучок лазера. Длина волны λ' -излучения, восстанавливающего изображения, может отличаться от длины волны λ -излучения, использованного при записи голограммы.

Если вести расчет волнового поля за голограммой общим методом, принятым в голографии, то надо умножить выражение, описывающее сферическую волну $E_0 \exp[i\lambda x^2/\lambda p]$, распространяющуюся из точечного источника света F , на оператор $D(x)$ и проанализировать все члены полученного выражения. В выражении для сферической волны мы, как и ранее, учитываем только зависимость ее фазы от координаты x на секущей плоскости, но не учитываем зависимости амплитуды от расстояния по нормали к волновому фронту, что не существенно. Этот расчет, алгебраиче-

ски достаточно громоздкий, можно не проделывать. На основании предшествующего нетрудно прочитать физический смысл всех членов оператора $D(x)$ и понять, как они будут «действовать» на расходящуюся сферическую волну, распространяющуюся из точки F .

Прежде всего ясно, что первые два члена найденного оператора $D(x)$ по своему физическому смыслу не будут соответствовать формированию из расходящейся сферической волны ни мнимых, ни действительных изображений точечных отверстий.

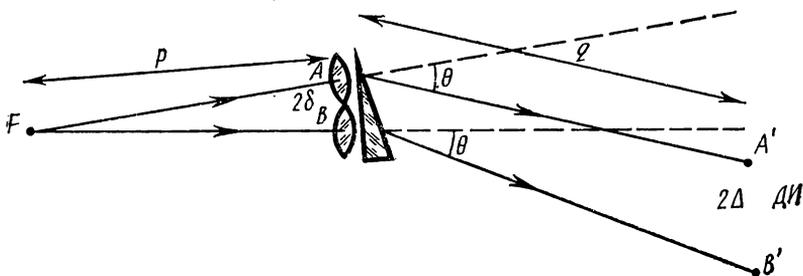


Рис. 24. Эквивалентная схема голограммы двух точечных источников света

Наличие в третьем и четвертом членах оператора множителей вида $\exp[\pm i\alpha x]$ указывает на отклонение распространяющихся сквозь голограмму световых пучков соответственно вниз и вверх от нормали к плоскости голограммы (см. рис. 23), так как это осуществляли бы призмы, расположенные на пути этих световых пучков. Стоящие в фигурных скобках парные слагаемые в обоих обсуждаемых членах оператора по своему физическому смыслу эквивалентны действиям соответственно пары собирающих и пары рассеивающих линз с фокусными расстояниями $f = \pm r$. Действительно, как было выяснено при анализе работы «синусоидальной» голографической зонной пластинки, ее фокусное расстояние равно радиусу кривизны r сферической волны, использованной при изготовлении зонной пластинки (см. рис. 18). Оптические центры этих линз будут на расстоянии 2δ между собой. Это вытекает из анализа подобных алгебраических выражений, проведенного в пп. 2, 5 и еще раз ниже в п. 8.

Из сказанного можно заключить, что действие третьего члена оператора $D(x)$ на распространяющуюся сквозь голограмму сферическую волну физически эквивалентно оптической системе, изображенной на рис. 24. Этот рисунок поясняет формирование за голограммой двух действительных изображений точечных источников света — отверстий, уже показанных на рис. 23.

Что касается четвертого члена оператора $D(x)$, то, руководствуясь сказанным о третьем члене и сопоставляя вид четвертого члена с выражением, описывающим световое поле в плоскости

голограммы при ее регистрации, легко видеть, что этот четвертый член «обеспечит» восстановление за голограммой светового поля, распространявшегося из отверстий O_1 и O_2 , при записи голограммы. Это и указано в надписи на рис. 23.

Теперь остается выяснить количественную сторону дела, найдя увеличение $N=2\Delta/2\delta$ действительного изображения. Прежде всего обратим внимание, что при просвечивании голограммы излучением с длиной волны λ' фокусные расстояния эквивалентных линз изменяются в отношении $f/f'=\lambda'/\lambda$, как было показано в п. 5. Далее, расстояние p источника излучения F до голограммы и расстояние q от нее до действительных изображений будут связаны с фокусным расстоянием f (или r) обычной формулой линзы, как это было разъяснено выше $\frac{1}{f'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{f}$. Что касается увеличения N , то оно может быть найдено из подобия треугольников FAB и $FA'B'$, имеющих общую вершину в точке F (см. рис. 24). Один из этих треугольников имеет основание 2δ , равное расстоянию между оптическими центрами эквивалентных собирающих линз, а другой — основание 2Δ , равное расстоянию между действительными изображениями O_1 и O_2 .

Наличие в оптической схеме призмы и поворот ею обоих световых пучков, формирующих действительные изображения, на одинаковый угол θ от нормали к голограмме не нарушают подобия рассматриваемых треугольников. Следовательно, увеличение будет равно

$$N = \frac{2\Delta}{2\delta} = \frac{p+q}{p} = 1 + \frac{q}{p}.$$

Учитывая написанную выше формулу линзы, находим

$$N = \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{q}{f} = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \frac{q}{r}, \quad \text{где } q = \frac{1}{\frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{f} - \frac{1}{p}}.$$

$$\text{Если } \lambda = \lambda', \text{ то } N = \frac{q}{r} = \frac{q}{f} = \frac{p}{p-f}.$$

Ввиду важности для рассматриваемого вопроса последнего результата, напомним еще раз физический смысл входящих в него величин. Буквами λ и λ' обозначены соответственно длины волн излучений, использованных при записи голограммы и при ее просвечивании. Буквой r ($f=r$) обозначено расстояние между экраном с отверстиями (см. рис. 22), т. е. объектом наблюдения, и голограммой при ее регистрации, q — расстояние между голограммой и плоскостью действительного изображения объекта на этапе формирования изображения (см. рис. 23).

Очевидно, что использование для принципиального анализа вопроса о методе голографического увеличения изображения модели предмета в виде двух отверстий в непрозрачном экране не

лишает найденный результат общности. В самом деле, такое же увеличение N , как для отрезка 2δ , будет осуществлено для любого линейного размера и более сложного объекта наблюдения.

Если $\lambda' = \lambda$, то увеличенное изображение может быть получено при осуществлении на опыте условия $p < f$, т. е. располагая точечный источник света (фокус линзы) при восстановлении изображения ближе к голограмме, чем был от нее объект наблюдения при регистрации голограммы. Тогда q будет больше f и $N > 1$. Для получения больших увеличений голографическим методом отношение λ'/λ должно быть значительной величиной. Так, если голограмма была бы записана с помощью рентгеновского излучения, а изображение восстанавливалось в видимом свете, то отношение λ'/λ могло бы достигать величин порядка 10^5 — 10^6 . Тогда голографический метод мог бы дать важнейшую информацию о различных микрообъектах. Необходимо при этом отметить, что запись голограммы, осуществляемая с помощью рентгеновского излучения, не требовала бы оптических систем, к тому же и нереализуемых в этой области электромагнитного спектра, вследствие высокой проникающей способности рентгеновского излучения и ничтожного отличия для него от единицы коэффициента преломления веществ, пригодных для изготовления оптических приборов. Таким образом, голографический метод позволил бы преодолеть трудность, препятствующую созданию рентгеновского микроскопа. Однако для реализации рентгеновской голографии необходимо располагать мощным источником направленного монохроматического рентгеновского излучения — рентгеновским лазером, который пока еще не создан, хотя в этом направлении ведутся интенсивные исследования. Материалом для записи таких голограмм, вероятно, могли бы служить некоторые специальные типы кристаллов.

7. Голограмма как дифракционная решетка. Для светового лучка, просвечивающего записанную на фотографической пластинке голограмму, последняя представляет собой некоторый двумерный экран с неравномерным распределением прозрачности. В общем случае прозрачность этого экрана будет функцией двух координат x и y на плоскости голограммы, т. е. $D = D(x, y)$. Волновое поле за голограммой есть результат дифракции просвечивающей ее плоской волны на фотографической пластинке с неоднородным распределением прозрачности $D = D(x, y)$. Поэтому естественно рассмотреть голограмму как некоторую своеобразную дифракционную решетку, помещаемую на пути светового лучка, восстанавливающего изображение объекта наблюдения.

В волновой оптике подробно рассматривается дифракция света на периодических структурах, из которых простейшей является плоская, одномерная амплитудная дифракционная решетка. Эта простейшая дифракционная решетка является в дальнейшем тем основным элементом, из которых строятся двумерные и трехмерные амплитудные дифракционные решетки. Объяснение рабо-

ты этих более сложных решеток базируется на развитии представления о тех явлениях, которые имеют место на одномерной решетке.

Одномерная дифракционная решетка может быть получена как голограмма плоской волны, интерферирующей с плоской опорной волной. Рассмотрим подробнее этот случай получения и последующего просвечивания голограммы.

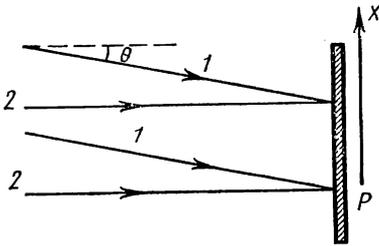


Рис. 25. Схема получения голограммы плоской волны

На рис. 25 представлена суперпозиция двух когерентных, плоских волн на фотопластинке P , перпендикулярной плоскости чертежа. При формировании этой голограммы мы можем считать любую из волн, например волну 1 опорной волной, а волну 2 — тем элементарным волновым полем, амплитуду и фазу которого

мы хотим записать голографическим методом. Будем предполагать амплитуду опорной волны A_1 много больше амплитуды регистрируемой волны A_2 . Суммарная амплитуда поля на плоскости фотопластинки запишется в виде $E = A_1 \exp[-i\alpha x] + A_2$, где $\alpha = k \sin \theta = (2\pi/\lambda) \sin \theta$. Распределение интенсивности в интерференционной картине на фотопластинке запишется:

$$I(x) \sim AA^* = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha x).$$

Из полученного выражения следует, что на фотопластинке будет зарегистрирована интерференционная картина с синусоидальным распределением интенсивности. Пространственный период d этой картины вдоль оси координат x будет $d = \lambda/\sin \theta$. Напомним, что это будет интерференционная картина, аналогична тем, которые получаются в известном интерференционном опыте Юнга, при использовании зеркал Френеля, в интерферометре Майкельсона, когда зеркала, установленные на концах плеч этого прибора, не строго перпендикулярны друг другу.

Прозрачность полученной голограммы после обычной обработки негатива можно легко найти, применив к данному случаю общее уравнение Габора (см. п. 4):

$$D(x) \sim 2A_1^2 - \gamma A_2^2 - \gamma A_1 A_2 \exp[-i\alpha x] - \gamma A_1 A_2 \exp[i\alpha x]$$

или

$$D(x) \sim 2A_1^2 - \gamma A_2^2 - 2A_1 A_2 \gamma \cos(\alpha x).$$

При просвечивании этой голограммы волной, направление которой совпадает с прежним направлением опорной волны, за голограммой будем иметь волновое поле:

$$\mathcal{E} \sim E_0 \exp[-i\alpha x] \cdot D(x) = E_0 (2A_1^2 - \gamma A_2^2) \exp[-i\alpha x] - \gamma E_0 A_1 A_2 \exp[-i2\alpha x] - \gamma E_0 A_1 A_2.$$

Физический смысл полученного выражения таков: за голограммой будут распространяться три плоские волны. Волна, описываемая первым членом найденного выражения, соответствует по своему направлению распространения просвечивающему световому пучку. Волна, соответствующая третьему члену, восстановит

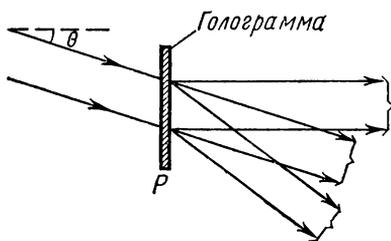


Рис. 26. Схема восстановления плоской волны

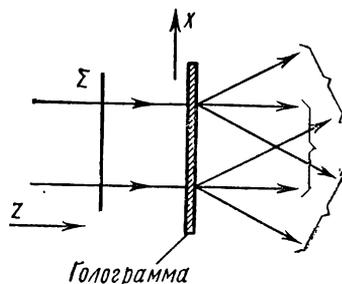


Рис. 27. Схема восстановления плоской волны

регистрировавшуюся волну 2 и будет распространяться нормально к плоскости голограммы. Волна, соответствующая второму члену, будет распространяться под углом 2θ к плоскости голограммы (рис. 25), если θ мало.

Другой случай волнового поля за просвечиваемой голограммой имеет место, если голограмма просвечивается плоской волной, нормаль к фронту которой перпендикулярна плоскости голограммы (рис. 27).

В этом случае за голограммой будут распространяться также три плоские волны, направления распространения которых легко определить непосредственно из вида оператора $D(x)$. Одна волна будет распространяться нормально к плоскости голограммы в том же направлении, в котором распространялась волна, просвечивающая голограмму. Две волны с одинаковыми амплитудами, пропорциональными выражениям $\gamma A_1 A_2$, будут распространяться за голограммой симметрично. При этом их волновые нормали образуют углы $\pm\theta$ с нормалью к плоскости голограммы (см. рис. 27). Если поместить за голограммой собирающую линзу, то в фокальной плоскости этой линзы три указанные выше плоские волны сфокусируются в три световые точки.

Пользуясь терминологией, принятой в теории дифракции, результат описанного опыта можно сформулировать следующим образом. Одномерная амплитудная дифракционная решетка с си-

нусоидальным распределением прозрачности, соответствующим формуле (1), дает три дифракционных максимума: нулевого и ± 1 -го порядков¹. Этот результат можно было найти, пользуясь и обычными методами расчета дифракции в параллельных лучах на плоских решетках. Однако соответствующий расчет будет прост только для расчета направлений на главные дифракционные максимумы, но не для определения их относительных интенсивностей. Для направлений главных максимумов имеем:

$$d \sin \varphi = \frac{\lambda}{\sin \theta} \sin \varphi = n\lambda,$$

где $n=0, \pm 1$, откуда $\varphi=0, \pm \theta$.

Итак, элементарной голограммой (для случая плоских волн) мы вправе считать одномерную дифракционную решетку с «синусоидальной» пропускаемостью. Это обстоятельство облегчает понимание построения более сложных голограмм.

Как известно из теоремы Фурье, всякую одномерную пространственную периодическую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле и имеющую конечное число разрывов, можно представить в виде суммы членов бесконечного тригонометрического ряда, состоящего из членов с кратными пространственными периодами (см., например, [2]). Амплитуды этих тригонометрических функций, или так называемые коэффициенты ряда Фурье, вычисляются вполне определенным известным образом. Набор пространственных периодов L_m (или пространственных частот $1/L_m$) членов этого тригонометрического ряда называется пространственным спектром исходной периодической функции.

Двумерная или трехмерная периодическая функция может быть представлена соответственно суммой членов двумерного или трехмерного ряда Фурье.

Непериодическая функция может быть представлена интегралом от непрерывной последовательности тригонометрических функций с бесконечно близкими периодами.

Изложенные математические соображения о дифракции света или других видов излучения на различных структурах вполне адекватны результатам соответствующих экспериментов. Наблюдаемая на опыте геометрия дифракционной картины действительно может быть истолкована как результат дифракции излучения на совокупности синусоидальных дифракционных решеток. При этом интенсивность соответствующих дифракционных максимумов оказывается пропорциональной квадратам коэффициентов (амплитуд) членов ряда Фурье, в виде суммы которых представлена отражательная способность (или прозрачность) дифракционной структуры.

¹ Отметим, что наличие в формуле (1) независящих от x членов приводит к формированию дифракционного максимума нулевого порядка. Подробнее о дифракции света на амплитудных и фазовых синусоидальных решетках см. [1, 2].

Все сказанное здесь находит себе важное и наглядное применение в оптике и в радиофизике. В спектроскопии рассматривается вопрос о периодических и непериодических процессах, протекающих и исследуемых во времени. В этом случае синусоидальная волна, соответствующая монохроматическому свету или несущей частоте радиостанции, является тем элементарным периодическим процессом, который так или иначе модулируется для передачи информации. Модуляция несущей радиоволны может быть как амплитудная, так и фазовая. Примеры амплитудной и фазовой модуляций несущей синусоидальной волны (рис. 28, а) показаны на рис 28, б, в.

Эти привычные радиофизические временные представления можно с большой наглядностью перенести на геометрию интерференционных картин и записанных с их помощью голограмм.

Голограмма, соответствующая синусоидальной интерференционной картине, является как бы пространственной несущей волной. Чтобы записать на этой несущей волне информацию о геометрии какого-либо объекта, надо ее промодулировать, изменив прозрачность голограммы $D(x)$, в соответствии с особенностями волнового поля этого объекта. Модуляция функции $D(x)$ может быть опять-таки как амплитудная, так и фазовая. Амплитудной модуляции будет соответствовать локальное нарушение синусоидального распределения прозрачности голограммы без искажений ее пространственной периодичности. Фазовая модуляция будет соответствовать изменению пространственной периодичности функции $D(x)$ без изменения амплитуды этой функции. Соответствующий пример различных возможностей модуляции элементарной синусоидальной голограммы показан на рис. 29. Голограмме протяженного объекта наблюдения, который изменяет и амплитуду и фазу проходящей через него или отраженной от него световой волны, будет соответствовать сложная амплитудная и фазовая модуляции элементарной синусоидальной голограммы пространственной несущей волны. Ее модуляция найдет свое математическое выражение в конкретном значении оператора $D(x)$, который «действует» на амплитуду световой волны в процессе восстановления изображения.

Изложенная интерпретация голограммы как дифракционной решетки позволяет легко понять ряд особенностей голографического

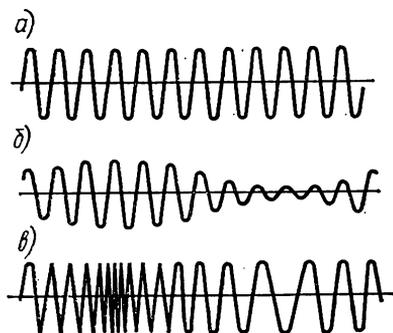


Рис. 28. Амплитудная и фазовая модуляции синусоидальной волны

метода записи и восстановления изображений. Таким образом, хорошо разработанный и плодотворный в радиофизике и спектроскопии аппарат временных представлений Фурье может быть перенесен на пространственные представления голографического метода записи и восстановления изображений.

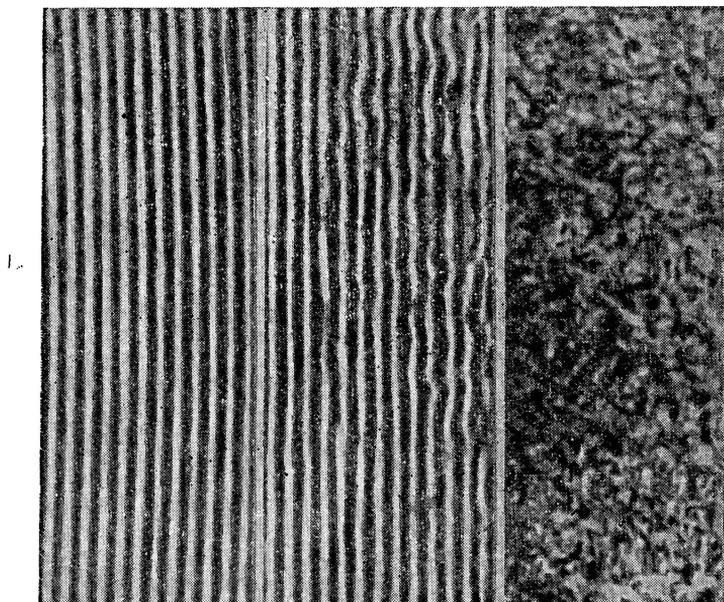


Рис. 29. Искажения синусоидальной решетки, вызванные различной модуляцией предметной волны

8. Голограмма Фурье. В описанных выше методах получения голограмм использовалась плоская опорная волна. Это обстоятельство определяло фундаментальные особенности голограмм Френеля: получение мнимого и действительного восстановленных изображений объекта, расположенных симметрично по обе стороны и на конечном расстоянии от голограммы (см. рис. 12).

Иные результаты получаются при использовании опорной волны, радиус кривизны волнового фронта которой приблизительно совпадает с радиусом кривизны сферических волн, распространяющихся от различных точек объекта наблюдения. Сферическая опорная волна создается, например, в результате фокусирования линзой лазерного светового пучка в точке F (рис. 30). Объект, подлежащий голографированию, может иметь в общем случае произвольную форму, но мы будем считать его плоским и одномерным и сосредоточим свое внимание на формировании голо-

граммы одной его точки B , находящейся на расстоянии ξ от точки F .

На рис. 30 изображена принципиальная схема обсуждаемого опыта, на которой опущены все вспомогательные детали установки. В дальнейшем, зная как формируется голограмма одной точки, легко сделать обобщение на случай голографирования произвольного объекта. В нашем случае нетрудно записать выражение

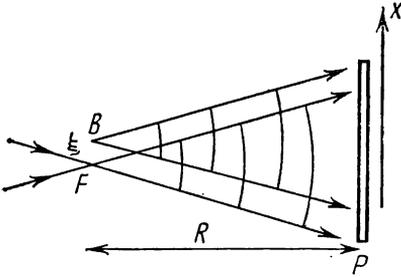


Рис. 30. Схема получения голограммы Фурье

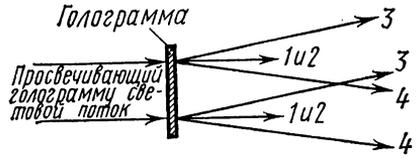


Рис. 31. Схема восстановления изображений при просвечивании голограммы Фурье плоской волной

для результирующей амплитуды и фазы в плоскости фотопластинки P двух волн: опорной волны и волны, исходящей из точки B :

$$A = A_0 \exp \left[-i \frac{k}{2R} x^2 \right] + A(\xi) \exp \left[-i \frac{k}{2R} (x - \xi)^2 \right],$$

где $A_0 \gg A$, $R \gg \xi$ и $(x - \xi)^2 \simeq x^2 - 2x\xi$. Очевидно, что вторая волна, амплитуда и фаза которой зависят от ξ , несет информацию о волновом поле, исходящем из точки B .

Интенсивность света $I \sim AA^*$ на фотопластинке P запишется

$$I(x) \sim A_0^2 + A^2(\xi) + A_0 A(\xi) \exp \left[-i \frac{k}{R} \xi x \right] + A_0 A(\xi) \exp \left[i \frac{k}{R} \xi x \right].$$

Соответственно амплитудная пропускаемость обработанной голограммы при просвечивании ее для получения восстановленного изображения определится выражением $D(x) \sim [I(x)]^{-\gamma/2}$,

$$D(x) \sim 2A_0^2 - \gamma A^2(\xi) - 2\gamma A_0 A(\xi) \cos \left(\frac{k}{R} \xi x \right)$$

или

$$D(x) \sim 2A_0^2 - \gamma A^2(\xi) - \gamma A_0 A(\xi) \exp \left[i \frac{k}{R} \xi x \right] - \gamma A_0 A(\xi) \exp \left[-i \frac{k}{R} \xi x \right].$$

Характерной особенностью записанных выражений для $I(x)$ и для $D(x)$ является наличие в экспоненциальных членах этих формул функций, линейно зависящих от x . Соответственно при последующем просвечивании такой голограммы плоской волной в волновом поле за голограммой будут распространяться четыре плоские волны 1, 2, 3, 4 (рис. 31).

Обсуждая физический смысл образующихся при просвечивании голограммы волн так же, как мы это делали, анализируя уравне-

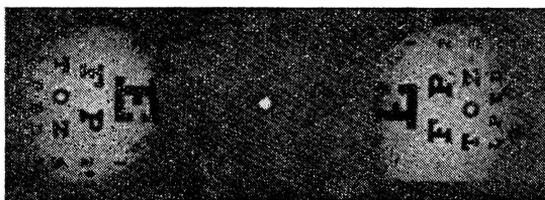


Рис. 32. Фотография изображений, восстановленных с голограммы Фурье

ние Габора, легко видеть, что волны 3, 4, несущие и амплитудную и фазовую информацию о точке B и соответственно о других точках объекта, будут плоскими волнами, отклоненными симметрично вверх и вниз от просвечивающего голограмму светового пучка. Это значит, что изображение точки B , а следовательно, и всего объекта, которому принадлежит точка B , будет локализовано в бесконечности, или в фокальной плоскости объектива, если поставить таковой за голограммой. Это существенное отличие голограммы Фурье от голограммы Френеля.

Волны 1 и 2 не участвуют в восстановлении изображения точки B .

Поскольку в этом случае, как обычно в оптике, понятие «бесконечного» расстояния имеет условный смысл, то, просвечивая голограмму лучом лазера, можно без всяких вспомогательных оптических приспособлений получить на экране два четких изображения изучавшегося объекта, располагая экран на расстоянии порядка 3—5 метров от голограммы (рис. 32).

9. Запись голограммы в толстослойных эмульсиях. В 1962 г. советским физиком Ю. Н. Денисюком был предложен метод получения голографических изображений, являющийся развитием практически уже не применявшегося тогда способа цветной фотографии Липпмана, описанного в § 24 [1]. Напомним, что в методе Липпмана стоячие световые волны, формирующиеся в толстослойной эмульсии, создавали в ней после обычной химической обработки экспонированного негатива пространственно-периодическую систему неодинаково отражающих свет слоев обработанной фотоэмульсии (рис. 51 в [1]).

В результате при последующем освещении обработанного негатива различно отражающие свет слои фотоэмульсии выполняли функции, аналогичные сетчатым плоскостям кристалла в рентгенографическом опыте Брэгга. Максимальную интенсивность приобретали отраженные световые волны, удовлетворяющие условию Вульфа—Брэгга: $2d\sin\varphi = n\lambda$, где d — пространственный период слоев почернения фотоэмульсии, а φ — угол скольжения световых лучей вдоль слоев почернения (рис. 50 в [1]). Используя это об-

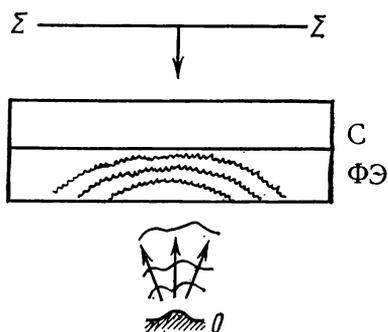


Рис. 33. Схема получения голограммы во встречных пучках

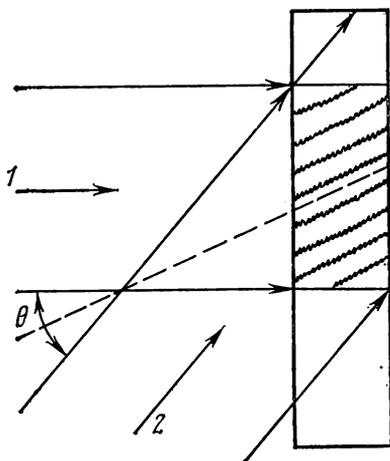


Рис. 34. Схема распределения почернения в фотоэмульсии

стоятельство, можно, как сказано в [1], наблюдать в отраженном свете цветные изображения предметов, сфотографированных при помощи специальных фотографических пластинок с толстыми слоями фотоэмульсии, в которых укладывается много слоев почернения. Для формирования стоячих волн фотоэмульсионные пластины помещались в особые кассеты с «ртутным зеркалом», прилегающим к фотоэмульсии. Это зеркало обеспечивало образование отраженной световой волны, необходимое для формирования стоячих световых волн — фундаментального условия для реализации метода Липпмана.

В методе Денисюка удачно сочетается метод фотографии Липпмана с принципом голографии.

На рис. 33 изображена принципиальная схема подобного опыта. Объект наблюдения O освещается через фотоэмульсионную пластинку светом лазера, и отраженное от него волновое поле распространяется назад по направлению к слою фотоэмульсии $\Phi\mathcal{E}$, толщина которого на рисунке сильно преувеличена. Фактически толщина фотографического слоя составляет около 15—20 микрон, и он настолько

прозрачен, что через него можно освещать объект, что, разумеется, невозможно осуществить через неотфиксированную фотоэмульсию обычной фотографической пластинки. Тем не менее описанный далее в подробностях голографический метод Денисюка иногда называется методом использования «толстослойных эмульсий». Соображения, приведшие к возникновению этой терминологии, станут ясны из нижеследующего. На том же рис. 33 буквой С обозначено стекло фотопластинки.

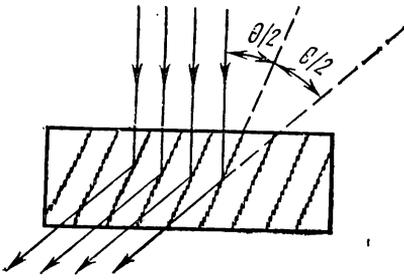


Рис. 35. Отражение света от слоев почернения

Распространяющийся навстречу отраженным от объекта наблюдения световым волнам исходный световой пучок от лазера выполняет теперь функции опорной волны. Поэтому описываемый ниже вариант получения голограмм называется также методом голографии с использованием встречных световых пучков.

Распространяющийся навстречу отраженным от объекта наблюдения световым волнам исходный световой пучок от лазера выполняет теперь функции опорной волны. Поэтому описываемый ниже вариант получения голограмм называется также методом голографии с использованием встречных световых пучков.

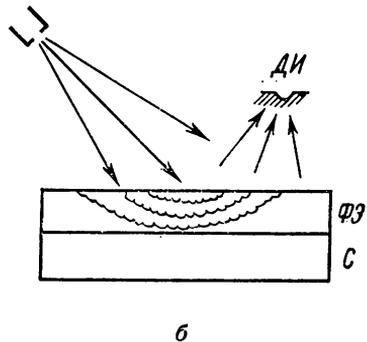
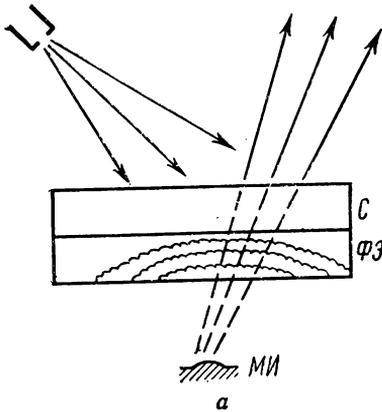


Рис. 36. Схема наблюдения мнимого изображения (а); схема наблюдения действительного изображения (б)

В результате в толще фотоэмульсии создается интерференционное поле стоячих волн, вызывающих слоистое почернение фотоэмульсии. При этом слоистое почернение эмульсии проявленной фотопластинки учитывает распределение и амплитуд, и фаз интересующего нас волнового поля, рассеянного объектом наблюдения.

В каждом малом участке фотоэмульсии слои почернения располагаются параллельно биссектрисе угла между волновыми

фронтами опорной волны и фронтами волн, отраженных от объекта наблюдения и достигших данного участка фотоэмульсии. На рис. 34 показан в большом масштабе фрагмент почернений слоев фотоэмульсии, вызванных в ней стоячими волнами. На этом рисунке показано распределение почернений в результате интерференции двух плоских волн 1 и 2. Слои почернения располагаются параллельно биссектрисе угла θ между нормальными этих волн, а расстояние между ними $d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta/2} > \frac{\lambda}{2}$. Конфигурация этих слоев во всей фотоэмульсии является, разумеется, весьма причудливой, так как плоской является лишь опорная волна, а волновые фронты, распространяющиеся от освещенного объекта наблюдения, ориентированы весьма разнообразно.

Весьма существенно учесть, что толстослойная фотоэмульсия с неоднородным распределением в ней почернений образует трехмерную структуру в отличие от двумерных структур, каковыми можно считать с высокой степенью приближения голограммы рассмотренных ранее видов. Напомним, что толстослойная эмульсия имеет толщину около 10—15 микрон.

Наконец, надо отметить и существенное отличие интерференционного поля, зарегистрированного в голограммах рассматриваемого вида, от интерференционного поля, зарегистрированного по методу Липпмана. Именно в случае Липпмана имела место интерференция волн, распространяющихся от объекта наблюдения, и тех же волн, распространяющихся обратно, после отражения от ртутного зеркала, расположенного за фотопластинкой. Таким образом, в случае Липпмана обе интерферирующие волны испытали амплитудную и фазовую модуляцию, созданную объектом наблюдения. Таким образом, опорной волны в методе Липпмана, не обходимой в голографии, не существовало.

В голографическом методе Денисюка имеет место интерференция волн, отраженных от объекта наблюдения, и встречной опорной волны с наперед заданным в ней определенным распределением фаз, не возмущенных объектом наблюдения.

Если осветить расходящимся пучком белого света обработанный негатив голограммы, зарегистрированной в толстослойной эмульсии, то в отраженном от нее свете можно наблюдать под определенным углом зрения изображение объекта исследования. На рис. 35 показаны в большом масштабе фрагмент толстослойной эмульсии с расположенными в ней слоями почернения и отражение от этих слоев пучков освещающего голограмму света. Максимальную интенсивность при этом будут иметь те световые лучи, для которых условия отражения удовлетворяют требованиям формулы Вульфа—Брэгга. В этом обстоятельстве проявляется то, что в данном случае, на стадии восстановления изображения с помощью голограммы, мы имеем дело с трехмерной дифракционной структурой. На рис. 35 показано отражение лучей, удовлетворяющих условию Вульфа—Брэгга.

На рис. 36, а, б показано, каким образом, варьируя ориентацию голограммы по отношению к освещающему ее свету, можно получить мнимое или действительное изображение объекта наблюдения. Естественно, в восстановленном изображении мы увидим не весь непрозрачный объект, а только ту его поверхность, которая была обращена к фотопластинке во время съемки голограммы (на рис. 36, а и б эта поверхность обозначена сплошной линией). Схематически показанные с этой целью слои почернения в фотоэмульсии лишь в крайне грубом виде передают истинное распределение и масштабы слоев почернения в фотоэмульсии.

Требование выполнения условия Вульфа—Брэгга $2ds\sin\theta/2 = n\lambda$ для взаимного усиления световых пучков, отраженных от слоев почернения объемной дифракционной решетки, позволяет понять, почему при использовании толстослойных голограмм можно на стадии восстановления изображения пользоваться источником белого света со сплошным спектром. Ясно, что условие Вульфа—Брэгга, при наличии определенного пространственного периода объемной дифракционной решетки и при использовании определенного угла наблюдения дифрагировавшего на ней света, может быть удовлетворено только для излучения определенной длины волны. Таким образом, пространственно-периодические слои объемной дифракционной решетки сами осуществляют монохроматизацию излучения, необходимую для наблюдения голографического изображения. Это важное обстоятельство и определяет возможность наблюдения изображений, получаемых с помощью толстослойных голограмм в белом свете. Даже при использовании для освещения голограммы белого света изображение восстанавливается в монохроматическом свете, близком к цвету излучения того лазера, с помощью которого была записана голограмма.

Однако, разумеется, объемная дифракционная решетка с малым числом слоев почернений обладает малой спектральной разрешающей способностью и в данном случае наверняка недостаточной для монохроматизации освещающего голограмму белого света в той же степени, в какой монохроматично излучение лазера, использованного на стадии регистрации голограммы. Поэтому изображения, создаваемые толстослойными голограммами, являются не вполне монохроматическими.

Необходимо отметить еще одно обстоятельство, связанное с окраской наблюдаемых изображений. Опыт показывает, что хотя изображения, получаемые с помощью толстослойных голограмм, освещаемых белым светом, являются квазимонохроматическими, но их цвет может существенно отличаться от цвета излучения лазера, использованного при записи голограммы. Последнее обстоятельство связано с воздействием на фотоэмульсию процессов проявления, и главным образом фиксирования и последующей сушки. Опыт показывает, что обработка фотопластинки дает эффект усадки фотоэмульсии. Это значит, что общая толщина высушенной фотоэмульсии, а следовательно, и расстояние между слоями по-

чернения в ней становятся при сушке меньше, чем в момент регистрации голограммы. Таким образом, уменьшается пространственный период объемной дифракционной решетки, на которой происходит дифракция света на стадии восстановления изображения.

В результате этого обстоятельства условие Вульфа—Брэгга выполняется для излучения с меньшей длиной волны, чем то излучение, с помощью которого была записана голограмма. Этим объясняется, что изображения, получаемые с помощью толстослойных голограмм, оказываются окрашенными в несколько иной цвет, чем цвет того излучения, в котором они были записаны. Легко понять, что смещение окраски происходит при этом в синюю сторону оптического спектра.

В заключение обсуждения вопроса о свойствах голограмм, записанных в толстослойных эмульсиях по методу «встречных световых пучков», надо отметить еще одну их особенность, связанную со свойственным голографии эффектом псевдоскопии, о котором уже было кратко упомянуто в п. 4. Оказывается, что при получении голограмм по обсуждаемому здесь методу эффект псевдоскопии находит себе наиболее яркое проявление.

Опыт показывает, что если мы получили голограмму, поставив эксперимент по схеме, изображенной на рис. 33, и восстанавливаем изображение объекта, освещая голограмму в соответствии со схемой эксперимента, изображенной на рис. 36, а, то полученное мнимое изображение выпуклого предмета мы увидим также выпуклым, и, наоборот, в действительном изображении предмета (рис. 36, б) выпуклая поверхность будет вогнутой. Эффект псевдоскопии действительного изображения связан с тем обстоятельством, что в восстановленном изображении части предмета, располагавшиеся ближе к фотопластинке во время получения голограммы, изображаются также ближе к голограмме. Поэтому в действительном изображении выпуклые части предмета (например, барельефа) будут вогнутыми, а вогнутые — выпуклыми. Напоминаем еще раз, что в изображении предмета мы будем видеть не весь непрозрачный предмет, а только его часть, которая во время получения голограммы была обращена к фотопластинке.

10. Голографический метод получения цветных изображений. Описанный выше способ записи голограмм в толстослойных эмульсиях дает возможность получения цветных изображений объектов с наблюдением всех преимуществ голографии по сравнению с обычной фотографией.

Для того чтобы пояснить принцип цветной голографии, надо напомнить, в каких случаях человеческий глаз воспринимает цветные, а не бело-черные изображения предметов.

Опыты по физиологии зрения показывают, что для человеческого глаза изображение представляется цветным и более или менее близким к натуральной окраске объекта в том случае, если оно воспроизводится минимум, в трех цветах: в красном, зеленом

и синем. Именно совмещение отпечатков деталей одного объекта в этих трех красках осуществляется при самой примитивной цветной репродукции каких-либо изображений методами литографической печати. При высокохудожественной репродукции картин используется 10—15-красочная печать.

Этими соображениями можно воспользоваться и в голографии. Чтобы восстановить цветное изображение объекта по методу Денисюка, надо зарегистрировать голограмму, используя освещение объекта наблюдения одновременно или последовательно излучением, например трех лазерных спектральных линий, отстоящих по длинам волн достаточно далеко друг от друга. Тогда в толще фотоэмульсии пластинки образуются три системы стоячих волн и соответственно три системы пространственных решеток с различными распределениями почернений. Каждая из этих систем слоев почернения будет формировать изображение объекта в свете соответствующего спектрального участка белого света, используемого в процессе восстановления изображения. Тогда при наблюдении обработанной голограммы в отраженном от нее расходящемся пучке белого света мы получим изображение объекта как результат суперпозиции окрасок трех участков спектра белого света, а это будет уже достаточным для восстановления цветного изображения первоначального объекта наблюдения применительно к минимальным физиологическим требованиям хроматического зрения человеческого глаза. Возможность суперпозиции восстановленных изображений одного и того же объекта наблюдения в трех цветах вытекает из того, что излучение каждой длины волны сформирует в фотоэмульсии свою пространственную решетку с периодом d , определяемым длиной волны этого излучения: $d = \lambda / (2 \sin \theta / 2)$. В таком случае для дифракционных максимумов первого порядка условия Вульфа—Брэгга для излучения каждой использованной волны дают $2d \sin \varphi = \lambda$ или $2 \frac{\lambda}{2 \sin \theta / 2} \sin \varphi = \lambda$. Отсюда $\varphi = \theta / 2$ независимо от значения λ , что и обеспечивает суперпозицию изображений в трех цветах спектра на этапе восстановления изображения.

11. Метод голографии в применении к оптической интерферометрии. Как подробно излагается во всех курсах оптики, явления интерференции света находят себе обширные и разнообразные применения и в физике и в технике. Так, интерферометры (Фабри—Перо, Люммера—Герке, Цендера—Маха, Майкельсона) применяются для самых тщательных исследований спектрального состава света. Интерферометр Майкельсона используется также для классических абсолютных измерений длин световых волн. Тот же интерферометр Майкельсона, так же как интерферометры Рэля и Жамена, применяется для точнейших измерений коэффициента преломления прозрачных веществ.

Наконец, явления интерференции света широко используются для тщательного контроля геометрической формы поверхности

различных тел, качества обработки их поверхности и малых изменений этой формы или поверхности под действием тех или иных внешних воздействий: механических напряжений, нагрева, пьезоэлектрического эффекта, электро- и магнитострикции. Обсуждение последних и названных применений интерференции будет в центре нашего внимания в настоящем пункте.

Несмотря на высокую точность интерферометрического метода (рельеф поверхности может контролироваться с точностью до $1/200$ длины световой волны) в применении к последним задачам, на классические интерференционные измерения наложен ряд существенных ограничений. Во-первых, контролируемая интерференционным методом отражающая (или просвечиваемая) поверхность должна быть тщательно обработана. Это значит, что неоднородности ее поверхности не должны быть велики по сравнению с длиной световой волны. Так, например, если пожелать контролировать форму матированной поверхности линзы, применив для этого метод интерференционных колец Ньютона, то никаких колец увидеть не удастся. Во-вторых, для контроля формы поверхности одного тела необходимо, как правило, располагать вторым эталонным телом с наперед заданной формой и качеством поверхности этого тела.

Обращаясь вновь к примеру использования для интерференционных измерений колец Ньютона, удобнее всего иметь в качестве эталона сравнения плоскую поверхность полированной пластинки, на которую накладываемая контролируемая линза. Если матировать поверхность эталона, то интерференционный контроль формы и поверхности образца станет невозможным.

Наконец, геометрическая форма эталона сравнения, используемого в интерференционном опыте, должна находиться в каком-либо простом соответствии с геометрической формой исследуемого объекта. Например, контролировать интерференционным методом деформации шара при его неоднородном сжатии, используя в качестве эталона сравнения грани малого тетраэдра, практически невозможно.

Оказывается, что голографические методы в применении к интерферометрическому исследованию тел произвольной формы практически свободны от перечисленных выше ограничений. Терасширения возможности интерферометрии, о которых сейчас будет идти речь, связаны с самой сущностью голографии как метода регистрации информации, переносимой волновым полем.

Сущность голографического интерференционного опыта по исследованию, например, деформаций тела, вполне произвольной формы и с вполне произвольным качеством обработки поверхности легко понять на следующем простом примере.

Вернемся к рис. 8 и 9, на которых изображены схемы классических опытов по голографированию объектов H произвольной формы.

Пусть мы желаем, привлекая голографию, исследовать интерференционным методом небольшие деформации произвольного объекта H , возникающие под действием каких-либо причин.

Экспонируем голографическую пластинку P , освещая объект H , до того, как он испытал деформации под действием тех или иных причин. Не смещая пластинку P и не проявляя ее, прерывают освещение объекта H на произвольный промежуток времени. Во время перерыва в освещении объекта H и в экспозиции пластинки P деформируют объект H , не изменяя, однако, его положения в голографической установке. Вновь освещают деформированный объект H и вновь экспонируют ту же самую голографическую пластинку, которая использовалась при первой экспозиции. Закончив вторую экспозицию, фотопластинку проявляют и фиксируют обычным методом.

В результате на пластинке окажутся зарегистрированными две голограммы, полученные с одной и той же опорной волной. Первой голограммой будет голограмма недеформированного объекта H , второй голограммой — голограмма деформированного объекта H .

Как неоднократно подчеркивалось выше, запись двух или нескольких голограмм на одной фотопластинке вполне допустима в отличие от нецелесообразности фиксации нескольких перекрывающихся обычных оптических изображений на одной фотопластинке.

Рассмотрим теперь процесс восстановления изображений недеформированного и деформированного объекта H с помощью записанной «двойной» голограммы. Восстановление изображений осуществляется согласно обычной схеме опыта, изображенной на рис. 12. Как было подробно объяснено выше, полную амплитудную и фазовую информацию несут лишь световые пучки 3 и 4, поэтому мы не будем рассматривать световых пучков 1 и 2.

Поскольку в данном случае просвечивается «двойная голограмма», за ней возникнут два волновых поля 3 и 3' и два волновых поля 4 и 4'.

Одно из каждой «пары волновых полей» будет соответствовать недеформированному объекту H , а другое — деформированному.

При этом существенно подчеркнуть, что мы в обоих случаях будем иметь «пары» когерентных волновых полей, поскольку все волновые поля за голограммой возникают в результате ее просвечивания по схеме, изображенной на рис. 12 одним пространственно-когерентным световым пучком. Следовательно, волновые поля 3 и 3' и соответственно 4 и 4' могут интерферировать между собой и давать стационарную интерференционную картину.

Но волновое поле 3 отличается от волнового поля 3' (так же, как поле 4 от 4') тем, что между голографической записью этих двух полей объект H был деформирован.

Таким образом, с помощью двукратного голографирования и просвечивания «двойной» голограммы восстанавливаются волновые поля, распространявшиеся от объекта наблюдения до его деформации и после деформации. Следовательно, суперпозиция полей 3 и $3'$ (а также 4 и $4'$) должна дать на изображении объекта $ДИ$ (а также $МИ$) интерференционную картину, соответствующую деформации объекта наблюдения.

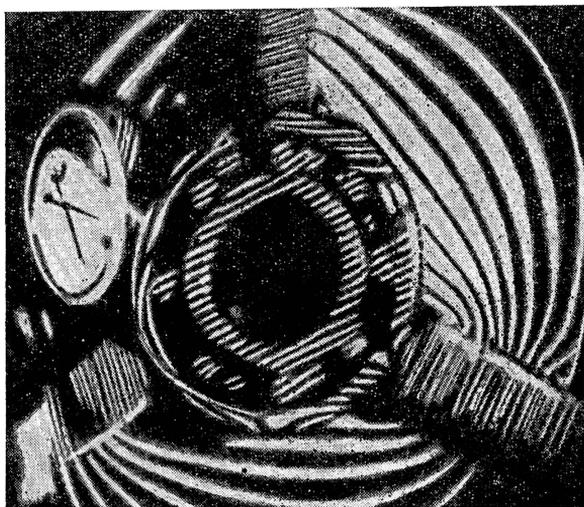


Рис. 37. Фотография изображения, восстановленного с голографической интерферограммы

Существенно, что в этом случае эталоном сравнения с деформированным объектом наблюдения служит не специально приготовленная с оптической точностью обработанная поверхность, но сам объект наблюдения.

Таким образом, голографический метод интерференции, называемый также методом с разделенными временами фотографических экспозиций, неизмеримо расширяет возможности интерференционных оптических наблюдений и измерений.

Метод дает возможность с интерференционной точностью исследовать деформации объектов произвольной формы и с произвольным качеством поверхности, поскольку каждый объект сам становится не только предметом исследования, но и «собственным эталоном сравнения».

Голографическим интерференционным методом можно исследовать деформации никак специально не подготовленных деталей.

Существенно подчеркнуть, что хотя мы здесь ограничились обсуждением статических деформаций, но описанный метод с успехом применяется и для изучения динамических деформаций, на чем мы здесь останавливаться не можем.

На рис. 37 приведена фотография изображения шарикового подшипника, сжатого в кулачках патрона токарного станка, полученная в результате просвечивания «двойной» голограммы. Интерференционные полосы на поверхности подшипника (свидетельствующие о возникших в этом объекте деформациях и об их распределении по объекту) обусловлены тем, что первый раз подшипник голографировался до создания в нем деформаций, а второй раз — после его деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландсберг Г. С. Оптика. М., «Наука», 1976.
2. Дитчберн Р. Физическая оптика. М., «Наука», 1965.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., «Наука», 1970.
4. Зоммерфельд А. Оптика. М., «Мир», 1953.
5. Гуддмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М., «Мир», 1970.
6. Франсон М., Сланский С. Когерентность в оптике. М., «Мир», 1967.
7. Физический практикум. Электричество и оптика. Под ред. В. И. Ивероновой. М., «Наука», 1968.
8. Лейт Э., Упатинекс Ю. Фотография с помощью лазера. — УФН, 87, 1965, вып. 3, с. 521—538.
9. Габор Д. Новое в развитии голографии. — УФН, 1973, 109, вып. 1, с. 5—30.
10. Островский Ю. И. Голография. Л., «Наука», 1970.
11. Островский Ю. И. Голография и ее применения. Л., «Наука», 1973.
12. Франсон М. Голография. М., «Мир», 1972.
13. Кок У. Лазеры и голография. М., «Мир», 1971.
14. Строук Дж. Введение в когерентную оптику и голографию. М., «Мир», 1967¹.
15. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М., «Наука», 1971.
16. Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография. М., «Мир», 1973.
17. Вьено Ж., Смигильский П., Руайе. А. Оптическая голография. М., «Мир», 1973.
18. Применения голографии. Сб. статей. Под ред. Д. Гудмена. М., «Мир», 1973.
19. Современное состояние и перспективы развития голографии. Сб. статей. Под ред. Бахрах. Л., М., «Наука», 1975.
20. Голографические методы и аппаратура. Сб. статей. Под ред. В. М. Гинзбурга и Б. М. Степанова. М., «Сов. радио», 1974.

О П И С А Н И Я З А Д А Ч П О Г О Л О Г Р А Ф И И

Интерференционная картина, получающаяся при суперпозиции предметного и опорного световых пучков, — голограмма — пред-

¹ В книге Дж. Строука помещен перевод основных работ Д. Габора.

ставляет собой весьма сложную систему тесно расположенных интерференционных полос и пятен (см. п. 3). Поэтому для фотографической регистрации неимпульсных голограмм необходимы весьма устойчивые оптико-механические системы, защищенные от вибраций во время экспозиции фотопластинок, регистрирующих голограммы. Незначительное, порядка долей длины световой волны, взаимное смещение элементов оптической системы, источника света или объекта наблюдения во время экспозиции приводит к размытию интерференционной картины на голограмме и к утрате записываемой на ней информации об объекте наблюдения. Поэтому голографическая установка, предназначенная для регистрации голограмм с помощью лазеров непрерывного действия, должна представлять собой единую жесткую систему, включающую в себя лазер, все детали оптической схемы, объект наблюдения и фотопластинку. Кроме того, эта система, как сказано выше, должна быть очень надежно изолирована от внешних механических помех, могущих вызвать в ней внутренние вибрации, изменяющие ход световых пучков.

Этим требованиям удовлетворяют современные голографические установки, представляющие собой примерно двухтонные интерферометрические столы, снабженные воздушной пневматической амортизацией. Такие столы имеют период собственных свободных колебаний порядка секунды и высокую добротность подвески. В голографическом практикуме физического факультета МГУ применяются интерферометрические столы марок УИГ и СИН.

Интерферометрический стол представляет собой обычно стальную плиту размером 1,5—2 м, на которой простроганы профили 7—8 параллельных оптических скамей прямоугольного сечения. На рейтерах, установленных на этих скамьях и надежно на них закрепленных, помещены все оптические детали голографической схемы, а также объект наблюдения и кассета с фотопластинкой.

Мы не описываем здесь крупногабаритные голографические установки, потому что ознакомиться с их устройством можно, пользуясь их заводскими техническими описаниями. Поэтому ниже приведены тексты описаний отдельных экспериментальных задач, содержащие следующие материалы: 1) постановку физического вопроса, разрешаемого в данной задаче; 2) рисунки рабочих оптических голографических схем, используемых в каждом упражнении; 3) указания к подготовке опыта, его выполнению и к экспонированию фотопластинки; 4) указания к просмотру и обработке полученных голограмм и к расчету окончательного количественного результата.

В описаниях отдельных задач указаны номера пунктов общего введения к тексту работ по голографии, которые должны быть изучены, прежде чем приступить к чтению каждого конкретного описания.

1. ГОЛОГРАФИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕПРОЗРАЧНЫХ ОБЪЕКТОВ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Целью настоящей работы является получение голограммы Френеля непрозрачного отражающего объекта и исследование действительного и мнимого изображений.

Для выполнения настоящей задачи необходимо усвоение материала, изложенного в пп. 1—6 (физические принципы голографии).

§ 1. Оптическая установка, используемая в работе

Работа выполняется на установке УИГ-2М, представляющей собой современный интерферометрический стол на пневматической антивибрационной подвеске. С устройством стола можно ознакомиться в лаборатории, пользуясь находящимся при нем описанием.

На интерферометрическом столе собирается оптическая схема, представленная на рис. 1. В предлагаемой схеме освещение объекта съемки производится двумя световыми пучками, идущими от зеркал Z_3 и Z_4 . Опорная световая волна падает на фотопластинку $\Phi П$, отразившись от зеркала Z_2 . Микрообъективы $МО$ служат для расширения лазерного пучка. В фокальных плоскостях микрообъективов располагаются круглые диафрагмы $Д$, диаметром 0,03—0,05 мм, являющиеся пространственными фильтрами и создающие равномерную освещенность по сечению светового пучка. При съемке фотопластинка обращена к предмету эмульсионным слоем. При юстировке установки необходимо убедиться с помощью линейки в равенстве путей (с точностью до нескольких сантиметров) трех световых пучков, распространяющихся от разделительного кубика $РК$ до фотопластинки.

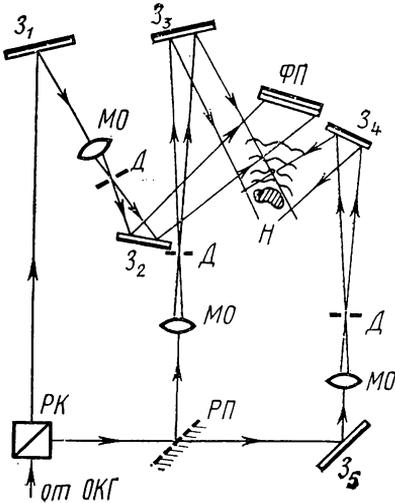


Рис. 1. Оптическая схема получения голограммы

При юстировке установки необходимо убедиться с помощью линейки в равенстве путей (с точностью до нескольких сантиметров) трех световых пучков, распространяющихся от разделительного кубика $РК$ до фотопластинки.

§ 2. Упражнения

1. Голографирование трехмерных непрозрачных объектов. Оптическую схему (см. рис. 1) собирают и юстируют на интерферо-

метрическом столе студенты и практиканты под руководством преподавателя. Включение лазера и регулировка режима его работы производят преподаватель или лаборант практикума. Экспозицию фотопластинки и ее последующую обработку производят согласно инструкции, имеющейся в лаборатории.

2. Восстановление трехмерно-го мнимого изображения объекта наблюдения. Для получения изображений объекта наблюдения используется голоскоп с ртутной кварцевой лампой или лазерный голоскоп (рис. 2). Включение источников света голоскопов производит преподаватель или лаборант практикума.

Для наблюдения изображения объекта голограмма вставляется в специальную рамку — кассету голоскопа, последняя помещается во вращающуюся кассетную часть голоскопа P .

Для наблюдения мнимого изображения свет должен падать на голограмму со стороны эмульсии. Изображение локализуется за

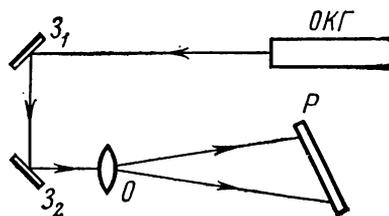


Рис. 2. Схема лазерного голоскопа

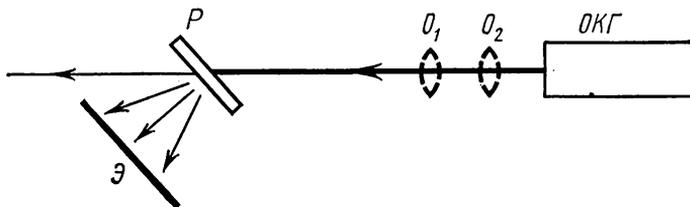


Рис. 3. Схема установки для восстановления действительного изображения

голограммой ближе к источнику света голоскопа, чем голограмма. Соответственно глаза наблюдателя должны быть аккомодированы не на плоскость голограммы, но на плоскость, лежащую за ней примерно на таком же расстоянии, на каком объект наблюдения находился от фотопластинки при съемке голограммы. Вращением кассетной части подбирают условия оптимальной яркости изображения объекта.

Необходимость поисков оптимальной ориентации голограммы связана с тем, что она не является строго двумерной структурой. Благодаря конечной толщине слоя фотоэмульсии при просвечивании голограммы неизбежно проявляются условия дифракции на трехмерной структуре.

3. Получение действительных изображений объекта наблюдения. Получение с помощью голограмм действительных изображе-

ний объектов наблюдения осуществляется в соответствии с изображениями, изложенными в пп. 5, 6.

Устройство используемой для этого лабораторной установки показано на рис. 3. Все детали установки размещены на оптической скамье. Объективы O_1 и O_2 — съемные. Устанавливают голограмму в держатель P на столике рейтера. Голограмма должна быть обращена стеклом к освещающему световому пучку.

а) Освещая голограмму узким световым пучком от $ОКГ$ и варьируя ориентацию голограммы, получают на передвижном экране \mathcal{E} действительное изображение объекта наблюдения. Переменяя столик с голограммой относительно просвечивающего ее светового пучка в плоскости голограммы — это делается вращением микрометрического винта столика, — наблюдают эффект видимого параллактического смещения и вращения деталей изображения.

б) С помощью объектива O_1 получить действительное изображение, освещая голограмму расходящимся световым пучком.

в) Используя объективы O_1 и O_2 , получить действительное изображение, освещая голограмму расширенным, параллельным световым пучком.

Сравнить полученные таким образом изображения и объяснить различия в наблюдаемых картинах.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ГОЛОГРАММ ПО МЕТОДУ ВСТРЕЧНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОССТАНОВЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В настоящей задаче для получения голограмм непрозрачных предметов используется метод встречных пучков, позволяющий восстанавливать изображения предмета в белом свете.

Для подготовки к выполнению настоящей работы необходимо изучение пп. 1—4, 9, 10 (Физические принципы голографии).

§ 1. Оптические установки, используемые в работе

Работа может выполняться в одном из двух описанных ниже вариантов (по указанию преподавателя). Первая схема собрана на установке СИН. Эта установка представляет собой современный интерферометрический стол на пневматической антивибрационной подвеске. С устройством стола можно ознакомиться в лаборатории, пользуясь находящимся при нем описанием. Оптическая схема эксперимента приведена на рис. 1.

После отражения от зеркал \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_2 пучок света от гелий-неонового лазера ($ОКГ$) проходит через оптическую систему, состоящую из микрообъектива $МО$ и объектива O . Задний фокус $МО$

совмещен с передним фокусом O . Эта система служит для расширения лазерного пучка. Диафрагма D_1 ($\varnothing \sim 0,03—0,05$ мм), расположенная в фокусе MO , является пространственным фильтром и создает равномерную освещенность по сечению светового пучка. После отражения от зеркала Z_3 световой пучок проходит сквозь фотопластинку $\Phi\Pi$ (в голографических фотопластинках эмульсии

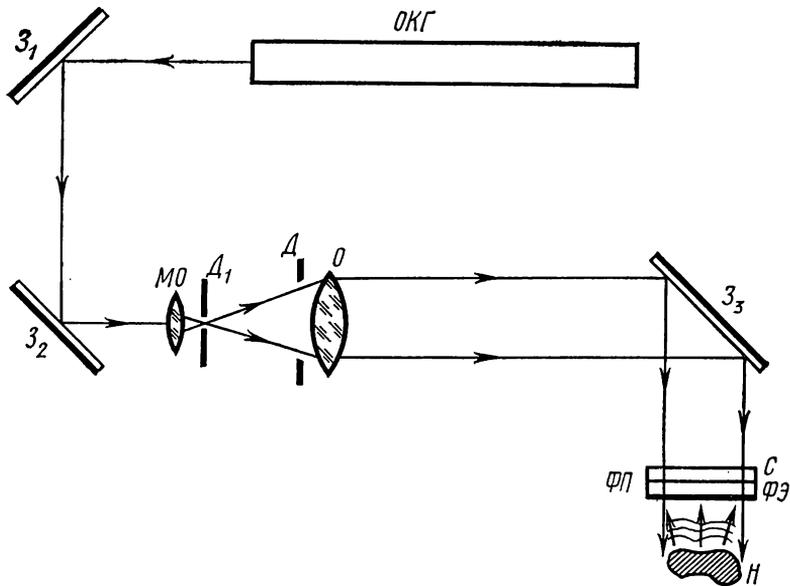


Рис. 1. Схема получения голограммы по методу Липпмана—Денисюка

вполне прозрачны) и освещает предмет H . Отраженная от предмета световая волна интерферирует в толще фотоэмульсии с падающей световой волной, и в фотопластинке регистрируется голограмма. При получении голограммы эмульсионный слой обращен к предмету. В этой схеме можно получать голограммы предметов, расположенных достаточно близко к фотопластинке, так как здесь между интерферирующими световыми пучками неизбежно возникает разность хода, равная удвоенному расстоянию от предмета до фотопластинки. Эта разность хода должна быть меньше длины когерентности используемого лазера.

Вторая установка для получения голограмм во встречных пучках собрана на интерферометрическом столе УИГ-2М (см. задачу № 1). В этой схеме (рис. 2), устранено ограничение на расстояние предмета от фотопластинки, присущее первой схеме.

Голографируемый объект освещается двумя световыми пучками, идущими от двух зеркал Z , отраженная от объекта волна попадает на фотопластинку $\Phi П$, эмульсионный слой которой обращен к объекту. Опорная световая волна после отражения от зер-

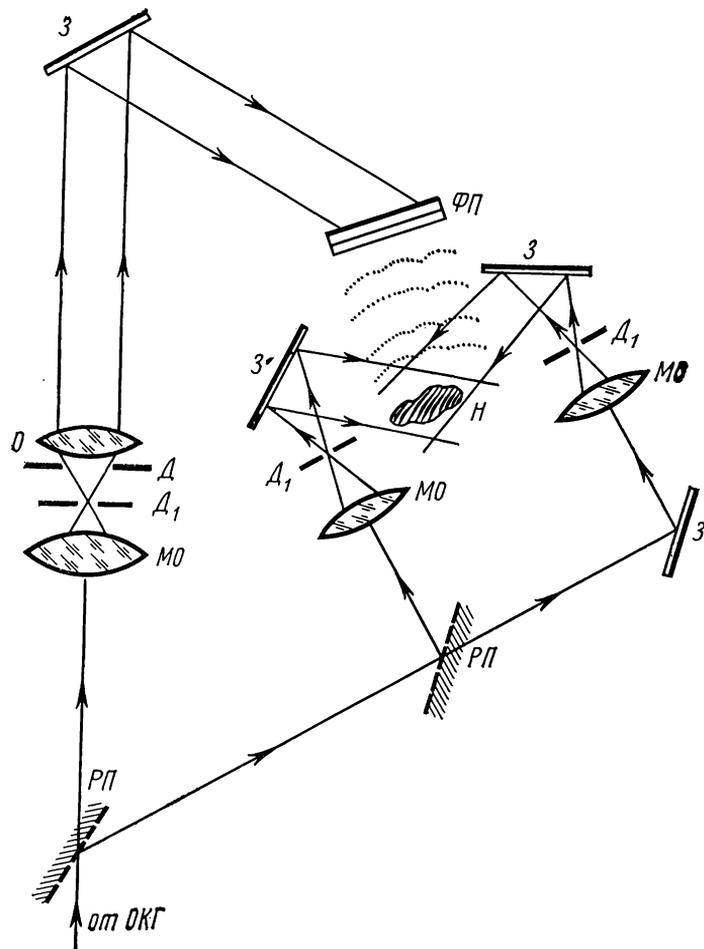


Рис. 2. Схема получения голограммы во встречных пучках

кала Z_2 , также падает на фотопластинку, но с другой стороны, чем объектная волна. Микрообъективы $МО$ служат для расширения лазерного пучка. Назначение диафрагм D_1 такое же, как и в первой схеме. При юстировке установки необходимо обратить внимание на равенство путей (с точностью до нескольких сантиметров) трех световых пучков (двух освещающих предмет и опорного), от лазера до фотопластинки.

§ 2. Упражнения

1. Голографирование трехмерных непрозрачных объектов по методу встречных световых пучков. Оптическая схема (см. рис. 1 или 2) собирается и юстируется студентами и практикантами под руководством преподавателя. Включение лазера и регулировка режима его работы производятся преподавателем или лаборантом практикума.

Экспозиция фотопластинки и ее последующая обработка производится согласно инструкции, имеющейся в лаборатории.

2. Получение изображений.

С помощью полученных голограмм изображения голографированных объектов наблюдаются в отраженном свете. Отражение света при этом происходит от слоев фотоэмульсии, в которых были пучности стоячих волн во время экспозиции голограммы. Взаимное усиление отраженных волн имеет место в результате интерференционного эффекта в направлениях, удовлетворяющих условию Вульфа—Брэгга. Последнее обстоятельство монохроматизирует белый свет в направлениях формирования изображений. Это и определяет возможность использования источника белого света при наблюдении изображений, даваемых об-суждаемым классом голограмм.

Для наблюдения изображений голограмма помещается на столик специального голоскопа. Внешний вид этого голоскопа с точечной йодо-вольфрамовой лампой накаливания приведен на рис. 3.

Варьируя наклон столика голоскопа, установленного на шариковой головке штатива, находят оптимальные условия наблюдения изображения объекта. При этом надо иметь в виду, что изображение локализуется не на поверхности голограммы, а перед ней, ближе к наблюдателю или, наоборот, за голограммой, дальше от наблюдателя в зависимости от того, какой стороной положена пластинка голограммы на столик голоскопа.

Если при восстановлении изображения свет падает на голограмму со стороны стекла фотопластинки, то за голограммой (по

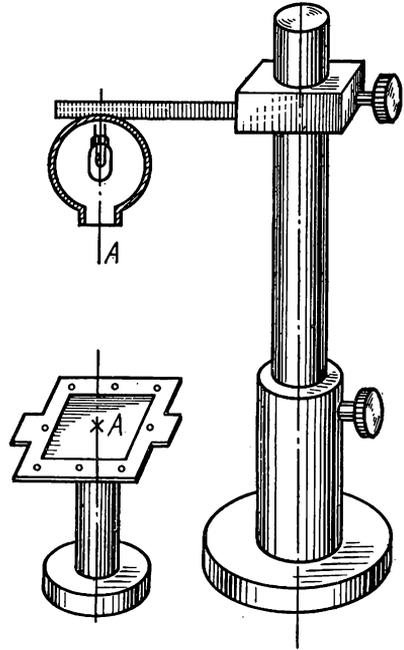


Рис. 3. Внешний вид голоскопа

отношению к наблюдателю) будет видно мнимое изображение предмета. При освещении голограммы со стороны эмульсионного слоя перед голограммой будет наблюдаться действительное изображение. В этом изображении наблюдается эффект псевдоскопии.

Изменяя ориентацию столика с голограммой, можно наглядно наблюдать эффект объемности получаемых изображений и взаимного параллактического смещения деталей этих изображений.

Следует обратить внимание на цвет наблюдаемых изображений. Этот цвет не совпадает с красным цветом лазерного излучения, использованного при регистрации голограммы. Последнее обстоятельство связано с усадкой фотоэмульсии в процессе ее обработки и сушки, что, естественно, приводит к уменьшению пространственного периода объемной дифракционной решетки голограммы. Это обстоятельство ведет, в свою очередь, к выполнению условий Вульфа—Брэгга для более коротковолнового излучения, чем то, которое использовалось при регистрации голограммы.

3. ПОЛУЧЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ГОЛОГРАММ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Целью данной задачи является получение и исследование голограмм плоской волны, снятых: а) по методу Френеля и б) во встречных пучках.

§ 1. Описание эксперимента

Голограмма плоской волны представляет собой важный пример голограммы, анализируя который можно выяснить многие принципиальные стороны голографического метода регистрации оптической информации. В данной задаче голограмма получается в результате фоторегистрации интерференционной картины двух плоских волн, одна из которых служит опорной волной, а вторая — предметной.

Рассмотрим две плоские волны — два параллельных когерентных пучка света, направление распространения которых определяется лучами 1 и 2 (рис. 1). В той области пространства, где эти два пучка пересекаются, возникает интерференционная картина. Всюду, где разность хода интерферирующих лучей равна целому числу длин волн λ , освещенность будет максимальной. Так как волны плоские, области максимальной интенсивности будут плоскостями, параллельными биссектрисе β угла α между направлениями распространения интерферирующих пучков света (эти плоскости на рис. 1 обозначены жирными линиями, параллельными β). Расстояние d между соседними плоскостями пучностей соответствует изменению разности хода интерферирующих волн на одну длину волны λ .

Обратимся к рис. 2. Рассмотрим изменение разности фаз при перемещении точки наблюдения в плоскости, перпендикулярной одному из пучков, на рисунке из точки A в точку B . Такое рассмотрение соответствует используемой в задаче схеме съемки голограммы, так как фотографическая пластинка устанавливается

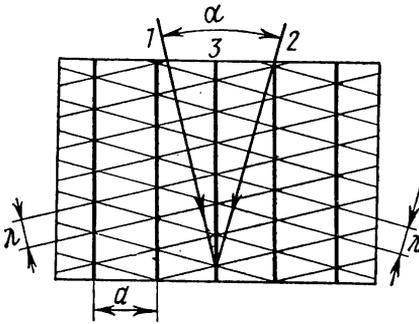


Рис. 1. Схема расположения пучностей в интерференционной картине, созданной двумя плоскими волнами

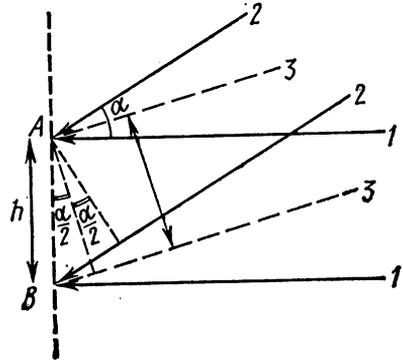


Рис. 2. К определению расстояния между плоскостями пучностей

перпендикулярно одному из пучков. В таком случае плоскость AB является плоскостью фотопластинки. Если принять, что в точке A разность хода равна нулю, то в точке B разность хода будет

$$\Delta = h \sin \alpha,$$

где расстояние между плоскостями пучностей по поверхности фотопластинки

$$h = \frac{d}{\cos \alpha/2}.$$

Приравняем разность хода длине волны λ и получим выражение для определения расстояния d между соседними плоскостями пучностей:

$$d = \frac{\lambda \cos \alpha/2}{\sin \alpha} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha/2},$$

тогда

$$h = \frac{\lambda}{\sin \alpha}.$$

Поместив в область интерференции фотопластинку, можно сфотографировать интерференционную картину. Во всех плоскостях пучностей выделится серебро, которое после проявления образует полупрозрачные плоскости. Так как пропускание света слоями серебра уменьшается вследствие частичного поглощения и отраже-

ния, для проходящего света эти плоскости мы будем рассматривать как плоскости почернения, а для наблюдения в отраженном свете — как частично отражающие плоскости.

В работе предлагаются два варианта взаимного расположения и ориентации световых пучков и фотопластины.

а. Голограмма Френеля. Две плоские волны, сходясь под небольшим углом α (рис. 3), падают на фотопластинку с одной стороны.

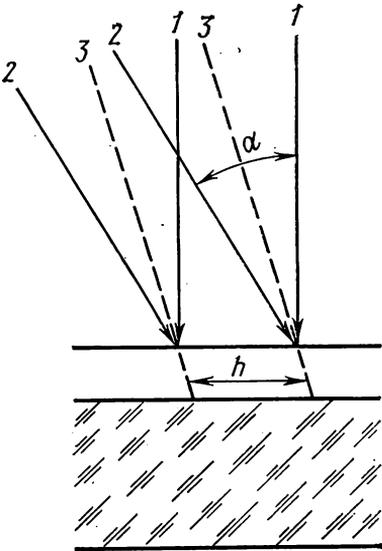


Рис. 3. Принципиальная схема получения голограммы Френеля плоской волны

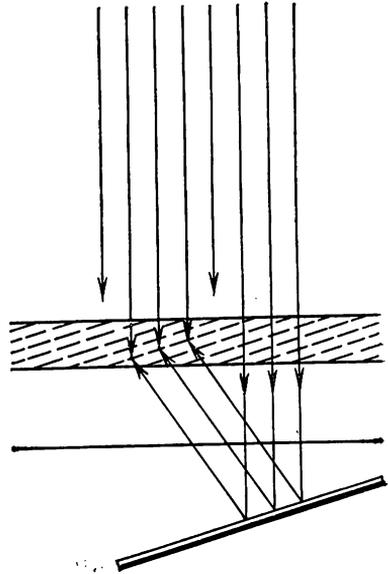


Рис. 4. Принципиальная схема получения голограммы плоской волны во встречных пучках

Пусть во время съемки один из пучков света падает перпендикулярно на поверхность фотопластины, тогда, как показано выше, расстояние между полосами максимального почернения на поверхности фотопластины будет равно h .

При последующем просвечивании эта голограмма будет вести себя как плоская «синусоидальная» дифракционная решетка, дисперсия которой будет определяться расстоянием h между полосами почернения, измеренным по поверхности голограммы. Угловое направление на дифракционные максимумы будет определяться формулой

$$h(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = m\lambda, \quad (1)$$

где φ_0 — угол падения света на плоскость решетки; φ — угол дифракции; m — порядок интерференции, который для «синусоидальной» решетки принимает значения $m=0, \pm 1$ ¹.

При этом следует учесть отличие голограммы от плоской решетки. Интенсивность дифракционных спектров в нашем случае сильно зависит от угла падения пучка света на голограмму. Это связано с конечной толщиной эмульсионного слоя. Дифракционные спектры будут наиболее яркими, если освещать голограмму плоской волной, падающей на нее под теми же углами, под которыми падали на нее световые волны во время ее регистрации.

б. Голограмма во встречных пучках. Две плоские когерентные волны падают на фотопластинку с противоположных сторон. Голографические пластинки прозрачны, и эти две волны будут интерферировать (рис. 4).

Если обработанную голограмму осветить параллельным пучком белого света, падающим под углом скольжения θ на слои почернения, то световые волны определенной длины волны λ , удовлетворяющей условию Вульфа — Брэгга

$$2dn \sin \theta = \lambda, \quad (2)$$

отразившись от слоев серебра, окажутся в фазе. Для других длин волн условие Вульфа — Брэгга выполняться не будет. Следовательно, в отраженном свете будет присутствовать небольшой интервал длин волн с максимумом интенсивности для длины волны λ . Изменяя угол падения света на голограмму, можно варьировать длину волны света, удовлетворяющую условию Вульфа — Брэгга.

Таким образом, из этой структуры голограммы плоской волны вытекает, с одной стороны, простота интерпретации физического смысла результатов последующего просвечивания, а с другой стороны, возможность использования этой голограммы в качестве объемной оптической дифракционной решетки.

§ 2. Методика измерений

1. Получение голограмм. Работа выполняется на установке СИН. С ее устройством можно ознакомиться в лаборатории, пользуясь находящимся при ней описанием.

Описание работы гелий-неонового газового лазера, применяемого в качестве источника света, можно найти, например, в книге: Физический практикум. Электричество и оптика. Под редакцией В. И. Ивероной. М., «Наука», 1968. Там же имеется список дополнительной литературы по лазерам.

Оптическая схема эксперимента.

а. Голограмма Френеля. На рис. 5 приведена оптическая схема, применяемая для получения голограммы Френеля плоской волны.

¹ Распределение интенсивности в дифракционных максимумах, очевидно, можно получить из уравнения Габора (см. п. 7).

От гелий-неонового лазера пучок света проходит через оптическую систему расширения пучка, состоящую из: микрообъекти-

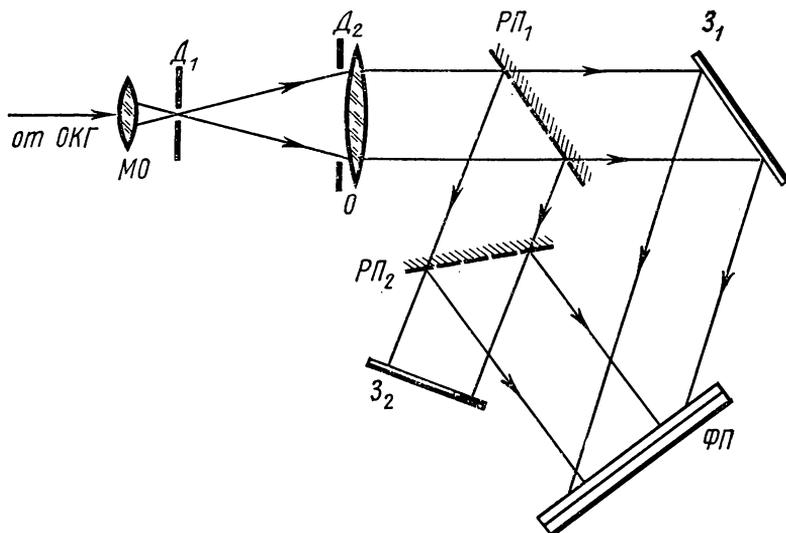


Рис. 5. Схема оптической установки, используемой для получения голограммы Френеля плоской волны

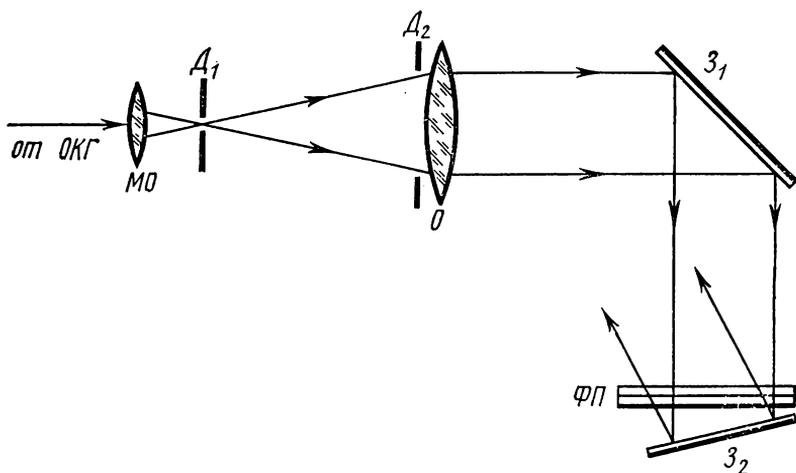


Рис. 6. Схема оптической установки, используемой для получения голограммы плоской волны во встречных пучках

ва МО с диафрагмой D_1 , расположенной в его заднем фокусе, диафрагмы D_2 и объектива О, передняя фокальная плоскость кото-

рого совпадает с диафрагмой D_1 . Далее свет, пройдя через светоразделительную пластинку $РП_1$ и отразившись от зеркала Z_1 , падает на фотопластинку $ФП$. Часть света, отраженная светоразделительной пластинкой $РП_1$, направляется в другое плечо оптической схемы и, пройдя через систему, состоящую из зеркала Z_2 и разделительной пластинки $РП_2$, также падает на фотопластинку нормально к ее поверхности. Перемещение зеркала Z_2 вдоль оси светового пучка позволяет выравнивать длины путей световых волн, достигающих фотопластинок.

б. Голограмма во встречных пучках. Оптическая схема получения голограммы плоской волны во встречных пучках показана на рис. 6.

Свет от газового лазера, пройдя через расширительную систему, аналогичную описанной в пункте а, отражается от зеркала Z_1 и нормально падает на фотопластинку $ФП$. Пройдя через нее и отразившись от зеркала Z_2 , расположенного под некоторым углом к фотопластинке, свет падает на фотопластинку с другой стороны.

Таким образом, в обоих случаях на фотопластинку падают две плоские волны, результат интерференции которых надо зарегистрировать.

2. Исследование полученных голограмм и обработка результатов.

а. Голограмма Френеля. Как было выяснено в § 1, голограмму Френеля плоской волны с достаточной точностью можно считать плоской дифракционной решеткой. Воспользовавшись формулой (1) и считая $m=1$, получим выражение для расстояния между полосами почернения на поверхности эмульсии фотопластинок

$$h = \frac{\lambda}{\sin \varphi - \sin \varphi_0}.$$

Положим угол падения $\varphi_0=0$, что соответствует оптимальным условиям просвечивания голограммы в данном случае.

Значит, просветив голограмму когерентным пучком света с длиной волны λ и измерив угол дифракции, можно определить период

$$h = \frac{\lambda}{\sin \varphi}. \quad (3)$$

Для измерения углов используется гониометр ГС-30 (описание прибора и его юстировки смотри в книге: Физический практикум. Электричество и оптика под редакцией В. И. Ивероной. М., «Наука», 1968, с. 425—430).

Просушенную после проявления голограмму помещают в специальную стойку-держатель и ставят на столик предварительно съюстированного гониометра. Стойка-держатель устанавливается по риску на столике гониометра таким образом, чтобы одним винтом столика можно было наклонять фотопластинку, а другим поворачивать в ее собственной плоскости.

Голограмму надо установить так, чтобы полосы почернения были вертикальны, а плоскость фотопластинки перпендикулярна к оси падающего пучка света. Для этого зрительная труба сначала наводится на изображение входной щели коллиматора. Затем, наклоняя и поворачивая голограмму вместе со столиком гониометра, получают в поле зрения трубы изображение креста нитей в оку-

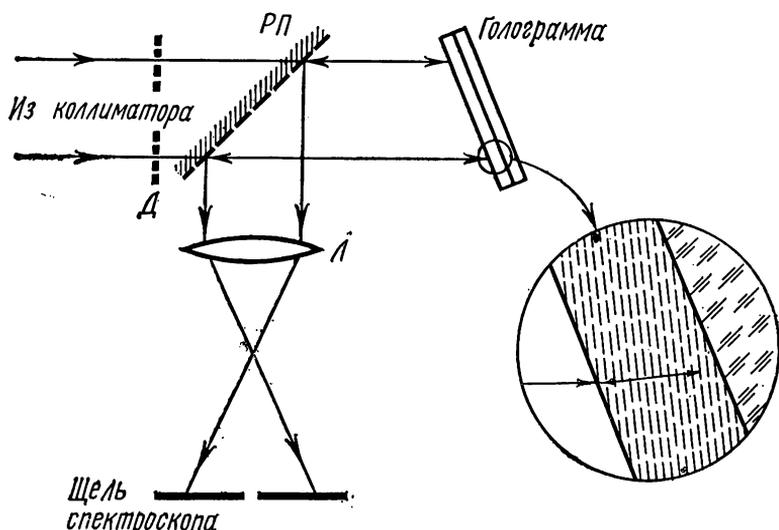


Рис. 7. Оптическая схема наблюдения дифракции на объемной решетке голограммы плоской волны во встречных пучках

ляре трубы, отраженное от поверхности фотопластинки, и совмещаю его с непосредственно наблюдаемым крестом нитей в окуляре трубы. В таком случае пластинка перпендикулярна пучку света, падающему на нее из коллиматора. Далее, наблюдая дифракционный спектр в зрительную трубу, поворотом фотопластинки в ее собственной плоскости надо добиться, чтобы спектр был симметричен относительно горизонтального штриха окулярного креста.

При этом вертикальный размер входной щели коллиматора следует установить таким, чтобы ее изображение полностью умещалось в поле зрения зрительной трубы.

Для измерения углов дифракции в качестве осветителя входной щели коллиматора применяется ртутная лампа. Когда труба наведена на дифракционный максимум нулевого порядка по лимбу гониометра, производится нулевой отсчет, а затем, совмещая крест окуляра с изображением какой-либо спектральной линии ртути, измеряют угол дифракции φ .

После этого, зная длины волн и углы дифракции для нескольких спектральных линий ртути, пользуясь формулой (3), находят

расстояние h между полосами почернения на поверхности голограммы.

6. Голограмма во встречных пучках. Для определения пространственного периода решетки используется оптическая схема, приведенная на рис. 7. Межплоскостное расстояние вычисляется по формуле Вульфа — Брэгга. Чтобы не вычислять поправку к углу, измеренному на гониометре, появляющуюся за счет преломления в желатине эмульсии, используется случай нормального падения пучка света на отражающие плоскости. В качестве спектрального прибора для определения длины волны отраженного света используется спектроскоп прямого зрения.

На трубу коллиматора надевается съемный кронштейн с закрепленными на нем светоразделительной пластинкой и смесительной линзой. Параллельный пучок белого света от лампы накаливания из коллиматора, проходя через светоразделительную пластинку *РП* (стеклянная плоскопараллельная пластинка), падает на голограмму и частично отражается от плоскостей серебра в обратном направлении. Далее, отразившись от разделительной пластинки, он попадает на смесительную линзу *Л*, проходя которую падает на щель спектроскопа прямого зрения. Так как вследствие дифракции свет с различными длинами волн распространяется по различным направлениям, то в отсутствие линзы на щель спектроскопа будет падать не весь отраженный спектр.

При измерении нужно быть уверенным, что свет падает на отражающие плоскости перпендикулярно. Для этого нужно установить разделительную пластинку и спектрометр так, чтобы на щель спектрометра мог попасть только тот свет, который распространяется в направлении, обратном направлению распространения пучка света из коллиматора. Предварительно гониометр должен быть съюстирован. На столик гониометра перпендикулярно световому пучку, идущему от коллиматора, устанавливается плоскопараллельная пластинка, как это делалось с фотопластинкой в пункте а, и отраженный от ее грани свет с помощью разделительной пластинки, укрепленной в карданной подвеске, направляется на щель спектроскопа. Для точной установки спектроскопа нужно сузить пучок света на выходе из коллиматора, введя в него диафрагму *Д*, и снять линзу. Используя ступени свободы кронштейна спектроскопа, устанавливают его так, чтобы наблюдаемый спектр был виден с максимальной яркостью, после чего диафрагму убирают, а линзу ставят на место, следя при этом за тем, чтобы интенсивность спектра не упала.

Для измерения вместо плоскопараллельной пластинки на столик гониометра устанавливается закрепленная в стойку-держатель фотопластинка с голограммой. Фотопластинка должна быть обращена эмульсией в сторону падающего пучка света.

Отражающие плоскости в эмульсии фотопластинки расположены под углом к ее поверхности. Поэтому голограмма даст два отражения под разными углами. Отражение, даваемое простран-

ственной решеткой, вследствие ее избирательности будет окрашено. Этот окрашенный пучок и нужно направить на щель спектроскопа. Тогда, как следует из способа установки спектроскопа, свет будет падать на отражающие плоскости голограммы нормально.

Затем с помощью шкалы спектроскопа измеряется длина волны, соответствующая максимальной интенсивности отраженного света (подсветка шкалы спектроскопа осуществляется от настольного светильника).

Межплоскостное расстояние d определяется по формуле (2) § 1, принимая коэффициент преломления желатина $n=1,4$. Угол скольжения при нормальном падении $\theta=90^\circ$.

§ 3. Упражнения

1. Получение голограмм плоской волны двумя способами: а) по методу Френеля, б) во встречных пучках. Оптические схемы собираются и юстируются на интерферометрическом столе студентами и практикантами под руководством преподавателя. Экспозиция фотопластинки и ее последующая обработка производятся согласно инструкции, имеющейся в лаборатории.

2. Исследование полученных голограмм. Изучение полученных голограмм проводится на гониометре. После юстировки гониометра и изучаемой голограммы Френеля измерить углы дифракции для трех спектральных линий ртути: зеленой с длиной волны $\lambda=5460 \text{ \AA}$ и двух желтых — $\lambda=5769 \text{ \AA}$ и $\lambda=5790 \text{ \AA}$. Подготовить установку для работы с голограммой, снятой во встречных пучках, как указано выше. Провести измерения длины волны света, отразившегося с максимальной интенсивностью.

3. Обработка результатов.

а) Для голограммы Френеля по формуле (3) рассчитать расстояние h между полосами почернения на поверхности эмульсии фотопластинки.

б) Для голограммы, снятой во встречных пучках, рассчитать по формуле (2) расстояние d между слоями максимального почернения в фотоземлюльсии.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

В настоящей задаче метод голографической интерферометрии с разделенными временами экспозиции применяется для исследования деформации изгиба пластинки и для определения модуля Юнга материала образца.

Для выполнения работы необходимо изучить материал пп. 1—4, 11 (Физические принципы голографии) и § 21 книги [1].

§ 1. Объект исследования и оптическая установка

В качестве объекта исследования используется «Г»-образная металлическая пластинка, шпильный конец которой жестко закреплен (рис. 1). Метод исследования состоит в следующем. Вертикальная плоскость пластинки освещается параллельным пучком света, падающим на нее перпендикулярно ее поверхности. Во время первой экспозиции регистрируется голограмма пластинки, находящейся в недеформируемом состоянии. После этого на конец C горизонтального участка пластинки помещается гирька весом P . Такая нагрузка соответствует приложению к точке B вертикального участка пластинки момента силы, равного PL (где L — длина отрезка BC). Пластинка испытывает деформацию изгиба и принимает форму, изображенную на рис. 1 пунктирными ли-

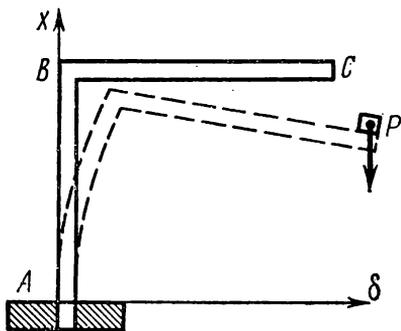


Рис. 1. Внешний вид исследуемой пластинки

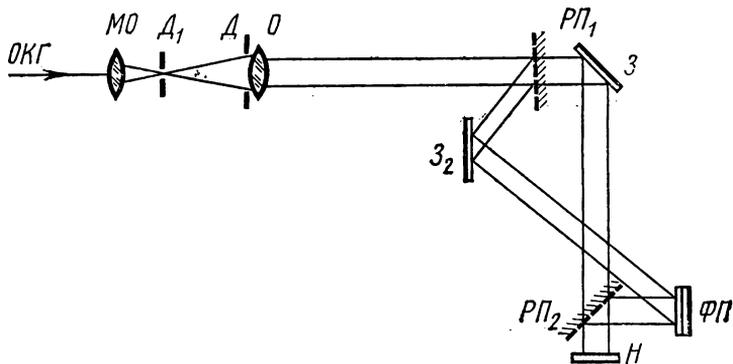


Рис. 2. Схема оптической установки для получения интерферогаммы

ниями. После этого на ту же фотопластинку, где была зарегистрирована первая голограмма, производится съемка голограммы деформированного участка AB пластинки. В промежутке между двумя экспозициями фотопластинка и все другие детали оптической установки не должны менять своего расположения.

На рис. 2 изображена схема оптической установки, собранная на интерферометрическом столе УИГ-2М (см. задачу № 1). Пучок

света от гелий-неонового лазера (ОКГ) проходит через оптическую систему, состоящую из микрообъектива MO и объектива O . Задний фокус MO совмещен с передним фокусом O . Эта система служит для создания широкого параллельного лазерного пучка. Диафрагма D_1 ($\sigma \sim 0,03—0,05$ мм), расположенная в фокусе MO , является пространственным фильтром и создает равномерную освещенность по сечению светового пучка, устраняя неоднородности, вызванные дифракцией на пылинках и многократными отражениями света в линзах микрообъектива. Расширенный и параллельный световой пучок попадает на светоразделительную пластинку PP_1 . Часть пучка, отраженная от пластинки PP_1 , попадает на зеркало Z_2 , а от него идет на фотопластинку $ФП$, являясь опорной волной.

Часть пучка, прошедшая разделительную пластинку PP_1 , падая на зеркало Z и отражаясь от него, освещает исследуемый объект H . Рассеянный объектом H свет создает предметную волну, которая, отражаясь от светоразделительной пластинки PP_2 , попадает на $ФП$. Все оптические детали схемы установлены на столе в положениях, при которых разность хода между опорной и предметной волнами не превышает нескольких сантиметров.

§ 2. Методика измерения

Если просветить экспонированную (описанным выше способом) и проявленную голограмму, то одновременно восстановятся обе предметные волны, которые существовали в разные моменты времени и рассеивались объектом, находящимся в разных состояниях (недеформированном и деформированном). Теперь эти две когерентные волны будут существовать одновременно и могут интерферировать. Дальнейшая обработка полученной голограммы производится следующим образом. Голограмму помещают в параллельный пучок света и получают действительное изображение объекта исследования. Это изображение фотографируется на фотопластинке, которая располагается в плоскости, где изображение наиболее резко. В этом случае расстояние между фотопластинкой и голограммой будет равно расстоянию предмета от голограммы во время ее получения.

В восстановленном действительном изображении исследуемой металлической пластинки будут наблюдаться чередующиеся светлые и темные полосы, возникшие в результате интерференции двух предметных волн, исходивших от недеформированного и деформированного объектов. Темные полосы будут наблюдаться в тех местах, для которых разность хода интерферирующих лучей будет равна $d = (2k - 1)\lambda/2$ (λ — длина волны света, $k = 1, 2, 3, \dots$). Учитывая, что разность хода d равна удвоенной деформации пластинки δ , это условие можно переписать в виде

$$\delta = (2k - 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (1)$$

Для определения зависимости деформации от x на компараторе определяют положения всех темных полос (на фотопластинке они светлые) в восстановленном изображении исследуемой пластинки и строят график зависимости δ от x . Для определения модуля Юнга исследуемого материала можно воспользоваться формулой, выражающей зависимость деформации закрепленной с одного конца пластинки от приложенного к ее свободному концу момента силы PL . Эта зависимость имеет вид (см. [1])

$$\delta(x) = \frac{6PLx^2}{ab^3E}, \quad (2)$$

где a — ширина, b — толщина исследуемой пластинки и E — ее модуль Юнга. Следовательно, для модуля Юнга будет справедливо выражение

$$E = \frac{6PLx^2}{ab^3\delta(x)}. \quad (3)$$

Для избежания ошибок, вносимых при определении на компараторе положения закрепленного конца исследуемой пластинки, формулу (3) легко преобразовать к виду

$$E = \frac{6PL}{ab^2} \left(\frac{X_k - X_{k-n}}{\sqrt{\delta_k} - \sqrt{\delta_{k-n}}} \right)^2, \quad (4)$$

где X_k, X_{k-n} — отсчеты на компараторе положения k и $(k-n)$ темных полос, а δ_k и δ_{k-n} — соответствующие им деформации. Рассчитывая E для 8—10 полос, определяют его среднее значение.

§ 3. Упражнения

1. Получение интерферограммы исследуемого объекта. Оптическая схема (см. рис. 2) юстируется студентами и практикантами под руководством преподавателя. Экспозиция фотопластинки и ее последующая обработка производятся согласно инструкции, имеющейся в лаборатории.

2. Восстановление действительного изображения и фотографирование его. Восстановление и фотографирование действительного изображения проводятся на установке, схема которой дана в задаче № 1 на рис. 3, где вместо экрана помещается кассета с фотопластинкой. Подбирая нужную экспозицию, на одну и ту же пластинку снимают действительное изображение три раза с разными выдержками. Последующая обработка пластинки производится согласно инструкции, имеющейся в лаборатории.

3. Обработка результатов. Промерить на компараторе положение всех темных полос (на фотопластинке они светлые) в восстановленном изображении исследуемой пластинки. Измерить микрометром ширину и толщину исследуемой пластинки. Построить гра-

фик зависимости деформаций от положения всех темных полос в восстановленном изображении исследуемой пластинки. Пользуясь формулой (4), определить модуль Юнга исследуемого материала. Провести оценку ошибок измерения.

ЛИТЕРАТУРА

Тимошенко С. П. Соппротивление материалов, т. 1. М., «Наука», 1965.

5. ИЗУЧЕНИЕ ДИФфуЗИИ В ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

В настоящей задаче для определения коэффициента диффузии 20%-ного раствора NaCl в воде используется метод голографической интерферометрии с двумя экспозициями.

Для выполнения настоящей задачи необходимо усвоение материала пп. 1—4, 11 (Физические принципы голографии), а также задачи 162 [2].

§ 1. Описание установки

На рис. 1 представлена схема применяемой установки, собранной на голографическом столе СИИ (см. задачу № 2).

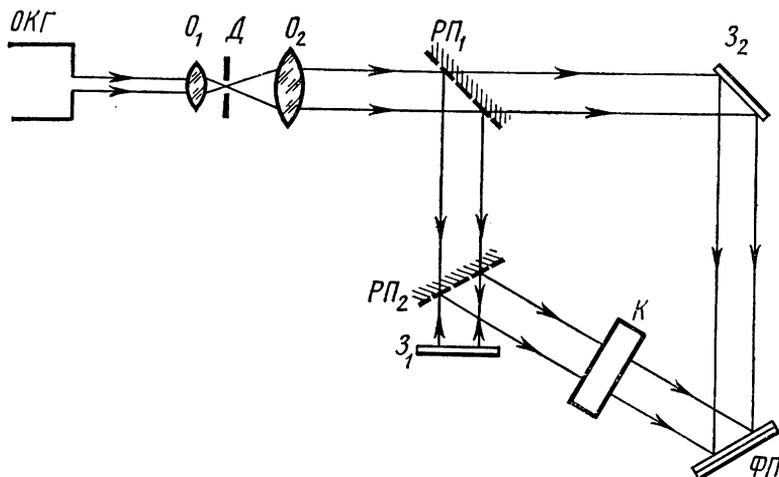


Рис. 1. Схема получения интерферограммы

Пучок света от гелий-неонового лазера (ОКГ) проходит через оптическую систему, состоящую из микрообъектива O_1 и объектива O_2 . Задний фокус O_1 совмещен с передним фокусом O_2 . Эта

система служит для расширения лазерного пучка. Диафрагма ($\sigma \sim 0,03$ мм), расположенная в фокусе O_1 , является пространственным фильтром и создает равномерную освещенность по сечению светового пучка, устраняя его неоднородности, вызванные дифракцией на пылинках и многократными отражениями в линзах микрообъектива. Расширенный световой пучок попадает на светоделительную пластинку $РП_1$ и отраженный от нее создает предметную волну, проходящую через стеклянную кювету K с исследуемой жидкостью. Светоделительная пластинка $РП_2$ и зеркало Z_1 служат для выравнивания оптических путей, проходящих опорной и предметной волнами от источника света до фотопластинки $ФП$. Световой пучок, прошедший через светоделительную пластинку $РП_1$ и отраженный от зеркала Z_2 , создает опорную волну.

В кювете K находятся изучаемые жидкости: в нижней половине — 20%-ный раствор $NaCl$ (показатель преломления $n_1 = 1,364$); в верхней половине — дистиллированная вода ($n_2 = 1,333$).

§ 2. Методика измерения

Сущность предлагаемого метода измерения коэффициента диффузии заключается в следующем. В начальный момент времени

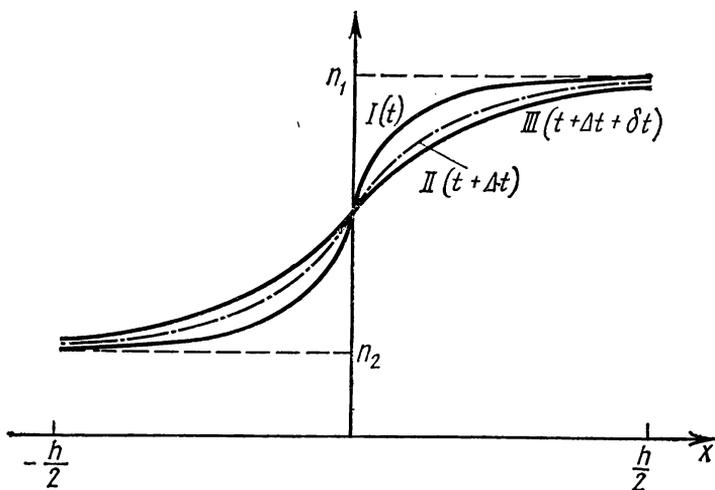


Рис. 2. Распределение показателя преломления по высоте кюветы в разные моменты времени после сливания жидкостей

после заполнения кюветы граница раздела воды и раствора $NaCl$ будет резкой (пунктирные прямые на рис. 2). С течением времени эта граница вследствие диффузии будет размываться и градиент показателя преломления уменьшаться. Пусть через t после начала диффузии распределение показателя преломления по вы-

соте кюветы будет описываться кривой I на рис. 2 (предполагается, что граница раздела находится на половине высоты кюветы h). Через интервал времени Δt после этого момента (т. е. через $t + \Delta t$ после начала диффузии) градиент показателя преломления еще уменьшится и его распределение по высоте кюветы можно представить в виде кривой II рис. 2.

На фотопластинку снимается голограмма световой волны, прошедшей через кюветы в момент времени t , а затем, не проявляя фотопластинку и не изменяя ее положения, голографически регистрируется световая волна в момент времени $t + \Delta t$.

Если просветить экспонированную таким образом и проявленную фотопластинку волной, аналогичной опорной волне, используемой в процессе получения голограммы, то восстановятся обе предметные волны, которые выходили из кюветы в разные моменты времени.

Теперь эти волны существуют одновременно, и так как они когерентны, то могут интерферировать. В результате интерференции на восстановленном изображении кюветы будут наблюдаться чередующиеся горизонтальные темные и светлые интерференционные полосы. Темные полосы будут видны в тех местах изображения кюветы (при тех значениях x), где за интервал времени между двумя экспозициями изменение показателя преломления будет удовлетворять условию $d\Delta n = (2k + 1)\lambda/2$ (d — толщина кюветы, λ — длина волны света, k — целые числа).

На рис. 3 схематически представлено расположение темных полос в изображении кюветы (круглое поле зрения связано с тем, что световой пучок, освещающий кювету, имеет круговое сечение). Объяснить такую картину можно, воспользовавшись рис. 2, из которого следует, что зависимость разности показателей преломления $\Delta n = n_{t+\Delta t} - n_t$ от координаты x можно представить в виде кривой, изображенной на рис. 4 (рассматривается только верхняя половина кюветы).

Разность показателей преломления при увеличении x сначала быстро растет, порядок интерференционных полос увеличивается, и в этой области интерференционные полосы расположены близко друг к другу. Вблизи максимума Δn изменение x дает малое изменение разности показателей преломления, и расстояние между интерференционными полосами увеличивается. Дальнейшее увеличение x приводит к уменьшению Δn и соответственно к уменьшению порядка интерференции.

Распределение интерференционных полос в изображении кюветы позволяет в принципе определить коэффициент диффузии. Однако для повышения точности метода съемка интерферограммы производится в следующем порядке. В момент времени t (через 1—1,5 часа после сливания раствора) производят первую экспозицию. За время экспозиции (~ 3 с) распределение показателя преломления в жидкости практически не изменяется. После этого специальной шторкой перекрывают половину опорного пучка (пра-

вую или левую) и через время $\Delta t'$ (5—8 мин) после первой экспозиции вторично снимают голограмму. Затем открывают ту часть опорного пучка, которая была закрыта во время второй экспозиции, и закрывают вторую его половину. Через интервал времени

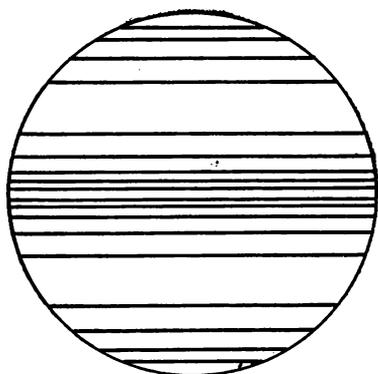


Рис. 3. Схема расположения темных полос в изображении кюветы



Рис. 4. Зависимость разностей показателей преломления от координаты

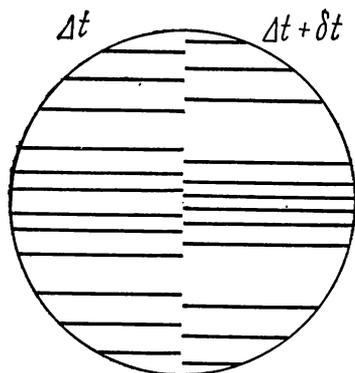


Рис. 5. Схема расположения темных полос в изображении кюветы при восстановлении двойной интерферограммы

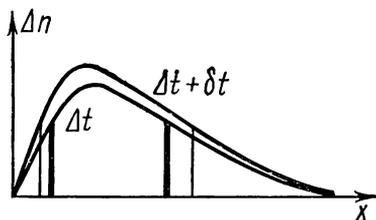


Рис. 6. Зависимость разностей показателей преломления (Δn) от координаты (x) для двух интервалов времени (Δt и $\Delta t + \delta t$)

δt (1—2 мин) после второй экспозиции производят съемку третьей голограммы.

На полученной таким образом интерферограмме в одной ее половине будут зафиксированы голограммы, снятые в момент времени t и $t + \Delta t$, в другой — в момент t и $t + \Delta t + \delta t$. В восстанов-

ленном изображении кюветы интерференционная картина будет иметь вид, схематически изображенный на рис. 5. Полосы, расположенные в области, где Δn увеличивается с ростом x , при возрастании интервала времени между двумя экспозициями смещаются к центру картины. В области, где Δn уменьшается, смещение полос будет положительным.

Это очевидно из рассмотрения рис. 6, где представлены зависимости Δn от x для двух интервалов времени между последовательными экспозициями (Δt и $\Delta t + \delta t$). На этом рисунке жирными линиями обозначены положения двух полос при интервале времени Δt , а тонкими — при $\Delta t + \delta t$.

§ 3. Обработка результатов

Расчет коэффициента диффузии по сдвигу интерференционных полос производится следующим образом. Разность показателей преломления, соответствующая какой-либо полосе, полученной в результате двух экспозиций с интервалом времени между ними Δt , будет равна $\Delta n = \frac{\partial n}{\partial t} \Delta t$. Для фиксированной полосы при ее сдвиге должно выполняться условие

$$d(\Delta n) = \frac{\partial \Delta n}{\partial t} dt + \frac{\partial \Delta n}{\partial x} dx = 0, \quad (1)$$

которое означает, что интерференционная полоса определенного порядка при различных интервалах времени между двумя последовательными экспозициями будет наблюдаться при тех координатах, где разность показателей преломления остается постоянной. За время δt

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} \delta t = \frac{\partial n}{\partial t} \delta t$$

и

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial x} \delta x = \frac{\partial^2 n}{\partial x \partial t} \Delta t \delta x,$$

где δx — смещение полосы при увеличении интервала времени между экспозициями на δt . Таким образом, уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} \delta t + \frac{\partial^2 n}{\partial x \partial t} \Delta t \delta x = 0. \quad (2)$$

При выводе предполагалось, что Δt , $\delta t \ll t$ и $\delta x \ll x$. Значения входящих в это уравнение производных можно определить, воспользовавшись уравнением диффузии, которое имеет вид (см. [1])

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где c — концентрация растворенного вещества, а D — коэффициент диффузии. Для достаточно разбавленных растворов можно принять, что показатель преломления линейно зависит от концентрации и удовлетворяет, следовательно, тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Решение уравнения (4), определяющее зависимость показателя преломления от координаты и времени, протекшего с момента начала диффузии, имеет вид (см. [1])

$$n(x, t) = \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi + n_1, \quad (5)$$

где n_1 — показатель преломления раствора, n_2 — показатель преломления воды и $\xi = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$.

Из (5) следует, что

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{\pi D}} \frac{x}{4t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

и

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x \partial t} = \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{\pi D}} \frac{1}{4t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(\frac{x^2}{2Dt} - 1 \right).$$

Подставляя эти значения производных в (2), получим

$$-x\delta t - \Delta t \delta x + \frac{x^2}{2Dt} \Delta t \delta x = 0,$$

откуда

$$D = \frac{x^2 \Delta t \delta x}{2t(x\delta t + \Delta t \delta x)}. \quad (6)$$

Таким образом, зная время, протекшее с начала диффузии t , интервалы времени между экспозициями Δt и δt и измеряя координату какой-либо интерференционной полосы x и ее смещение δx , можно рассчитать коэффициент диффузии. Для расчета коэффициента диффузии используются только полосы, которые находятся далеко от границы раздела жидкостей и для которых смещение от центра картины увеличивается с возрастанием интервала времени между двумя последовательными экспозициями (см. рис. 5).

Использование для расчетов этих интерференционных полос диктуется двумя обстоятельствами. Во-первых, зависимость показателя преломления от времен Δt для полос, далеких от границы

раздела, определяется в основном именно процессом диффузии, а не неизбежным перемешиванием жидкостей вблизи границы их раздела во время сливания. Во-вторых, полосы, расположенные вблизи границы раздела жидкостей, при увеличении интервала времени между экспозициями смещаются к центру картины, т. е. δx для них отрицательно. Следовательно, в знаменателе формулы (6) будет стоять разность двух величин одного порядка, что, естественно, приводит к уменьшению точности определения коэффициента диффузии.

Вследствие рефракции в жидкости расположение интерференционных полос относительно первоначальной границы раздела жидкостей не вполне симметрично. Поэтому для определения координаты какой-либо полосы измеряется расстояние между полосами одинакового порядка, находящимися по разные стороны от границы раздела. Половина этого расстояния и будет равна координате полосы. Таким образом определяется координата полосы, возникшей при интервале времени между экспозициями, равном Δt (это значение принимается за x), а затем при интервале времени $\Delta t + \delta t(x')$. Разность $x' - x = \delta x$. Измерения производятся для всех пар соответствующих полос, и по формуле (6) определяются значения коэффициента диффузии для отдельных измерений, а затем его среднее значение.

§ 4. Упражнения

1. Получение интерферограммы. После юстировки оптической схемы (см. рис. 1) слить изучаемые жидкости. Кювета K заполняется до половины дистиллированной водой, затем при помощи пипетки, нижний конец которой помещается на дне кюветы, сосуд осторожно дополняется 20%-ным раствором NaCl. Записать время сливания жидкостей. Через 1—1,5 часа после сливания жидкостей приступают к съемке интерферограммы по данной выше (§ 3) схеме. Обработка пластинки производится согласно инструкции, имеющейся в лаборатории.

2. Получение действительного изображения и фотографирование его. Восстановление и фотографирование действительного изображения проводится на установке, схема которой дана в задаче № 1 на рис. 3, где вместо экрана помещается кассета с фотопластинкой. Интерферограмма помещается в параллельный световой пучок, аналогичный опорному световому пучку, использованному в процессе ее получения. Свет должен падать на фотопластинку со стороны стекла. В этом случае на том же расстоянии от интерферограммы, на котором помещалась фотопластинка во время голографирования по отношению к кювете, восстановится действительное изображение кюветы, рассеянное интерференционными полосами. В этой плоскости устанавливается фотопластинка, на которую, подбирая нужную экспозицию, снимают действительное изображение три раза с разными выдержками. Дальнейшая об-

работка пластинки производится по инструкции, имеющейся в лаборатории.

3. Обработка результатов. Промерить на компараторе положение всех темных интерференционных полос.

Нанести на миллиметровку в большом масштабе данные измерений. Выбрать пары полос, необходимых для расчета коэффициента диффузии. По формуле (6) определить значение коэффициента диффузии для каждой пары полос, а затем его среднее значение. Оценить ошибку измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
2. Физический практикум. Электричество и оптика. Под ред. В. И. Ивероновой. М., «Наука», 1968, с. 733.

IV. ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методы моделирования широко используются в научных исследованиях. Аналоговые вычислительные машины (АВМ), наряду с цифровыми (ЦВМ), являются средством для математического моделирования различных явлений природы. Основа математического моделирования состоит в том, что одна и та же система уравнений может описывать различные по своей природе процессы, поэтому одни из этих процессов можно считать математической моделью других.

При использовании АВМ математическая модель объекта — система дифференциальных уравнений — воплощается в электронной модели, представляющей собой определенную последовательность операционных элементов, соединенных между собой. Напряжения на выходах этих элементов являются решениями дифференциальных уравнений. Наблюдение и регистрация этих напряжений дают информацию об изучаемом объекте. С помощью АВМ можно исследовать процессы, протекающие в физических, биологических, химических и других системах. В основном АВМ предназначены для анализа динамических систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями. АВМ, уступая по точности ЦВМ, обладают большим быстродействием при решении динамических задач, поскольку все операции в них осуществляются параллельно. АВМ целесообразно применять для исследований в натуральном или ускоренном времени динамических систем при регулярных и случайных воздействиях, когда точность моделирования оказывается достаточной для практических целей.

Настоящий раздел знакомит с основными приемами исследования физических процессов на АВМ, методикой подготовки и решения задач, принципами работы АВМ и ее отдельных элементов, а также содержит изучение конкретных систем. Задачи выполняются на базе широко распространенных аналоговых моделей МН-7 и МН-10.

В начале раздела даются краткие сведения о назначении основных элементов АВМ. Методика подготовки и решения задач на АВМ освещена на примере изучения движения заряженной ча-

стицы в скрещенных электрическом и магнитном полях. Цикл задач посвящен моделированию колебательных процессов в нелинейных системах: рассматриваются собственные и вынужденные колебания в нелинейном контуре, автоколебательной системе, синхронизация генератора с инерционной нелинейностью. Одна задача посвящена биофизической тематике: изучается рост микроорганизмов в проточном культиваторе. В двух последних задачах моделируются процессы, связанные с нелинейным взаимодействием волн.

Элементы электронного моделирования. АВМ представляет собой совокупность операционных элементов (ОЭ), которые выполняют математические операции над напряжениями. При этом напряжения — непрерывные функции времени. В операционных

элементах современных АВМ используется принцип глубокой отрицательной обратной связи.

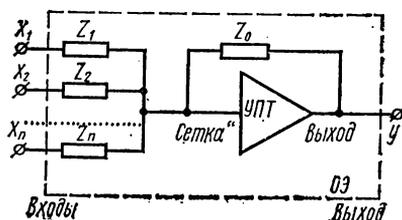


Рис. 1

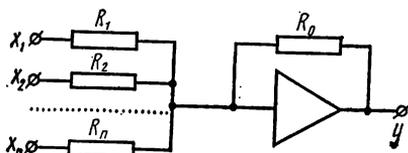


Рис. 2а

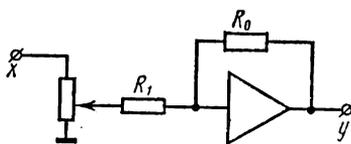


Рис. 2б

ОЭ состоит из усилителя постоянного тока (УПТ) с большим коэффициентом усиления (10^5 — 10^7) и цепи обратной связи (рис. 1). Цепь обратной связи содержит двухполюсники с «сопротивлениями» Z_i и Z_0 , которые включают резисторы, конденсаторы, диоды. Обычно называют двухполюсники Z_i , включенные между «сеткой» УПТ и входами ОЭ, входной цепью; двухполюсник Z_0 между «сеткой» УПТ и выходом ОЭ — обратной цепью. В зависимости от вида двухполюсников можно получать ОЭ, у которого напряжение y есть результат действия одной из основных математических операций над входными напряжениями x_i ¹. Напряжения x_i и y по модулю не превышают некоторой величины U_{\max} , определяемой характеристиками УПТ (для МН-7 $U_{\max}=100$ в, для МН-10 $U_{\max}=25$ в).

¹ Все напряжения в АВМ измеряются относительно одной точки — «земли» модели.

1. Сумматор. В этом элементе все сопротивления активные: $Z_0=R_0$, $Z_i=R_i$ (рис. 2 а). Напряжение на выходе сумматора y есть линейная форма входных напряжений x_i :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t). \quad (1)$$

Коэффициенты передачи по каждому входу α_i равны

$$\alpha_i = - \frac{R_0}{R_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Сумматор с одним входом $n=1$ называется масштабным множителем с коэффициентом $\alpha = -R_0/R_1$. При $\alpha = -1$ ОЭ становится инвертором.

В АВМ для входных и обратных цепей используются прецизионные сопротивления, величина которых обычно равна $100 \cdot m$ кОм ($m=1, 2, 5, 10$). Это позволяет собирать сумматоры с коэффициентами передачи α_i , где α_i принимает значения из интервала $(0,1-10)$ ¹. Масштабный множитель с регулируемым коэффициентом передачи часто собирают по простой схеме, изображенной на рис. 2 б. Тогда

$$\alpha = -\beta \frac{R_0}{R},$$

где β — коэффициент передачи делителя. При использовании калиброванных делителей значение β считается непосредственно со шкалы.

2. Интегратор. У этого элемента в обратную цепь включается прецизионный конденсатор емкости C ($Z_0=1/j\omega C$), во входную — резистор ($Z=R$) (рис. 3). Напряжение на выходе интегратора связано с напряжением на входе соотношением

$$y(t) = - \frac{1}{T_0} \int_0^t x(\tau) d\tau + y(0). \quad (2)$$

Переменная интегрирования τ называется машинным временем, она измеряется в секундах и отсчитывается с момента запуска модели. Коэффициент $T_0=RC$ называется постоянной времени интегратора. T_0 есть масштаб для машинного времени τ , при увеличении T_0 длительность процесса в АВМ возрастает и с уменьшением T_0 сокращается².

¹ В быстродействующих АВМ для уменьшения влияния паразитных емкостей R_i , $R_0=10 m$ кОм.

² В медленных АВМ типа МН-7, МН-10 емкость конденсатора $C=1$ мкФ и обычно $T_0=0,1 \cdot c$.

Величина $y(0)$ в (2) есть начальное условие на интеграторе, т. е. напряжение на выходе интегратора, с которого начинается процесс перезаряда конденсатора C . Напряжение $y(0)$ устанавливается с помощью специального делителя, который подключается к интегратору в режиме «начальные условия» и отключается в ре-

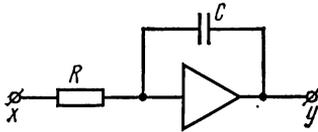


Рис. 3

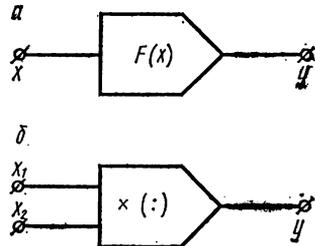


Рис. 4

жиме «решение». Если интегратор имеет несколько входов, то операция интегрирования совмещается с суммированием

$$y(t) = - \sum_i \frac{1}{T_{0i}} \int_0^t x_i(\tau) d\tau + y(0),$$

где $T_{0i} = R_i C$ — постоянная времени по i -тому входу.

3. Нелинейные функциональные преобразователи (НФП) (рис. 4, а) используются для получения напряжения $y(t)$ в виде непрерывной и однозначной функции от входного сигнала $x(t)$:

$$y(t) = F(x(t)).$$

В моделях МН-7 и МН-10 $F(x)$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией

$$F(x) = F(0) + \sum_{i=0}^n k_i (x - x_{i0}).$$

Это представление воспроизводится на сумматоре, во входные цепи которого включены диоды. В зависимости от включения диода коэффициент передачи k_i по i -тому входу может принимать значения

$$k_i = \begin{cases} k_i, & x \geq x_{i0}; \\ 0, & x < x_{i0}; \end{cases} \text{ либо } k_i = \begin{cases} 0, & x \geq x_{i0}; \\ k_i, & x < x_{i0}. \end{cases}$$

4. Умножение и деление (рис. 4, б). В АВМ эти операции выполняются с коэффициентами.

$$y = \frac{1}{U_{\max}} x_1 x_2; \quad y = 0,1 U_{\max} \frac{x_1}{x_2}.$$

5. Нелинейности специального типа (ограничение, модуль, «сухое трение»). Для получения таких функций во входную и обратную цепи усилителя включают отдельные диодные ячейки.

Построение *ОЭ* осуществляется на коммутационном поле АВМ, на которое выведены «сетки» и «выходы» УПТ, гнезда от резисторов, конденсаторов, диодных ячеек. Это построение сводится к переключениям и шнуровым соединениям гнезд.

ОЭ соединяются между собой в соответствии со структурной схемой, которая отражает функциональную связь *ОЭ* согласно системе дифференциальных уравнений. Структурная схема подобна блок-схеме программы для ЦВМ, которая описывает порядок выполняемых операций. Составление структурной схемы производится различными способами, и вид ее неоднозначен. Однако при ее составлении придерживаются определенных правил: так, минимальное число интеграторов в схеме равно порядку системы дифференциальных уравнений; в схеме не должно быть замкнутых контуров, не содержащих интеграторов.

Процедура решения на АВМ представляет собой наблюдение и регистрацию непрерывно меняющихся напряжений на выходах *ОЭ* модели при различных значениях параметров. АВМ имеют три основных режима работы: «исходное положение», «решение», «останов».

В «исходном положении» производится установка параметров, начальных условий на интеграторах. При переводе в режим «решение» соединяются цепи коммутации *ОЭ* и начинается процесс перезаряда конденсаторов в интеграторах, являющийся искомым решением. В режиме «останов» фиксируются напряжения на всех интеграторах модели.

1. ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Работа знакомит с методикой подготовки и решения задач на аналоговых вычислительных машинах. В качестве примера рассматривается движение электрона в однородных скрещенных электрическом и магнитном полях.

§ 1. Введение

Подготовку задачи к решению на АВМ удобно разбить на ряд этапов.

1. Математическая формулировка задачи, включая запись системы дифференциальных уравнений, достаточных начальных или

граничных условий, а также таблицы значения всех коэффициентов уравнений и варьируемых параметров.

2. Преобразование уравнений к виду, удобному для моделирования, в результате которого каждое уравнение разрешается относительно старшей производной либо представляется системой дифференциальных уравнений первого порядка.

3. Составление блок-схемы модели, которая дает общее представление о необходимых вычислительных (операционных) элементах машины и о связях между ними.

4. Переход от физических переменных к машинным. В моделирующей установке величина, образуемая на выходе операционных элементов, представляется напряжением. Это напряжение, измеренное в вольтах, называется машинной переменной. Для перехода от физических переменных задачи к машинным вводятся масштабные множители. Они указывают, скольким единицам физической величины соответствует один вольт на выходе определенного элемента модели. При этом независимой переменной для машинных переменных является машинное время τ , которое отсчитывается при работе модели с момента ее запуска.

Уравнения в машинных переменных называются машинными.

5. Составление структурной схемы моделирования, на которой отдельные операционные элементы блок-схемы связываются в единую моделирующую цепь. При построении структурной схемы учитывается соответствие знаков напряжений, получаемых на элементах, и следует стремиться к использованию минимального числа операционных блоков. Это достигается рациональным соединением операционных блоков и совмещением нескольких операций на одном элементе. Структурная схема является основным рабочим документом, и на ней указываются номера используемых элементов, входов и выходов.

6. Выбор масштабов. Вначале осуществляется предварительный расчет масштабных множителей, коэффициентов передачи сумматоров, постоянных времени интеграторов, масштабных соотношений при нелинейных преобразованиях. Расчет производится на основе приближенных оценок для диапазонов изменения машинных переменных при решении. Затем на основе пробных решений производится уточнение масштабных множителей. После этого проводится решение задачи на модели с регистрацией результатов при различных значениях варьируемых параметров.

В настоящей работе все этапы подготовки к моделированию и решение иллюстрируются на примере задачи о движении электрона в скрещенных электрическом и магнитном полях в плоском магнетроне. В результате решения траектории движения электрона наблюдаются непосредственно на экране осциллографа. По их виду определяется критическая величина магнитной индукции $B_{кр}$, при которой электрон возвращается на катод, не достигнув анода.

§ 2. Подготовка задачи к моделированию

1. **Математическая формулировка задачи.** Движение электрона в однородных скрещенных полях описывается системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= eB \frac{dy}{dt}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= eE - eB \frac{dx}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

где m — масса электрона, e — его заряд. Направление векторов E и B указано на рис. 1.

Компоненты начальной скорости $\left. \frac{dx}{dt} \right|_0$; $\left. \frac{dy}{dt} \right|_0$ существенно влияют на вид траектории; их величина варьируется при решении задачи. Значения $x(0)$, $y(0)$ не влияют на характер движения, $y(0)$ полагаем равным 0, $x(0)$ подбирается, исходя из удобства результатов.

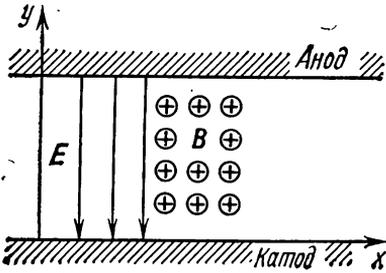


Рис. 1. Направление полей в межэлектродном пространстве

Разность потенциалов между электродами полагается равной 20 кВ, расстояние между ними $l=0,1$ м. Индукция магнитного поля B является переменным параметром, критическое значение которого определяется в работе¹. Параметры электрона в системе СИ: $m=9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ К.

При температуре катода 1300°C величина средней квадратичной скорости по модулю составляет $3 \cdot 10^5$ м/с.

2. **Приведение уравнений к виду, удобному для моделирования.** Преобразуем систему (1) к системе уравнений первого порядка, приняв скорости электронов $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в качестве переменных \dot{x} и \dot{y} соответственно.

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{e}{m} B \dot{y}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{e}{m} E - \frac{e}{m} B \dot{x}, \\ \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}. \end{aligned} \quad (2)$$

¹ При приведенных выше данных $B_{кр}$ имеет порядок 10^{-3} – 10^{-2} Т (1 тесла = $=1 \text{ В} \cdot \text{с/м}$).

3. **Блок-схема.** Функциональная связь между переменными x , y , \dot{x} , \dot{y} может быть осуществлена системой цепочек, показанной на рис. 2.

4. **Машинные переменные.** Для перехода в (2) к машинным переменным введем машинное время τ :

$$t = M_t \tau. \quad (3)$$

Машинное время τ измеряется в секундах, отсчитываемых машинными часами. Для отличия времени τ от истинного времени процесса t машинные секунды обозначим [с].

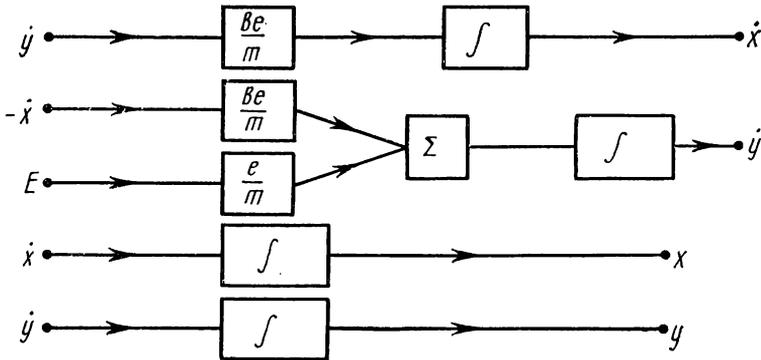


Рис. 2. Блок-схема операционных элементов

M_t — масштаб времени имеет размерность с/[с]. С помощью масштаба времени изменяется длительность процессов при исследовании его на модели. Например, электрон при некоторых условиях достигает анода за «истинное» время t^* . Машинная длительность этого «полета», т. е. длительность решения на модели, будет

$$\tau^* = t^*/M_t.$$

Введем машинные переменные и соответствующие им масштабные множители для координат и компонентов скорости электрона:

$$\begin{aligned} x &= M_x e_1, & y &= M_y e_2, \\ \dot{x} &= M_x \dot{e}_1, & \dot{y} &= M_y \dot{e}_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Размерности

$$[M_x] = [M_y] = \text{м/В}; \quad [M_x \dot{}] = [M_y \dot{}] = \frac{\text{м/с}}{\text{В}}.$$

Величина индукции B подбирается в процессе решения. Это осуществляется в модели при помощи внешних прецизионных по-

тенциометров. Для этого специальным масштабным соотношением вводится машинное магнитное поле K :

$$B = M_B K, \quad 0 \ll K \ll 1. \quad (5)$$

Значение другого параметра — электрического поля E — задается и регулируется в модели постоянным напряжением \mathcal{E} :

$$E = M_E \mathcal{E}. \quad (6)$$

Подставляя (3), (4), (5), (6) в систему (2), приходим к уравнениям движения электрона в машинных переменных — машинным уравнениям:

$$\frac{d\dot{e}_1}{d\tau} = k_2 K \dot{e}_2, \quad \frac{d\dot{e}_2}{d\tau} = k_{52} \mathcal{E} - k_{51} K \dot{e}_1, \quad (7)$$

$$\frac{de_1}{d\tau} = k_3 \dot{e}_1, \quad \frac{de_2}{d\tau} = k_7 \dot{e}_2.$$

Здесь обозначено:

$$k_2 = \frac{e}{m} \frac{M_B M_{ij} M_t}{M_x}, \quad k_{52} = \frac{e}{m} \frac{M_E M_t}{M_y},$$

$$k_3 = \frac{M_x M_t}{M_x}, \quad k_{51} = \frac{e}{m} \frac{M_B M_x M_t}{M_{ij}}, \quad k_7 = \frac{M_{ij} M_t}{M_x}. \quad (8)$$

Все введенные коэффициенты k имеют размерность времени и являются, следовательно, коэффициентами передачи интеграторов.

5. Структурная схема. Структурная схема, отвечающая системе машинных уравнений (7) и блок-схеме (2), показана на рис. 3. При построении схемы учтена особенность операционных элементов изменять знак машинной переменной.

Постоянные времени интеграторов по соответствующим входам определяются соотношениями:

$$\frac{1}{T_2} = k_2, \quad \frac{1}{T_3} = k_3, \quad \frac{1}{T_{51}} = k_{51}, \quad \frac{1}{T_7} = k_7, \quad T_t = R_t C. \quad (9)$$

Коэффициенты передачи масштабных множителей «1», «4», «6» можно положить равными единице $k_1 = k_4 = k_6 = 1$.

Два трехдекадных потенциометра, устанавливающие в модели значение магнитного поля, обозначены на схеме буквами K . Значение электрического поля \mathcal{E} задается на вход 52 интегратора «5» от источника эталонного напряжения машины МН-7.

Операционные элементы «1» и «4» не обязательны для решения и в принципе могут быть исключены. Их присутствие в блок-схеме (рис. 3) связано с конструкцией настраиваемых входов в модели МН-7 (см. введение). Прямое включение потенциометров K

(30 кОм) на настраиваемые входы интеграторов «2» и «5» может привести к их подгрузке и снижению точности решения.

6. Выбор масштабов. При выборе масштабных множителей руководствуются следующими соображениями.

а. Машинные переменные в модели не должны превышать по модулю некоторой определенной величины (100 В для МН-7, 25 В

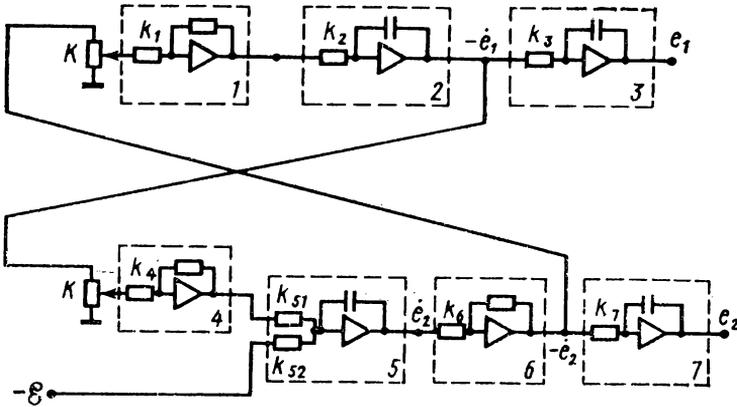


Рис. 3. Структурная схема электронной модели

для МН-10, 10 В для машин типа «Meda»). Эта величина является верхним пределом выходного напряжения, при котором элементы модели выполняют операции. Если напряжение превышает этот предел, усилители (УПТ), на которых собраны операционные элементы, выйдут из линейного диапазона.

С другой стороны, когда машинные переменные по модулю малы и сравнимы с помехами в модели, уменьшается точность выполнения операций и отсчета результатов. Рекомендуется, чтобы машинные переменные не были меньше 1,0 В в МН-7, 0,1 В в машинах типа «Meda».

Обычно, стремясь повысить точность, выбирают масштабы так, чтобы максимальные значения всех машинных переменных в процессе решения были близки к верхнему пределу.

б. Длительность решения τ^* выбирается такой, чтобы процесс было удобно наблюдать и регистрировать. Так, если процесс длится доли секунды, введением соответствующего масштаба по времени M_t его замедляют, и, наоборот, если исследуемый процесс протекает слишком медленно (часы, годы) — его ускоряют. В медленных моделирующих установках, в том числе в МН-7, время решения берется порядка единиц или десятков секунд. В быстродействующих моделях типа «Meda» оно сокращается до $10^{-1} \div 10^{-3}$ с.

в. Выбранные масштабные множители должны быть таковы, чтобы коэффициенты передачи k_i элементов не превышали десяти. Это ограничение вызвано тем, что с ростом коэффициента передачи падает точность выполнения операции элементом.

Для предварительного расчета масштабных множителей в данной задаче оценим пределы изменения переменных и время движения электрона:

1. Для переменной y максимальное значение равно $y_{\max} = l$.

2. Переменная \dot{y} принимает максимальное значение, когда электрон подлетает к аноду в отсутствие магнитного поля:

$$\dot{y}_{\max} = \sqrt{2 \frac{e}{m} El}. \quad (10)$$

Отсюда по (4) определяются масштабные множители M_y и $M_{\dot{y}}$; $e_{2 \max}$, $\dot{e}_{2 \max}$ полагаются равными 100 В.

3. Время полета электрона к аноду в отсутствие магнитного поля является минимальным. Это время является характерным для плоского магнетрона. При нулевой начальной скорости оно равно

$$t^* = \sqrt{\frac{2ml}{eE}}. \quad (11)$$

Этой величине соответствует характерное машинное время τ^* , в течение которого протекает на модели рассматриваемый процесс. Задав τ^* порядка нескольких секунд, можно по формуле (3) найти масштабный множитель M_t .

4. Для определения множителей M_B , M_x и $M_{\dot{x}}$ необходимо предварительное знание $B_{\text{кр}}$. Поэтому они подбираются окончательно на основе пробных решений. Для начала удобно положить

$$M_{\dot{x}} = M_{\dot{y}}, \quad M_x = M_y.$$

Исходя из условия (5), следует взять

$$M_B = (1 \div 0,7) B_{\max},$$

где B_{\max} берется из грубой оценки значения $B_{\text{кр}} = 10^{-2} \div 10^{-3}$ Т. С помощью введенных масштабных множителей вычисляются постоянные времени интеграторов T_2 , T_3 , T_{51} , T_7 по формулам (8), (9). Емкость конденсаторов C в интеграторах равна 1 мкФ. Используя это, определяются сопротивления входных цепей; их величина должна лежать в интервале $0,1 \div 10$ МОм.

Множитель M_E удобно найти по (6)—(8), задавшись коэффициентом передачи k_{52} , полагая сопротивление k_{52} этой входной цепи равным, например, 100 кОм или 1 МОм.

5. Пробные решения проводят при различных индукциях B . С их помощью устанавливают:

а) не выходят ли напряжения на выходах всех элементов из интервала ± 100 В прежде, чем электрон достигнет анода. Пере-

менную e_2 с выхода интегратора «5» удобно измерять по вольтметру «V₂», а другие — по «V₁». Если переменные e_2 , e_1 или e_1 выходят преждевременно из допустимого интервала, увеличивают масштабные множители соответственно M_y , M_x или M_x ;

б) убеждаются в том, что на делителях можно установить такие значения K , при которых электрон, не долетев анода, возвращается на катод, т. е. e_2 уменьшается, не достигнув 100 В. Если для $B \geq B_{кр}$ значения $K > 1$, то увеличивают масштаб M_B и соответственно этому пересчитывают коэффициенты передачи κ_2 , κ_{51} . Однако более удобным может оказаться увеличение коэффициентов κ_1 и κ_4 , например, с 1 до 10 при неизменных всех остальных коэффициентах;

в) наконец, следует детально оценить изменение переменной e_1 . Осциллограф подключается для наблюдения траектории электрона: на его вход «x» подается переменная e_1 , на вход «1» по оси «y» — переменная e_2 . Чтобы отметить положение анода, включается коммутатор осциллографа и на вход «2» подается напряжение, равное e_{2max} . Установив некоторые значения K , проводят решение. Желательно, чтобы электрон 3–5 раз возвратился на катод прежде, чем переменная e_1 достигнет верхнего предела (+100 В). Тогда на экране осциллографа будет наблюдаться картина, показанная на рис. 4. Так как переменная e_1 только возрастает в процессе движения электрона, можно расширить диапазон ее изменения вдвое, переместив точку вылета электрона из $e_1 = 0$ в положение $e_1 = -100$ В. Для этого на интеграторе «3» задается начальное условие, равное — 100 В. Если после этого в интервале (–100 В, +100 В) укладывается недостаточная часть траектории, необходимо увеличить масштабный множитель M_x . После коррекции масштаба по x (или какого-либо другого) вся проверка масштабов путем пробных решений проводится заново.

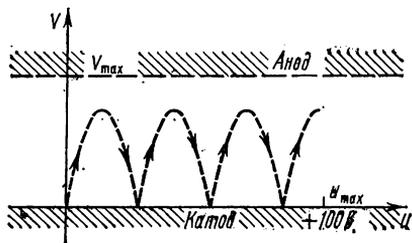


Рис. 4. Траектории электрона при $B > B_{кр}$

§ 3. Упражнения

1. Определение машинных параметров. Выбрать по предварительным оценкам масштабные множители, задавшись величиной машинного времени τ^* в интервале 2–10 с, рассчитать машинные параметры.

Перенести структурную схему рис. 3 в рабочую тетрадь, указав номера всех используемых входов, сопротивлений, усилителей. Соединить на лицевой панели и наборном поле элементы модели согласно структурной схеме.

Включить модель, прогреть в течение 10 мин и установить нули усилителей.

Настроить входы операционных элементов согласно рассчитанным машинным параметрам (см. методику настройки в техническом описании МН-7).

Пробными решениями проверить правильность расчета машинных параметров и настройки модели.

а. Проверка M_E , k_{52} , k_6 , k_7 . При $K=0$ переменные e_1 , e_2 должны одновременно достигать 100 В за выбранное машинное время τ^* . Чтобы убедиться в этом, необходимо на вертикальные входы «1» и «2» осциллографа с включенной горизонтальной разверткой подать напряжение +100 В и машинную переменную e_2 . Через τ^* после запуска модели траектории обоих лучей на экране должны пересечься. В противном случае допущена ошибка в расчете или установке параметра δ или коэффициента k_{52} . Аналогичные измерения проводятся затем для e_1 : из них следует установить правильность расчета и настройки k_7 и k_6 .

Эти измерения являются проверкой части структурной схемы, включающей операционные элементы «5», «6», «7» и источник напряжения «—6».

б. Проверка части модели, включающей элементы «1», «2», «4», «5», «6». Эта часть схемы образует кольцо, в котором возможны незатухающие колебания переменных e_1 и e_2 при $K \geq 1$ ($B > B_{кр}$). Для наблюдения этих колебаний на горизонтальную ось осциллографа подается e_1 , на вертикальную — e_2 . Затем, задав какое-либо начальное напряжение на интеграторах «2», «5», производится запуск модели. На экране осциллографа должен быть эллипс. В противном случае имеется ошибка в коммутации указанных элементов.

в. Проверка M_B выполняется согласно п. 6 б § 2. В этом случае осциллограф подключается в режим наблюдения траектории электрона: на горизонтальный вход подается e_1 ; на вертикальный вход «1» — e_2 , на вход «2» — +100 В. Начальные условия на всех интеграторах нулевые.

г. Проверка M_x , M_x проводится по п. 6 в § 2. Осциллограф включается в режим наблюдения траекторий.

2. **Определение значения $B_{кр}$.** Подключить осциллограф для наблюдения траекторий электрона. Установив значение K (одинаковое на обоих делителях), которое соответствует некоторой индукции B , произвести решение. Затем, увеличивая K^1 , подобрать такие значения, при которых траектория касается постоянного уровня $e_{2 \max} = +100$ В, т. е. электрон касается анода и возвращается на катод. По полученным $K_{кр}$ рассчитать $B_{кр}$ (5).

¹ При этом значения K у обоих трехдекадных потенциометров должны быть всегда равными.

Зарисовать с помощью самописца ПДС-021М траектории электрона для нескольких значений: $V < V_{кр}$, $V = V_{кр}$, $V > V_{кр}$.

Уменьшая разность потенциалов между электродами с некоторым шагом ($\Delta \sim 2 \div 4$ кВ) от 20 кВ до 2 кВ, получить график зависимости $V_{кр}$ от E .

3. Наблюдение траекторий электрона с начальной скоростью. Чтобы задать начальную скорость на модели, необходимо установить начальные условия (напряжения) на интеграторах «2» и «5», с выходов которых снимаются компоненты скорости e_1 и e_2 . Величины начальных условий $e_1(0)$ и $e_2(0)$ рассчитываются по формуле (4), исходя из оценки средней квадратичной скорости, приведенной в § 2.

Установить положительную начальную скорость только по оси OY и зарисовать получаемые траектории при $V > V_{кр}$; $V = V_{кр}$ и $V < V_{кр}$. Зарисовать подобные траектории, задавая начальную скорость разных знаков только по оси OX :

В отчете о работе необходимо представить:

1) структурную схему задачи с указанием номеров всех усилителей и входов, используемых в установке;

2) предварительные величины масштабных множителей, коэффициентов передачи и окончательные, полученные после пробных решений;

3) рисунки траекторий электрона при $V > V_{кр}$, $V = V_{кр}$ и $V < V_{кр}$ и различных начальных скоростях вылета с катода;

4) график зависимости $V_{кр}$ от E , изображенный в логарифмических осях.

Таблица 1

Варианты	Заданные τ^*	Выбранные масштабы						Машинные параметры								
		M_x	M_y	M_z	M_u	M_v	M_w	k_1	k_2	k_3	k_4	k_{51}	k_{52}	k_6	k_7	ξ
Первый																
Второй																
Окончательный																

ЛИТЕРАТУРА

- Архангельский Е. А., Знаменский А. А., Лукомский Ю. А., Чернышев Э. П. Моделирование на аналоговых вычислительных машинах. Л., «Энергия», 1972.
- Анисимов Б. В., Голубкин В. Н. Аналоговые вычислительные машины. М., «Высшая школа», 1971. •

3. Описание аналоговой моделирующей установки МН-7.
 4. Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины, кн. 1. М., «Мир», 1967.

2. КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В задаче методом электронного моделирования исследуются автономные и вынужденные движения в колебательной системе с реактивной нелинейностью.

§ 1. Введение

Во многих реальных динамических системах нелинейность играет принципиальную роль. Нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие поведение этих систем, как правило, не могут быть решены аналитически, а приближенные и качественные методы [1—4] не позволяют получить интегральных кривых.

Аналоговые вычислительные машины позволяют получать решение нелинейных дифференциальных уравнений в наглядной форме (в виде кривой на экране осциллографа или самописца). Кроме того, простота изменения параметров исследуемой системы и быстрота решения (единицы или доли секунд) делают АВМ надежным и удобным инструментом для исследования поведения как простых, так и сложных нелинейных систем.

В настоящей задаче исследуются автономные и вынужденные движения простой нелинейной системы

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2(1 + \gamma y^2)y = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) описывает в некотором приближении процессы, происходящие в колебательном контуре RLC , где в качестве конденсатора используется емкость p - n -перехода полупроводникового диода [3]. Другим примером такой системы может служить математический маятник. Это уравнение моделируется на МН-7. Экспериментально исследуется поведение системы при различных параметрах.

§ 2. Теория

1. Автономные движения. Запишем уравнение (1) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -2\delta v - \omega_0^2(1 + \gamma y^2)y. \end{cases} \quad (2)$$

Исключив переменную t в системе уравнений (2), получим нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого представляет траекторию на фазовой плоскости $v y$:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{-2\delta v - \omega_0^2(1 + \gamma y^2)y}{v}. \quad (3)$$

Характер фазовых траекторий определяется видом и расположением особых точек ($y = \text{const}, v = \dot{y} = 0$). Особые точки могут находиться только на оси y ($v = 0$). Из уравнения (2) следует, что абсцисса \bar{y} для особой точки должна удовлетворять уравнению

$$\omega_0^2(1 + \gamma \bar{y}^2)\bar{y} = 0.$$

Это уравнение имеет три решения:

$$\bar{y}_1 = 0; \quad \bar{y}_2 = + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}; \quad \bar{y}_3 = - \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}. \quad (4)$$

Тип особой точки можно определить, исследуя движение системы в малой окрестности этой точки [2].

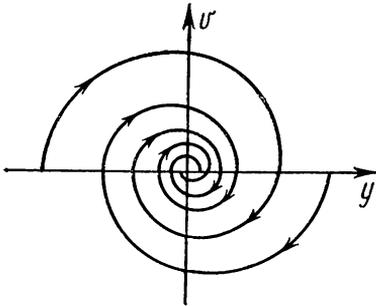


Рис. 1. Фазовый портрет системы при $\gamma > 0$

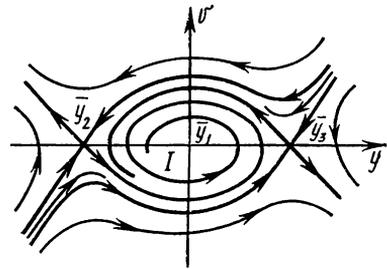


Рис. 2. Фазовый портрет системы при $\gamma < 0$

Вид фазовых траекторий, а следовательно, и движение системы на фазовой плоскости качественно различны в случаях $\gamma < 0$ и $\gamma > 0$.

В случае $\gamma > 0$ имеется только одна особая точка $\bar{y} = 0$ — устойчивый фокус, и все фазовые траектории представляют из себя скручивающиеся в начало координат спирали (рис. 1).

В случае $\gamma < 0$ помимо устойчивого фокуса в начале координат имеются еще две особые точки типа седла \bar{y}_2, \bar{y}_3 , расположенные на оси y симметрично относительно начала координат. Вид фазовых траекторий в этом случае изображен на рис. 2. Фазовая плоскость делится на две области. Если фазовая точка находится внутри области I , то в процессе движения система приходит в устойчивый фокус. Область I называется областью притяжения

фокуса. Если фазовая точка находится вне области I, то в процессе движения система удаляется от начала координат.

2. Вынужденные колебания. Уравнение, которое описывает вынужденные колебания в системе с реактивной нелинейностью или жесткостью, имеет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2(1 + \gamma y^2)y = P_0 \cos(pt + \vartheta), \quad (5)$$

где P_0 , p , ϑ — амплитуда, частота и фаза внешнего воздействия.

Применяя метод гармонической линеаризации [2], получим для амплитуды x_1 и фазы ϑ вынужденных колебаний уравнения

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2\lambda\eta}{1 - \eta^2 + \frac{3}{4}\epsilon x_1^2}, \quad (6)$$

$$\eta^2 = 1 + \frac{3}{4}\epsilon x_1^2 - 2\lambda^2 \pm \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \lambda^2(4\lambda^2 - 3\epsilon x_1^2 - 4)}, \quad (7)$$

где введены безразмерные переменные и параметры

$$x = \frac{\omega_0^2}{P_0} y; \quad \epsilon = \frac{\gamma P_0^2}{\omega_0^4}; \quad \lambda = \frac{\delta}{\omega_0}; \quad \eta = \frac{p}{\omega_0}. \quad (8)$$

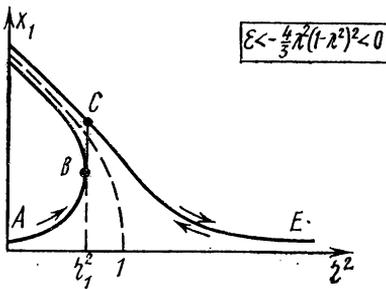


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика ($\epsilon < 0$)

Выражения (6) и (7) суть фазочастотная и амплитудно-частотная характеристики нелинейной системы (5) в первом гармоническом приближении.

Из уравнения (7) видно, что каждому значению амплитуды вынужденных колебаний соответствуют два значения частоты η^2 . Эти частоты расположены симметрично относительно величины η_0 , определяемой выражением

$$\eta_0^2 = 1 - 2\lambda^2 + \frac{3}{4}\epsilon x_1^2. \quad (9)$$

Выражение (9) носит название уравнения «скелетной» линии (рис. 3). График «скелетной» линии проходит на плоскости x_1 , η^2 при $\epsilon < 0$ слева от прямой $\eta^2 = 1$ и при $\epsilon > 0$ — справа от прямой.

Кривая зависимости $x_1(\eta^2)$ имеет две ветви, проходящие на одинаковом расстоянии по горизонтали от «скелетной» линии. Эти ветви пересекают «скелетную» линию при значениях x_1^2 , определяемых из условия равенства нулю подкоренного выражения в уравнении (7); значение x_1^2 при этом дается формулой

$$\bar{x}_1^2 = \frac{1}{2\lambda^2(1-\lambda^2)} \cdot \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{\lambda^2(1-\lambda^2)^2}}}. \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что \bar{x}_1 имеет вещественные значения, если подкоренное выражение положительно, т. е. ε удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon > -\frac{4}{3} \lambda^2 (1-\lambda^2)^2.$$

Амплитудно-частотная характеристика рассматриваемой нелинейной системы имеет три качественно различных вида в зависи-

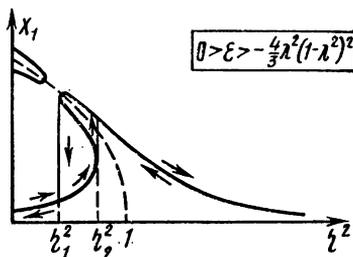


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика ($\varepsilon < 0$).

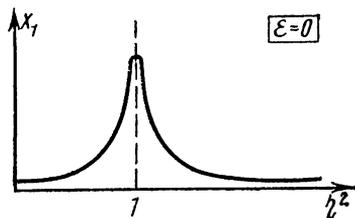


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика ($\varepsilon = 0$).

мости от значения коэффициента при нелинейном члене ε и при $\lambda < 1$. Рассмотрим их последовательно.

1. Случай мягких характеристик. $\varepsilon < 0$:

а) $\varepsilon < -\frac{4}{3} \lambda^2 (1-\lambda^2)^2$ (см. рис. 3). Обе ветви амплитудно-резонансной кривой проходят по разные стороны от «скелетной» линии, нигде не пересекаясь с ней. При увеличении ε по модулю наклон «скелетной» линии увеличивается;

б) $0 > \varepsilon \geq -\frac{4}{3} \lambda^2 (1-\lambda^2)^2$ (рис. 4). При $\varepsilon = -\frac{4}{3} \lambda^2 (1-\lambda^2)^2$ у хвостов амплитудно-частотной характеристики появляется перешеек. Уменьшение ε по модулю приводит к появлению двух разделенных ветвей (рис. 4), каждая из которых пересекает «скелетную» линию. Для одной из ветвей точка пересечения является самой высокой, а для другой — самой низкой. С уменьшением ε по модулю точки пересечения двигаются в разные стороны по «скелетной» кривой, при этом верхняя поднимается с большей скоростью, чем нижняя опускается. Одновременно уменьшается крутизна «скелетной» линии.

2. Линейный контур. $\varepsilon = 0$ (рис. 5). При $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon < 0$) верхняя ветвь резонансной кривой уходит на бесконечность, «скелетная»

линия выпрямляется, нижняя ветвь становится обычной резонансной кривой линейного контура.

3. Случай жестких характеристик $\epsilon > 0$ (рис. 6, а). «Скелетная» линия уходит в область $\eta^2 > 1$. Резонансная кривая представляет собой одну непрерывную линию, которая один раз пересекает «скелетную» линию в точке \bar{x}_1 . С увеличением ϵ «клюв» вытягивается

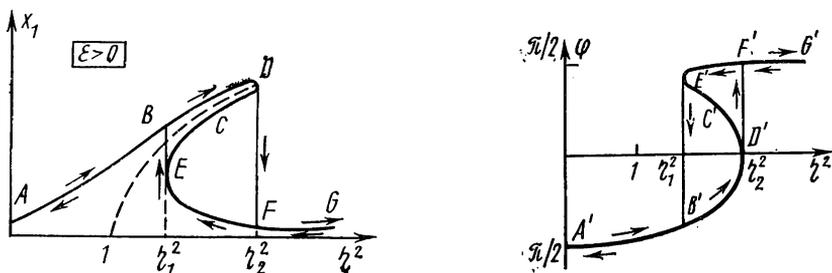


Рис. 6. Амплитудно- (а) и фазочастотные (б) характеристики ($\epsilon > 0$)

в сторону больших частот внешнего воздействия, при этом «скелетная» кривая наклоняется сильнее; ордината точки пересечения \bar{x}_1 уменьшается.

В случае жестких характеристик ($\epsilon > 0$) при увеличении η от нуля до η_2 амплитуда вынужденных колебаний x_1 увеличивается (кривая ABD , рис. 6, а). При $\eta = \eta_2$ амплитуда x_1 скачком уменьшается (прямая DF). Дальнейшее увеличение η приводит к слабому уменьшению амплитуды вынужденных колебаний. Если уменьшать частоту внешнего воздействия, начиная со значения $\eta > \eta_2$, то амплитуда вынужденных колебаний будет увеличиваться (кривая GFE), при $\eta = \eta_1$ амплитуда x_1 скачком увеличится (прямая EB).

Дальнейшее уменьшение η приводит к уменьшению x_1 вдоль кривой BA . Следовательно, в интервале частот $[\eta_1; \eta_2]$ вынужденные колебания могут иметь два различных значения амплитуды. Вопрос о том, какая из амплитуд имеет место, зависит от предыстории системы, т. е. откуда система попала в эту область. Участок DCE является неустойчивым. Эта часть резонансной кривой экспериментально не наблюдается.

Фаза вынужденных колебаний также претерпевает скачки при частотах вынужденных колебаний η_1 и η_2 . Вид зависимости сдвига фаз от частоты внешнего воздействия представлен на рис. 6, б. Стрелками на чертеже показаны направления изменения сдвига фаз при изменении частоты внешнего воздействия. Участок фазочастотной характеристики $D'C'E'$ (см. рис. 6, б), соответствующий участку DCE (см. рис. 6, а) амплитудно-частотной характеристики, является неустойчивым [3] и экспериментально не наблюдается.

Для мягких характеристик $\varepsilon < 0$ могут представиться два случая.

1. Нижняя ветвь резонансной кривой пересекает «скелетную» линию (см. рис. 4): $0 > \varepsilon > -\frac{4}{3}\lambda^2(1-\lambda^2)^2$. В этом случае изменение амплитуды и фазы вынужденных колебаний при непрерывном изменении частоты внешнего воздействия происходит аналогично случаю жестких характеристик. Отличие заключается в том, что «клюв» резонансной кривой расположен в области $\eta^2 < 1$.

2. Ветви резонансной кривой не пересекают «скелетную» линию ни при каких значениях η (см. рис. 3): $\varepsilon < -\frac{4}{3}\lambda^2(1-\lambda^2)^2$.

При изменении частоты внешнего воздействия η от нуля амплитуда вынужденных колебаний увеличивается вдоль кривой AB .

В точке B ($\eta = \eta_1$) амплитуда x_1 должна скачком увеличиться до значения, определяемого точкой C .

Если частоту вынужденных колебаний уменьшать в области $\eta > \eta_2$, то амплитуда x_1 будет увеличиваться согласно кривой EC (см. рис. 3).

Из уравнения (4) и соотношений (6) следует, что изменение амплитуды внешнего воздействия эквивалентно изменению коэффициента нелинейности ε . Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от амплитуды внешнего воздействия имеет вид гладкой кривой в случае $\varepsilon < 0$ и вид S -образной кривой со скачками амплитуд вынужденного воздействия в случае $\varepsilon > 0$.

§ 3. Описание модели

1. Описание модели нелинейной системы. Для экспериментального исследования процессов, происходящих в нелинейном контуре, уравнение (6) моделируется на аналоговой вычислительной машине МН-7.

На рис. 7 изображена структурная схема модели, соответствующая уравнению (6) для случая $\gamma < 0$. Номера на входных сопротивлениях усилителей соответствуют номерам сопротивлений на наборном поле МН-7.

Собственная частота линейного контура ω_0 при исследовании вынужденных движений системы выбрана максимально возможной для МН-7 и равной 10 рад/с. Это сделано для уменьшения времени переходного процесса. При исследовании автономных движений системы с помощью самописца типа ПДС-021 ввиду его большой инерционности необходимо частоту контура уменьшить с 10 до 1 рад/с, для чего входные сопротивления интеграторов сделать равными 1 МОм.

Затухание в нелинейный контур вводится с помощью усилителя 13. Величина затухания δ определяется коэффициентом передачи усилителя и выбрана равной 0,5. Внешнее гармоническое

воздействие подается с выхода генератора (НГ) на вход 15 усилителя 3.

Нелинейное преобразование $\gamma \omega_0^2 y^3$ осуществляет часть блок-схемы, обведенной на рис. 7 пунктиром. Эта часть состоит из двух нелинейных блоков БН-2 и БН-3, работающих совместно с усилителями 4 и 14, сумматора (усилитель 10) и трехдекадного делителя γ_d .

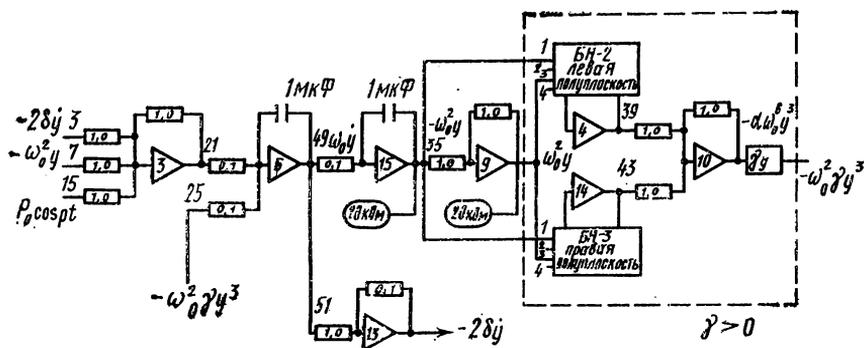


Рис. 7. Структурная схема модели

Использование двух нелинейных блоков позволяет достичь более точной аппроксимации нелинейной зависимости. Блоки БН-2 и БН-3 аппроксимируют соответственно правую и левую полуплоскости кубической нелинейности. На входы 1, 3 нелинейных блоков подается входной сигнал противоположных полярностей (см. рис. 7). Усилитель 10 суммирует с коэффициентом усиления 1 сигналы с выходов нелинейных блоков БН-2 и БН-3. Напряжение на выходе усилителя 10 равно αz^3 , где $\alpha = 0,0125$ — константа, z — напряжение на входах нелинейных блоков. Для смены знака нелинейности γ необходимо поменять местами входы 1 и 3 в блоках БН-2 и БН-3.

Делитель γ_d предназначен для изменения коэффициента нелинейности γ . Вход и выход делителя находятся на наборном поле МН-7, а переключатели декад расположены на лицевой панели. Напряжение на выходе делителя пропорционально с коэффициентом γ_d напряжению на его входе. Если на вход нелинейного преобразователя подается сигнал $\omega_0^2 y$, то значение коэффициента γ в уравнении (6) связано с γ_d соотношением

$$\gamma = \alpha \gamma_d \omega_0^4. \quad (11)$$

Выражение для ε (см. (8)) с учетом (11) имеет вид

$$\varepsilon = \alpha \gamma_d P_0^2.$$

Нелинейное преобразование осуществляется должным образом только в случае, если напряжение на входах нелинейных блоков не превышает 20 В.

Выходы усилителей 15 и 9 должны быть «умощнены». Для «умощнения» выход сопротивления 20 кОм, выведенный на наборное поле, соединяется с выходом нужного усилителя.

2. Подготовка модели к работе. Набрать на модели МН-7 уравнение (5), структурная схема которого изображена на рис. 7. После 30 мин прогрева усилителей выставить нули усилителей МН-7 и генератора НГ.

Проверку правильности набора схемы и нормального функционирования ее удобно разбить на следующие этапы.

а. Проверка линейной части модели. Отключить генератор и нелинейность (вынуть перемычки с входов 15 и 25 на наборном поле), задать начальные условия на интеграторе 6, подать на вертикальный вход осциллографа напряжение с выхода усилителя 6, а на горизонтальный вход — с выхода усилителя 15 и по фазовому портрету на осциллографе или по вольтметру убедиться в правильности набора линейной части модели.

б. Проверка нелинейной части модели. Вывести затухание контура (вынуть перемычку с входа 3), задать начальные условия, равные 20 В на интеграторе 6, переключить вертикальный вход осциллографа с выхода усилителя 6 на выход усилителя 10. По картине на экране осциллографа убедиться в правильности набора нелинейной части модели (для $\gamma < 0$ и $\gamma > 0$).

§ 4. Упражнения

1. Исследование на фазовой плоскости автономных движений линейного и нелинейного контура. Посмотреть и записать с помощью двухкоординатного самописца фазовые траектории на фазовой плоскости $(\omega_0^2 y, \dot{\omega}_0 y)$ в следующих случаях:

- 1) $\delta = 0, \quad \gamma_d = 0;$
- 2) $\delta = 0,5, \quad \gamma_d = 0;$
- 3) $\delta = 0,5, \quad \gamma_d = +1,0.$

Теоретически рассчитать для третьего случая координаты седла по формуле (5) и сравнить с экспериментально найденными.

Методику измерения координат точек фазовой плоскости смотри в приложении 1.

2. Исследование вынужденных колебаний в нелинейном контуре.

А. Снять экспериментально амплитудно- и фазочастотные кривые нелинейного контура для следующих значений γ_d и амплитуды внешнего воздействия P_0 ($\delta = 0,5$), приведенных в табл. 1.

При снятии резонансных кривых в областях скачка амплитуды в силу большой добротности системы необходимо очень медленно

Таблица 1

N	γ_g	P_0
1	0,0	2,0
2	+0,1	2,0
3	+1,0	4,0
4	-0,8	1,0
5	-0,5	1,0
6	-1,0	1,0

изменять частоту внешнего воздействия. Методику измерения амплитуды вынужденных колебаний и сдвига фаз смотреть в приложении 2.

В случае 1 найти частоту собственных колебаний ω_0 из эксперимента. Эта частота в силу разброса параметров сопротивлений модели будет несколько отличаться от 10 рад/с. При

расчетах необходимо пользоваться значением частоты, полученным экспериментально.

Амплитудно-частотную и фазочастотные кривые для случаев 1—6 представить в координатах x_1 , η^2 и φ , η^2 . Для случаев 1, 3, 6 построить теоретически рассчитанные амплитудно- и фазочастотные характеристики.

Б. Снять зависимость амплитуды вынужденных колебаний от внешней силы для следующих значений γ_d и частоты внешнего воздействия f : 1) $\gamma_d=1,0$, $f=1,5$ Гц; 2) $\gamma_d=1,0$, $f=2,5$ Гц.

Зависимость представить в виде графиков в координатах x_1 , ε как экспериментальных, так и теоретически рассчитанных.

Приложение 1. *Методика измерения координат точек фазовой плоскости.* Для измерения абсциссы точки фазовой плоскости надо на вход горизонтального усилителя осциллографа подать сигнал $\omega_0 y$, а на вход «1» вертикального усилителя — сигнал $\omega_0^2 y$. На вход «2» вертикального усилителя подается эталонное напряжение. На экране осциллографа при включенном коммутаторе наблюдается фазовая траектория системы и горизонтальная прямая эталонного напряжения. Регулируя эталонное напряжение так, чтобы прямая проходила через нужную точку фазовой плоскости, находим ординату этой точки.

Абсцисса точки фазовой плоскости определяется аналогичным образом, если поменять местами входы $\omega_0 y$ и $\omega_0^2 y$.

Приложение 2. *Методика снятия амплитудно-частотной характеристики.* Для ускорения процесса снятия амплитудно-частотной характеристики нелинейной системы целесообразно одновременно производить измерение амплитуды вынужденных колебаний и сдвига фаз между вынужденными колебаниями и внешней силой. На вход горизонтального усилителя подают внешнее воздействие с выхода генератора. На вход «1» вертикального усилителя подается напряжение $\omega_0^2 y$ с выхода усилителя 9, а на вход «2» — регулируемое эталонное напряжение.

На экране осциллографа при включенном коммутаторе наблюдаются эллипс и горизонтальная прямая—эталонное напряжение. Сдвиг фаз φ между напряжениями, поданными на вертикальный и горизонтальный входы усилителей, определяется из соотношения

$$\sin \varphi = y_1/y_0,$$

где y_0 —ордината точки эллипса, наиболее удаленной от оси абсцисс; y_1 —ордината точки пересечения эллипса с осью ординат. Значения ординат y_0 , y_1 измеряются путем совмещения горизонтальной линии (эталонное напряжение) с соответствующей точкой согласно методике, описанной в приложении I.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974, гл. II, § 9; гл. III, § 13—15.
2. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1968, гл. IV, V.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961, ч. II, § 43, 62—66, 69.
4. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М., Гостехиздат, 1952, гл. I, § 10; гл. VI, § 34—36.

3. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе исследуются переходные процессы и стационарные колебания в простой автоколебательной системе.

§ 1. Введение

Процессы, протекающие в системах 2-го порядка с нелинейным трением, описываются уравнением

$$\ddot{y} + f(\dot{y}) + y = 0, \quad (1)$$

где точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau^* = \omega_0 t$. К этому типу систем относятся генераторы с падающей характеристикой или отрицательным сопротивлением лампы, диатронный, транзитронный, двухкаскадный регенерированный усилители [1], различные механические колебательные системы с вязким трением и др.

Пусть функция $f(\dot{y})$ представима в виде полинома с нечетными степенями

$$f(\dot{y}) = a_0 \dot{y} + G(\dot{y}), \quad (2)$$

где

$$G(y) = -a_2 \dot{y}^3 + a_4 \dot{y}^5 \quad (a_2 > 0, a_4 > 0).$$

Анализ уравнения, основанный на приближенных аналитических методах, позволяет в общем случае получить только качественную картину развития и протекания процессов в подобных системах [1, 2]. Результаты качественного анализа представлены на рис. 1 и 2.

На рис. 1 изображены функция $f(\dot{y})$ и фазовые траектории системы при $a_0 < 0$. Выделенная пунктирными линиями полоса, границы которой определяются из условия $f(\dot{y}) = 0$, является инкрементной областью. Из-за наличия флуктуаций в системе возникают колебания, которые начинают нарастать (кривая I на рис. 1),

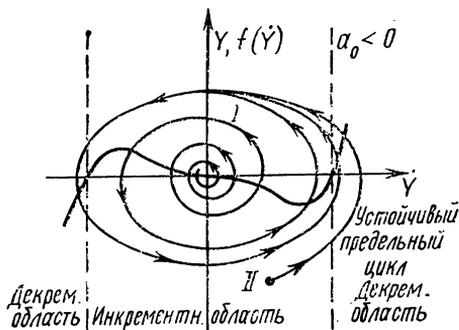


Рис. 1. Фазовый портрет и график функции нелинейного трения системы с мягким возбуждением

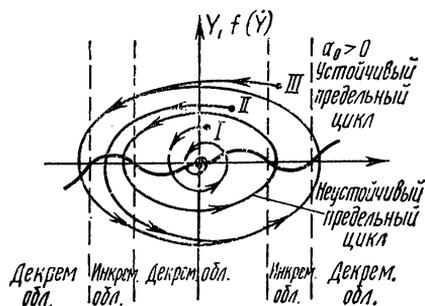


Рис. 2. Фазовый портрет и график функции нелинейного трения системы с жестким возбуждением

так как система находится в инкрементной области (энергия поступает в систему). Такой режим возникновения колебаний называется мягким. В дальнейшем фазовые траектории системы начинают заходить в декрементную область, и, следовательно, система часть времени расходует энергию. Когда в среднем за период количество энергии, поступающее в систему, будет равно количеству энергии, поглощенному системой, установятся стационарные колебания. На фазовой плоскости движение изобразится замкнутой кривой, называемой предельным циклом. Если в начальный момент система находилась вне предельного цикла, то колебания в ней будут затухать до тех пор, пока система снова не выйдет на этот предельный цикл (кривая II на рис. 1). Таким образом, предельный цикл является устойчивым, так как отклонения от стационарного режима (в обе стороны) затухают.

На рис. 2 изображены функции $f(\dot{y})$ и фазовые траектории системы при $a_0 > 0$. На фазовой плоскости в этом случае можно провести две замкнутые фазовые траектории, т. е. в системе имеются два предельных цикла, внутренний является неустойчивым, а внешний — устойчивым. Если система в начальный момент времени находится внутри неустойчивого цикла, то колебания в ней затухают (кривая I на рис. 2). Если же система в начальный момент времени находится в области между неустойчивым и устойчивым предельными циклами, то колебания в ней нарастают до тех пор, пока система не выйдет на устойчивый предельный цикл (кривая II на рис. 2). Таким образом, для возбуждения колебаний в системе

необходимо вывести ее за пределы неустойчивого предельного цикла. Такой режим возбуждения колебаний называется жестким.

Увеличение a_0 приводит к уменьшению инкрементной области, устойчивый предельный цикл при этом сжимается, а неустойчивый — расширяется. При некотором значении $a_0 = a_{кр}$ оба цикла сливаются, и в системе при $a_0 > a_{кр}$ возможен только затухающий колебательный процесс (рис. 3).

В работе с помощью нелинейной аналоговой модели исследуются переходные процессы и стационарные колебания в системе 2-го порядка с нелинейным трением, описываемой уравнением (1). Функция $f(y)$ аппроксимируется полиномами 5-й и 7-й степеней, причем коэффициент a_0 при нелинейных членах является варьруемым параметром.

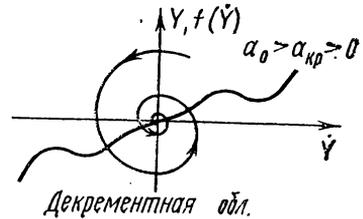


Рис. 3. Фазовый портрет и график функции нелинейного трения системы без автоколебаний

§ 2. Подготовка задачи к моделированию и описание модели

1. Машинные уравнения и структурная схема задачи. Введем машинные переменные

$$x = M_y y, \quad \dot{x} = M_j \dot{y}, \quad \tau = M_\tau t,$$

где τ — машинное время. Поскольку исследуется гипотетическая система, параметры которой количественно не заданы, масштабные множители удобно выбрать следующим образом: $M_y = M_j$, $M_\tau = 1$. Выделяя в функции $f(y)$ линейную часть, запишем уравнение (1) через машинные переменные в виде, удобном для моделирования:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} x = \dot{x}, \\ \frac{d}{d\tau} \dot{x} = -a_0 \dot{x} - F(\dot{x}) - x, \end{cases} \quad (3)$$

где $F(\dot{x}) = M_j G(\dot{x})$. Масштаб M_j выберем из соображения, чтобы при максимально возможном значении машинной переменной x функция $F(\dot{x})$ также принимала максимально возможное значение.

Структурная схема модели, отвечающая машинным уравнениям (3), приведена на рис. 4. На трех операционных блоках — 2 интегратора и инвертор — собирается модель колебательного контура. Блок ВФП осуществляет нелинейное преобразование переменной x . С помощью делителя R_0 осуществляется изменение коэффициента линейного демпфирования a_0 .

2. Описание модели. Переходные и стационарные процессы исследуются на модели автоколебательной системы. Нелинейная модель состоит из базового блока (ББ), вставки функциональных преобразований (ВФП) и коммутационной вставки (ВК). В ББ смонтированы четыре усилителя постоянного тока и блок питания. Вставка ВК предназначена для набора задачи и управления мо-

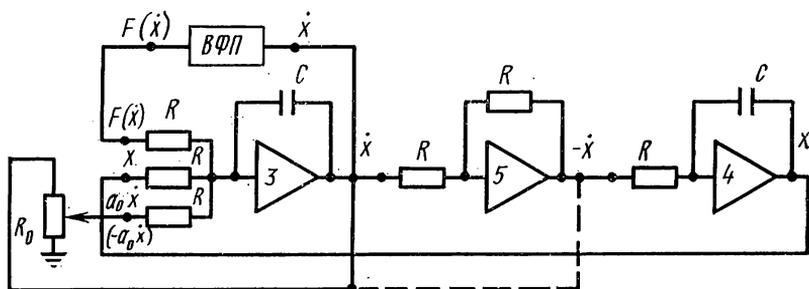


Рис. 4. Структурная схема модели автоколебательной системы

делью. ВФП позволяет воспроизводить однозначные функциональные зависимости вида: $y=f(x)$. Фактически на ВФП набирается функция $\alpha f(x)$, коэффициент α переключателем «крутизна» можно дискретно изменять в интервале от 1 до 5. В задаче используются две вставки ВФП для воспроизведения полинома 5-й (функция $F_1(\dot{x})$) и 7-й степеней (функция $F_2(\dot{x})$). Всего в модели имеются 5 усилителей, 2 из которых 1, 2 работают совместно со вставкой ВФП, один 5 работает в режиме инвертора и два 3, 4 работают в режиме интеграторов с постоянными времени по каждому входу $\tau=RC=1$ с.

Коэффициент α_0 устанавливается с помощью делителя и регулируется в пределах от 0 до 1. Коммутация элементов производится согласно рис. 4.

Модель имеет три режима работы: «исходное положение», «решение», «стоп». В режиме «исходное положение» задаются начальные условия на интеграторе 3.

В режиме «решение» осуществляется процесс решения системы уравнений, набранных согласно структурной схеме. При переводе модели в режим «стоп» на конденсаторах, стоящих в цепи обратной связи усилителей 3 и 4, «запоминаются» напряжения, которые были на них в момент остановки решения.

3. Описание работы индикатора И-4М. Индикатор И-4М имеет четыре вертикальных входа и один горизонтальный. Входы индикатора подключаются к модели согласно рис. 5.

Для удобства наблюдения процессов, происходящих в системе, входы индикатора 1 и 3 запараллелены через сопротивления

3 МОм. Таким образом, если на входы 1 и 3 подать напряжения $y(t)$ и $z(t)$, то на экране осциллографа наблюдается суммарное напряжение $y(t) + z(t)$. Это позволяет наблюдать на экране осциллографа функцию $f(x) = a_0 \dot{x} + F(\dot{x})$.

В табл. 1 указаны положения тумблеров, ключей и переключателей индикатора при его работе в различных режимах.

Таблица 1

Режим работы индикатора	Переключатель «режим работы»	Переключатель «усилитель—развертка»	Переключатель «диапазоны развертки»		Тумблер «входы»	Ключ «режим»	Тумблер «измерение—входы»	Ключ «10 В—откл.—100 В»
			«сек»	«плавно»				
1. Наблюдение процессов, происходящих во времени	1	развертка	10—100	10	3—4	2	входы	откл.
2. Наблюдение фазового портрета системы	откл.	усилитель	10—100	10	3—4	откл.	то же	то же
3. Наблюдение функций	то же	то же	10—100	10	1—2	1	»	»
4. Измерение амплитуды колебаний в системе	»	»	10—100	10	3—4	1	измерение	10 В

Примечания: 1. В режиме 1 регулировками горизонтального смещения луча (влево—вправо) и усилителя по горизонтали установить развертку во всю ширину трубки.

2. В режиме 4 ручкой «измерение» подвести горизонтальную черту к предельному циклу так, чтобы она касалась его, и считывать амплитуду предельного цикла с вольтметра, встроенного в индикатор.

4. Подготовка модели к работе. Включить модель (тумблер 220 В ББ) и дать ей прогреться 15 мин. Настроить нули усилителей 1—5.

§ 3. Упражнения

1. Наблюдение фазового портрета линейной консервативной системы. Наблюдение функций. Набрать на ВК согласно рис. 6 модель колебательного контура без затухания $\ddot{x} + x = 0$. Подключить осциллограф И-4М к модели согласно рис. 5. Для наблюдения фазовой плоскости индикатор поставить в режим 2. Задав начальные условия на интеграторе 3, перевести модель в режим решения и зарисовать фазовые траектории колебательного контура, наблюдаемые на экране осциллографа, при различных начальных условиях.

Для наблюдения функции $f(\dot{x})$ поставить индикатор в режим 3. Выставить начальные условия на интеграторе 3 + 100 В и начать решение. Модель колебательного контура в данном случае служит для получения переменного напряжения, подаваемого на вход

ВФП. Меняя дискретно a_0 , наблюдать трансформацию функции $f(\dot{x})$. Зарисовать функцию $f(\dot{x})$ при крутизне 2 для $a_0=0$, $a_0<0$, $0<a_0<a^*$ и $a_0>a^*$, где a^* — значение a_0 , при котором $f(\dot{x})$ касается оси x . На рисунках отметить декрементные и инкрементные области.

2. Наблюдение фазового портрета системы с нелинейным трением. На ВК набрать модель уравнения $\ddot{x}+f(\dot{x})+x=0$ согласно рис. 4. Посмотреть и зарисовать предельные циклы, фазовые траектории и функцию $f(\dot{x})$ (при значении крутизны 2) для следующих значений a_0 : $a_0<0$, $a_0=0$, $0<a_0<a_{кр}$, $a_0>a_{кр}$. Установить $a_0=0,5$, посмотреть и зарисовать устойчивые предельные циклы при значениях крутизны: 1, 2, 3, 4, 5. Объяснить искажение формы предельного цикла при увеличении крутизны.

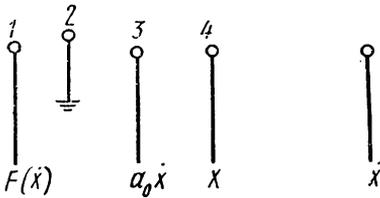


Рис. 5. Схема подключения входов индикатора И-4

Установить $a_0=0,5$, посмотреть и зарисовать устойчивые предельные циклы при значениях крутизны: 1, 2, 3, 4, 5. Объяснить искажение формы предельного цикла при увеличении крутизны.

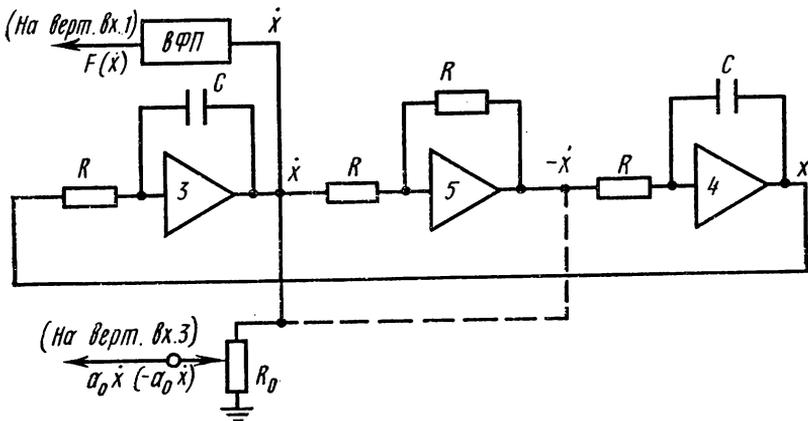


Рис. 6. Структурная схема модели колебательной системы без трения

2. Исследование процессов в модели при изменении параметра

Поставить переключатель «крутизна» в положение 2. Индикатор поставить в режим 2 для наблюдения фазовой плоскости. Установив некоторое значение a_0 , задать такие начальные условия на интеграторе 3, чтобы система вышла на устойчивый предельный цикл. Измерить амплитуду стационарных колебаний x (режим 4 работы индикатора). Затем подобрать начальные условия таким образом, чтобы движение системы начиналось с неустойчивого предельного цикла. Найденная величина начального смещения

является искомой амплитудой колебаний системы на неустойчивом предельном цикле.

Измерение амплитуд колебаний на предельных циклах производится для ряда значений $a_0 \leq 0$. По полученным данным построить график зависимости амплитуд предельных как устойчивого, так и неустойчивого циклов от a_0 и определить $a_{кр}$.

4. Наблюдение колебаний в системе с нелинейным трением во времени. Для наблюдения колебаний во времени поставить индикатор в режим 1. Меняя a_0 и начальные условия, получить на экране осциллографа процесс установления колебаний в системе с мягким и жестким режимом возбуждения. Для $a_0 > a_{кр}$ наблюдать процесс затухания колебаний при любых начальных условиях. Наблюдаемые процессы зарисовать.

5. Изучение переходных и стационарных процессов в автоколебательной системе с нелинейностью, аппроксимированной полиномом 7-й степени. Вместо $F_1(\dot{x})$ вставить ВФП, на которой набран полином 7-й степени. Прodelать упражнения 1—4 с полиномом 7-й степени, учтя его особенности, в частности наличие в определенном диапазоне изменения a_0 трех предельных циклов. Построить график зависимости амплитуд колебаний на устойчивых и неустойчивых предельных циклах от a_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М., ГТТИ, 1952, § 5—8.
2. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1964, § 47—50.

4. ИЗУЧЕНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Методом электронного моделирования исследуются процесс установления колебаний и синхронизация генератора с инерционной нелинейностью.

§ 1. Введение

Автоколебательные системы (генераторы) принципиально нелинейны [1]. Нелинейность ограничивает рост автоколебаний, определяя в конечном итоге амплитуду стационарных колебаний. Различают два класса автоколебательных систем: 1) генераторы с безынерционной нелинейностью, 2) генераторы с инерционной нелинейностью. Нелинейность генератора будем называть безынерционной, если нелинейный параметр генератора меняется в процессе колебаний в течение каждого периода. Напротив, если изменениями нелинейного параметра в течение одного периода колебаний можно пренебречь, то такую нелинейность называют инерционной.

При замене в генераторе безынерционной нелинейности инерционной число степеней свободы системы увеличивается, так как появляется по крайней мере одна дополнительная переменная, характеризующая состояние системы. В связи с этим генераторы с инерционной нелинейностью приобретают по сравнению с безынерционными ряд новых свойств.

В настоящей задаче изучается возможность возникновения в генераторах с инерционной нелинейностью осцилляций огибающей колебаний при установлении стационарного режима генерации. Эти осцилляции могут являться причиной возникновения так называемого пикового режима, т. е. больших выбросов амплитуды колебаний. Пиковый режим наблюдается также при воздействии на генератор с инерционной нелинейностью внешней силы. Изучение некоторых особенностей явления синхронизации генераторов с инерционной нелинейностью является предметом второй части настоящей задачи.

Примерами генераторов с инерционной нелинейностью могут служить такие важные для современной физики приборы, как оптические квантовые генераторы (лазеры), генераторы, основанные на ядерном резонансе (спиновые генераторы), и радиотехнические генераторы, содержащие термочувствительные элементы. Колебательные процессы в таких системах могут изучаться с единой точки зрения. Ниже рассматривается модель генератора с инерционной нелинейностью, собранная на электронной аналоговой машине.

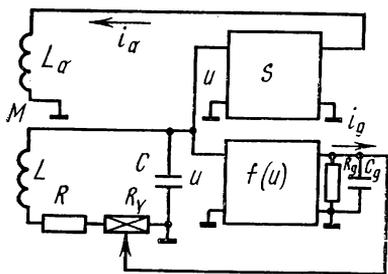


Рис. 1. Схема генератора с инерционной нелинейностью

§ 2. Теория

1. Уравнения генератора с инерционной нелинейностью и их стационарное решение. Блок-схема модели генератора с инерционной нелинейностью показана на рис. 1. Она содержит электрический колебательный контур и две отдельные цепи обратной связи.

Цепь, содержащая четырехполюсник S , моделирует линейную усилительную часть генератора, через которую осуществляется поступление энергии от источника в колебательную систему. Цепь, содержащая четырехполюсник $f(u)$ в совокупности с элементом R_γ , моделирует нелинейный параметр генератора. Цепочка $R_\gamma C_\gamma$ задает время релаксации этого параметра, т. е. инерционность нелинейности.

Токи в выходных цепях четырехполюсников S и $f(u)$ равны соответственно $i_\alpha = Su$ и $i_g = f(u)$, где u — напряжение на входных клеммах четырехполюсников; S — постоянная величина (напри-

мер, крутизна характеристики электронной лампы в рабочей точке); $f(u)$ — заданная нелинейная функция u . Входящее в колебательный контур сопротивление R_y предполагается пропорциональным напряжению v , снимаемому с цепочки $R_g C_g$:

$$R_y = \alpha v. \quad (1)$$

M есть коэффициент взаимоиנדукции между катушками индуктивности L и L_a .

Автономные колебания в генераторе описываются системой уравнений

$$\begin{cases} \ddot{u} + (\beta v - \mu) \dot{u} + \omega_0^2 u = 0, \\ \dot{v} = -\gamma v + R_g \gamma f(u), \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

где

$$\mu = \left(\frac{MS}{LC} - \frac{R}{L} \right), \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \gamma = \frac{1}{R_g C_g}, \quad \beta = \frac{\alpha}{L}.$$

Если в момент включения генератора конденсатор C_g не заряжен, то в течение некоторого промежутка времени, пока $\mu \gg \beta v$, в системе возникают колебания

$$u(t) = u(0) e^{\frac{\mu}{2} t} \cos[\omega t + \varphi(0)], \quad (4)$$

которые при $\mu > 0$ (условие самовозбуждения) нарастают.

Здесь $u(0)$ — начальное значение u , обычно определяемое флуктуациями величины u , $\varphi(0)$ — случайное значение начальной фазы, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2/4}$.

Коэффициент μ определяет скорость нарастания колебаний. Назовем его коэффициентом регенерации.

Коэффициент γ характеризует инерционные свойства нелинейной цепи генератора. При $f(u) = 0$ значение $1/\gamma$ есть время релаксации напряжения v . Согласно классификации генераторов, отмеченной во введении, для безынерционных генераторов имеет место неравенство

$$\frac{1}{\gamma} \ll T, \quad (5)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период автоколебаний, тогда как для генераторов с инерционной нелинейностью

$$\frac{1}{\gamma} \gtrsim T. \quad (6)$$

При выполнении неравенства (5) переменная $v(t)$ системы (2), (3) является быстрой по сравнению с переменной $u(t)$. Тогда в уравнении (3) u можно считать постоянной и (3) легко проинтегрировать: $v = R_g f(u) + C \exp(-\gamma t)$, где C зависит от начальных условий. В силу (5) экспонента обращается в нуль за время, много меньшее периода колебаний переменной u , поэтому вместо v можно подставить в (2) его стационарное значение

$$v_c = R_g f(u)$$

и получить одно уравнение, заменяющее систему (2), (3):

$$\ddot{u} + (\beta' f(u) - \mu) \dot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad (7)$$

где

$$\beta' = \beta R_g.$$

Таким образом, модель генератора при безынерционном характере нелинейности является системой с одной степенью свободы.

При выполнении условия (6) необходимо совместно решать уравнения (2) и (3). Это значит, что в данной модели введение инерционной нелинейности увеличивает число степеней свободы на $1/2$.

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд [2], запишем укороченные уравнения для системы (2), (3):

$$\dot{a} = \frac{1}{2} a \mu \left(1 - \frac{\beta v}{\mu} \right), \quad (8)$$

$$\dot{v} = -\gamma v + K \gamma a. \quad (9)$$

Предполагалось, что $f(u) = 0$, при $u \leq 0$, и $f(u) = \kappa u$, при $u > 0$; κ — постоянный коэффициент, $K = \frac{\kappa R_g}{\pi}$. Из системы (8), (9) следует стационарное решение

$$v_0 = \frac{\mu}{\beta}, \quad a_0 = \frac{\mu}{\beta \kappa}. \quad (10)$$

2. Анализ устойчивости стационарного режима генератора с инерционной нелинейностью. Исследования стационарного решения системы (8), (9) на устойчивость показывают, что стационарный режим устойчив. При условии $\gamma > 2\mu$ стационарный режим устанавливается апериодически¹, а при $\gamma < 2\mu$ — переходный процесс носит колебательный характер с характерной квазичастотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu \gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (11)$$

¹ Здесь и ниже в слово «апериодически» вкладывается смысл «не колебательно». Иногда такое движение называют лимитационным.

или при $\gamma \ll 2\mu$

$$\Omega \approx \sqrt{\frac{\mu\gamma}{2}}. \quad (12)$$

Наличие при условии ($\gamma < 2\mu$) характерной частоты Ω есть особенность генератора с инерционной нелинейностью.

В литературе, посвященной оптическим квантовым генераторам, частоту Ω принято называть частотой релаксационных колебаний.

3. Синхронизация генератора с инерционной нелинейностью. Во многих случаях на практике важно знать результат воздействия на генератор внешних сил. Наибольший интерес представляет действие сил, периодически меняющихся с частотами, близкими или кратными частоте автоколебаний. Внешняя сила, меняющаяся с частотой ω , в определенной области значений $|\omega_r - \omega_0|$ может «навязать» генератору свою частоту колебаний ω . Это явление получило название синхронизации [1].

Пусть внешняя гармоническая ЭДС $e_0 \cos \omega t$ включена в схему, как показано на рис. 2. Тогда уравнение (2) заменяется следующим:

$$\ddot{u} + (\beta\nu - \mu)\dot{u} + \omega_0^2 u = -B\omega^2 \cos \omega t, \quad (13)$$

где

$$B = e_0 \frac{C_{св}}{C + C_{св}}.$$

Уравнение (3) остается без изменений.

Система укороченных уравнений, соответствующая уравнениям (13) и (3), имеет вид

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \omega B \sin \varphi + \frac{1}{2} a \mu \left(1 - \frac{\beta\nu}{\mu} \right), \quad (14)$$

$$\dot{\varphi} = \Delta + \frac{\omega B}{2a} \cos \varphi, \quad (15)$$

$$\dot{v} = -\gamma v + \gamma K a. \quad (16)$$

Она получена в предположении, что в системе имеют место колебания $u = a(t) \cos[\omega t + \varphi(t)]$, $\varphi(t)$ есть медленно меняющийся сдвиг фаз между колебаниями внешней ЭДС и напряжения u . Величину $\Delta = (\omega^2 - \omega_0^2)/2\omega$ называют расстройкой. Анализ системы (14)–(16) позволяет: 1) найти зависимость ширины области синхронизации генератора от его параметров и амплитуды внешней силы, 2) определить характер колебаний генератора вне области синхронизации. Последнее представляет особый интерес вблизи

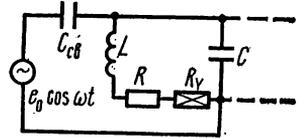


Рис. 2. Эквивалентная схема генератора с инерционной нелинейностью при воздействии внешней гармонической силы

границы области синхронизации, где в генераторе с инерционной нелинейностью возникает пиковый режим.

Ограничиваясь случаем достаточно слабого (см. ниже) внешнего воздействия, считаем область синхронизации симметричной относительно ω_0 , равной удвоенному значению модуля максимальной расстройки Δ_r . Определение Δ_r сводится к нахождению области расстроек, внутри которой стационарное решение системы (14)—(16) в виде гармонического колебания устойчиво. Для оценки устойчивости решения необходимо линеаризовать эту систему для малых отклонений ξ , ψ и η соответственно от стационарных значений a_c , φ_c и v_c и составить характеристическое уравнение линеаризованной системы. Характеристическое уравнение в этом случае оказывается кубическим

$$\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0, \quad (17)$$

причем

$$b_1 = \gamma - \mu(1 - x), \quad (18)$$

$$b_2 = \frac{\mu^2}{4} (1 - x)^2 + \gamma \mu \left(1 - \frac{3}{2} x\right) + \Delta^2, \quad (19)$$

$$b_3 = \gamma \left[\frac{\mu^2}{4} (1 - x)^2 + \Delta^2 - \frac{\mu^2}{4} (1 - x) x \right], \quad (20)$$

где $x = a_c/a_0$, a_0 — амплитуда колебаний автономного генератора.

По условиям Рауса—Гурвица [1] стационарный режим устойчив при

$$b_1 \geq 0, \quad (21)$$

$$b_3 \geq 0, \quad (22)$$

$$b_1 b_2 - b_3 \geq 0. \quad (23)$$

Знаки равенства соответствуют границам устойчивого режима. Для генератора с идеальной инерционной нелинейностью ($\gamma=0$) уравнение (17) становится квадратным и имеет следующие корни:

$$\lambda_{\gamma=0} = \frac{1}{2} \mu (1 - x) \pm i \Delta. \quad (24)$$

Из (21) следует, что границам области синхронизации генератора с идеальной инерционной нелинейностью соответствуют значения амплитуды $a_c = a_0$, причем фаза φ на этих границах принимает соответственно значения 0 и π . Формула для определения граничных частот, определяющих ширину области синхронизации, имеет вид

$$\omega_{r1,2} = \omega_0 \sqrt{\frac{a_0}{a_0 \mp B}}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что при $B \ll a_0$

$$\Delta_r \approx \frac{B \omega_0}{2 a_0}. \quad (26)$$

Характер устойчивости стационарного режима определяется видом корней уравнения (17). Ограничимся двумя предельными случаями.

1. Пусть

$$\frac{\gamma}{\mu} \gg |(1-x)|, \quad (27)$$

что соответствует при заданной величине γ/μ достаточно слабому внешнему воздействию (x близко к 1). В этом случае уравнение (17) заменяется квадратным, совпадающим с характеристическим уравнением для автономного генератора. Поэтому характер процесса возвращения к стационарному состоянию такой же, как в автономном генераторе.

2. Пусть

$$\frac{\gamma}{\mu} \ll |(1-x)|, \quad (28)$$

что соответствует при заданном значении γ/μ достаточно большому внешнему воздействию. Тогда уравнение (17) можно заменить следующим:

$$\left[\lambda - \frac{\mu(1-x)}{2} \right]^2 = 0, \quad (29)$$

имеющим кратный корень

$$\lambda = \frac{1}{2} \mu (1-x). \quad (30)$$

В большей части области синхронизации $x > 1$ и $\lambda < 0$, поэтому характер возвращения системы к стационарному режиму является аperiodическим.

При анализе колебаний генератора вне области синхронизации вблизи ее границы допустимо искать решение системы (14)—(16) в виде $u = a(t) \cos[\omega t + \varphi(t)]$, где в отличие от стационарного синхронного режима $a(t)$ и $\varphi(t)$ меняются во времени не только в течение процесса установления колебаний. Аналитически решить систему (14)—(16) и определить функции $a(t)$ и $\varphi(t)$ в этом случае уже не представляется возможным и приходится прибегать к приемам машинного счета. Экспериментальная осциллограмма колебаний генератора вблизи области синхронизации показана на рис. 3.

Осциллограмма показывает, что огибающая амплитуды колебаний сама совершает колебания, в которых можно выделить два характерных периода: период следования пичков T_{Π} и период почти гармонической модуляции T_{μ} , имеющей место между пичками.

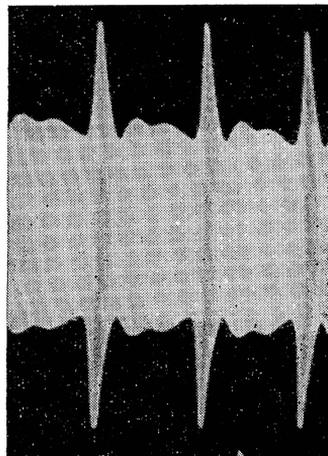


Рис. 3. Биения вне области синхронизации в ламповом генераторе с инерционной нелинейностью

Анализ системы (14)—(16) позволяет заключить, что период следования пиков T_{Π} увеличивается с ростом инерционности нелинейности генератора (уменьшением γ) и всегда превышает значение периода T_{ϕ} модуляции при аналогичных условиях огибающей колебаний в безынерционном генераторе:

$$T_{\phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta^2 - \Delta_2^2}}. \quad (31)$$

Между пиками ϕ близко к нулю, что позволяет подставить в систему (14)—(16) значения $\cos\phi_c \approx 1$ и $\sin\phi_c \approx 0$, а затем методом гармонической линеаризации вычислить период модуляции, который оказывается равным

$$T_M = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta^2 + \frac{2\omega B \mu \gamma}{|\Delta| a_0}}}. \quad (32)$$

В предлагаемой задаче свойства генератора с инерционной нелинейностью исследуются на электронной модели МН-10М.

1. Машинные уравнения и структурная схема задачи. Математическое описание задачи дано уравнениями (3), (13). Введем машинные переменные и свяжем их с переменными системы (3), (13):

$$\begin{aligned} e_1 &= a_u u; & e_2 &= a_v v; \\ \dot{e}_1 &= a_{\dot{u}} \frac{du}{dt}; & \tau &= a_{\tau} t. \end{aligned} \quad (33)$$

На основе (13), (3) и (33) запишем систему уравнений в виде, удобном для моделирования:

$$\frac{de_1}{d\tau} = - \left(\frac{\beta}{a_{\tau} a_v} e_2 - \frac{\mu}{a_{\tau}} \right) \dot{e}_1 - \frac{a_{\dot{u}} \omega_0^2}{a_{\tau} a_u} e_s - \frac{a_{\dot{u}}}{a_{\tau}} \omega^2 B \cos \frac{\omega}{a_{\tau}} \tau, \quad (34)$$

$$\frac{de_1}{d\tau} = \frac{a_u}{a_{\dot{u}} a_{\tau}} \dot{e}_1,$$

$$\frac{de_2}{d\tau} = - \frac{\gamma}{a_{\tau}} e_2 + \frac{a_v}{a_{\tau}} R_g \gamma f \left(\frac{e_1}{a_u} \right).$$

Максимально возможные значения напряжения на выходе операционного усилителя для модели МН-10М составляют ± 25 В. Для того чтобы иметь возможность без искажений наблюдать нестационарные режимы в генераторе с инерционной нелинейностью, амплитуду автономных колебаний модели выберем равной 10 В.

В задании даются только такие значения μ , которые связаны с β равенством $\mu = \beta$. Выберем также значения $k = \frac{\kappa R_g}{\pi} = 1$ и $\omega_0 = 10$ рад/с. Как следует из теории (см. (10)) при указанных значениях параметров задачи переменная u будет совершать колебания с амплитудой 1, i — с амплитудой ω_0 , а переменная v имеет стационарное значение 1. Для того чтобы соответствующие машинные переменные e_1 и e_1 имели амплитуду колебаний 10 В, а стационарное значение машинной переменной e_2 равнялось также 10 В, следует выбрать следующие масштабные множители:

$$a_u = 10\text{В}; \quad a_v = 10\text{В}, \quad a_i = \frac{10\text{В}}{\omega_0} = |B \cdot c|. \quad (35)$$

Процессы установления в системе (34) длятся до нескольких сотен периодов. Поэтому, для того чтобы время решения не было слишком большим, следует выбирать как можно меньший масштаб по времени a_τ . В данной задаче он выбран равным 0,1, что соответствует частоте колебаний в модели около 16 Гц. Однако на такой частоте трудно проводить набор и наладку схемы. Поэтому при наладке выбран $a_\tau = 1$. Для того чтобы иметь возможность быстро изменять a_τ в десять раз, каждый блок интегрирования и суммирования (БИС) модели МН-10М был дополнен емкостью 0,1 мкФ, которую можно включать в цепь обратной связи первого усилителя БИС тумблером, выведенным на лицевую панель БИС. Емкость 1 мкФ соответствует $a_\tau = 1$, а 0,1 мкФ — $a_\tau = 0,1$.

Подставляя масштабные множители (35) и $a_\tau = 1$ в уравнения (34), получим

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{d\tau} &= - \left(\frac{\beta}{10\text{В}} e_2 - \mu \right) e_1 - \omega_0 e_s - \omega^2 B \cos \omega \tau, \\ \frac{de_1}{p\tau} &= \omega_0 e_1, \\ \frac{de_2}{d\tau} &= - \gamma e_2 + 10\text{В} R_g \gamma f \left(\frac{e_1}{a_u} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Структурная схема модели, отвечающая системе машинных уравнений (36), показана на рис. 4. Нумерация и символика операционных элементов на структурной схеме соответствуют лицевой панели и наборному полю аналоговой вычислительной машины МН-10М. Так, усилители на структурной схеме пронумерованы двумя цифрами: первая цифра соответствует номеру платы, вторая — номеру усилителя.

Входные сопротивления пронумерованы также двумя цифрами. Первая соответствует номеру платы, вторая — номеру сопротивления. Условимся нумеровать сопротивления на каждой плате сверху вниз, начиная с номера 1. Коэффициенты передачи по различным входам операционных усилителей обозначены $k_1 - k_{10}$.

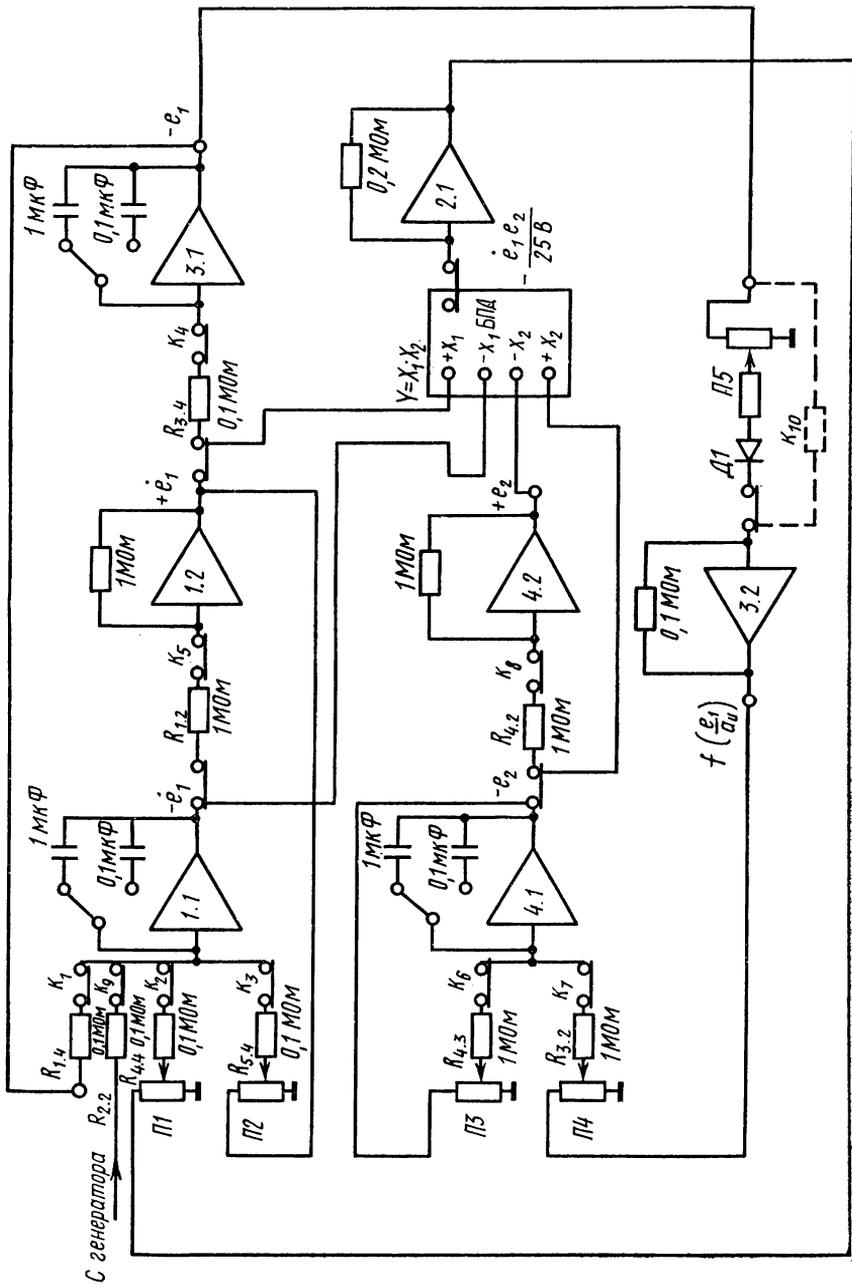


Рис. 4. Структурная схема модели

Операционные усилители 1.1, 1.2 и 3.1 моделируют основную колебательную систему генератора и образуют линейный контур

$$\ddot{e}_1 = \mu \dot{e}_1 - \omega_0^2 e_1.$$

Несколько необычная последовательность операционных блоков линейного контура связана с необходимостью получения $\pm \dot{e}_1$ для блока умножения.

Усилители 4.1 и 4.2 моделируют инерционное звено генератора (уравнение (3)).

Нелинейная функция

$$f\left(\frac{e_1}{a_u}\right) = \begin{cases} k_{10}e_1, & \text{при } e_1 \geq 0; \\ 0, & \text{при } e_1 < 0; \end{cases}$$

моделируется с помощью диода Д1, включенного во входную цепь операционного усилителя 3.2. Величину коэффициента k_{10} можно менять с помощью потенциометра П5. Чтобы напряжение на выходе усилителя 3.2 не превышало напряжение на выходе усилителя 3.1, удобно выбрать $k_{10}=1$.

Для умножения функций $e_1 e_2$ применяется блок перемножения и деления (БПД). Он оформлен в виде съемного блока, использующего, вообще говоря, два операционных усилителя, и может быть вставлен в любую ячейку модели, в данном случае во вторую. В режиме перемножения БПД использует один операционный усилитель 2.1. Для правильной работы БПД на его входы следует подать как сами перемножаемые напряжения на входы $+X_1$, $+X_2$, так и инвертированные напряжения на входы $-X_1$ и $-X_2$ соответственно. Для создания инвертированных напряжений усилители 1.2 и 4.2 работают в режиме инверторов, т. е. $k_5=k_9=1$. С выхода усилителя 2.1 снимается напряжение $e_1 e_2 / 25$ В.

Внешнее гармоническое напряжение берется с генератора сигналов ГЗ-39. Частота и амплитуда внешнего сигнала могут дискретно меняться соответствующими ручками генератора.

Учитывая все вышесказанное, легко, глядя на структурную схему задачи, написать выражения, связывающие между собой коэффициенты передачи операционных усилителей при условии, что все емкости равны 1 мкФ, с параметрами системы (36), а следовательно, и (13), (3):

$$k_1 = k_4 = \omega_0 = 10; \quad k_5 = k_{10} = k_8 = 1; \quad k_9 = 10; \quad (37)$$

$$k_2 = 2,5\beta; \quad k_6 = \gamma; \quad B\omega^2 = V;$$

$$k_3 = \mu; \quad k_7 = R_g \mu \gamma = \pi \gamma.$$

Решение задачи: функции $e_1(t)$ и $e_2(t)$ наблюдаются на стрелочном вольтметре, имеющемся на панели управления модели, на осциллографе и записываются на быстродействующем самописце НЗ38—4. При выполнении упражнений, когда частота генератора

равна 100 рад/с, использовать стрелочный вольтметр модели нельзя.

Самописец рассчитан на запись сигнала до 10 В, поэтому сигнал, снимаемый с модели, предварительно следует ослабить в десять раз на делителе напряжения.

2. Построение модели и настройка операционных элементов.

1. Включить модель и в режиме «настройка» установить необходимые значения коэффициентов передачи $k_1—k_{10}$ операционных усилителей (см. (37)). В цепи обратных связей интеграторов при этом включить емкости 1 мкФ. Некоторые из коэффициентов, а именно $k_1, k_4, k_5, k_8, k_9, k_{10}$, выставляются с помощью постоянных сопротивлений один раз, другие — соответствующие параметрам μ, β и γ (k_2, k_3, k_6, k_7) — устанавливаются в процессе работы с помощью калиброванных потенциометров П1—П4.

2. Коммутация и проверка работы линейной части модели и функции $f(e_1/a_u)$. Соединяя в режиме «настройка» входы и выходы усилителей 1.1, 1.2 и 3.1 согласно структурной схеме, построить модель линейного контура

$$\ddot{u} = -\omega_0^2 u. \quad (38)$$

Перейти к режиму «решение». На одном из интеграторов в режиме «исходное положение» задать начальные условия 20 В. Нажать кнопку «пуск» и по фазовому портрету системы (38), наблюдаемому на осциллографе, убедиться, что переменная $u(e_1)$ совершает колебания с частотой ω_0 . Частоту собственных колебаний контура измерить по фигурам Лиссажу на осциллографе. Для этого на одни пластины следует подать напряжение с выхода усилителя 3.1, а на другие — сигнал с генератора. Убедиться, что частота равна 10 рад/с.

Подать напряжение с выхода усилителя 3.1 на вход диода Д1, находящегося на верхней панели модели. Функцию $f(u)$ наблюдать на осциллографе: на вход горизонтальных пластин подать переменное напряжение с линейного контура (выход усилителя 3.1), а на вход вертикальных — напряжение $f(u)$ с выхода усилителя 3.2.

Соединить выход усилителя 1.2 со входом усилителя 1.1, что соответствует введению в контур регенерации μu . Задать на интеграторах 1.1 и 3.1 нулевые начальные условия и убедиться, что колебания в контуре возрастают.

3. Коммутация и проверка схемы уравнения (3) для переменной v (инерционного звена). В режиме «настройка» на усилителях 4.1 и 4.2 собрать линейную часть схемы инерционного звена, соответствующую дифференциальному уравнению $\dot{v} = -\gamma v$. Задать на интеграторе 4.1 начальное напряжение 25 В. Перейти к режиму «решение» и, нажав кнопку «пуск», убедиться, что напряжение на выходе усилителя 4.1 (v) спадает по экспоненте тем быстрее, чем больше γ .

4. Проверка блока умножения. Подключить клемму $Y=X_1X_2$ к суммирующей точке усилителя 2.1. Соединить входы $\pm X_1$ и $\pm X_2$ БПД с выходами усилителей 1.1, 1.2, 4.1 и 4.2 согласно структурной схеме задачи. В режиме «исходное положение» задать на интеграторах 1.1 и 4.1 начальные напряжения 25 В. Убедиться, что на выходе БПД усилителя 2.1 напряжение равно также 25 В.

5. Проверка функционирования схемы в целом. Соединить вход интегратора 4.1 с выходом усилителя 3.2, что соответствует введению в уравнение для инерционного звена (переменной v) нелинейной функции $f(u)$: $\dot{v} = -\gamma v + \gamma f(u)$.

Соединить выход БПД (усилитель 2.1) со входом интегратора 1.1, что эквивалентно введению в уравнение для переменной u нелинейной отрицательной обратной связи $\beta v u$.

Чтобы убедиться в этом, следует положить $\mu=0$ (отключить напряжение с выхода усилителя 1.2, подаваемое на вход k_3 интегратора 1.1), задать на интеграторе 1.1 начальное напряжение 25 В и, нажав кнопку «пуск», убедиться, что колебания в контуре затухают тем быстрее, чем больше β .

Если же $\mu \neq 0$ (восстановить коммутацию выхода усилителя 1.2 и входа интегратора 1.1), то напряжения в схеме будут изменяться согласно системе дифференциальных уравнений (2), (3), т. е. будут моделировать процессы, происходящие в генераторе с инерционной нелинейностью.

При правильном наборе всех коэффициентов схемы амплитуда автономных колебаний генератора должна быть равна 10 В (выходы усилителей 1.1 и 3.1).

§ 4. Упражнения

З а м е ч а н и е 1. Перед началом выполнения упражнений уменьшить a_t в десять раз, для чего включить в обратную связь операционным усилителям 1.1, 3.1 и 4.1 емкость 0,1 мкФ.

З а м е ч а н и е 2. Прежде чем записать необходимые кривые на самописце, следует посмотреть их на осциллографе и убедиться, что модель работает правильно. **САМОПИСЕЦ ВКЛЮЧАТЬ ТОЛЬКО НА ВРЕМЯ ЗАПИСИ КРИВОЙ.**

1. Исследование процесса установления колебаний автономного генератора. Для значений параметров γ и $\mu=\beta$, указанных в табл. 1, исследовать характер процесса установления колебаний автономного генератора. Начальные условия на всех интеграторах задать нулевые: $u=\dot{u}=v=0$. Убедиться, что при $\gamma < 2\mu$ процесс установления амплитуды носит колебательный характер. Записать на самописце процесс установления колебаний переменной u (напряжение с выхода усилителя 3.1) для каждого из указанных в табл. 1 наборов значений параметров. Для $\gamma < 2\mu$ на полученных лентах определить частоту колебаний огибающей. Скорость движения ленты самописца выбрать равной 10 мм/с. Полученные результаты сравнить с теорией (см. (12)).

Таблица 1

γ	0,1	0,3	0,3
$\beta=\mu$	2	2	0,1

2. Определение ширины полосы синхронизации при воздействии на генератор с инерционной нелинейностью гармонической внешней силы. Подать на вход k_2 усилителя 1.1. синусоидальный сигнал с генератора. Для значе-

ний амплитуды сигнала 0,5; 1; 1,5 и 2 В найти ширину полосы синхронизации генератора с инерционной нелинейностью. На плоскости параметров $B\omega^2$ и $\omega_{гр}$ построить соответствующие графики полос синхронизации для двух наборов значений параметров: $\gamma=0,1$, $\beta=\mu=2$ и $\gamma=0,3$, $\beta=\mu=0,1$. Там же построить теоретическую кривую для $\gamma=0$ — идеальная инерционность (см. (25)).

Наблюдать явление синхронизации удобно по фигурам Лиссажу на осциллографе. На один вход подается сигнал с генератора, а на другой — сигнал с выхода усилителя 1.1 (u). На границе полосы синхронизации сдвиг фаз между двумя напряжениями близок к $\pi/2$.

З а м е ч а н и е 3. Время переходных процессов на границе полосы синхронизации велико $\sim 30-100$ с. Поэтому при поиске границы области синхронизации следует подходить к ней и из области синхронизации, и из области биений. Если наблюдения за переходными процессами велись достаточно долго, то результаты таких измерений будут одинаковыми.

3. Исследование процесса установления синхронного режима внутри полосы синхронизации. Для генератора с инерционной нелинейностью при $\gamma/\mu < 1/2$ характер установления синхронного режима зависит от амплитуды внешнего воздействия. Для малых B он носит колебательный характер, для больших становится аперiodическим.

Записать на самописце процессы установления синхронного режима для $\gamma=0,1$, $\beta=\mu=2$ при значениях амплитуды внешней силы 0,02; 0,05; 0,5 и 1 В на частоте $\omega=\omega_0$. Для этого задать на всех интеграторах нулевые начальные условия: $u=\dot{u}=v=0$ и включить самописец одновременно с кнопкой «пуск» машины.

Частоту, соответствующую середине полосы синхронизации, можно оценить по фигурам Лиссажу. В середине полосы синхронизации сдвиг фаз между колебаниями переменной u и внешней силой равен 0.

4. Исследование характера биений вне полосы синхронизации. Как указывалось в теоретическом разделе, биения генератора с инерционной нелинейностью вблизи границы области синхронизации носят характер пичков. Область пичкового режима увеличивается с увеличением нелинейности генератора (параметров μ и β). Поэтому для наблюдения пичкового режима выставить следующие значения параметров $\gamma=0,1$ и $\beta=\mu=4$.

Для трех различных значений ω , взятых вблизи границы поло-

сы синхронизации генератора так, чтобы наблюдался режим пичков, и при амплитуде внешней гармонической силы 0,5 В записать на самописце биения. Скорость движения ленты самописца выбрать равной 2,5 мм/с. По полученным лентам определить характер зависимости периода следования пичков T_n от $\omega - \omega_{гр}$ и оценить период изменения огибающей амплитуды колебаний между пичками T_m . Полученные результаты сравнить с теорией (см. с. 254).

Указание. При записи необходимо учитывать, что время установления биений, близких к стационарным, достигает нескольких T_n , поэтому запись на самописце проводить только после того, как по осциллографу убедитесь, что процесс установления биений кончился.

В итоге выполнения задачи следует представить:

1) записанные на самописце кривые установления колебаний автономного генератора;

2) графики зависимости частоты на границе полосы синхронизации от амплитуды внешней силы для сильной и слабой инерционности $\gamma/\mu \ll 1$ и $\gamma/\mu \gg 1$. Там же построить теоретическую кривую для $\gamma=0$ — идеальная инерционность;

3) кривые установления синхронного режима в середине полосы синхронизации для различных значений амплитуд внешней силы;

4) записанные на самописце биения вне полосы синхронизации (пичковый режим).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М., Гостехиздат, 1952.
2. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1964.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
4. Техническое описание модели МН-10М.
5. Корн Г. А., Корн Т. М. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины, ч. 1. М., «Мир», 1967.

5. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РОСТА МИКРООРГАНИЗМОВ

На аналоговой вычислительной машине решается нелинейная система дифференциальных уравнений 2-го порядка, описывающая рост микроорганизмов при ограниченных ресурсах питательных веществ.

§ 1. Введение

Применение математических методов к изучению биологических объектов в последние годы получило широкое развитие. Это относится не только к области статистической обработки резуль-

татов экспериментов, но и к построению и формулировке некоторых общих (количественных) биологических законов. Другими словами, математика приходит на помощь биологии для формализации записи известных из эксперимента закономерностей. Первый этап формализации — это построение математической модели явления. Второй этап, чисто математический, — исследование модели — приводит к некоторым выводам, которые снова сравниваются с экспериментом. При этом часто оказывается необходимым уточнение и дополнение первоначальной модели, так как она не описывает некоторые важные черты исследуемого явления. Одно из наиболее развитых направлений моделирования — построение и изучение динамических или кинетических моделей биологических систем.

В химии давно существует целая отрасль — химическая кинетика, которая с помощью аппарата дифференциальных уравнений изучает скорости протекания реакций. Переменными служат концентрации реагирующих веществ; если в реакции участвуют n компонентов (x_i — концентрация i -того компонента), то в общем случае система кинетических уравнений имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n); \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Такие системы уравнений часто встречаются в физике и носят название «динамических систем». Специфическая особенность «химических систем» состоит в том, что все переменные обязательно должны быть положительными, так как отрицательные концентрации не имеют смысла.

В биологии подобную динамическую систему впервые составил Вольтерра для описания взаимодействия двух антагонистических видов животных, обитающих в некотором районе (задача о хищниках и жертвах). Постановку и аналитическое решение этой задачи можно найти в книге [1, с. 164].

Другой интересной задачей подобного рода является моделирование роста колонии микроорганизмов при ограниченных запасах пищи [2]. Целью настоящей работы является исследование (с помощью электронной моделирующей машины) динамики роста микроорганизмов в зависимости от изменения параметров: скорости поступления свежей питательной среды и вероятности гибели микроорганизмов.

§ 2. Теория

1. Рост микроорганизмов в замкнутом сосуде. В сосуд с питательной средой — субстратом — в начальный момент времени помещают некоторое количество одноклеточных микроорганизмов. По прошествии небольшого времени клетки начинают потреблять субстрат и расти, затем достигают зрелого возраста, делятся; дочерние клетки снова растут и т. д., пока не израсходуется весь

запас питательных веществ. По мере расхода субстрата рост клеток замедляется и, наконец, вовсе прекращается.

Весь этот процесс можно математически рассчитать, если известна зависимость скорости роста клеток от концентрации субстрата в окружающей клетку среде.

Обозначим концентрацию биомассы клеток через X моль/л, концентрацию субстрата — через S моль/л. Если субстратом, лимитирующим рост клеток, является источник углерода, целесообразно обе концентрации измерять числом молей углерода.

Отношение $\mu = \frac{dX}{dt} / X$ называется удельной скоростью роста биомассы, зависимость ее от концентрации субстрата выражается кривой с насыщением (рис. 1) и может быть аппроксимирована уравнением гиперболы

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S}, \quad (2)$$

где μ_m и K_S — константы аппроксимации.

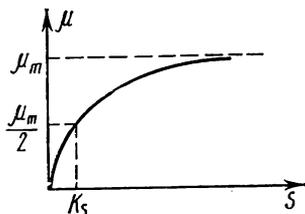


Рис. 1. Зависимость удельной скорости роста от концентрации субстрата

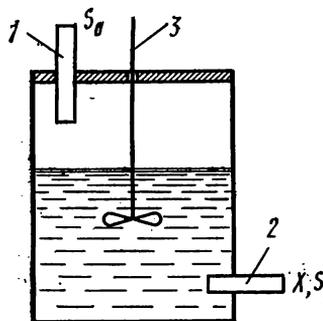


Рис. 2. Схема проточного культиватора

Используя определение удельной скорости роста, можно написать уравнение прироста концентрации биомассы

$$\frac{dX}{dt} = \mu X = \frac{\mu_m S}{K_S + S} X. \quad (3)$$

Если $S \gg K_S$, уравнение (3) становится линейным, что соответствует экспоненциальному росту биомассы при неограниченном снабжении клеток питательными веществами. Такой рост всегда наблюдается в начальной стадии развития колонии микроорганизмов, но затем ресурсы пищи начинают истощаться, S становится сравнимо с K_S , и рост описывается нелинейным уравнением (3).

Составим уравнение, описывающее изменение во времени концентрации субстрата S . Микроорганизмы, поглощая субстрат, только частично используют его на построение своей массы, а остальную часть выделяют в виде побочного продукта в окружающую среду¹, поэтому скорость потребления субстрата будет больше скорости прироста биомассы в α раз:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha \frac{dX}{dt} = -\frac{\alpha \mu_m S}{K_S + S} X. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) образуют замкнутую нелинейную систему уравнений роста биомассы на лимитирующей среде. При этом предполагается, что все внешние факторы (температура, кислотность среды, освещенность и т. п.) остаются неизменными в процессе роста.

Таким образом, мы закончили первый этап моделирования — составили математическую модель.

Второй этап — исследование модели — в данном случае достаточно прост, так как система (3), (4) может быть решена аналитически. Предоставим это сделать самим студентам и сравнить полученные результаты с решением на электронной модели.

2. Модель проточного культиватора. Наибольший практический интерес представляют проточные (или непрерывные) методы выращивания микроорганизмов, когда в сосуд с растущими клетками (культиватор) непрерывно поступает свежая питательная среда, а выросшая биомасса непрерывно изымается.

На рис. 2 представлена схема простейшего проточного культиватора. Свежий субстрат концентрации S_0 подается через трубку 1; через трубку 2 из культиватора отводятся биомасса концентрации X и непрореагировавший субстрат концентрации S (а также все продукты жизнедеятельности клеток). Мешалка 3 обеспечивает однородность жидкости внутри сосуда.

Для математического описания роста биомассы в таком культиваторе нужно дополнить уравнения (3) и (4) членами, учитывающими изменение концентраций за счет протока.

Обозначим объем сосуда через V л, скорость потоков — v л/с. Отток биомассы концентрации X моль/л за время dt будет

$$dm = Xvdt, \text{ (моль)}$$

что эквивалентно уменьшению концентрации

$$\left(\frac{dX}{dt} \right)_- = -\frac{dm}{dt} \frac{1}{V} = -\frac{v}{V} X = -DX \left(\frac{\text{МОЛЬ}}{\text{Л} \cdot \text{С}} \right). \quad (5)$$

Константа $D = v/V$ называется скоростью разбавления или скоростью протока (с^{-1}). Прирост биомассы $(dX/dt)_+$ по-прежнему

¹ При промышленном применении микроорганизмов: производстве спирта, уксуса и т. д. — используются именно эти побочные продукты.

выражается формулой (3). Просуммировав (4) и (5) и проведя аналогичные рассуждения относительно потоков субстрата, получим замкнутую систему уравнений для проточного культиватора:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\mu_m SX}{K_S + S} - DX,$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\alpha \mu_m SX}{K_S + S} + D(S_0 - S). \quad (6)$$

Исследование нелинейной системы уравнений (6) начнем с определения стационарных режимов. Положив $dX/dt = dS/dt = 0$, получим два положения равновесия:

$$1) \bar{S}_1 = \frac{K_S D}{\mu_m - D}, \quad (7)$$

$$\alpha \bar{X}_1 = S_0 - \bar{S}_1 = \frac{\mu_m S_0 - D(K_S + S_0)}{\mu_m - D};$$

$$2) \bar{X}_2 = 0, \quad \bar{S}_2 = S_0. \quad (8)$$

На плоскости переменных X, S (рис. 3) координаты стационарных точек расположены всегда на прямой $\alpha X + S = S_0$. Точка 2 лежит на оси S , положение точки 1 меняется в зависимости от значения параметра D : при $D=0$ она лежит на оси X ($\bar{X}_1 = S_0/\alpha, \bar{S}_1 = 0$); при $D = D_B = \mu_m S_0 / (K_S + S_0)$ точка 1 сливается с точкой 2. При $D > D_B$ решение (7) не имеет физического смысла, так как уходит в область отрицательных концентраций.

Критическое значение скорости разбавления D_B называется скоростью «вымывания». Действительно, при $D > D_B$ скорость потока столь велика, что прирост биомассы не может компенсировать ее отток.

Таким образом, изучение состояний равновесия системы позволяет сделать первый вывод для практики — скорость разбавления должна быть заведомо меньше D_B , иначе культура будет «вымита» из культиватора.

Исследование устойчивости стационарных точек системы, проведенное методом линеаризации (см. [1]), показывает, что при $D < D_B$ точка 1 является устойчивым узлом, а точка 2 — седлом; при $D > D_B$ особая точка 2 — устойчивый узел. Проведение соответствующих выкладок предоставляется сделать студентам.

Кроме определения положений равновесия системы практический интерес представляют также нестационарные режимы, напри-

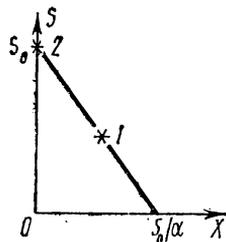


Рис. 3. Положение стационарных точек 1, 2 на фазовой плоскости

мер переходный процесс от некоторых начальных значений $X(0)$, $S(0)$ к стационарным \bar{X} , \bar{S} . При $D < D_B$ и малых начальных концентрациях S ($S(0) < \bar{S}_1$) концентрация биомассы как функция времени сначала падает, а затем возрастает до стационарного значения (рис. 4). При $S(0) > \bar{S}_1$ на кривой $X(t)$ имеется максимум

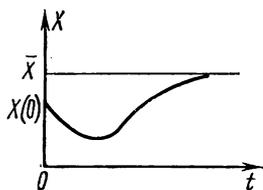


Рис. 4. Установление стационарной концентрации при малых начальных значениях $S(0)$

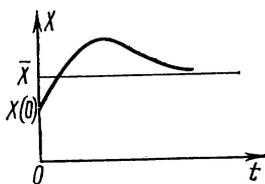


Рис. 5. Установление стационарной концентрации при больших начальных значениях $S(0)$

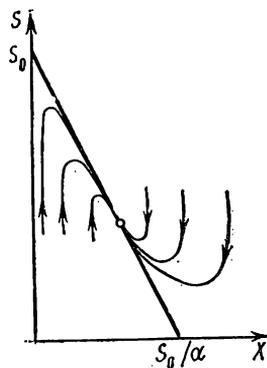


Рис. 6. Фазовый портрет системы (6)

(рис. 5), но нигде эта кривая не пересекает более одного раза прямую $X = \bar{X}_1$. Это означает, что процесс установления стационарных значений — аperiodический (особая точка — узел).

Фазовый портрет системы при определенном значении параметра D и различных начальных условиях будет иметь характерный вид, изображенный на рис. 6.

3. Модель, учитывающая гибель клеток. При сравнении результатов исследования модели роста клеток с экспериментальными данными оказалось, что модель не описывает некоторых явлений. А именно в проточном культиваторе при установлении стационарных режимов иногда наблюдаются периодические изменения концентраций.

Чтобы получить такие режимы в нашей модели, достаточно рассмотреть вероятность гибели клеток, т. е. предположить, что по каким-то причинам клетка может перестать расти и потреблять пищу. Обозначив концентрацию растущих клеток через X_p , а относительную скорость гибели — через B , получим уравнение для X_p :

$$\frac{dX_p}{dt} = \mu X_p - DX_p - BX_p. \quad (9)$$

Второе уравнение системы (6) сохранится в прежнем виде (только X заменится на X_p):

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha\mu X_p + D(S_0 - S), \quad (10)$$

$$\mu = \frac{\mu_m S}{K_S + S}. \quad (11)$$

Исследование системы (9)—(11) на устойчивость стационарных точек показывает, что в некоторой области значений параметров D , B и S_0 ненулевая особая точка является фокусом, а следовательно, в системе могут существовать колебательные процессы установления.

Таким образом, «исправленная» модель уже лучше описывает поведение действительной системы. Если колебания нежелательны, то модель подсказывает способ их устранения — выбор таких параметров D и S_0 , при которых колебаний быть не может.

Все три рассмотренные выше модели сводятся к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\mu_m SX}{K_S + S} - (D + B)X, \\ \frac{dS}{dt} &= -\frac{\alpha\mu_m SX}{K_S + S} + D(S_0 - S). \end{aligned} \quad (12)$$

В задаче методами электронного моделирования исследуются: 1) динамически кривые $X(t)$ и $S(t)$ при заданных начальных условиях в случае отсутствия протока и гибели микроорганизмов ($D=B=0$); 2) зависимость стационарных концентраций \bar{X} и \bar{S} от параметров D , S_0 и B ; 3) процессы установления стационарных состояний.

§ 3. Анализ задачи на аналоговой вычислительной машине

1. Машинные уравнения и структурная схема задачи.

Для подготовки системы уравнений (12) к набору на моделирующей установке введем машинные переменные e_X , e_S , τ по формулам

$$e_X = a_X X, \quad e_S = a_S S, \quad \tau = a_t t.$$

Для определения масштабов a_X и a_S воспользуемся следующими соображениями. Из формул (7) очевидно, что стационарное значение концентрации субстрата в сосуде не может быть больше S_0 , а максимальное стационарное значение концентрации биомассы $\bar{X}_{\max} = S_0/a$. Зная максимальные значения напряжений e_X и e_S в машине МН-7 $U=100$ В, масштабные множители выберем соответственно:

$$a_X = Ua/S_0 = 100\alpha/S_0; \quad a_S = U/S_0 = 100/S_0 \left(\frac{\text{В}\cdot\text{л}}{\text{МОЛЬ}} \right).$$

В качестве масштабного множителя для времени удобно использовать величину $a_t = \mu_m$ (с^{-1}). Тогда система (12) для машинных переменных переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{de_X}{d\tau} &= f(e_X, e_S) - (\delta + \beta) e_X, \\ \frac{de_S}{d\tau} &= -f(e_X, e_S) + \delta(100 - e_S), \\ f(e_X, e_S) &= e_S e_X / (K + e_S). \end{aligned} \quad (13)$$

В системе (13) введены безразмерные машинные параметры:

$$K = 100K_S/S_0, \quad \delta = D/\mu_m, \quad \beta = B/\mu_m.$$

Параметры β и δ варьируются в пределах $0 \div 1$; параметр K принимает значения $K_1 = 100$ и $K_2 = 50$, что соответствует значениям входной концентрации: $S_{01} = K_S$ и $S_{02} = 2K_S$.

Стационарные значения безразмерных концентраций получим, положив

$$\begin{aligned} \frac{de_X}{d\tau} = \frac{de_S}{d\tau} &= 0, \\ 1) \quad \bar{e}_S &= \frac{(\delta + \beta)K}{1 - \delta - \beta}, \quad \bar{e}_X = \frac{(100 - e_S)\delta}{\delta + \beta}; \\ 2) \quad \bar{e}_S &= 100, \quad \bar{e}_X = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Критическое значение скорости протока (безразмерная скорость вымывания) определяется из соотношения

$$\delta_a = \frac{100(1 - \beta) - K\beta}{100 + K}. \quad (15)$$

Структурная схема модели приведена на рис. 7. Напряжения в узловых точках обозначены согласно системе (13). Элементы операционных блоков (усилители и их входные сопротивления) пронумерованы в соответствии с обозначениями на наборном поле машины МН-7. Трехдекадные делители напряжения P_1 и P_2 выполнены в виде отдельного выносного блока.

Нелинейная функция $f(e_X, e_S)$ формируется в два этапа. Сначала с помощью блока нелинейности *БН-10* образуется функция

$$\mathcal{F}_i(e_S) = 100e_S/(K_i + e_S),$$

а затем напряжения e_X и \mathcal{F} подаются на блок умножения *БП-4*, осуществляющий операцию

$$f_i(e_X, e_S) = 0,01e_X\mathcal{F}(e_S).$$

В режиме «исходное положение» произвести проверку правильности набора схемы по соответствию напряжений на выходах усилителей (табл. 1).

Таблица 1

№ усилителя	6	1	2	12	9	7	10	4
Напряжение	e_S	$-e_S$	$-100+e_S$	F	$-F$	$-e_X$	e_X	$0,01 Fe_X$
Вольты	+50	-50	-50	33	-33	-50	+50	+16,5

$$F = \frac{100 e_S}{100 + e_S}.$$

4. При записи на двухкоординатном самописце ПДС-021 функций времени на вход «координата x » должно подаваться линейно-

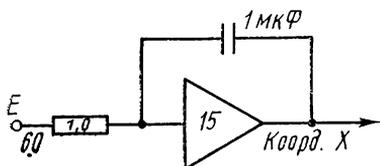


Рис. 8. Схема получения линейно-возрастающего напряжения

нарастающее напряжение. Для этого собирается интегратор на усилителе 15 согласно схеме на рис. 8. На вход интегратора подать постоянное напряжение $E = -10$ В с эталона напряжений.

§ 4. Упражнения

1. Изучение процесса установления концентраций в непроточном культиваторе.

1. Подать напряжения e_X и e_S с выходов усилителей 10 и 6 соответственно на два входа « y_1 » и « y_2 » электронного индикатора. Положить коэффициенты $\delta=0$, $\beta=0$, для чего отсоединить соответствующие входы интеграторов от декадных делителей Π_1 и Π_2 .

2. Задать начальные условия $e_X=10$ В, $e_S=80$ В. Нажать на кнопку «пуск» и наблюдать на индикаторе процесс установления.

3. Включить двухкоординатный самописец. На вход «координата x » подать напряжение с выхода интегратора 15, на вход «координата y » — напряжение e_X с усилителя 10. Соединить клеммы «земля» самописца и МН-7.

Задать в режиме «исходное положение» модели МН-7 нулевые начальные условия на интеграторы 7 и 15. На самописце с помощью ручек «установка нуля» установить перо в левом нижнем

углу (несколько отступая от края). Задать далее на интеграторах 7 и 15 начальные условия $+100$ В и установить на самописце ручками «диапазон», «расширитель диапазона» необходимый масштаб записи.

4. Задать начальные условия $e_x=10$ В, $e_s=80$ В (на интеграторе 15 — нулевые начальные условия). Нажать кнопку «пуск» и получить запись решения. По достижении стационарного значения e_x нажать на кнопку «исходное положение».

Не меняя листа бумаги и при тех же начальных условиях получить запись функции $e_s(\tau)$, подав на вход самописца «координата y » напряжение e_s с интегратора 6.

2. Изучение стационарных режимов проточного культиватора.

1. По формуле (15) § 3 рассчитать значения скорости вымывания δ_b при двух значениях параметра K ($K=100$ и $K=50$) и двух значениях β ($\beta=0$ и $\beta=0,1$).

2. Для функции \mathcal{F}_1 ($K=100$) и $\beta=0$ задать на потенциометрах Π_1 и Π_2 значение параметра $\delta < \delta_b$. Соединить Π_1 и Π_2 со входами интеграторов. Задать начальные условия $e_x=10$ В, $e_s=100$ В, нажать кнопку «пуск» и получить устойчивые стационарные точки (наблюдать на экране индикатора). Подключить на выходы интеграторов 6 и 7 вольтметры V_1 и V_2 и снять зависимость стационарных концентраций e_x и e_s от δ .

3. То же сделать для $\beta=0,1$.

4. Заменить функцию \mathcal{F}_1 на \mathcal{F}_2 . Снять зависимость $\bar{e}_x(\delta)$ и $\bar{e}_s(\delta)$ при $\beta=0$.

5. По формулам (14) рассчитать теоретические кривые $\bar{e}_x(\delta)$ и $\bar{e}_s(\delta)$ и сравнить с полученными на модели.

3. Изучение процессов установления стационарных режимов.

1. Вставить блок *БН-10* с набранной функцией \mathcal{F}_1 в гнездо *БЗ* машины. Поставить коэффициенты $\delta=0,3$, $\beta=0$. На вход самописца «координата x » подать линейно-нарастающее напряжение с интегратора 15, на вход «координата y » — напряжение e_x с усилителя 10. Задать начальные условия $e_{x0}=20$ В, $e_{s0}=20$ В и записать функцию $e_x(\tau)$. На том же листке бумаги записать функцию $e_x(\tau)$ при начальных условиях $e_{x0}=80$ В и $e_{s0}=80$ В.

2. На вход «координата y » самописца подать e_s с интегратора 6, на вход «координата x » — напряжение e_x с усилителя 10. Получить запись фазового портрета системы при $K=100$, $\delta=0,3$, $\beta=0$. Для получения семейства интегральных кривых, аналогичного изображенному на рис. 6, надо варьировать начальные условия (например, задав $e_{s0}=20$ В, изменять e_{x0} : 20, 40, 60, 80 В; затем задать $e_{s0}=80$ В и снова изменять e_{x0} . Все кривые записывать на одном листе бумаги.

3. Зарисовать фазовый портрет в случае $K=100$, $\delta=0,2$, $\beta=0,1$.

Приложение. Набор нелинейной функции на машине МН-7 с помощью блока нелинейности БН-10.

Блок нелинейности БН-10 осуществляет преобразование входного напряжения x в выходное $\mathcal{F}(x)$ методом кусочно-линейной аппроксимации (см. [3]):

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(0) + kx + \sum_{i=1}^{10} b_i(x - x_{0i}).$$

Два первых члена образуются в блоке с помощью линейных потенциометров, шлицы которых выведены на переднюю стенку блока БН-10 ($\mathcal{F}(0)$) и (kx) . Остальные члены получают

последовательным включением диодных элементов (x_{0i} — напряжение отпираания i -того элемента, b_i — крутизна его характеристики). Установка x_{0i} и b_i осуществляется с помощью двух рядов потенциометров, также выведенных на переднюю панель вставки и обозначенных «ограничение по x » и «набор $\mathcal{F}(x)$ » соответственно.

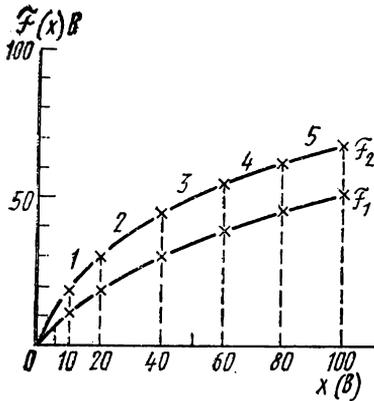


Рис. 9. Кусочно-линейная аппроксимация функций $\mathcal{F}_1(x)$ и $\mathcal{F}_2(x)$

с помощью двух рядов потенциометров, также выведенных на переднюю панель вставки и обозначенных «ограничение по x » и «набор $\mathcal{F}(x)$ » соответственно.

Набор нелинейной функции состоит из следующих этапов.

1. Аппроксимация заданной функции. Нелинейная функция $\mathcal{F}(x)$ (рис. 9) аппроксимируется некоторым числом линейных отрезков.

2. Составление карты на-

Таблица 2

Карта настройки	№ элементов					
	1	2	3	4	5	
Рабочий квадрант и знак kx	IV	IV	IV	IV	IV	
Ограничение по x	5	20	40	60	80	
Настройка $\mathcal{F}(x)$	$U_{вх}$	20	40	60	80	100
	$U_{вых}$	17	29	38	44	50

стройки. В табл. 2 приведена карта для набора функции $\mathcal{F}_1(x) = 100x/(100+x)$. В первой строке отмечаются знак первого эле-

мента (знак kx) и рабочие квадранты для всех остальных элементов. Номер рабочего квадранта определяется для каждого элемента по системе координат, которая строится каждый раз в начале данного элемента на продолжении предыдущего. В нашем случае крутизна $\mathcal{F}(x)$ монотонно убывает, поэтому все отрезки находятся в IV квадранте.

Во второй строчке таблицы («карты настройки») записываются абсциссы начальных точек каждого участка, в третьей — абсциссы $U_{вх}$ и ординаты $U_{вых}$ конечных точек участка.

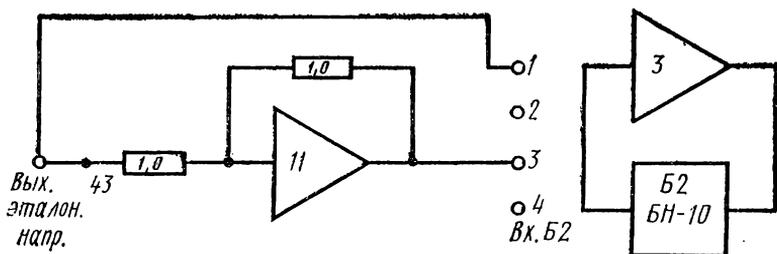


Рис. 10. Схема для настройки нелинейного блока

3. Подготовка блока к настройке: а) вынуть вставку БН-10 из машины и на задней стенке установить переключкой знаки kx и (0) и значения квадрантов по таблице; б) на передней панели вставки против клемм «0,5» установить переключку, уменьшающую общий коэффициент усиления. Кроме того, надо вынуть переключки внизу панели, уменьшив коэффициент усиления всех элементов; в) все шлицы потенциометров «ограничение по x » вывести в крайнее левое положение (все диоды заперты); г) потенциометры «набор $\mathcal{F}(x)$ » вывести в крайнее правое положение (что соответствует максимальному коэффициенту передачи диодных элементов); д) потенциометры « $\mathcal{F}(0)$ » и « kx » вывести в крайнее левое положение ($U_{вых}=0$).

4. Составление блок-схемы для настройки (рис. 10). Вставить блок БН-10 в свободное гнездо машины (например, Б2). Подсоединить нелинейный блок в обратную связь усилителя 3 по схеме на рис. 10. На входы блока Б2, расположенные в левой части коммутационного поля, подаются напряжения « x » (на вход 1) и « $-x$ » (вход 3). Калиброванное напряжение « x » можно снимать с клеммы «вых. эталон. напр.» при подаче на его «вход» напряжения -100 В. Выход усилителя 17 («вых. эталон. напр.») при этом надо упрочнить, присоединив его к сопротивлению «20 кОм». На-

пряжение « $-x$ » получить с помощью инвертора, собранного на усилителе *И1*. На выход усилителя *И1* подключить вольтметр V_1 .

5. Настройка нелинейного блока: а) по карте настройки найти напряжение отпираания первого элемента (+5 В), подать его на вход блока ($x=5$ В) и вращать вправо шлиц потенциометра «1» в первом ряду («ограничение по x ») до тех пор, пока на выходе блока не появится напряжение. После этого 1-й потенциометр в ряду «набор $\mathcal{F}(x)$ » выводится в крайнее левое положение (коэффициент передачи диодов из максимального — в нулевой).

Далее подать напряжение отпираания второго элемента ($x=20$ В) и произвести аналогичные манипуляции со вторыми потенциометрами и т. д. для всех элементов. После этого первый ряд («ограничение по x ») больше не трогать;

б) устанавливается значение « $\mathcal{F}(0)$ » (у нас $\mathcal{F}(0)=0$);

в) устанавливается наклон первого участка потенциометром « kx ». Здесь для удобства вместо того, чтобы подавать $U_{вх}=5$ В, как указано в табл. 2, можно увеличить $U_{вх}$ и $U_{вых}$, например, в 10 раз. Тогда на выходе должно быть $U_{вых}=47$ В. (Увеличение $U_{вх}$ в 10 раз допустимо только для первого линейного участка!) Если усиления не хватает, надо перемычку из гнезда «0,5» переставить в положение «1» или убрать совсем (это соответствует увеличению наклона еще в два раза);

г) вращением потенциометров « $\mathcal{F}(x)$ » устанавливается наклон остальных участков согласно табл. 2. Для этого на вход подается $U_{i вх}$, а на выходе должно получиться $U_{i вых}$. Если не хватает крутизны, надо увеличить ее, вставив перемычку в клеммы соответствующего участка внизу передней платы вставки. Если и этого недостаточно, а общий коэффициент не максимален (перемычка в положении «0,5» или «1»), надо увеличить общий коэффициент усиления и повторить настройку блока сначала (с установления « kx »).

6. Проверка настройки нелинейного блока. Закончив настройку, еще раз подать на вход поочередно напряжения ($U_{i вх}$) и получить на выходе ($U_{i вых}$) соответственно (см. таблицу функций $\mathcal{F}(x)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
2. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Что такое математическая биофизика. М., «Просвещение», 1971.
3. Ланда А. С., Харламов А. А. Машина решает. М., «Просвещение», 1970.
4. Урмаев А. С. Основы моделирования на аналоговых вычислительных машинах. М., «Наука», 1974.

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХЧАСТОТНЫХ ВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В СРЕДАХ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Исследуются особенности трехчастотного параметрического преобразования волн в средах с квадратичной зависимостью диэлектрической проницаемости от электромагнитного поля.

§ 1. Введение

В средах с квадратичной зависимостью диэлектрической проницаемости от амплитуды электромагнитного поля процессы обмена энергией между волнами различающихся частот эффективно используются в параметрических генераторах (ПГ). ПГ обеспечивают получение перестраиваемого по частоте излучения в диапазоне длин волн от 10^{-1} см (радиодиапазон) до 10^{-5} см (ближний ультрафиолет) [1].

Процессы, происходящие в ПГ, имеют многочисленные аналоги. Это, например, взаимодействия плазменных волн, некоторые биологические процессы, идущие с изменением численности антагонистических видов, движение твердого тела с одной неподвижной точкой и т. д.

Аналитическое решение уравнений теории нелинейных взаимодействий рассматриваемого типа во многих случаях затруднительно. Поэтому для получения характеристик ПГ, таких, как коэффициент преобразования, пространственный период перекачки энергии, необходимо применение численных методов. Целью данной работы является исследование с помощью аналоговой модели МН-7 взаимодействия трех волн в нелинейной среде с затуханием и без него: определение коэффициентов преобразования энергии накачки в энергию сигнальных волн, а также расстояний, на которых достигаются максимальные коэффициенты преобразования.

Выполнение задачи предполагает знакомство студента с основами теории в объеме [1].

§ 2. Теория

1. Основные уравнения. Распространение одномерных электромагнитных волн в плотных средах описывается волновым уравнением, связывающим напряженность \mathbf{E} и индукцию \mathbf{D} электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь z — координата, вдоль которой распространяется волна; t — время; c — скорость света. Уравнение (1) незамкнуто, его следует дополнить материальным уравнением

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}. \quad (2)$$

Мощное излучение изменяет свойства вещества, в том числе оптические [1]. При этом диэлектрическая проницаемость становится зависящей от поля E .

В средах, внутренняя структура которых не имеет центра инверсии, основной вклад в нелинейность дает член, квадратичный по полю. В этом случае (2) можно переписать в виде

$$D = \hat{\varepsilon}_0 E + 2\pi \hat{\chi} E E. \quad (3)$$

Здесь $\hat{\chi}$ — тензор квадратичной нелинейности.

Дальнейший анализ системы (1)—(3) проводится методом медленных амплитуд, подробное изложение которого содержится в [1].

В линейной среде волны разных частот не взаимодействуют. В нелинейной среде такое взаимодействие оказывается возможным. Так, при распространении в среде волна частоты ω_1 может породить волны с частотой $2\omega_1$ или $\omega_1/2$. Две сильные волны с частотами ω_1 и ω_2 кроме своих гармоник $2\omega_{1,2}$ и субгармоник $\omega_{1,2}/2$ могут породить волны суммарной и разностной частот $\omega_{3,4} = \omega_1 \pm \omega_2$ и наоборот.

Рассмотрим взаимодействие волн с частотами ω_1 , ω_2 и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Решение системы (1)—(3) отыскиваем в виде

$$E(z, t) = \sum_{j=1}^3 A_j(z) \exp[i(\omega_j t - k_j z)] + \text{КС}, \quad (4)$$

где $k_j = \omega_j \text{Re } \varepsilon_0^{1/2}(\omega_j)/c$, КС — комплексно-сопряженные члены. Амплитуды A_j здесь медленно изменяются на расстояниях порядка длины волны. Подставляя (4) в (1) и проводя усреднение по пространственному и временному периодам, получаем систему укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + \alpha_1 \right) A_1 &= i\sigma_1 A_2^* A_3, \\ \left(\frac{d}{dz} + \alpha_2 \right) A_2 &= i\sigma_2 A_1^* A_3, \\ \left(\frac{d}{dz} + \alpha_3 \right) A_3 &= i\sigma_3 A_1 A_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь коэффициенты α_j , связанные с мнимой частью линейной диэлектрической проницаемости, описывают поглощение волн в среде. Коэффициенты нелинейной связи σ_j пропорциональны квадратичной восприимчивости χ .

Для численного анализа проведем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= (\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} A_0 z, \quad A_0 = A_3(0), \quad R_3 = A_3/A_0, \\ R_1 &= (\sigma_3/\sigma_1)^{1/2} A_1/A_0, \quad R_2 = -i(\sigma_3/\sigma_2)^{1/2} A_2/A_0. \end{aligned} \quad (6)$$

В этих переменных (5) преобразуется в систему

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + \delta_1\right) R_1 &= R_2 R_3, \\ \left(\frac{d}{dx} + \delta_2\right) R_2 &= R_1 R_3, \\ \left(\frac{d}{dx} + \delta_3\right) R_3 &= -R_1 R_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta_j = \alpha_j (\sigma_1 \sigma_2)^{-1/2} A_0^{-1}$ — безразмерные коэффициенты поглощения

2. Физические процессы, происходящие в ПГ.

1. Приведем примеры стационарных процессов взаимодействия волн, которые описываются в зависимости от граничных условий системой (7).

а) Параметрическое усиление. Если на нелинейную среду в сечении $x=0$ падает интенсивная волна частоты ω_3 ($R_3(0) \gg R_{1,2}(0)$), происходит параметрическое усиление слабых волн с частотами ω_1, ω_2 . Для простоты будем считать сначала поглощение пренебрежимо малым ($\delta_j=0$). На малых расстояниях ($x \ll 1$) лишь незначительная часть мощности сильной волны (ее называют волной «накачки») преобразуется в мощность слабых волн. Система (7) упрощается:

$$\frac{dR_1}{dx} = R_2, \quad \frac{dR_2}{dx} = R_1. \quad (8)$$

Ее решение с граничными условиями $R_1(0) = R_{10}, R_2(0) = R_{20}$ есть (рис. 1)

$$\begin{aligned} R_1(x) &= R_{10} \operatorname{ch} x + R_{20} \operatorname{sh} x, \\ R_2(x) &= R_{20} \operatorname{ch} x + R_{10} \operatorname{sh} x. \end{aligned} \quad (9)$$

б) Генерация разностной частоты. Две сильные волны (с частотами ω_3, ω_1 , например), падая на нелинейную среду, порождают волну с частотой $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. При $x \ll 1$ этот процесс описывается приближенно следующим образом (рис. 2):

$$\begin{aligned} R_3(x) &\simeq 1, \quad R_1(x) \simeq R_{10}, \\ R_2(x) &\simeq R_{10}x + R_{20}. \end{aligned} \quad (10)$$

Учет поглощения в приближении заданного поля накачки (или накачек), рассмотренного выше, достаточно прост.

2. Если пренебречь поглощением ($\delta_j=0$), система (7) интегрируется точно и с учетом изменения амплитуд накачек. Решение ее выражается через эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn}(x), \operatorname{cn}(x)$ и $\operatorname{dn}(x)$ [1]. Типичные зависимости амплитуд взаимодействующих волн от координаты показаны на рис. 3, 4.

Таким образом, коэффициент преобразования мощности

$$\eta_{1,2}(x) = R_{1,2}^2(x), \quad (11)$$

важный в практических приложениях, периодически зависит от координаты x и изменяется в пределах от $R_{1,2}^2(0)$ до $1 - R_{1,2}^2(0)$. Следовательно, для получения максимального коэффициента преобразования при заданной мощности накачки (скажем, в процессе

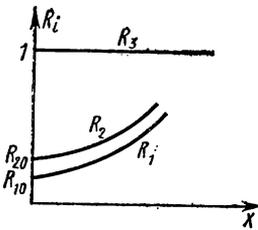


Рис. 1

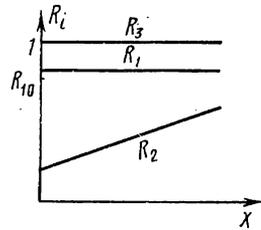


Рис. 2

параметрической генерации) необходимо подобрать определенную длину нелинейной среды, обратно пропорциональную амплитуде накачки.

Система (7) интегрируется аналитически и при $\delta_j = \delta$, так как члены вида δR_j исключаются заменой:

$$R_j = P_j \exp(-\delta x), \quad y = \frac{1 - \exp(-\delta x)}{\delta}. \quad (12)$$

Осцилляции амплитуд при этом становятся затухающими, а при достаточно большом поглощении вовсе отсутствуют.

3. Для более общего случая ($\delta_1 \neq \delta_2 \neq \delta_3$) аналитического решения получить не удастся. В то же время именно этот случай реализуется чаще всего. Важным является, например, анализ возможностей ПГ, работающего вблизи характеристических полос поглощения ($\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\delta_3 \neq 0$). Учет поглощения дает также важную для эксперимента оценку минимальной длины среды, в которой достигается наивысший коэффициент преобразования.

§ 3. Анализ задачи на аналоговой модели

1. Набор задачи на модели и проверка ее работы. Задача сводится к решению системы укороченных уравнений (7). Для решения системы на модели введем машинные переменные

$$u_i = M_i R_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \tau = M_x x, \quad (13)$$

где M_i, M_x — масштабные множители.

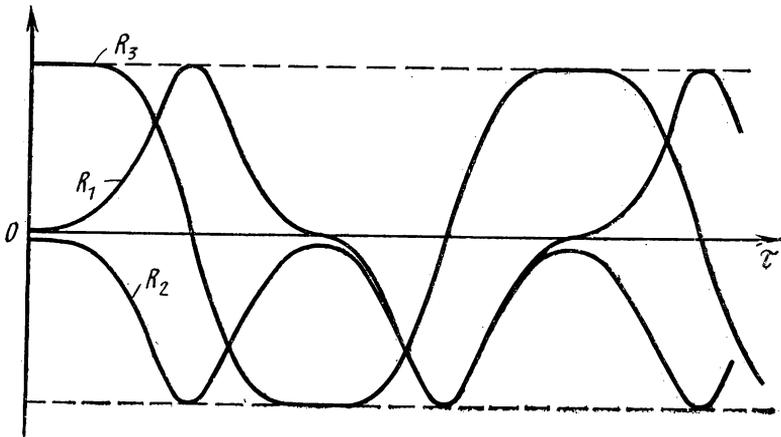


Рис. 3

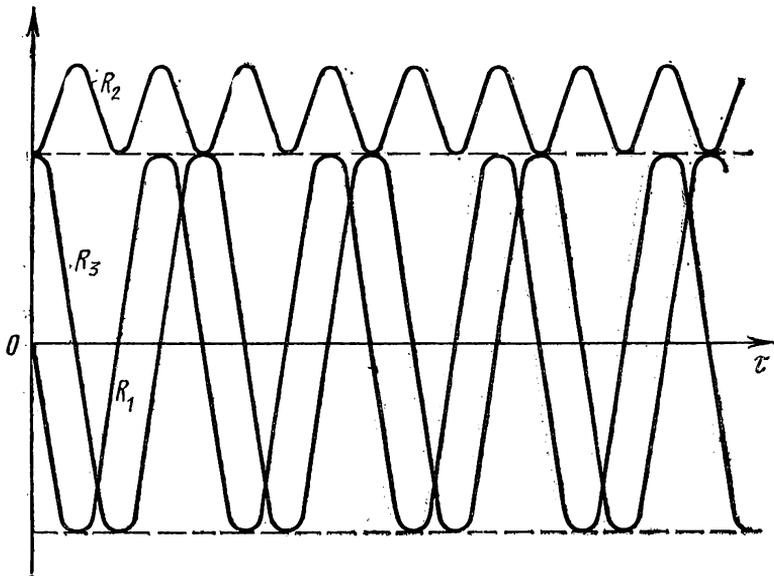


Рис. 4

Подставляя выражения (13) в (7), получаем систему машинных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} + k_1 u_1 &= k_2 \frac{u_2 u_3}{100}, & \frac{du_2}{d\tau} - k_3 u_2 &= k_4 \frac{u_1 u_3}{100}, \\ \frac{du_3}{d\tau} + k_5 \dot{u}_3 &= -k_6 \frac{u_1 u_2}{100}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$k_1 = \frac{\delta_1}{M_x}, \quad k_3 = \frac{\delta_2}{M_x}, \quad k_5 = \frac{\delta_3}{M_x},$$

$$k_2 = \frac{M_1 100B}{M_x M_2 M_3}, \quad k_4 = \frac{M_2 100B}{M_x M_1 M_3}, \quad k_6 = \frac{M_3 100B}{M_x M_1 M_2} \quad (15)$$

Структурная схема модели, соответствующая уравнениям (14), показана на рис. 5. На выходе интеграторов 15, 16, 6 формируются

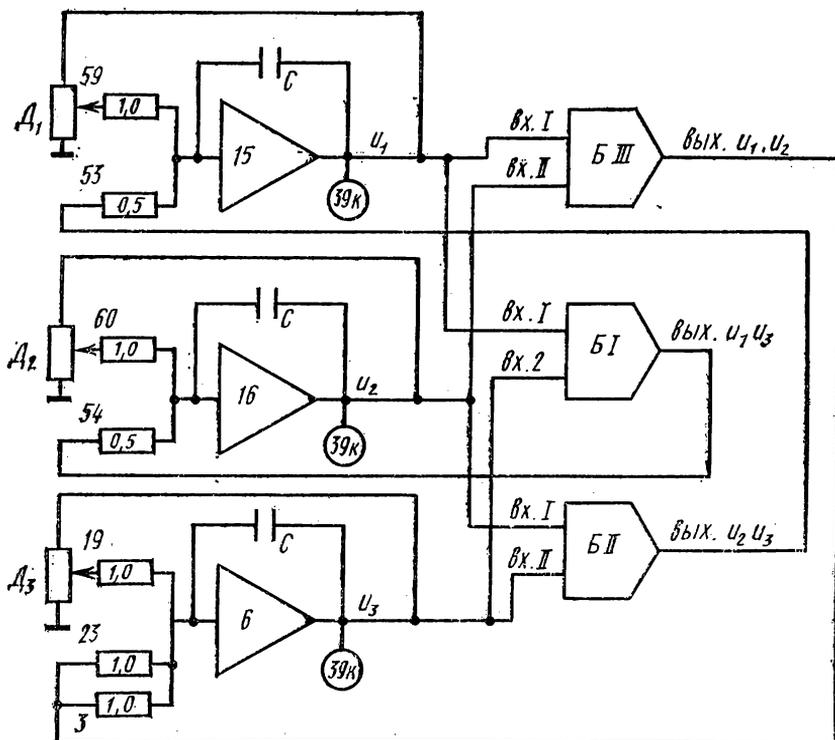


Рис. 5. Структурная схема модели

величины u_1 , u_2 , u_3 , на выходе блоков перемножения *БI*, *БII*, *БIII* формируются произведения $u_2 u_3$, $u_1 u_3$, $u_1 u_2$. Усилители 15, 16, 6 уносятся подсоединением их выходов к гнезду 39к, расположенному на наборном поле. Затухание δ_1 , δ_2 , δ_3 задается с помощью дополнительных делителей *D1*, *D2*, *D3*, которые соединены с гнездами «внешн. аппарат».

Масштабные множители удобно выбрать следующим образом: $M_i = 70$ В, $M_x = 5/7$ [с] (в этом случае решение системы продол-

жается — для получения 6—8 периодов эллиптических функций — примерно 50 с).

Подставляя найденные масштабные множители в (15), получаем: $k_2=k_4=k_6=2$, $k_1=1,4 \delta_1$, $k_3=1,4 \delta_2$, $k_5=1,4 \delta_3$. Включить и прогреть модель. Набрать схему по рис. 5. В режиме «установка нулей» выставить нули всех усилителей (в процессе работы следует проверять и корректировать нули).

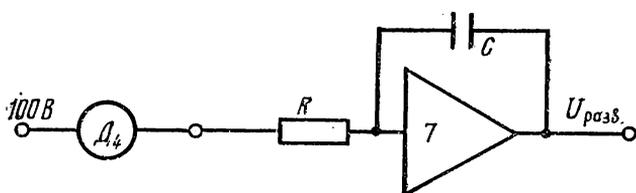


Рис. 6

2. Настройка и градуировка электронного индикатора и самописца.

а) Включить электронный индикатор тумблером «сеть». Включить луч индикатора тумблером «луч». Регулировками «влево-вправо» добиться того, чтобы диапазон развертки равнялся 50 с. Подать на вертикальные пластины индикатора напряжение ± 100 В и регулировкой «вертикальное усиление» отградуировать вертикальное отклонение луча.

б) Ознакомиться с описанием электронного самописца. Так как прибор не имеет развертки, на одном из свободных усилителей, например № 7, собрать схему по рис. 6. Если на вход интегратора подать небольшое постоянное напряжение (1—3 В) с выхода делителя D_4 , на выходе усилителя мы получим линейно-нарастающее напряжение, которое следует подать на вход «X» самописца. Регулировкой «расширитель диапазона» и «диапазоны» добиться отклонения пера самописца на весь лист за 50 с.

Выполняя все упражнения, используйте осциллограф и, лишь получив на нем правильные кривые, переходите к работе с самописцем.

§ 4. Упражнения

1. Изучение параметрической генерации волн при $\delta_i=0$. В данном упражнении рассматривается среда без затухания. Задать следующие начальные условия: $u_1=30$ В, $u_2=0$, $u_3=70$ В. Это соответствует тому, что на входе системы заданы амплитуды волны накачки u_3 и сигнальных волн u_1 , u_2 . В этом упражнении проводится проверка адекватности модели системе уравнений (7).

Нажав кнопку «пуск», на экране электронного индикатора наблюдать поочередно напряжения u_1 , u_2 , u_3 , соответствующие следующим функциям Якоби: $\operatorname{sn}(\tau)$, $\operatorname{cn}(\tau)$, $\operatorname{dn}(\tau)$ (см. рис. 3).

Записать эти функции на один лист бумаги самописца, подобрав развертку по оси τ такой, чтобы на поле укладывалось 2,5 периода функций u_1 , u_2 .

По полученным записям определить:

а) период перекачки энергии, для чего измерить расстояние между максимумом и минимумом функции u_3 (измерение провести для нескольких максимумов и минимумов и найти среднее значение);

б) максимальный коэффициент преобразования, для чего измерить максимальное значение функций u_i (измерения провести для нескольких максимумов и взять среднее значение), а затем рассчитать КПД по формуле (11).

Результаты представить в машинных переменных и переменных задачи и сравнить с теоретическими значениями, используя таблицы [3].

2. Изучение влияния затухания на параметрическую генерацию. Введение затухания приводит к уменьшению амплитуд всех волн по мере распространения в среде.

1. Определение квазипериода и КПД перекачки энергии накачки в энергию сигнальной волны в функции расстояния, пройденного волнами.

Ввести одинаковое для всех волн затухание, т. е. выставить $k_1 = k_3 = k_5 = 0,05$. Задать следующие начальные условия: $u_1 = 30$ В, $u_2 = 0$, $u_3 = 70$ В. На отдельном листе самописца записать функции $u_i(\tau)$, подобрав развертку по оси τ такой, чтобы на поле укладывалось 6—8 периодов функций u_i .

По полученным записям определить:

а) зависимость периода перекачки энергии для каждой из волн u_1 , u_2 , u_3 от номера максимума;

б) зависимость КПД от номера максимума по формуле

$$\eta(n) = \frac{u_{1\max}^2(n) + u_{2\max}^2(n)}{u_3^2(0)}.$$

Результаты представить в виде графиков.

2. Определение величины затухания δ , при котором процесс перекачки становится апериодическим.

Изменяя затухание $\delta_i = \delta$ ($k = 0,02$, $0,03$ и т. д.), наблюдать кривые, соответствующие различным δ . Найти такое δ , при котором каждая из функций u_i имеет не более одного максимума.

3. Определение зависимости КПД перекачки от затухания волны накачки.

Рассматривается случай, когда накачка происходит на частоте характеристического излучения, т. е. $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\delta_3 \neq 0$.

Выставить следующие начальные условия: $u_1=30$ В, $u_2=0$, $u_3=70$ В. Для пяти значений δ_3 ($k_5=0,02-0,06$, через 0,01) измерить КПД перекачки по формуле

$$\eta(m) = \frac{u_{1\max}^2(m) + u_{2\max}^2(m)}{u_3^2(0)},$$

где m — номер максимума.

Определение $u_{1,2\max}^2(m)$ провести с помощью цифрового вольтметра или осциллографа по следующей методике.

На вход «1» электронного индикатора подать напряжение u_1 (или u_2), на вход «2» — регулируемое эталонное напряжение. Индикатор включить в режим «коммутация». На экране индикатора наблюдать напряжение u_1 и постоянное эталонное напряжение. Изменяя эталонное напряжение, подобрать его величину так, чтобы она равнялась величине u_1 на указанном максимуме. То же измерение провести для напряжения u_2 .

Результат представить в виде графика зависимости КПД $\eta(m)$ от k_5 .

4. Определение КПД перекачки в зависимости от δ_1 и δ_2 . Выставить начальные условия: $u_1=30$ В, $u_2=0$, $u_3=70$ В. Выставить значения коэффициентов затухания: $\delta_3=0$, $\delta_1=\delta_2=\delta$. По методике предыдущего пункта найти зависимость $\eta(k_1)$.

3. **Изучение генерации разностной частоты при $\delta_i=0$** (см. упр. 1). Установить начальные условия: $u_1=u_3=70$ В, $u_2=0$, что соответствует падению на границу двух волн равной интенсивности.

По методике, описанной в упражнении 1, записать на одном листе изменение с расстоянием амплитуд всех трех волн: u_1 , u_2 , u_3 .

По полученным записям определить:

- а) периоды перекачки энергии для волн u_1 , u_3 ;
- б) с помощью расчета по формуле

$$\eta_{\max} = \frac{u_{2\max}^2}{u_{1\max}^2 + u_{3\max}^2}$$

— максимальный КПД перекачки энергии в волну разностной частоты.

Результаты представить в машинных переменных и переменных задачи и сравнить с теоретическими, используя таблицы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., ВИНТИ, 1964, гл. 2, § 1—3; гл. 4, § 2, 3.
2. Урмаев А. С. Основы моделирования на аналоговых вычислительных машинах. М., «Наука», 1974.
3. Ямке Е., Энде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1968.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ИМПУЛЬСА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ СВЕТА

Исследуется динамическая модель двухрезонаторного параметрического генератора света.

§ 1. Введение

Одной из важнейших задач лазерной физики является расширение набора частот, перекрываемого генераторами оптических колебаний. Многие возможности, открывающиеся в связи с созданием лазеров, остаются не реализованными, поскольку генераторы когерентного оптического излучения принципиально могут работать лишь на вполне определенных фиксированных частотах, число которых сравнительно невелико. Сказанное в особенности относится к мощным генераторам, позволяющим вести исследования в области нелинейной оптики.

Использование нелинейных оптических явлений в кристаллах [1, 2] позволяет преобразовать излучение лазера в излучение с плавно перестраиваемой частотой и тем самым получить генерацию когерентного излучения на любой заданной длине волны оптического диапазона. Явление усиления волн в среде имеет много общего с хорошо изученным в теории колебаний параметрическим резонансом в системе двух резонаторов, настроенных на частоты $\Omega_{1,2}$ и связанных между собой переменной емкостью, изменяющейся по закону:

$$C = C_0 [1 + m \cos \omega_n t], \quad \omega_n \simeq \Omega_1 + \Omega_2,$$

где m — глубина модуляции. Если пользоваться радиофизическим языком, нелинейная поляризация среды аналогична нелинейной емкости, чем и оправдывается использование термина «параметрические» оптические явления. В оптике параметрическое воздействие носит волновой характер, поэтому его протекание существенно определяется не только временными (частотными), но и пространственными соотношениями: для самовозбуждения параметрических колебаний в оптическом диапазоне необходима не только «частотная» настройка оптических резонаторов ($\omega_1 + \omega_2 = = \omega_n$), но и «волновая» настройка между волновыми векторами ($\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_n$), накладывающая весьма жесткие требования на дисперсионные свойства среды.

В задаче на аналоговой машине МН-7М исследуется форма импульса нестационарной параметрической генерации в зависимости от амплитуды и длительности импульса накачки, а также производится определение максимального КПД преобразования по интенсивности и КПД преобразования по энергии.

§ 2. Теория

1. Параметрическая генерация света. Пусть в нелинейной среде, поляризация которой \mathcal{P} зависит от напряженности поля по закону

$$\mathcal{P} = \kappa E + \chi E^2,$$

распространяется мощная световая волна частоты ω_n (волна накачки):

$$E_n = A_n \cos(\omega_n t - k_n z)$$

и одновременно две волны:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z),$$

$$E_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

с частотами, удовлетворяющими соотношению

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_n. \quad (1)$$

Поскольку поляризация зависит от E^2 , волны на частотах ω_1 и ω_2 становятся связанными. Нелинейная поляризация на частоте ω_1 равна

$$\mathcal{P}^{\text{нл}}(\omega_1) = \frac{\chi A_n A_2}{2} \cos[\omega_1 t - (k_n - k_2) z], \quad (2)$$

а нелинейная поляризация на частоте ω_2

$$\mathcal{P}^{\text{нл}}(\omega_2) = \frac{\chi A_n A_1}{2} \cos[\omega_2 t - (k_n - k_1) z]. \quad (3)$$

В результате взаимодействия волн на частотах ω_n и ω_2 возникает волна на частоте ω_1 , а за счет взаимодействия волн на частотах ω_n и ω_1 — волна на частоте ω_2 . Взаимодействие волны нелинейной поляризации $\mathcal{P}^{\text{нл}}(\omega_i)$ со световой волной частоты ω_i будет максимальным, если сдвиг фаз между ними будет сохраняться на достаточно больших расстояниях. Согласно (2) и (3) сдвиг фаз одинаков для любых z , если

$$k_1 + k_2 = k_n. \quad (4)$$

Условие (4) называется *условием синхронизма*.

Если условие синхронизма выполнено, то энергия волны накачки передается волнам с частотами ω_1 и ω_2 , и последние усиливаются в нелинейной среде. Поэтому если нелинейный кристалл, прозываемый волной накачки, поместить в оптический резонатор, т. е. между зеркалами, отражающими световые волны на частотах ω_1 и ω_2 , то при достаточно больших коэффициентах отражения зеркал и большой мощности волны накачки в таком резонаторе возникает генерация на частотах ω_1 и ω_2 . Начальные сигналы (за-

травки) на этих частотах обусловлены собственными шумами, неизбежно имеющимися в кристалле.

Частоты, для которых выполняется условие синхронизма в нелинейном кристалле, определяются выбором направления распространения взаимодействующих волн; поэтому, вращая нелинейный кристалл в резонаторе, можно при постоянной частоте накачки ω_n получать плавно перестраиваемые частоты ω_1 и ω_2 .

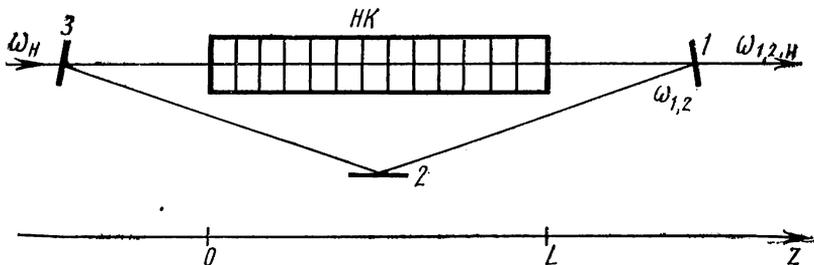


Рис. 1. Двухрезонаторный ПГС с кольцевым резонатором: 1, 2, 3 — зеркала резонатора; НК — нелинейный кристалл; $\omega_{1,2}$ — частоты генерации; ω_n — частота накачки

2. Форма импульса нестационарной параметрической генерации. Решение нелинейных уравнений Максвелла в анизотропной среде

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}^{\text{nl}}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}^{\text{nl}}}{\partial t^2} = 0,$$

где $\mathcal{P}^{\text{nl}} = \hat{\chi} \mathbf{E} \mathbf{E}$, будем искать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_n.$$

Рассматривается двухрезонаторный параметрический генератор света (ПГС) с нелинейным кристаллом и кольцевым резонатором, образованным зеркалами 1, 2, 3 (рис. 1).

В частном случае коэффициентов отражения зеркал $R_{1,2}$, близких к единице, зависимость амплитуд от пространственной координаты не очень существенна и ее можно исключить, усредняя уравнения для амплитуд волн по области между зеркалами резонатора [3]. Это приближение, называемое приближением заданной структуры поля, позволяет существенно упростить решение задачи, так как вместо системы уравнений в частных производных мы получаем уравнения в обыкновенных производных с независимой переменной — временем.

Запишем волны $E_{1,2}$ и E_n в виде

$$E_{1,2}(t, z) = A_{1,2}(t, z) \exp[i(\omega_{1,2}t - k_{1,2}z)] + \text{КС},$$

$$E_n(t, z) = A_n(t, z) \exp[i(\omega_n t - k_n z)] + \text{КС}$$

$$(\omega_{\text{H}} = \omega_1 + \omega_2, \quad k_{\text{H}} = k_1 + k_2),$$

где $A_i(t, z)$ — медленно меняющиеся амплитуды соответствующих волн, КС — комплексно-сопряженные члены.

Параметрическое усиление волн $E_{1,2}$ в поле волны накачки будет описываться скалярными уравнениями для медленных амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial z} + \frac{1}{u_{1,2}} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial t} &= \gamma_{1,2} A_{\text{H}} A_{2,1}^*, \\ \frac{\partial A_{\text{H}}}{\partial z} + \frac{1}{u_{\text{H}}} \frac{\partial A_{\text{H}}}{\partial t} &= -\gamma_{\text{H}} A_1 A_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где u_i — групповые скорости; λ_i — длины волн;
 $\gamma_i = \frac{\text{const}}{\lambda_i}$.

Если взаимодействие волн происходит в резонаторе (см. рис. 1), то к уравнениям (5) следует добавить уравнения, описывающие отраженные волны:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A_1^-}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1^-}{\partial t} &= 0, \\ -\frac{\partial A_2^-}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2^-}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

которые не усиливаются (не взаимодействуют непосредственно с накачкой).

Уравнения (5) и (6) описывают параметрический генератор света (ПГС). Их следует решать с определенными граничными условиями:

а) задана форма импульса накачки на входе ($z=0$):

$$A_{\text{H}}(t, z=0) = A_0(t); \quad (7)$$

б) заданы условия отражения на зеркалах:

$$A_{1,2}^-(t, z=L) = R_{1,2} A_{1,2}(t, z=L), \quad (8)$$

$$A_{1,2}(t, z=0) = R_{1,2} A_{1,2}^-(t, z=0), \quad (9)$$

где $R_{1,2}$ — коэффициенты отражения зеркала l на частотах $\omega_{1,2}$ ($l = 1, 2 \ll 1$); отражение зеркал $2, 3$ для этих частот для простоты считается 100%-ным.

Усреднив уравнения для $A_{1,2}$ по пространству и определив амплитуду волны накачки в статическом приближении

$$A_{\text{H}}(z, t) = A_0(t) - z\gamma_{\text{H}} A_1 A_2, \quad (10)$$

систему (5) сводят к системе двух линейных уравнений (см. [3]):

$$\frac{dA_{1,2}}{dt} + \frac{A_{1,2}}{2T_{1,2}} = \frac{1}{2} u_{1,2} \gamma_{1,2} \left[A_0(t) - \frac{1}{2} L \gamma_n A_1 A_2 \right] A_{2,1}, \quad (11)$$

где $T_{1,2} = \left(\frac{1-R}{L} u_{1,2} \right)^{-1}$ — так называемые времена релаксации «холодных» резонаторов.

Решение для (11) в аналитической форме находится при $T_1 = T_2 = T$, когда симметрия уравнений указывает на то, что отношение интенсивностей $I_{1,2}(t) = A_{1,2}^2(t)$ генерируемых волн не меняется со временем

$$\frac{I_1(t)}{I_2(t)} = \frac{\gamma_1 u_1}{\gamma_2 u_2} = \text{const.}$$

Полагая в (11) $A_1 = \sqrt{\gamma_1 u_1 / \gamma_2 u_2} A_2$, приходим к одному уравнению, содержащему только $I_1(t)$:

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{T} = \sqrt{u_1 u_2 \gamma_1 \gamma_2} \left[A_0(t) - \frac{1}{2} L \gamma_n \sqrt{u_2 \gamma_2 / u_1 \gamma_1} I_1 \right] I_1. \quad (12)$$

Удобно перейти к относительным интенсивностям:

$$N_{1,2} = \frac{I_{1,2}(t)}{I_n^n} = \frac{\gamma_{1,2} u_{1,2}}{\gamma_n u_n} \frac{x(t)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{L}{u_n T} \ll 1, \quad (13)$$

$$N_0(t) = \frac{A_0^2(t)}{I_n^n},$$

$$N_n(z, t) = \frac{A_n^2(z, t)}{I_n^n} = \left[\sqrt{N_0(t)} - 2 \frac{z}{L} x(t) \right]^2, \quad (14)$$

где $I_n^n = (T_1 T_2 u_1 u_2 \gamma_1 \gamma_2)^{-1}$ — пороговая интенсивность накачки. Введенная в (13) функция $x(t)$ пропорциональна интенсивности генерируемой волны.

Подставив (13) в (12) и обозначив точкой дифференцирование по $\tau = t/T$, получим уравнение, определяющее функцию $x(\tau)$:

$$\dot{x} + \left[\sqrt{N_0(\tau)} - 1 \right] x + x^2 = 0. \quad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что генерация будет происходить лишь при превышении импульсом накачки порогового значения

$$N_0(\tau) > 1.$$

Аппроксимируем форму импульса накачки гауссовой функцией:

$$N_0(\tau) = N_{0m} \exp \left[- \frac{(\tau_n - \tau)^2}{\tau_n^2 / 2} \right], \quad (16)$$

здесь τ_n характеризует длительность импульса накачки¹ (рис. 2), N_{0m} — максимальная интенсивность ($N_{0m} > 1$).

Для оценки качества параметрического генератора света вводится КПД преобразования по интенсивности:

$$\eta_{\text{инт}} = \frac{N_n(0, \tau) - N_n(L, \tau)}{N_n(0, \tau)} 100 \%. \quad (17)$$

В числителе (17) стоит величина интенсивности генерируемых волн, так как потеря энергии волной накачки происходит вследствие параметрической генерации.

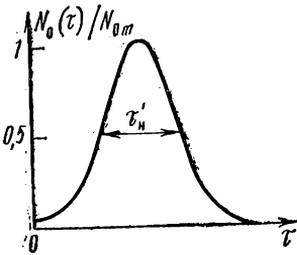


Рис. 2. Гауссов импульс накачки: N_{0m} — максимальная интенсивность; τ'_n — длительность импульса

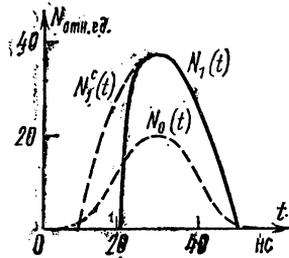


Рис. 3. Форма импульсов генерации:
 $N_0(t)$ — импульс накачки;
 $N_1^c(t)$ — импульс стационарной генерации; $N_1(t)$ — импульс нестационарной генерации

Определим далее $\eta_{\text{инт}}^{\text{max}}$ как отношение максимальных интенсивностей генерируемых волн и волны накачки.

Максимальное значение $x^{\text{max}}(\tau)$ достигается при $\dot{x}(\tau) = 0$, следовательно, из уравнения (15) имеем

$$[\sqrt{N_0(\tau)} - 1] x^{\text{max}}(\tau) = [x^{\text{max}}(\tau)]^2$$

или

$$\sqrt{N_0(\tau)} - x^{\text{max}}(\tau) = 1.$$

Окончательно получим

$$\eta_{\text{инт}}^{\text{max}} = 4 \frac{x^{\text{max}}(\tau)}{N_{0m}} 100 \%. \quad (18)$$

¹ Длительность импульса по уровню 0,5 $\tau_n = \tau_n \sqrt{2 \ln 2} \simeq 1,18 \cdot \tau_n$.

КПД преобразования по энергии

$$\eta_{\text{ЭН}} = 4 \frac{\int_{\tau_0}^{2\tau_n} x(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} N_0(\tau) d\tau} 100 \% \quad (19)$$

На рис. 3 приведены результаты расчета на ЭВМ импульсов $N_0(t)$, $N_c^1(t)$, $N_1(t)$. Очевидно, что при стационарной генерации все импульсы $N_c^1(t)$ должны быть симметричными, если симметричен импульс возбуждающего излучения. При исследовании переходных процессов в ПГС картина генерации может значительно отличаться от стационарной. Это проявляется прежде всего в форме импульсов света $N_1(t)$, выходящих из резонатора, а именно в их заметной асимметрии.

§ 3. Анализ задачи на аналоговой модели

1. Машинные уравнения и структурная схема задачи. Уравнение (15) моделируется на аналоговой вычислительной машине МН-7М.

В новых переменных

$$\tau^* = \sqrt{N_{\text{ом}}} \tau \quad y^* = \frac{i}{\sqrt{N_{\text{ом}}}} x$$

уравнение будет следующим:

$$\frac{dy^*}{d\tau^*} - \left[f(\tau^*) - \frac{1}{\sqrt{N_{\text{ом}}}} - y^* \right] y^* = 0.$$

Введем машинные переменные

$$y = M_y \cdot y^*, \quad \theta = M_\theta \tau^*,$$

где $M_y = 100$ В, $M_\theta = 0,1$ [с] (для сокращения длительности машинного импульса).

Окончательно уравнение (15) для машинных переменных переписывается в виде

$$\dot{y} - [F(\theta) - A - y] y = 0, \quad (20)$$

где $y = \frac{100}{\sqrt{N_{\text{ом}}}} x$ — интенсивность генерируемой волны в вольтах;

$\theta = 0,1 \sqrt{N_{\text{ом}}} \tau$ — машинное время в секундах;

$\theta_n = 0,1 \sqrt{N_{\text{ом}}} \tau_n$ — длительность машинного импульса накачки в секундах;

$A = \frac{100}{\sqrt{N_{\text{ом}}}}$ — превышение порога генерации в вольтах;

$F(\theta) = 100 \exp[-(\theta_n - \theta)^2 / \theta_n^2]$ — гауссова функция в вольтах, пропорциональная корню квадратному из интенсивности импульса накачки.

Структурная схема модели приведена на рис. 4.

Для образования переменной во времени функции $F(\theta)$ используется интегратор 15, задающий линейно-нарастающее напряжение, и нелинейный блок БНК. Скорость нарастания напряжения на интеграторе 15 определяется величиной α (в вольтах), набираемой на выносном делителе D_1 . Входы и выходы делителя D_1 выведены на наборное поле машины. Для получения импульса накачки длительности θ_n выбирается значение α , соответствующее $1/4 \theta_n$. Таким образом, на выходе интегратора 15 имеем

$$U_{\text{вых}15} = -\frac{\alpha\theta}{RC} = \frac{\theta}{4\theta_n} \quad (RC = 1 \text{ с}).$$

Для ограничения линейно-нарастающего напряжения на уровне $U_{15} \leq 105$ В параллельно емкости интегратора включена схема диодного ограничения.

Переменное напряжение с выхода интегратора 15 подается на вход нелинейного блока БНК, который формирует импульс накачки.

Функция $F(\theta)$ аппроксимировалась 11 отрезками и была набрана так, как показано на рис. 5.

Схема набора уравнения (20). Для образования переменного напряжения $+A$ используется второй трехдекадный выносной делитель D_2 . Напряжения $-[F(\theta) - A - y]$ с выхода сумматора 2 умножается на сигнал $-y$ на правой части блока БНК VI.

Начало импульса генерации θ_0 происходит в момент прохождения импульсом накачки $F(\theta)$ порогового значения: $F(\theta_0) = A$ (см. (15)). Для того чтобы интегрирование уравнения (20) для импульса генерации начиналось именно с этого момента, в схеме использован программный режим.

Схема программного режима собрана на базе усилителя 17 (положение тумблера «програм. режим»). Схема обеспечивает срабатывание вспомогательного реле $P6$ в момент времени, когда разность напряжений, поданных на два его входа «вх 1» и «вх 2» переходит через нуль, четыре группы контактов реле $P6$ выведены на наборное поле. При положении тумблеров PO в положении «В» и «—» нормально разомкнут правый контакт реле $P6$ и нормально замкнут левый.

Если подать на входы напряжения $F(\theta)$ и $-A$ (см. рис. 4), а нормально разомкнутые контакты реле $P6$ использовать для подачи напряжения на вход интеграторов 5 и 7, то мы получим запуск интеграторов как раз в тот момент, когда разность $F(\theta) - A$ перейдет через нуль.

Напряжение «А» подается на «вх 2» через нормально замкнутый контакт того же реле $P6$. После срабатывания реле этот

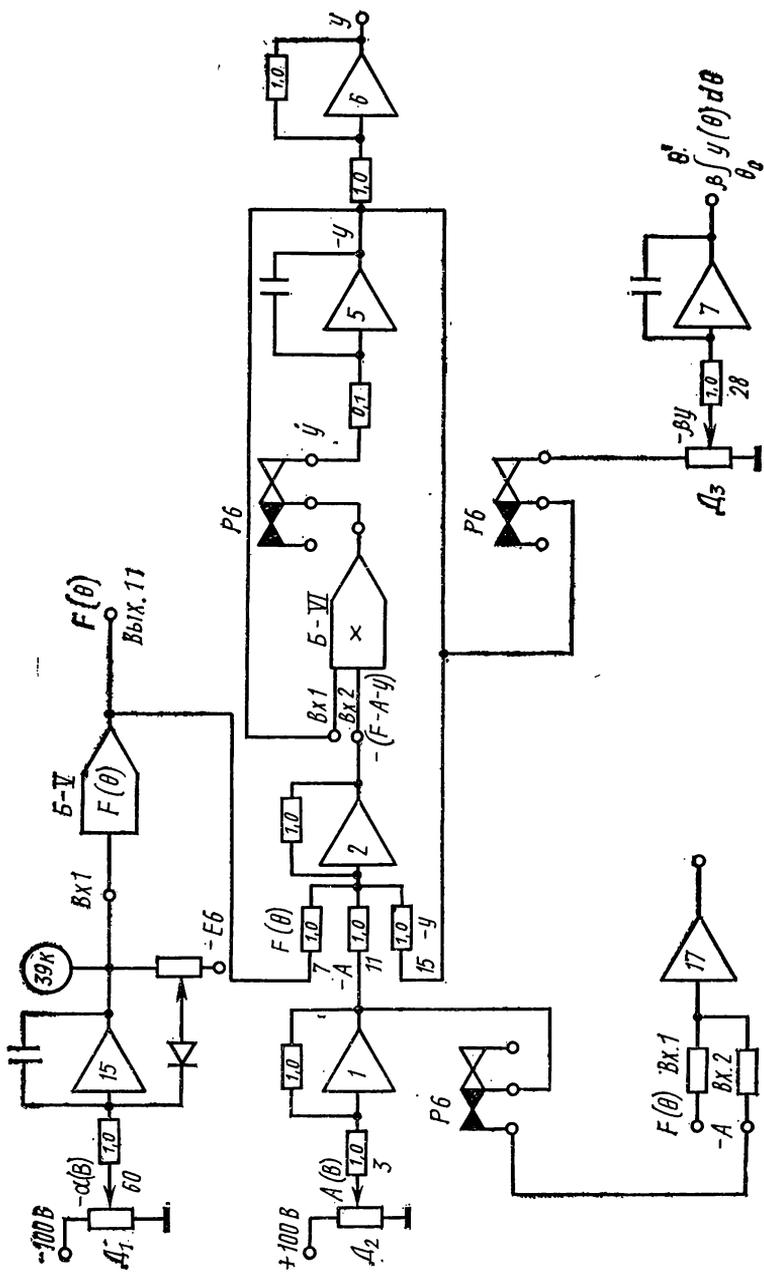


Рис. 4. Структурная схема модели

контакт размыкается, и второе срабатывание реле $P6$ (возвращение в исходное положение) произойдет после окончания импульса накачки, когда $F(\theta)$ станет равным нулю.

Для записи сигналов $F(\theta)$ и $y(\theta)$ используется двухкоординатный самописец ПДС-021.

2. Подготовка модели к работе и набор уравнения.

1. Включить блок питания (ЭСВ). После 30 мин прогрева усилителей включить на панели управления основного решающего

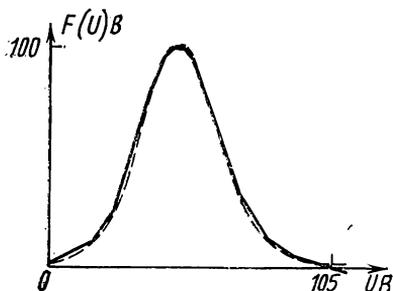


Рис. 5. Аппроксимация амплитуды накачки:
 — — — амплитуда гауссова импульса накачки; — — — машинная амплитуда накачки

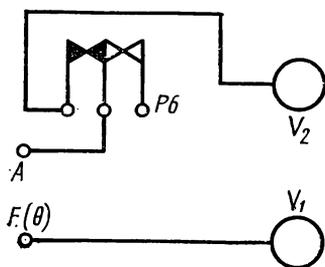


Рис. 6. Схема проверки работы программного режима:

$F(\theta)$ — машинная амплитуда накачки; A — превышение импульса накачки порогового значения

блока тумблеры «220 В» и «+26 В» и выставить нули усилителей [4].

2. Набрать часть схемы (см. рис. 4), формирующую функции $F(\theta)$. Подать сигналы с усилителя 11 на «вход Y_1 » электронно-лучевого индикатора. Задать $\alpha = -10$ В, перевести тумблеры в положение «работа» и включить кнопку «пуск». Наблюдать функцию $F(\theta)$ на экране индикатора. Перевести машину в «исходное положение».

3. Набрать схему уравнения (20) согласно рис. 4. Проверить правильность набора и работы блока умножения. Для этого на потенциометре набрать $A = 22$ В (проверить с помощью цифрового вольтметра), на интеграторе 5 задать начальные условия -80 В. Тогда, учитывая, что $F(0) = 2$ В, должны иметь на выходе сумматора $2 \cdot 100$ В, на выходе блока умножения -80 В.

4. Проверка работы программного режима. Проверить работу схемы программного режима по вольтметру, используя свободные контакты реле $P6$ на наборном поле. Для этого соединить проводами контакты реле $P6$ и вольтметр V_2 (рис. 6), вольтметр V_1 и выход усилителя 11.

На панели управления тумблера PO «В» — «О» и «—» — «+» перевести в положения «В» и «—» соответственно. Потенциометр

«ограничение» вывести до упора против часовой стрелки. На коммутационном поле МН-7М тумблер «эталон напр.» — «програм. режим» перевести в положение «програм. режим», а тумблер «остан.» — «перекл.» — в положение «перекл.».

Когда модель находится в режиме «исходное положение», контакты реле $P6$ должны быть в положении I (см. рис. 6). Если этого нет, то необходимо тумблер « PO » из положения «В» перевести в положение «0» и затем опять возвратит в положение «В». Задав значения величин $\alpha = -5$ В и $A = +20$ В, включить кнопку «пуск». По вольтметрам наблюдать функцию $F(\theta)$ и срабатывание

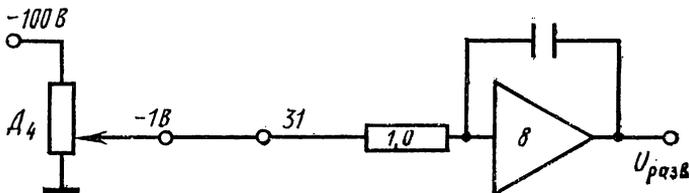


Рис 7. Схема интегратора развертки

программного режима. (В момент времени θ_0 контакты реле $P6$ из положения I переходят в положение II. После окончания импульса накачки ($F(\theta) < 0$) произойдет вторичное срабатывание схемы программного режима, и контакты реле $P6$ возвратятся в положение I). Если модель возвращена в исходное положение до окончания импульса генерации (до вторичного срабатывания схемы программного режима), то перед последующим пуском модели нужно тумблер « PO » из положения «В» перевести в положение «0», затем опять в положение «В» (при этом контакты реле $P6$ перейдут в положение I).

5. Собрать интегратор развертки согласно рис. 7 и подать напряжение с интегратора 8 на вход «коор. x » самописца.

Ручками «диапазон», «расширитель диапазона» и «установка нуля» подобрать масштаб записи по оси x .

§ 4. Упражнения

1. Исследование формы импульса генерации при различных длительностях импульса $\tau_n (N_{om} = \text{const})$.

Величины N_{om} и τ_n задаются. Вычислить α и A , результаты свести в таблицу.

1. Задать соответствующие $x(\tau_0) = 10^{-2}$ начальные условия на интеграторе 5.

2. На делителях напряжений выставить значение A , соответствующее превышению над порогом N_{om} , значение α , соответствующее длительности импульса накачки.

3. При данных значениях α и A зарисовать при помощи самописца на одном и том же графике $F(\theta)$, $y(\theta)$.

4. Повторить п. 3 для других значений α .

5. На основе результатов, полученных в пп. 3 и 4, вычислить КПД преобразования по интенсивности (см. (18)). Построить график зависимости $\eta_{\text{инт}}^{\text{max}} = f(\tau_{\text{н}})$ при фиксированном значении $N_{\text{ом}}$.

2. Определение энергии импульса генерации при фиксированном значении $N_{\text{ом}}$ и различных $\tau_{\text{н}}$.

1. Задать нулевые начальные условия на интеграторе 7 и начальные значения на интеграторе 5, соответствующие $x(\tau_0) = 10^{-2}$.

2. По делителям напряжений выставить α и A (величины α и A такие же, как и в упр. 1).

3. При заданных значениях α и A определить по вольтметру значение $\beta \int_{\theta_0}^{\theta'} y(t) dt$.

4. Повторить п. 3 для других значений α .

5. На основании результатов, полученных в пп. 3 и 4, вычислить величину $\int_{\tau_0}^{\tau'} x(\tau) d\tau$.

6. Вычислить энергию импульса накачки.

7. Вычислить эффективность преобразования по энергиям $\eta_{\text{эн}}$ в % (см. (19)). Построить график зависимости $\eta_{\text{эн}} = f_1(\tau_{\text{н}})$ при фиксированном значении $N_{\text{ом}}$.

3. Исследование формы импульса и определение энергии генерации при различных $N_{\text{ом}}(\tau_{\text{н}} = \text{const})$.

Величины $N_{\text{ом}}$ и $\tau_{\text{н}}$ задаются. Вычислить A , α , $y(\theta_0)$, результаты свести в таблицу.

1. Задать соответствующие $x(\tau_0) = 10^{-2}$ начальные условия на интеграторе 5 и нулевое начальное условие на интеграторе 7.

2. По делителям напряжений выставить значение A и α , $y(\theta_0)$.

3. При данных значениях α и A зарисовать при помощи самодиска на одном и том же графике $F(\theta)$, $y(\theta)$ и одновременно определить по вольтметру значение $\beta \int_{\theta_0}^{\theta'} y(t) dt$.

4. Повторить п. 3 для других значений α и A , $y(\theta_0)$.

5. На основании результатов, полученных в пп. 3 и 4, вычислить КПД преобразования по интенсивности и определить максимальное значение. Построить график зависимости $\eta_{\text{инт}}^{\text{max}} = f(N_{\text{ом}})$ при фиксированном значении длительности импульса накачки $\tau_{\text{н}}$.

6. Вычислить величину $\int_{\tau_0}^{\tau'} x(t) dt$, энергию импульса накачки, эффективность преобразования по энергии $\eta_{\text{эн}}$ в %. Построить график зависимости $\eta_{\text{эн}} = f_1(N_{\text{ом}})$ при фиксированном значении $\tau_{\text{н}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Параметрические усилители и генераторы света. — УФН, 1966, 88, № 3, с. 439—460.
2. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия. М., «Сов. энциклопедия», 1969.
3. Дьяков Ю. Е., Ковригин А. И. Теория формы импульса нестационарной параметрической генерации света. — «Квантовая электроника», 1972, № 4 (10), с. 86—89.
4. Урмаев А. С. Основы моделирования на аналоговых вычислительных машинах. М., «Наука», 1974.

8. ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Оптимизируется динамическая система второго порядка по критерию максимального быстродействия.

§ 1. Введение

Многие процессы и системы независимо от их природы являются управляемыми. Соответствующим внешним воздействием можно изменять ход процесса (или состояние системы) желаемым образом. Частным случаем управляемых систем являются системы автоматического управления (САУ),

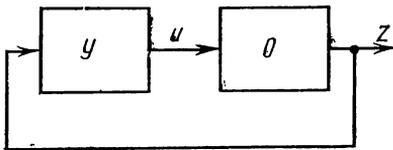


Рис. 1. Структурная схема САУ: O — объект управления; $У$ — управляющее устройство

обобщенная структурная схема которых может быть представлена в виде рис. 1. Буквой $У$ обозначено управляющее устройство, буквой O — управляемый объект. При проектировании САУ обычно учитывают, что объект O задан, и его свойства изменять нельзя. Это может быть, например, прокатный стан

или химический реактор, цех предприятия или отдельный двигатель. Напротив, закон действия (алгоритм) управляющего устройства $У$ можно выбирать из широкого класса возможных алгоритмов.

Состояние управляемого объекта описывается набором выходных параметров $\{z_i\}$: параметров состояния или координат, все или большая часть которых может быть измерена (например, скорость, смещение, давление, производительность). Значение $\{z_i\}$ зависит от величины управляющего воздействия, которое задается набором параметров $\{u_j\}$ — параметров управления. Эти параметры вырабатываются управляющим устройством (в виде электрических сигналов, механических усилий или поставок определенных продуктов) и подаются на вход управляемого объекта.

Системы автоматического управления разделяются на разомкнутые и замкнутые. В замкнутых системах управляющее устройство $У$ получает информацию о состоянии объекта $О$ по линии обратной связи (внизу на рис. 1). Если в замкнутой системе значение параметров состояния $\{z_i\}$ не соответствует определенным требованиям, то управляющее устройство $У$ оказывает такое воздействие u на объект $О$, чтобы приблизить его состояние к этим требованиям.

Перевести управляемый объект в требуемое состояние можно, как правило, различными способами. Устройства, вырабатывающие такие управляющие воздействия, при которых требуемое состояние объекта устанавливается наилучшим, в некотором смысле, образом, называются оптимальными устройствами. Соответствующий процесс управления называется оптимальным управлением, а критерий качества управления — критерием оптимальности. Автоматическая система (объект управления + управляющее устройство), функционирующая согласно критерию оптимальности, представляет собой оптимальную систему [1—3].

В рамках той или иной математической модели изменение параметров состояния объекта во времени в зависимости от характера управляющего воздействия описывается соответствующими уравнениями. Эти уравнения включают в себя параметры управления как функции времени или параметров состояния, причем вид этих функций конкретизирован настолько, насколько известен априори характер алгоритма оптимального управления. Уравнения системы, как правило, дополняются некоторыми соотношениями, которые описывают ограничения, присущие практически реализуемым объектам и устройствам. Наиболее важными и часто встречающимися являются ограничения на управляющие воздействия (например, скорость вращения вала сервомотора не может превышать некоторых значений; общий запас топлива ограничен).

Условие оптимальности математически записывается в виде условия минимизации некоторого функционала, зависящего от параметров состояния и управления и определяющего качество процесса управления.

Математическая постановка задачи оптимизации в достаточно общем случае формулируется следующим образом: минимизировать функционал качества при условии, что входящие в него параметры связаны некоторой системой уравнений (например, дифференциальных) и некоторым числом других соотношений (например, неравенств).

Для решения различных задач оптимизации за последнее время разработан целый ряд математических методов [2, 3].

В настоящей работе решается задача оптимизации простейшего динамического объекта второго порядка, линейного по фазовым координатам и параметру управления. В качестве критерия оптимальности используется критерий максимального быстродействия. Анализируется движение объекта при неоптимальном управ-

ляющем воздействии. Исследование проводится методом фазовой плоскости с помощью аналоговой вычислительной машины МН-10М.

§ 2. Теория

Пусть управляемый объект описывается системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = u; \end{cases} \quad (1)$$

допустимые значения управляющего параметра определяются неравенством

$$|u| \leq u_0, \quad (2)$$

а на фазовые координаты $z_1 = z$ и $z_2 = dz_1/dt$ никаких ограничений не наложено. Пусть задача оптимального управления состоит в максимально быстром приведении системы (1) в начало координат $z_1 = 0, z_2 = 0$ из любого (начального) состояния z_{10}, z_{20} .

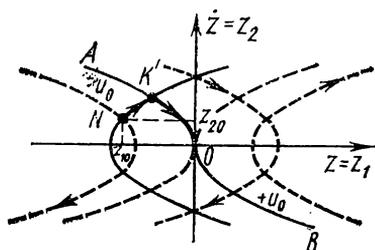


Рис. 2. Пунктир — траектории движения системы (1) из различных начальных состояний в интервалах постоянства управляющего воздействия: AOB — оптимальная по критерию максимального быстрого действия линия переключения управляющего параметра; $NK'O$ — оптимальная траектория перевода системы (1) из начального состояния N в конечное O .

Согласно теореме об n -интервалах [2] оптимальное управление должно быть релейным, т. е. управляющий параметр u должен принимать только значения $u = +u_0$ или $u = -u_0$. При этом за время движения должно произойти не более одного переключения знака. Рассмотрим движение точки, изображающей состояние системы (1) на плоскости параметров z_1, z_2 (фазовой плоскости). В интервалах постоянства управляющего воздействия траектории представляют собой параболы (рис. 2). Достичь начала координат, не произведя ни одного переключения, система может только, двигаясь по ветви одной из парабол AO

$$\left(z_1 = -\frac{1}{2u_0} z_2^2 \right) \text{ или } OB \left(z_1 = +\frac{1}{2u_0} z_2^2 \right).$$

Если в начальный момент времени изображающая точка системы не лежит ни на одной из этих двух ветвей, то необходимо приложить такое управляющее воздействие, чтобы сначала достичь одну из них, а затем уже по ней попасть в начало координат. Момент достижения этой ветви является моментом переключения знака управляющего воздействия. Линия AOB на фазовой плоскости есть линия переключения управляющего параметра.

Если переключение производить на какой-либо другой линии, проходящей через начало координат (но не совпадающей с осями OX и OY), то система (1) перейдет из начального состояния в конечное за большее время. Поэтому по критерию максимального быстрогодействия линия переключения AOB для системы (1) с ограничением (2) является оптимальной.

При начальных условиях

$$z_{10} < 0, \quad z_{20} = 0 \quad (3)$$

координаты точки переключения K' (см. рис. 2) определяются пересечением двух парабол

$$\frac{1}{2u_0} z_2'^2 + z_{10} = -\frac{1}{2u_0} z_2'^2.$$

Отсюда

$$z_2' = \sqrt{-u_0 z_{10}} \quad z_1' = \frac{z_{10}}{2}.$$

Время T' движения точки из начального состояния (3) до точки переключения можно определить, интегрируя в соответствующих пределах второе уравнение системы (1):

$$\int_0^{z_2'} dz_2 = \int_0^{T'} u_0 dt; \quad T' = \frac{z_2'}{u_0}.$$

Время движения от точки k' до начала координат также равно T' . Таким образом, полное минимальное время движения системы по интегральной траектории равно

$$T_{\min} = \frac{2z_2'}{u_0} = 2 \sqrt{-\frac{z_{10}}{u_0}}.$$

Если в качестве линии переключения задать кривую, состоящую из двух ветвей парабол

$$z_1 = \pm \gamma z_2^2, \quad \gamma > 0,$$

где $\gamma < +1/2u_0$, то система перейдет из начального состояния (3) в начало координат по траектории, состоящей из бесконечного

числа витков вокруг точки 0. При этом управляющий параметр совершит бесконечное число переключений. Однако время движения T в этом случае также конечно [4], причем

$$T > T_{\min}.$$

В случае $\gamma > +1/2u_0$ после переключения управляющего параметра с $+u_0$ на $-u_0$ в точке K'' (рис. 3) система начнет двигаться так, что ее интегральная траектория сразу же пересечет линию переключения, в результате чего значение параметра u снова станет равным $+u_0$. В этом можно убедиться, сравнивая значения про-

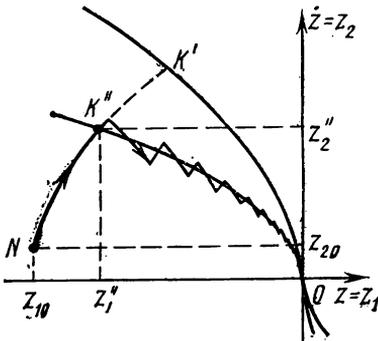


Рис. 3. $K'O$ — часть оптимальной линии переключения: $z_1 = -\frac{1}{2u_0} z_2^2$; $K''O$ — часть параболической линии переключения скользящего режима: $z_1 = -\gamma z_2^2$ ($\gamma > \frac{1}{2u_0}$); $NK''O$ — часть траектории системы (1) при движении в скользящем режиме (утрировано)

изводных dz_2/dz_1 для линии переключения $K''O$ и траектории системы в точке K'' . Далее, под действием управления $+u_0$ система опять пересечет линию переключения и т. д. В результате бесконечно частых (в пределе) переключений система будет двигаться вдоль заданной линии $K''O$. Такой режим движения системы называется вибрационным, или скользящим.

Время движения системы из точки K'' в начало координат по параболе скользящего режима $K''O$ определяется из условия

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2 = + \sqrt{-\frac{z_1}{\gamma}}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$T'' = 2\sqrt{-\gamma z_1''} = 2\gamma z_2''.$$

Полное время перехода системы из начального состояния в конечное

$$T = \frac{z_2''}{u_0} + 2\gamma z_2'' = 2 \sqrt{-z_{10} \left(\frac{1}{2u_0} + \gamma \right)} > T_{\min}.$$

Для технической реализации оптимального закона управления необходимо в управляющем устройстве $У$ (см. рис. 1) производить квадратичное преобразование фазовых координат. Так как это связано с известными трудностями, то на практике иногда отказываются от строго оптимального управления, а заменяют его близким к оптимальному. Это можно осуществить, например, заменой параболической линии переключения на прямую (рис. 4).

Разумеется, в целом для всего множества возможных начальных состояний такая линия переключения неоптимальна. Однако

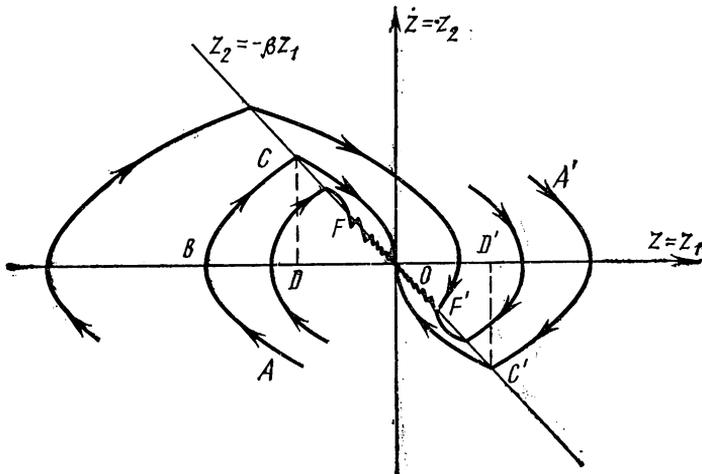


Рис. 4. Траектории движения системы (1) в случае прямой линии переключения: $z_2 = -\beta z_1$ ($\beta > 0$); FF' — отрезок скользящего режима

если переключение управляющего параметра производится в точке, в которой данная прямая пересекает оптимальную линию переключения, то при этом время достижения начала координат остается минимальным. Из рис. 4 видно, что это справедливо только для начальных состояний, изображающие точки которых лежат на отрезках парабол ABC или $A'B'C'$. В этом случае фазовые траектории системы BCO и $B'C'O$ симметричны относительно прямых CD и $C'D'$ соответственно.

При движении из других начальных состояний для любой прямой линии переключения $z_2 = -\beta z_1$ характерно то, что некоторый отрезок ее, включающий в себя начало координат (FF' на рис. 4), является отрезком скользящего режима. Длина этого отрезка обратно пропорциональна коэффициенту β .

Время достижения начала координат в данном случае бесконечно, т. е. система приближается к этой точке асимптотически.

Однако время достижения любой ε -окрестности начала координат конечно и равно

$$T_\varepsilon = \frac{1}{\beta} \ln \frac{z_1'}{z_1^\varepsilon},$$

где z_1' и z_1^ε — соответственно начальные и конечные точки «скользящей» траектории.

§ 3. Исследование движения системы при различных алгоритмах управления на электронной модели

Структурная схема модели объекта изображена на рис. 5. Напряжения на выходах операционных усилителей 1.1 и 1.2 соответствуют фазовым координатам объекта. Управляющее воздействие

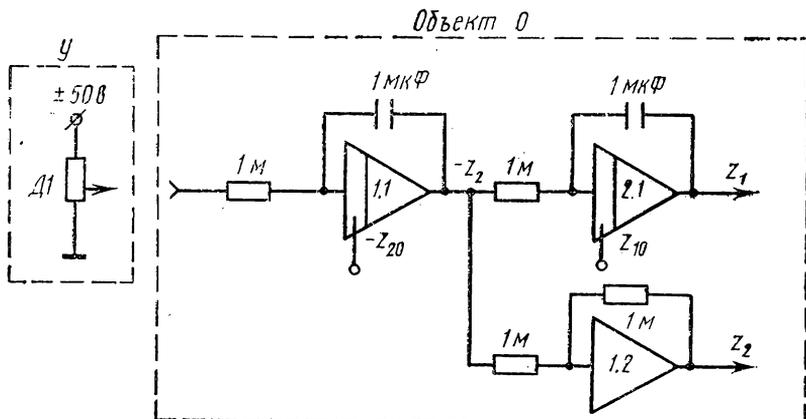


Рис. 5. Структурная схема модели объекта и управляющего устройства в простейшем случае: $u = \text{const}$ (разомкнутая система)

должно подаваться с выхода управляющего устройства $У$ на вход интегратора 1.1.

1. Наблюдение движения системы при постоянном управляющем воздействии.

При подаче на вход объекта $О$ постоянного управляющего воздействия реализуется простейший вариант разомкнутой САУ. В качестве управляющего устройства служит потенциометр $Д1$.

1. Собрать на наборном поле установки МН-10М схему, изображенную на рис. 5.

2. Нажатием клавиш «Р» и «ИП» на панели управления установить модель в режим «решение», «исходное положение». Вращая с помощью отвертки соответствующие потенциометры «НУ», выставить начальные условия $z_{10} = -20$ В, $z_{20} = +20$ В. Подать

сигналы z_1 и z_2 соответственно на входы X и Y осциллографа И-6. Переключатель «время развертки» осциллографа поставить в положение «откл.». Выход интегратора 2.1 подключить к измерительному прибору (шкала ± 50 В).

3. Потенциометром $D1$ установить напряжение $u_0=0$ (при этом моделируется движение свободной системы). Нажать клавишу «пуск» («П») и наблюдать на экране осциллографа фазовый портрет системы, контролируя в то же время величину координаты z_1 с помощью измерительного прибора. При достижении этой координаты значения $+25$ В остановить модель (для предотвращения перегрузки усилителей) и вернуть ее в исходное положение. Наблюдать фазовые портреты системы, соответствующие меньшим положительным значениям z_{20} .

Пользуясь тумблерами (\pm), сменить знаки начальных условий z_{10} и z_{20} , переведя изображающую точку из второго квадранта фазовой плоскости в четвертый. Пронаблюдать фазовые траектории, соответствующие различным отрицательным значениям z_{20} .

4. Потенциометром $D1$ установить напряжение $u_0=+10$ В. Нажать клавишу «пуск» и наблюдать фазовый портрет системы. При достижении координатой z_1 значения $+25$ В остановить модель и вернуть ее в исходное положение. Пронаблюдать траектории системы, соответствующие меньшим отрицательным значениям z_{20} . Затем изменить знаки начальных условий z_{10} и z_{20} , а также знак управляющего воздействия, подав на вход потенциометра $D1$ напряжение -50 В (вместо напряжения $+50$ В).

Наблюдать траектории системы $z_2=-u_0$, соответствующие различным положительным значениям z_{20} .

Обратить внимание на характер движения изображающей точки по фазовой плоскости (скорость и направление движения).

5. Зарисовать с помощью двухкоординатного самописца фазовые траектории, соответствующие положительному и отрицательному управляющему воздействию.

6. Проанализировать зависимость фазовых траекторий от величины управляющего воздействия. Для этого с помощью потенциометра $D1$ установить $|u_0|=5$ В. Пронаблюдать и зарисовать соответствующие траектории системы. Объяснить различие фазовых портретов.

2. Исследование движения системы при наличии прямой линии переключения управляющего параметра.

Задание прямой линии переключения на фазовой плоскости эквивалентно заданию релейной функции:

$$u = -u_0 \operatorname{sign}(z_2 + \beta z_1). \quad (4)$$

Реализовать зависимость (4) на модели можно с помощью блока операционного реле (БОР-1), размещенного на верхней панели. Блок состоит из двух полностью идентичных и независимых друг от друга каналов «Вх 1» и «Вх 2». Контакты реле (по две группы

в каждом канале) переключаются в моменты, когда меняет знак сумма напряжений, подаваемых на гнезда 1 и 2. Одной из отличительных особенностей операционного реле (по сравнению с механическим) является малая ширина зоны нечувствительности.

Схема модели замкнутой управляемой системы

$$\dot{z}_2 = -u_0 \text{sign}(z_2 + \beta z_1) \quad (5)$$

изображена на рис. 6. Диодные ячейки в цепи обратной связи сумматора 3.2. ограничивают выходное напряжение ($z_2 + 10 \alpha z_1$) для предотвращения перегрузки усилителя.

1. Частично используя набранную ранее схему (см. рис. 5), набрать схему, изображенную на рис. 6.

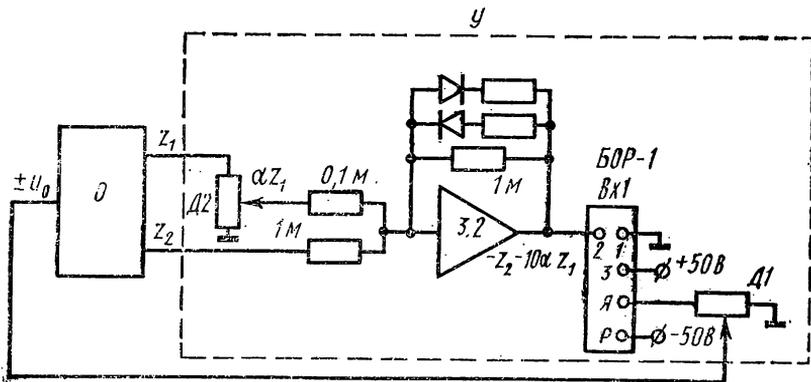


Рис. 6. Структурная схема модели замкнутой САУ с прямой линией переключения

2. Установить уровень ограничения выходного напряжения усилителя 3.2 равным ± 10 В.

3. Установить начальные условия $z_{20} = 0$, $z_{10} = -25$ В.

4. Нажав клавишу «пуск», наблюдать движение системы по фазовой плоскости. Убедиться в том, что движение происходит сначала по одному или нескольким отрезкам парабол, а затем по отрезку прямой, проходящей через начало координат, т. е. по отрезку скользящего режима. Как было сказано выше, наклон и длина этого отрезка зависят от коэффициента α , набранного на делителе D2. Движение системы в скользящем режиме сопровождается характерным звуком быстро переключающегося реле BOP-1.

По истечении некоторого времени, когда изображающая точка достигнет окрестности начала координат, перевести машину в режим «останов».

В реальной модели все операции выполняются с ошибкой, вследствие чего система не может остановиться точно в начале координат. Например, ввиду запаздывания переключений пара-

метра u образуется предельный цикл с малой амплитудой колебаний, по которому система может двигаться бесконечно долго вокруг точки $z_1=0, z_2=0$. Следовательно, на модели можно фиксировать попадание системы не точно в начало координат, а лишь в неко-

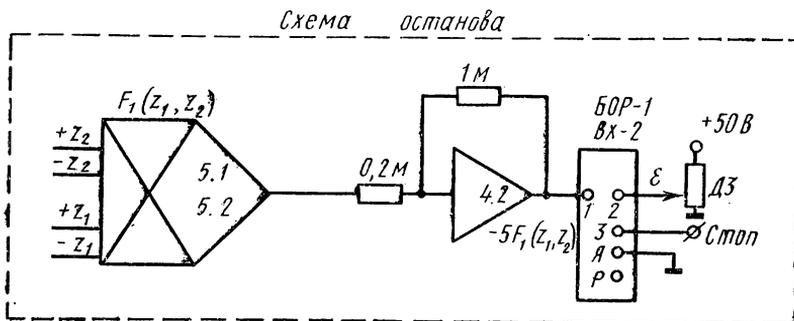


Рис. 7. Структурная схема набора условия останова модели

торую ϵ -окрестность этой точки. Минимальные размеры окрестности определяются точностью решения уравнения (5) на электронной модели.

Задать ϵ -окрестность можно по-разному, например в виде ромба с диагональю 2ϵ :

$$|z_1| + |z_2| \leq \epsilon. \quad (6)$$

В данной задаче используется модифицированное условие (6'). С величиной ϵ сравнивается не сумма модулей $|z_1| + |z_2|$, а функция $F_1(z_1, z_2)$, которая определяется следующим образом:

$$F_1(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1| + |z_2|, & \text{если } |z_1| + |z_2| \leq a, \\ a, & \text{если } |z_1| + |z_2| > a. \end{cases}$$

Условие останова принимает вид

$$F_1(z_1, z_2) \leq \epsilon. \quad (6')$$

Функция двух переменных $F_1(z_1, z_2)$ набрана на диодных элементах нестандартного нелинейного блока, занимающего на наборном поле ячейку № 5. Ограничение функции $F_1(z, z)$ по уровню $a=4$ В необходимо для предотвращения перегрузки усилителя 4.2 (рис. 7).

Остановить движение управляемой системы при выполнении условия (6') можно, переведя модель из режима «решение» в режим «останов» заземлением шины «стоп», выведенной под клеммы на верхней панели наборного поля. С этой целью целесообразно задействовать второй канал блока операционного реле БОР-1.

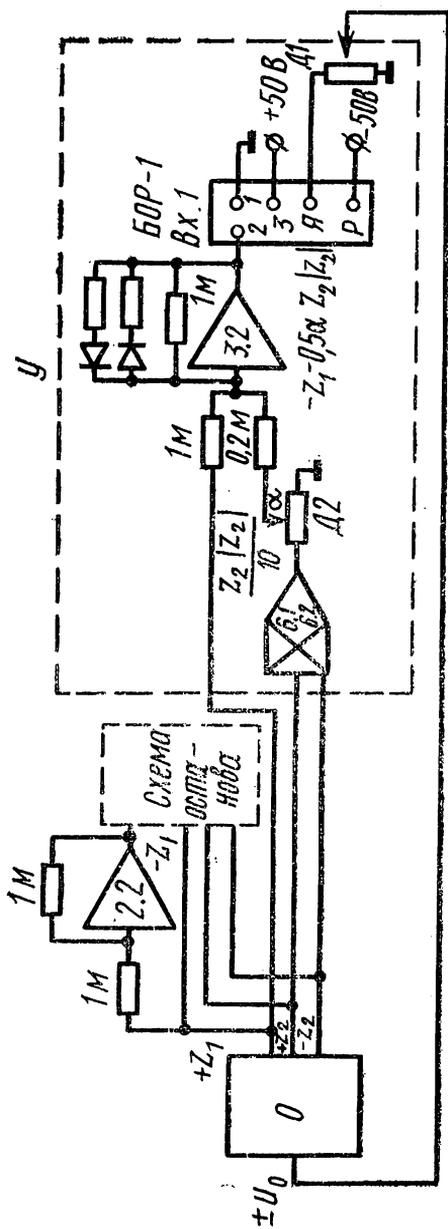


Рис. Структурная схема замкнутой САУ с параболической линией переключения

Для получения напряжения $F_1(z_1, z_2)$ необходимо на соответствующие клеммы нелинейного блока подать входные напряжения $+z_1$, $-z_1$, $+z_2$ и $-z_2$. Сигнал $F_1(z, z)$ снимается с выхода усилителя 5.1. Схема набора условия останова решения изображена на рис. 7.

5. Дополнить ранее набранную схему модели замкнутой управляемой системы (5) схемой останова. Для получения напряжения $-z_1$ использовать инвертор 2.2. Установить значение модуля управляющего воздействия $u_0 = 5$ В. Коэффициент передачи делителя Д3, определяющего величину ϵ -окрестности, установить равным 0,08.

6. Убедиться в том, что модель функционирует правильно, т. е. система переводится из произвольного начального состояния в ϵ -окрестность начала координат, после чего процесс решения останавливается.

7. Установить начальные условия $z_{10} = -25$ В, $z_{20} = 0$. Варьируя наклон прямой переключения с помощью потенциометра Д2, наблюдать на экране осциллографа фазовые портреты системы.

8. С помощью двухкоординатного самописца зарисовать траектории, соответствующие значениям $\beta = 10\alpha = 2,5; 1,6; 0,9; 0,6$.

8. Измеряя время T движения системы из начального состояния до ϵ -окрестно-

сти начала координат с помощью счетчика времени, снять зависимость $T=T(\beta)$ не менее, чем для 10 значений β на интервале $\beta=0,2-3$.

Эта зависимость характеризует чувствительность системы к вариации линии переключения. Определить возможно точнее значение $\beta=\beta_0$, при котором T минимально. Полученную зависимость $T(\beta)$ представить графически.

9. Прodelать то же самое для случаев $z_0=-20$ В; -15 В; -10 В; -5 В.

10. Определить расчетным путем координаты точек переключения, соответствующих этим начальным условиям и найденным значениям β_0 . Нанести эти точки на фазовую плоскость и убедиться в том, что они лежат вблизи ветви параболы $z_1 = -\frac{1}{2u_0}z_2^2$ (во II квадранте).

3. Исследование движения системы при наличии параболической линии переключения.

Задание параболической линии переключения на фазовой плоскости эквивалентно заданию релейной функции

$$u = -u_0 \operatorname{sign}(z_1 + \gamma z_2 |z_2|). \quad (7)$$

Эта функция реализуется с помощью блока операционного реле *БОР-1*. Нелинейная операция $F(z_2) = z_2 |z_2|$ производится на стандартном нелинейном блоке, занимающем на наборном поле машины ячейку № 6.

1. Собрать схему управляемой системы вместе со схемой останова согласно рис. 8. Убедиться в правильности ее функционирования.

2. С помощью двухкоординатного самописца зарисовать траектории системы для случаев $z_{10}=-25$ В; $z_{20}=0$; $\gamma=0,5$ $\alpha=1,6$; $1,1$; $0,9$; $0,6$.

3. Исследовать чувствительность системы к вариации линии переключения, т. е. получить зависимость $T=T(\gamma)$ при фиксированных значениях $z_{10}=-25$ В, $z_{20}=0$. Построить график этой зависимости.

4. Для разных значений начальной координаты z_{10} ($|z_{10}| \leq \leq 25$ В) найти значение коэффициента γ , соответствующее наименьшему времени движения системы до ϵ -окрестности начала координат. Зафиксировать это время. Убедиться в том, что найденное значение одно и то же для разных z_{10} , т. е. что соответствующая линия переключения оптимальна. По результатам измерений построить график зависимости $T_{\min}=T_{\min}(z_{10})$ для оптимальной линии переключения и сравнить его с теоретическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Основы автоматического управления. Под ред. В. С. Пугачева. М., Физматгиз, 1963, § 1.1—1.6, 14.1.
2. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., Физматгиз, 1963, гл. I, § 1—5; гл. II, § 3, 4; гл. III, § 1.
3. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М., «Наука», 1964, с. 9—53.
4. Фуллер А. Т. Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества. — В кн.: Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем. М., Изд-во АН СССР, 1961, с. 584.
5. Описание МН-10М.

V. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ НА ЭЦВМ

Введение

Электронные вычислительные машины в последние два десятилетия произвели подлинную революцию в науке и технике. В настоящее время трудно найти область, где использование ЭВМ не стало бы самым серьезным фактором научного прогресса. И прежде всего это относится к физике. Фундаментальные исследования в атомной физике, космической механике и ряде других важных областей были бы невозможны без применения ЭВМ. С помощью ЭВМ обрабатываются результаты опытов и наблюдений, выявляются закономерности процессов, проводятся численные эксперименты. Численный эксперимент — изучение на ЭВМ математической модели физического явления с целью получения результатов слишком дорогого, сложного или опасного опыта до его реального осуществления — является сейчас важным принципом исследования.

Целью физического практикума с применением ЭЦВМ являются обучение студентов-радиофизиков некоторым методам обработки опытных данных, ознакомление с простейшим численным экспериментом в области радиофизики и привитие основных навыков работы с ЭЦВМ. Работы практикума подобраны таким образом, чтобы охватить по возможности разнообразные математические методы численного эксперимента и обработки данных.

Работа в практикуме проводится на малой цифровой электронной вычислительной машине «МИР-1», предназначенной для автоматизации решения инженерных и несложных научно-технических задач. Программирование, т. е. запись вычислительной схемы, производится с помощью специального языка машины «МИР», в основных чертах напоминающего современные алгоритмические языки, употребляющиеся в больших и средних ЭЦВМ. Это облегчает студентам в дальнейшем изучение более сложных машин.

Программой называется законченное описание алгоритма на языке машины.

В ЭЦВМ «МИР-1» могут быть программы двух видов: первичная и вторичная. Первичной (основной) программой или просто программой называется запись на языке машины алгоритма обработки числовой информации, т. е. запись схемы решения задачи.

Вторичная программа используется для исправления (изменения) основной программы, ее распечатки на бумаге, набивки на перфоленте и для других вспомогательных целей. В работах практикума используются оба вида программ.

Машина «МИР-1» однопрограммная. Ввод программ осуществляется с электрифицированной пишущей машинки¹ или с перфорированной бумажной ленты, которая в данной машине представляет внешнюю память. Вывод результатов вычислений машина производит путем печати на бумагу со скоростью 6—10 символов в секунду. ЭЦВМ «МИР» способна автоматически вычислять многие элементарные функции, а также суммы, произведения и интегралы. Машина может оперировать числами, содержащими большое число разрядов. Это число, как и длина программы, ограничивается только объемом памяти и скоростью вычислений.

Емкость оперативной памяти машины 4096 десятичных символов входного языка. Свободный объем памяти составляет 3500 символов. Это число дает также длину программы.

Время выполнения различных арифметических операций зависит от типа операции и от разрядности. В среднем можно считать, что машина производит 60 000 логических и 300—400 арифметических операций в секунду. Такая скорость достаточна для того, чтобы студент, знакомый с теоретической частью работы и изучивший описание входного языка и инструкцию пользования ЭЦВМ «МИР-1», смог выполнить задание в отведенное для этого время. Знание описания входного языка и инструкции пользования, а также понимание того, как работает данная программа, проверяются преподавателем перед началом работы.

Первичная программа состоит из трех частей: 1) указание о разрядности; 2) последовательность операторов; 3) описательная часть. Указание о разрядности имеет вид «РАЗРЯДНОСТЬ» N. После служебного слова «РАЗРЯДНОСТЬ», которое можно опустить, оставив только кавычки « », стоит N — целое число без знака, равное числу значащих цифр десятичного числа, которые сохраняются при всех арифметических действиях и выдаются на печать. После этого целого числа всегда ставится точка.

Последовательность операторов, т. е. приказов машине выполнить определенное действие, задает вычислительный алгоритм. Операторы P_1 ; P_2 ; ...; P_n обязательно разделяются между собой знаком точка с запятой.

Описательная часть начинается служебным словом «ГДЕ» и содержит описания, т. е. исходные числовые данные и правила вычисления различных величин. Описания C_1 ; C_2 ; ...; C_m обязательно разделяются между собой знаком точка с запятой. Вся программа заканчивается служебным словом «КОНЕЦ», которое можно сократить до «K0». Перед словами «ГДЕ» и «КОНЕЦ» (или «K0») никаких знаков ставить нельзя.

¹ При наборе программы на пишущей машинке обратить внимание на различие буквы O и цифры 0.

Таким образом, основная программа на языке ЭЦВМ «МИР-1» имеет вид

''' N. P₁; P₂; ... ; P_n "ГДЕ" C₁; C₂; ... ; C_m "К0".

В отдельных случаях, когда исходные данные и правила их обработки можно включить в операторную часть, программа может быть представлена в другой модификации, без описательной части. Тогда программа имеет вид

''' N. P₁; P₂; ... ; P_n "К0".

Такие программы работают быстрее.

В одной из работ практикума студент составляет и набивает (вводит в память машины) программу самостоятельно. В остальных получает перед началом работы перфоленту с записанной программой без описательной части. Программа может заканчиваться служебным словом «ГДЕ» или же последовательностью «ГДЕ» «Щ» «К0». В первом случае после ввода перфоленты студент вводит описательную часть и служебное слово «К0» в память ЭЦВМ, печатая их на пишущей машинке. Во втором случае используется вторичная программа «ВМ» «Щ» «ЗАП» («ВМЕСТО» «Щ» «ЗАПИСАТЬ»), где за служебным словом «ЗАП» следует набить на той же машинке описательную часть. Программа или описательная часть должны быть составлены студентом дома и предъявлены преподавателю перед началом работы. Общение студента с машиной заканчивается получением отпечатанных ею на бумаге численных результатов работы, по которым в необходимых случаях студент строит графики. Поскольку в ЭЦВМ «МИР-1» предусмотрена возможность построения графика машиной, преподаватель может предложить студенту составить или водоизменить программу таким образом, чтобы результатом выдачи был график.

При оценке работы учитываются как знание студентом физики рассматриваемого явления или процесса, так и умение обращаться с электронной цифровой вычислительной машиной.

1. РАСЧЕТ КПД ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ СВЕТА ПУЧКАМИ, ОГРАНИЧЕННЫМИ ПО ВРЕМЕНИ И ПРОСТРАНСТВУ

В задаче рассматривается процесс генерации второй оптической гармоники в реальных лазерных пучках. Целью задачи является расчет коэффициента преобразования во вторую гармонику основного излучения и анализ оптимальных параметров таких преобразователей.

§ 1. Теория

С приходом в оптику лазеров существенное значение при взаимодействии света с веществом приобрели нелинейные эффекты, т. е. эффекты, зависящие от интенсивности света [1, 2]. Другое оп-

ределение нелинейных оптических эффектов можно дать, исходя из описания нелинейных оптических явлений. Если линейная оптика описывается линейными дифференциальными уравнениями, то нелинейные оптические эффекты — это эффекты, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями. Так как нелинейные оптические эффекты протекают при относительно высоких интенсивностях, то они хорошо описываются волнами. Одним из первых нелинейных эффектов, получивших в настоящее время широкое практическое применение, является генерация гармоник света, в частности второй гармоники.

Рассмотрим уравнения Максвелла для немагнитной однородной среды:

$$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\nabla \mathbf{D}) = 0, \quad (1)$$

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (\nabla \mathbf{H}) = 0,$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, \mathbf{P} — вектор поляризации. Нелинейные эффекты можно рассмотреть, учитывая в разложении вектора \mathbf{P} по полю члены более высокого порядка, чем первый, например для j -той компоненты можно записать

$$P_j = \alpha_{ji} E_i + \chi_{jik} E_i E_k + \theta_{jikl} E_i E_k E_l + \dots, \quad (2)$$

где наибольшим нелинейным членом является поляризация, квадратичная по полю $P_j^{(2)} = \chi_{jik} E_i E_k$. Следует отметить, что в обладающих центром инверсии средах в нелинейной поляризации отсутствуют все четные члены и наибольшая нелинейность — кубическая: $P_j^{(3)} = \theta_{jikl} E_i E_k E_l$.

Квадратичная нелинейная поляризация приводит, в частности, к эффекту генерации второй гармоники. Из уравнений Максвелла с учетом $P_j = \alpha_{ji} E_i + \chi_{jik} E_i E_k$ для поля основной частоты и поля второй гармоники получим два волновых уравнения, где индексы 1 и 2 относятся соответственно к основной частоте и второй гармонике:

$$\Delta \mathbf{E}_1 - \frac{\epsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_1^{(2)}, \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{E}_2 - \frac{\epsilon_2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_2}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_2^{(2)}.$$

Поляризации $\mathbf{P}_1^{(2)}$ и $\mathbf{P}_2^{(2)}$ играют роль нелинейной силы соответственно на частотах ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$. Образующая электромагнитная волна на удвоенной частоте, в свою очередь, может вызывать высшие гармоники и комбинационные частоты.

В оптическом диапазоне вследствие сильной дисперсии эффективно может взаимодействовать только конечное число волн, для которых выполнено условие синхронизма. Для второй гармоники это условие в случае коллинеарного взаимодействия имеет вид

$$k_2 = 2k_1. \quad (4)$$

Выполнение условия синхронизма требует аномальной дисперсии и может быть удовлетворено, в частности, в анизотропных кристаллах для взаимодействующих волн различной поляризации, распространяющихся под определенным направлением к кристаллографическим осям кристалла. Во многих случаях задача о генерации второй гармоники может быть сведена к одномерной задаче. Например, для распространения плоских волн по оси z полу-

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} - \frac{\epsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_1^{(2)}, \\ \frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} - \frac{\epsilon_2}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_2^{(2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$P_1^{(2)} = \chi_{\text{эф}} E_2 E_1^*, \quad P_2^{(2)} = \frac{1}{2} \chi_{\text{эф}} E_1^2,$$

а $\chi_{\text{эф}}$ — эффективный нелинейный коэффициент взаимодействия волн E_1 и E_2 , удовлетворяющих условию синхронизма (4).

Система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка (6) может быть решена только приближенными методами. Используя метод медленно меняющихся амплитуд и пренебрегая вторыми производными по пространственной координате, получим систему так называемых укороченных уравнений для амплитуд A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -i \sigma_1 A_2 A_1^* e^{-i\Delta k \cdot z}, \quad \sigma_1 = \frac{4\pi \omega_1}{cn_1} \chi_{\text{эф}}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} &= -i \sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta k \cdot z}, \quad \sigma_2 = \frac{4\pi \omega_2}{cn_2} \chi_{\text{эф}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эта система описывает процесс слияния и распада фотонов для плоских волн. Точное решение получено Н. Бломбергом в виде эллиптических интегралов [2]. В наиболее практически интересном случае $\Delta k = 0$ решение (6) при граничных условиях $A_1(0) = A_{10}$, $A_2(0) = 0$ имеет вид

$$|A_2| = |A_{10}| \operatorname{th} |A_{10} \sigma_1 l|, \quad (7a)$$

$$|A_1| = |A_{10}| \operatorname{sech} |A_{10} \sigma_1 l|, \quad (7б)$$

где A_{10} — амплитуда на входе нелинейной среды, l — длина нелинейной среды.

Из (7) следует важный вывод о возможности 100%-ного преобразования излучения основной частоты во вторую гармонику. Укороченные уравнения с учетом линейных потерь α_1, α_2 имеют следующий вид:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \sigma_1 A_2 A_1^* - \alpha_1 A_1 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \sigma_2 A_1^2 - \alpha_2 A_2 = 0.$$

В частном случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ система (8) имеет решение:

$$A_1(z) = A_{10} e^{-\alpha z} \operatorname{sech} \left[\sigma_1 A_{10} \cdot \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha z}) \right], \quad (9)$$

$$A_2(z) = A_{10} e^{-\alpha z} \operatorname{th} \left[\sigma_1 A_{10} \cdot \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha z}) \right]. \quad (10)$$

В экспериментах по генерации второй гармоники значение величины $|A_{10}\sigma_1 l|$ порядка l и больше, необходимое для достижения высоких коэффициентов преобразования, может быть достигнуто при использовании импульсных лазеров. При этом для сравнения экспериментальных данных с теорией необходимо учесть временное и пространственное распределение излучения накачки. Во многих интересных для практики случаях процесс генерации второй гармоники можно считать стационарным, т. е. в каждый момент времени справедливы уравнения (9), (10) для мгновенного значения интенсивности основного излучения A_{10} . Учет пространственного распределения мощности основного излучения для пучков, у которых несущественно дифракционное расплывание пучка на длине нелинейной среды l , также может быть произведен простым интегрированием по сечению пучка решения (10) для плоской волны.

Произведем расчет КПД преобразования во вторую гармонику импульса основного излучения, имеющего гауссовское распределение как во времени, так и по пространству. Пусть $A_1 = A_{10} e^{-r^2/\omega^2} \times e^{-t^2/\tau^2}$, где τ — длительность импульса, а ω — радиус гауссовского пучка. Для КПД преобразования по энергии такого импульса можно записать:

$$\text{КПД}_3 = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{A_{10}^2 \int_0^\infty 2\pi r dr \int_0^\infty 2 e^{-2r^2/\omega^2} e^{-2t^2/\tau^2} e^{-2\alpha t} \operatorname{th}^2 \left[\sigma_1 A_{10} \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right] dt}{A_{10}^2 \int_0^\infty 2\pi r dr \int_0^\infty 2 e^{-2r^2/\omega^2} e^{-2t^2/\tau^2} dt} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-2\alpha l} \int_0^{\infty} z e^{-2z^2} dz \int_0^{\infty} e^{-2y^2} \operatorname{th}^2 \left[A_{10} \sigma e^{-z^2} e^{-y^2} \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha l}) \right] dy,$$

где

(11)

$$z = \frac{r}{\omega}; \quad y = \frac{t}{\tau}.$$

§ 2. Упражнения

1. Составить программу и рассчитать КПД преобразования основного излучения во вторую гармонику (формула (11)) как функцию величины $\sigma A_{10} l$ в интервале 0—10 для различных коэффициентов поглощения α (например, $\alpha=0$; $\alpha=0,05 \text{ см}^{-1}$). Длину нелинейной среды l положить равной 1 см.

2. При заданной величине поля основной волны (например, $\sigma A_{10}=1 \text{ см}^{-1}$) и коэффициенте поглощения ($\alpha=0,05 \text{ см}^{-1}$) рассчитать КПД преобразования во вторую гармонику для различных длин нелинейной среды l . Из полученных данных определить оптимальную длину l для такого преобразователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., ВИНТИ, 1964.
2. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М., «Мир», 1966.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ФОКУСИРУЮЩИХ И ДЕФОКУСИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Цель задачи — изучить основные закономерности распространения лазерных пучков в оптически неоднородных средах, оказывающих на пучок фокусирующее или расфокусирующее действие, причем распределение «элементарных оптических линз» вдоль пути распространения пучка может быть задано (случай «линзовой» среды) или формируется под действием самого пучка вследствие нелинейного изменения показателя преломления (случай самовоздействия светового пучка).

§ 1. Квазиоптическая теория распространения световых пучков

Распространение гармонических электромагнитных волн описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta E + \epsilon k_0^2 E = 0, \quad (1)$$

где Δ — лапласиан; ϵ — диэлектрическая проницаемость среды; $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме; ω — частота электромагнитных колебаний; c — скорость света в вакууме.

Нас будет интересовать распространение волн в оптически неоднородных средах, диэлектрическая проницаемость которых изменяется в пространстве:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(r), \quad (2)$$

где ε_0 — постоянная составляющая, а $\varepsilon_1(r)$ — переменная составляющая. В оптике обычно изменения диэлектрической проницаемости малы по величине:

$$|\varepsilon_1(r)| \ll \varepsilon_0 \quad (3)$$

и происходят достаточно медленно на расстояниях порядка длины волны $\lambda = 2\pi/k$:

$$|\text{grad } \varepsilon_1(r)| \ll k\varepsilon_0; \quad k = k_0 \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (4)$$

Представим решение уравнения (1) в виде

$$E = A e^{-ikz}. \quad (5)$$

Здесь A можно рассматривать как комплексную амплитуду почти плоской волны. После подстановки (5) в (1) получаем

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2ik} \Delta A - \frac{ik\varepsilon_1(r)}{2\varepsilon_0} A. \quad (6)$$

В слабонеоднородных средах (4) волны мало отличаются от плоских на всем пути своего распространения, т. е. амплитуда волны A медленно меняется по сравнению с быстрыми изменениями эйконала e^{-ikz} :

$$|\text{grad } A| \ll k|A|. \quad (7)$$

Физически это означает, что поперечные размеры пучка остаются много больше длины волны, $a_{\perp} \gg \lambda$, в любом сечении z . Это дает основание пренебречь в (6) членом $\partial^2 A / \partial z^2$, описывающим продольную диффузию комплексной амплитуды.

Таким образом, распространение слабосходящихся и слаборасходящихся световых пучков в слабонеоднородных средах можно описывать параболическим уравнением для амплитуды волны, которое для аксиально-симметричных волн имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2ik} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{ik\varepsilon_1(r, z)}{2\varepsilon_0} A, \quad (8)$$

где r — поперечная координата, а z — продольная. Уравнение (8) трактует дифракцию волны как процесс поперечной диффузии амплитуды. В силу того что коэффициент диффузии является мнимой величиной, изменения претерпевает не только профиль интенсивности волны, но и волновой фронт.

Действительно, комплексную амплитуду можно представить в виде

$$A = A_0 e^{-iks}, \quad (9)$$

где A_0 — действительная амплитуда, s — добавка к эйконалу плоской волны. Подставляя (9) в (8) и отделяя мнимую и действительные части, находим

$$2 \frac{\partial s}{\partial z} + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)^2 = \frac{\epsilon_1(r, z)}{\epsilon_0} + \frac{\Delta_{\perp} A_0}{k^2 A_0}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial A_0^2}{\partial r} + A_0^2 \Delta_{\perp} s = 0, \quad (11)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r$. Уравнение (10) описывает искажение фазового фронта вследствие рефракции лучей на неоднородностях $\epsilon_1(r, z)$ и дифракции. Уравнение (11) — уравнение переноса — выражает закон сохранения энергии в дифференциальной форме. Интегрируя (11) по поперечному сечению, находим, что полная мощность волны

$$P = \frac{cn_0}{8\pi} \int_0^{\infty} A_0^2(r, z) 2\pi r dr \quad (12)$$

сохраняется в любом сечении z : $dP/dz = 0$.

Используем квазиоптическое описание (10)–(11) для различных случаев распространения световых пучков.

§ 2. Дифракция пучков в оптически однородных средах

В линейной среде без искажений профиля распространяются гауссовы пучки

$$A_0 = \frac{E_0}{f(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2 f^2(z)}\right) \quad (13)$$

со сферическим фронтом

$$s = \frac{r^2 f'(z)}{2f(z)} + \varphi(z). \quad (14)$$

Функция $f(z)$ называется безразмерной шириной пучка. Функции (13), (14) тождественно удовлетворяют уравнению переноса (11). Подставляя их в (10), находим

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{R_d^2 f^3}. \quad (15)$$

R_d — характерная длина, связанная с дифракцией пучка,

$$R_d \Rightarrow ka^2/2. \quad (16)$$

Уравнение (15) имеет простое решение:

$$f^2 = (1 + z/R)^2 + z^2/R_d^2, \quad (17)$$

где $1/R = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0}$ — начальная кривизна волнового фронта; $a = a/R$ — начальная расходимость пучка.

Из (17) видно, что во всех случаях дифракция ограничивает поле (нигде $f(z)$ не равно 0) и приводит в конечном счете к расплыванию пучка: $f^2 \sim z^2 (R^{-2} + R_d^{-2})$.

§ 3. Распространение пучков в линзовых средах

Световые пучки, как было показано в предыдущем разделе, расплываются по мере своего распространения. Для воспрепятствования дифракционному расплыванию световые пучки заключают в трубы, заполненные газом, или в стеклянные волноводы. Причем специальным образом создают такие условия, чтобы диэлектрическая проницаемость имела параболический профиль в поперечном сечении:

$$\varepsilon_1(r, z) = \varepsilon_0 \psi(z) r^2. \quad (18)$$

В линзовой среде (18) безразмерная ширина гауссова пучка описывается уравнением (ср. с (15)):

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \psi(z) f + \frac{1}{R_d^2 f^3}. \quad (19)$$

Появление нового члена связано с рефракцией лучей в линзовой среде, функция $\psi(z)$ характеризует распределение «элементарных оптических линз» вдоль оси трубы. В области $\psi > 0$ среда оказывает дефокусирующее действие на пучок, а в области $\psi < 0$ — фокусирующее. Из (19) можно получить условие распространения пучка без дифракционного расплывания в виде волновода постоянного сечения $f(z) \equiv 1$. Полагая в (19) $f = 1$ и $f'' = 0$, находим $\psi = -R_d^{-2}$, т. е. оптический волновод можно сформировать в однородной по длине фокусирующей линзовой среде с $a = \sqrt{-2\psi/k}$. При нарушении этого условия или появлении начальной расходимости $a \neq 0$ ширина пучка осциллирует вдоль оси z . Размах этих колебаний (f_{\max} и f_{\min}) нетрудно найти, вычислив первый интеграл уравнения (19).

§ 4. Распространение пучков в нелинейных средах

1. Самофокусировка пучков. Первоначально оптически однородная среда может стать неоднородной под действием мощного лазерного излучения. Физическая причина этого эффекта заклю-

чается в том, что диэлектрическая проницаемость в сильном световом поле зависит от напряженности поля:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 |E|^2 = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 A_0^2. \quad (20)$$

В поле гауссова пучка нелинейная среда приобретает линзовые свойства:

$$\varepsilon_1(r, z) = \frac{\varepsilon_2 E_0^2}{f^2} - \frac{2\varepsilon_2 E_0^2 r^2}{a^2 f^2} + \dots \quad (21)$$

Сравнивая (21) с (18), видим, что

$$\psi_{\text{нл}}(z) = -\frac{2\varepsilon_2 E_0^2}{\varepsilon_0 a^2 f^4(z)},$$

и уравнение для ширины пучка приобретает вид:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{1}{R_{\text{нл}}^2 f^3} + \frac{1}{R_d^2 f^3}; \quad R_{\text{нл}} = a \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2 E_0^2}}. \quad (22)$$

В отличие от линейной среды (19) рефракция в нелинейной среде (22) приобретает «лавиный» характер: чем больше сжимается пучок, $f \rightarrow 0$, тем большей становится рефракция, $\psi \rightarrow \infty$.

Волноводному распространению, $f \equiv 1$, соответствует условие $R_d = R_{\text{нл}}$, выполняющееся при мощности пучка равной

$$P_{\text{кр}} = \frac{\lambda_0^2 c n_0}{64\pi^2 \varepsilon_2}. \quad (23)$$

Отметим, что критическая мощность не зависит от радиуса пучка. Вклад в изменение диэлектрической проницаемости дают нелинейная электронная поляризуемость среды, электрострикция, ориентация дипольных молекул. Полагая $\varepsilon_2 = 10^{-12}$ СГСЕ, $\lambda_0 = 1$ мкм, находим $P = 50$ кВт. Если мощность пучка больше критической $P > P_{\text{кр}}$, то нелинейная рефракция подавляет дифракционное расплывание и происходит самофокусировка с образованием коллапса $f \rightarrow 0$, $A_0 \rightarrow \infty$ на конечном расстоянии $z_{\text{ф}} = R_{\text{нл}} (1 - P_{\text{кр}}/P)^{-\frac{1}{2}}$.

2. Тепловая самофокусировка. Изменение диэлектрической проницаемости может происходить вследствие нагрева вещества

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{d\varepsilon}{dT} (T - T_0). \quad (24)$$

Температура среды устанавливается в соответствии с уравнением теплопроводности

$$Q = \frac{\delta c n_0 A_0^2}{8\pi} = -\kappa \Delta T, \quad (25)$$

где κ — коэффициент теплопроводности, δ — коэффициент поглощения. Пренебрегая диффузией тепла вдоль оси гауссова пучка, $\partial^2 T / \partial z^2 \approx 0$, можно найти

$$T = T(0, z) - \frac{\delta c n_0 E_0^2 r^2}{16 \pi \kappa f^2}. \quad (26)$$

Учитывая (18), (24), (26), нетрудно найти $\psi_{\text{нл}}(z) = -\frac{\delta P (d\varepsilon/dT)}{\pi a^2 \kappa f^2(z)}$ и уравнение для ширины пучка

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{1}{R_{\text{нл},T}^2 f} + \frac{1}{R_d^2 f^3}; \quad R_{\text{нл},T} = a \sqrt{\frac{\pi \kappa}{\delta P |d\varepsilon/dT|}}. \quad (27)$$

Теперь волноводному распространению светового пучка соответствует критическая мощность

$$P_{\text{кр},T} = \frac{\lambda_0^2 \kappa}{\pi \delta a^2 \varepsilon_0 |d\varepsilon/dT|}. \quad (28)$$

В типичных случаях (оптически прозрачные стекла и кристаллы) $P_{\text{кр},T} = 0,01 \div 0,1$ Вт.

Из уравнения (27) видно, что при тепловой самофокусировке нелинейная рефракция нарастает вблизи фокуса более медленно, чем, например, при стрикционной самофокусировке, — это является следствием рассасывания тепла из-за поперечной термодиффузии. Поле в нелинейном фокусе по этой же причине ограничено дифракцией.

3. Самофокусировка в поглощающих средах. Мощность пучка в реальных средах, строго говоря, уменьшается вследствие поглощения (ср. с идеальным случаем (12)):

$$P = P_0 e^{-\delta z}, \quad E_0 = E_0(0) e^{-\delta z/2}, \quad (29)$$

где $\delta = \frac{k \varepsilon_0''}{2 \varepsilon_0'}$ — коэффициент затухания волны, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0' + i \varepsilon_0''$. Это приводит к уменьшению нелинейной рефракции по мере распространения волны

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{e^{-\delta z}}{R_{\text{нл}}^2 f^N} + \frac{1}{R_d^2 f^3}. \quad (30)$$

Сильное поглощение $\delta R_{\text{нл}} > 1$ ограничивает зону эффективной нелинейной рефракции и уменьшает тем самым фокусирующие свойства среды.

4. Дефокусировка световых пучков. До сих пор мы рассматривали поведение пучков в фокусирующих средах с $\psi < 0$. Вместе с тем существует большой класс нелинейных механизмов, которые дают $\psi > 0$. В частности, жидкости, газы и многие кристаллы, рас-

ширятся при нагреве, уменьшают свою диэлектрическую проницаемость, $d\varepsilon/dT < 0$. С таким механизмом изменения оптических свойств среды связана тепловая дефокусировка. При резонансном воздействии лазерного пучка на двухуровневую среду можно создать условия, когда показатель преломления уменьшается с увеличением интенсивности света. В дефокусирующих средах «сила» нелинейной рефракции изменяет свой знак на обратный:

$$\frac{d^2f}{dz^2} = \frac{e^{-\delta z}}{R_{нл}^2 f^N} + \frac{1}{R_d^2 f^3}. \quad (31)$$

Видно, что в таких средах пучок будет расплываться как следствие дифракции, так и благодаря нелинейной рефракции.

§ 5. Постановка и проведение математических экспериментов

Все рассмотренные выше случаи распространения гауссовых световых пучков в линзовых и нелинейных средах описываются уравнением для безразмерной ширины пучка следующего типа:

$$\frac{d^2f}{dX^2} = \frac{Ae^{-BX}}{f^N} + \frac{C}{f^3}, \quad (32)$$

с граничными условиями при $X=0$:

$$f = 1 \text{ и } df/dX = D.$$

Здесь $X = z/L$, где L — характерная длина, в качестве которой можно взять $R_{нл}$ (тогда $A = \pm 1$, $C = R_{нл}^2/R_d^2$, $B = \delta R_{нл}$, $D = R_{нл}/R$) или R_d (тогда $C = 1$, $A = \pm R_d^2/R_{нл}^2$, $B = \delta R_d$, $D = R_d/R$). Различным вариантам соответствуют следующие величины параметров.

1. Распространение коллимированных на входе в среду пучков $D=0$, сходящихся $D<0$ и расходящихся $D>0$ пучков.

2. Дифракция пучков в линейной однородной среде: $A=0$, $C=1$.

3. Явление рефракции в фокусирующей линзовой среде $C=0$, $N=-1$, $A=-1$, однородной $B=0$ или неоднородной по длине $B \neq 0$.

4. Явление рефракции в дефокусирующей линзовой среде $C=0$, $N=-1$, $A=1$, однородной $B=0$ или неоднородной по длине $B \neq 0$.

5. Явление нелинейной рефракции в фокусирующей среде $C=0$, $N=1$ или 3, $A=-1$ с учетом затухания $B>0$ или без учета затухания $B=0$.

6. Явление нелинейной рефракции в дефокусирующей среде $C=0$, $N=1$ или 3, $A=1$ с учетом ($B>0$) или без учета ($B=0$) затухания.

7. Самофокусировка пучков на локальной нелинейности $C=1$, $A<0$, $N=3$ с учетом ($B>0$) или без учета ($B=0$) затухания.

8. Дефокусировка пучков на локальной нелинейности $C=1$, $A>0$, $N=3$ при $B>0$ или $B=0$.

9. Тепловая самофокусировка пучков $C=1$, $A<0$, $N=1$ при $B>0$ или $B=0$.

10. Тепловая дефокусировка пучков $C=1$, $A>0$, $N=1$ при $B>0$ или $B=0$.

Уравнение (32) решается методом Рунге — Кутта с постоянным шагом интегрирования H как система двух уравнений:

$$\frac{dY_1}{dX} = F_1, \quad F_1 = Y_2, \quad (33)$$

$$\frac{dY_2}{dX} = F_2, \quad F_2 = \frac{Ae^{-BX}}{Y_1^N} + \frac{C}{Y_1^3} \quad (34)$$

с начальными условиями

$$Y_1(X_0) = 1 \text{ и } Y_2(X_0) = D.$$

Массив начальных и текущих значений функции и ее производной есть $Y[2] = Y_1, Y_2$.

При вычислении по методу Рунге — Кутта используются рекуррентные формулы:

$$Y_j^{(i)} = Y_j^{(i-1)} + \frac{H}{6} [P_{j,1}^{(i)} + 2P_{j,2}^{(i)} + 2P_{j,3}^{(i)} + P_{j,4}^{(i)}],$$

$$P_{j,1}^{(i)} = F_j(X_{i-1}; Y_1^{(i-1)}; Y_2^{(i-1)}),$$

$$P_{j,2}^{(i)} = F_j\left(X_{i-1} + \frac{H}{2}; Y_1^{(i-1)} + \frac{H}{2} P_{1,1}^{(i)}; Y_2^{(i-1)} + \frac{H}{2} P_{2,1}^{(i)}\right),$$

$$P_{j,3}^{(i)} = F_j\left(X_{i-1} + \frac{H}{2}; Y_1^{(i-1)} + \frac{H}{2} P_{1,2}^{(i)}; Y_2^{(i-1)} + \frac{H}{2} P_{2,2}^{(i)}\right),$$

$$P_{j,4}^{(i)} = F_j(X_{i-1} + H; Y_1^{(i-1)} + HP_{1,3}^{(i)}; Y_2^{(i-1)} + HP_{2,3}^{(i)}).$$

Здесь i — номер очередной (текущей) точки интегрирования X_i ; j — номер уравнения системы (33)—(34), $j=1, 2$; H — шаг интегрирования; F_1, F_2 — правые части системы (33)—(34); $Y_1^{(i-1)}, Y_2^{(i-1)}$ — решение в предыдущей точке. Программа для ЭВМ «МИР» дана на с. 323.

Для счета выбрана разрядность 6. Необходимо задать вместо буквы Ψ следующие параметры:

$XO \equiv X_0$ — начальная координата (начало счета);

$XK \equiv X_k$ — конечная координата (конец счета);

N — степень фокусировки;

H — шаг интегрирования;

П — число шагов, через которые выводятся на печать данные счета;

А — величина и знак нелинейной рефракции;

В — наличие затухания;

С — наличие дифракции;

$Y[2] = f(X_0)$; $df/dX|_{X=X_0}$ — начальные данные.

§ 6. Упражнения

Студенту предлагается по выбору преподавателя исследовать на ЭВМ несколько вариантов из перечисленных выше в сочетании с различными граничными условиями.

В задачах по самофокусировке можно следить за положением фокуса z_f и величиной поля в нелинейном фокусе, связанной с минимальной шириной пучка $A_f = E_0/f(z_f)$, в зависимости от начальной мощности пучка — коэффициента А и расходимости пучка D. В задачах по дефокусировке можно следить за темпом расплывания пучка, например, вычисляя расстояние z_p , на котором коллимированный пучок удваивает свою ширину, или вычисляя фокальное расстояние и минимальную ширину сходящегося пучка ($D < 0$) в зависимости от начальной мощности пучка (коэффициента А). При изучении свойств линзовой среды можно исследовать зависимость размаха колебаний ширины пучка и их период (вдоль оси z) от начальной расходимости D и оптической силы распределенной линзы $A < 0$. В дефокусирующей линзе можно исследовать темпы уширения пучка (аналогично тому, как в нелинейной среде). В выбранных вариантах рекомендуется задавать числовые значения коэффициентов А, В, С, D в диапазоне от 0 до $2 \div 3$ (по модулю).

ПРОГРАММА СЧЕТА

```
""6.X=XO;NC=N;HC=N;"ВЫВ"А,"ПР",В,"ПР",С,"ПР",N,"ПР",Н,"ПР",П,"СТР
";"ВЫВ""ТА"1,X,Y[1],Y[2];I=O;M1.K=O;XC=X;"ДЛ"Л=1"Ш"1"ДО"2"ВЫП"(W[
L]=Y[L];R[L]=Y[L]);"НА"М4;M2.K=K+1;"ДЛ"Л=1"Ш"1"ДО"2"ВЫП"W[L]=W[L]
+S[K+1]×HC×P[L]/3;"Е"К=4"ТО""НА"М3;X=XC+HC×S[K];"ДЛ"Л=1"М"1"ДО"
2"ВЫП"R[L]=Y[L]+S[K]×HC×P[L];"НА"М4;M3."ДЛ"Л=1"М"1"ДО"2"ВЫП"Y[L]=
W[L];"Е"X<XK"ТО"(I=I+1;"НА"М1);"ВЫВ""ТА"1.X,Y[1],Y[2];"СТОП"КОНЕЦ
;M4.P[1]=R[2];P[2]=A×EXP(-B×X)/R[1]↑NC+C/R[1]↑3;"Е"К=O"ТО""(Е"И=П
"ТО"(ВЫВ""ТА"1,X,Y[1],Y[2];I=O));"НА"М2"ГДЕ,"Щ"КО"
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. — УФН, 1973, 93. с. 19.
2. Ахманов С. А. Нелинейная оптика. — В кн.: Квантовая электроника. М., «Сов. энциклопедия», 1970.

3. РАСЧЕТ ГЕНЕРАТОРА ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НА ТУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ

В задаче выполняется расчет характеристик автоколебательной системы томсоновского типа с одной степенью свободы. На примере генератора на туннельном диоде рассчитываются стационарная амплитуда колебаний и время ее установления.

§ 1. Теория

1. Постановка задачи. Имеется генератор, представляющий из себя линейную колебательную систему, соединенную с туннельным диодом (рис. 1). Источник питания задает на диоде такое постоянное напряжение V_0 , что рабочая точка находится на падающем участке вольт-амперной характеристики (ВАХ) (рис. 2). Пусть

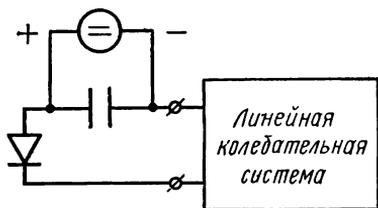


Рис. 1. Принципиальная схема изучаемой системы.

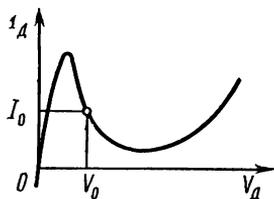


Рис. 2. Вольт-амперная характеристика диода

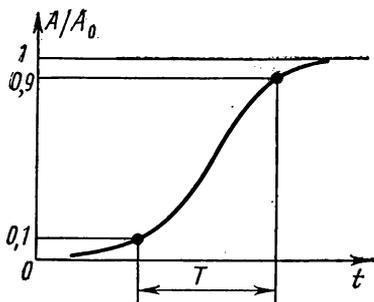


Рис. 3. Определение времени установления колебаний

колебательная система, к которой отнесены также паразитные параметры диода, имеет на частоте ω_0 резонанс параллельного типа (резонанс напряжений). Требуется рассчитать:

- 1) стационарную амплитуду колебаний напряжения на диоде;
- 2) время установления колебаний в генераторе T , определенное согласно рис. 3.

При этом считаются известными:

- 1) ВАХ диода;
- 2) положение рабочей точки на ВАХ;
- 3) проводимость G колебательной системы на резонансной частоте;
- 4) ширина полосы резонанса $\Delta\omega$.

2. Физическая часть решения. Полная эквивалентная схема диода показана на рис. 4 (см. [1]). Включая паразитные параметры диода (емкость патрона $C_{п.}$, индуктивность выводов $L_{п.}$, со-

противление потерь R_S и емкость перехода C_D) в колебательную систему, имеем для переменных компонент тока $I = I_d - I_0$ и напряжения $V = V_d - V_0$ эквивалентную схему, показанную на рис. 5, где $I(V)$ — ВАХ диода с началом отсчета в рабочей точке (рис. 6), $\tilde{Y}(\omega)$ — комплексная проводимость колебательной системы. Согласно постановке задачи на резонансной частоте ω_0

$$\operatorname{Re} \tilde{Y}(\omega_0) = G, \operatorname{Im} \tilde{Y}(\omega_0) = 0. \quad (1)$$

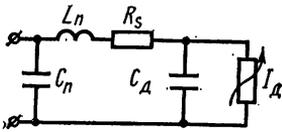


Рис. 4. Полная эквивалентная схема диода

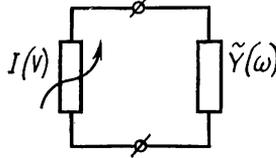


Рис. 5. Эквивалентная схема системы для переменных компонент тока и напряжения

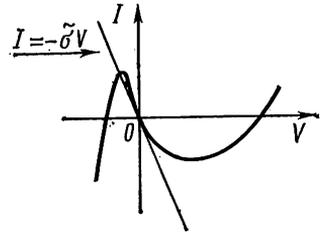


Рис. 6. Вольт-амперная характеристика диода с началом отсчета в рабочей точке

Для частот ω , близких к ω_0 , справедливо разложение в ряд Тейлора по $(\omega - \omega_0) \ll \omega_0$:

$$\tilde{Y}(\omega) \approx G [1 + i(\omega - \omega_0)\hat{\tau}]. \quad (2)$$

Фактически, как легко убедиться, равенство (2) соответствует замене двухполюсника $\tilde{Y}(\omega)$ на эквивалентный резонансный параллельный контур с активной проводимостью G и временем релаксации

$$\hat{\tau} = 2/\Delta\omega = 2Q/\omega_0, \quad (3)$$

где Q — добротность контура.

Пусть значения исходных параметров таковы, что для модуля отрицательного дифференциального сопротивления диода в рабочей точке

$$\tilde{G} = \left| \frac{dI}{dV} \right|_{V=0} \quad (4)$$

выполняются соотношения

$$\tilde{G} \approx G \ll GQ. \quad (5)$$

В этом случае к задаче можно применить метод медленно меняющихся амплитуд, т. е. искать V в виде

$$V = A \cos \Phi, \quad \Phi = \omega t + \varphi. \quad (6)$$

Действуя обычным образом (см. [2, 3]), получаем укороченные уравнения

$$AG[1 + \hat{\tau}\dot{A}/A] + I_c = 0, \quad (7a)$$

$$AG[\hat{\tau}(\omega - \omega_0) + \hat{\tau}\dot{\Phi}] - I_s = 0, \quad (7b)$$

где $I_{c,s}$ — соответственно амплитуды косинусной и синусной первых гармоник тока через диод. Для однозначной ВАХ $I_s = 0$ и решение уравнения (7b) тривиально

$$\dot{\Phi} + \omega = \omega_0, \quad (8)$$

т. е. автоколебания происходят на резонансной частоте линейной системы. Информация о поведении амплитуды колебаний A содержится в системе двух уравнений. Первое из них есть уравнение (7a), которое удобно переписать в виде

$$\hat{\tau}\dot{A} = -A - I_c/G, \quad (9)$$

а второе есть формула Фурье для I_c

$$I_c = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} I(A \cos \Phi) \cos \Phi d\Phi. \quad (10)$$

Стационарную амплитуду A_0 получаем из (9) как решение уравнения «гармонического баланса»

$$GA_0 + I_c(A_0) = 0, \quad (11)$$

а время переходного процесса как интеграл

$$T = \hat{\tau} \int_{0,1A_0}^{0,9A_0} \frac{dA}{-A - I_c(A)/G}. \quad (12)$$

Интеграл (12) имеет смысл только в том случае, если выражение в знаменателе не обращается в нуль на интервале $[0,1 A_0, 0,9 A_0]$. Это всегда так, если генератор работает в мягком режиме, т. е. инкремент нарастания амплитуды

$$\lambda(A) = -1 - \frac{I_c(A)}{GA}, \quad \lambda(A_0) = 0, \quad (13)$$

монотонно убывает при возрастании A ($A < A_0$). Если рабочая точка выбрана не на самом крутом месте падающего участка ВАХ, генератор может работать в жестком режиме, когда есть два ненулевых решения уравнения (11): устойчивое A_0^* и неустойчивое A_0^* , $0 < A_0^* < A_0$. В этом случае.

$$\begin{aligned} \lambda(A) < 0 & \text{ при } 0 < A < A_0^* \text{ и при } A_0 < A, \\ \lambda(A) > 0 & \text{ при } A_0^* < A < A_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Понятно, что интеграл (12) имеет смысл только при $A_0^* < 0,1A_0$.

§ 2. Вычислительная часть решения

Формулы (10)–(12) являются решением задачи, если известна ВАХ, т. е. функция $I(V)$. Однако обычно ВАХ задана в виде графика (см., например, рис. 7), поэтому сначала приводят ее аппроксимацию какой-либо функцией. Проведем решение для двух случаев.

1. Аппроксимация кубичной параболой. При такой аппроксимации считаем

$$I = \tilde{G}V(-1 + \alpha V + \beta V^2). \quad (15)$$

Естественно, такая аппроксимация пригодна или для «плавных» ВАХ, или для сравнительно малых амплитуд (т. е. малых значений V). Кроме того, при такой аппроксимации невозможно описать жесткий режим работы генератора.

В этом случае I_c вычисляется элементарно

$$I_c = \tilde{G}A \left(-1 + \frac{3}{4} \beta A^2 \right), \quad (16)$$

и нахождение A_0 и T не составляет труда:

$$A_0 = \left[\frac{4}{3\beta} \left(1 - \frac{G}{\tilde{G}} \right) \right]^{1/2}, \quad \tilde{G} > G, \quad (17)$$

$$T = \hat{\tau} \left(\frac{\tilde{G}}{G} - 1 \right)^{-1} \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \left[\ln \frac{x}{1-x^2} \right]_{0,1}^{0,9} \approx 3,022. \quad (18)$$

Поэтому основной проблемой является выбор параметра β . Обычно приравнивают функцию и аппроксимацию в двух точках V_+ , V_- , т. е. определяют β из системы уравнений

$$\begin{aligned} I_+ &= \tilde{G}V_+(-1 + \alpha V_+ + \beta V_+^2), \\ I_- &= \tilde{G}V_-(-1 + \alpha V_- + \beta V_-^2), \end{aligned} \quad (19)$$

где значения I_{\pm} берутся из графика. При выборе точек V_{\pm} следует иметь в виду, что, как видно из (10), с наибольшим весом в I_c

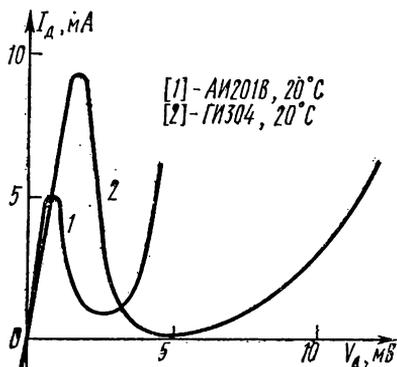


Рис. 7. Примеры вольт-амперных характеристик конкретных диодов

входят участки с $|V| \simeq A$. Поэтому можно выбрать $V_+ = A_0^{(0)}$, $V_- = -A_0^{(0)}$, где $A_0^{(0)}$ — ожидаемое значение A_0 . Тогда из (19) имеем для β

$$\beta = \frac{1}{(A_0^{(0)})^2} \left[1 - \frac{(I_- + I_+)}{2A_0^{(0)} \tilde{G}} \right]. \quad (20)$$

2. Кусочно-параболическая аппроксимация. При такой аппроксимации область возможных значений аргумента разбивают на N участков $[V_k, V_{k+1}]$, $k=1, 2, \dots, N+1$ (рис. 8), внутри каждого из которых функция достаточно хорошо аппроксимируется квадратич-

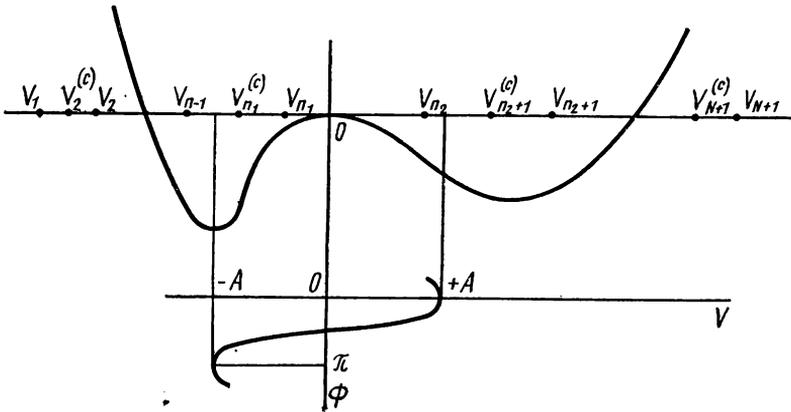


Рис. 8. Кусочно-параболическая аппроксимация

ной параболой. Такая аппроксимация при правильном выборе точек V_k дает возможность очень точно описывать самые разнообразные ВАХ, но требует значительной вычислительной работы, которая практически может быть проделана лишь на ЭВМ. Для нашей задачи мы применим несколько модифицированный метод, где кусочно-параболическая аппроксимация применена не к самой функции $I(V)$, а непосредственно к подынтегральной функции (10): $P(V) = IV = (I \cos \Phi)/A$.

Пусть амплитуда A такова, что

$$V_{n_1-1} \leq -A < V_{n_1}, \quad V_{n_2} < A \leq V_{n_2+1}. \quad (21)$$

Применяя к интегралу (10) формулу Симпсона, справедливую для квадратичной аппроксимации подкоренного выражения, имеем

$$I_c \simeq \frac{1}{3MA} \sum_{l=1}^M (P_l + P_{l-1} + 4P_l^{(c)}), \quad M = n_1 + n_2 + 2, \quad (22)$$

где P_l и $P_l^{(c)}$ — значения функции P в точках соответственно

$$\Phi = \frac{l}{M} \pi \text{ и } \Phi = \frac{\left(l - \frac{1}{2}\right)}{M} \pi.$$

Однако нам заданы значения I (и $P = IV$) только в отдельных точках $V_{\bar{k}}$, $V_k^{(c)}$, где $V_k^{(c)}$ — середина k -того участка:

$$V_k^{(c)} = (V_k + V_{k-1})/2. \quad (23)$$

Значения функции в произвольной точке также находятся квадратичной аппроксимацией. Если $V = A \cos \Phi$,

$$V_{k-1} \leq V \leq V_k, \quad n_1 \leq k \leq n_2 + 1, \quad (24)$$

то мы считаем

$$P = C_0 + C_1 x + C_2 x^2, \\ x = (V - V_{k-1})/h, \quad h = (V_k - V_{k-1})/2. \quad (25)$$

Коэффициенты C легко находятся, если приравнять значения аппроксимирующей функции (23) в точках $x = 0, 1, 2$ (соответственно $V = V_{k-1}, V_k^{(c)}, V_k$) заданным значениям $P_{k-1}, P_k^{(c)}, P_k$:

$$C_2 = (P_{k-1} - 2P_k^{(c)} + P_k)/2, \quad (26)$$

$$C_1 = (-3P_{k-1} + 4P_k^{(c)} - P_k)/2,$$

$$C_0 = P_{k-1}.$$

§ 3. Программа для ЭВМ «МИР-1»

В программе проведено вычисление A_0 и $T/\widehat{\tau}$ (эта дробь обозначена просто через T) при кусочно-параболической аппроксимации.

Вычисление I_c как функции A по формуле Симпсона вынесено в конец основной программы (метки 10—19), и к нему происходит обращение из разных мест программы. В свою очередь, при вычислении $I_c(A)$ происходит обращение к подпрограмме вычисления P для произвольных значений A и Φ (начиная с метки 20). Целые S и SS служат для запоминания мест в программе, в которые нужно вернуться после нахождения соответственно $I_c(A)$ или $P(A, \Phi)$. После каждого вычисления функции $I_c(A)$ происходит вывод I_c и A в виде строки «таблицы 1».

В основной программе (метки 1—9) вначале происходит вычисление A_0 решением уравнения (11) не самым быстрым, но простым методом деления отрезка пополам. После вывода этого значения находится также по формуле Симпсона интеграл (12). Затем происходит вывод T и останов машины.

В программе везде ток берется в мА, напряжение — в мВ, сопротивление — в Ом.

При разборе текста программы необходимо помнить, что в языке АЛМИР, как и в других алгоритмических языках, буквенные индексы приходится включать в идентификатор, а числовые — в квадратные скобки как индексы массивов. Кроме того, все буквы в АЛМИРе — прописные.

Ошибки в вычислениях A_0 и T могут быть связаны с тремя факторами:

а) ошибки в задании значений I в точках V_h и $V_h^{(c)}$,

б) ошибки квадратичной аппроксимации,

в) ошибки округления из-за конечной разрядности. При этом ошибки, связанные с фактором «а», являются принципиальными, так как зависят от точности представления экспериментальных данных — обычно порядка 5% от характерных значений I_c . Поэтому ошибки «б» и «в» не будут влиять на точность результата, если они находятся в районе $\leq 10^{-2}$.

Поскольку $I_c(A)$ вычисляются по формуле Симпсона, то ошибка порядка (см. [4])

$$\Delta I_c \approx 10^{-2} h^4 A^{-1} \frac{d^4(IV)}{dV^4}, \quad (27)$$

где h — характерный шаг (расстояние между точками разбиения) по Φ . Для достаточно плавной ВАХ можно считать $\frac{d^4(IV)}{dV^4} \approx I_c A^{-3}$ и относительная ошибка

$$\frac{\Delta I_c}{I_c} \approx 10^{-2} N^{-4}. \quad (28)$$

Отсюда видно, что для плавных ВАХ для получения 1% точности действительно достаточно 1—2 отрезков. Если выбирать точки разбиения правильно (гуще на местах с более резкими изменениями ВАХ), то практически для ВАХ туннельных диодов уже 5—6 точек всегда дают точность лучше 10^{-2} .

Функция под интегралом (12) для T является всегда более плавной, чем $I(V)$, и поэтому взятые в программе четыре отрезка разбиения интервала $[0,1 A_0; 0,9 A_0]$ дают ошибки, гораздо меньше 10^{-3} .

Таким образом, мы приходим к выводу, что точность получаемого результата будет $\leq 5\%$, если взять достаточное количество точек разбиения, значение точности при нахождении A_0 (идентификатор ДШ) $\sim V_N \cdot 10^{-2}$ и разрядность не меньше 4.

§ 4. Упражнения

1. Тщательно изучить описание задачи и текст программы, уметь вывести любое выражение в описании задачи или в программе.

2. Составить план описательной части.

3. По получении задания — набора исходных данных и графика зависимости I от V :

а) разбить рабочую часть оси V на участки;

б) измеряя значения I с точностью, соответствующей $\sim 1\%$, составить таблицу:

k	V_k	I_k	$V_k^{(c)}$	$I_k^{(c)}$
1				
2				
3				
⋮				
N				

При этом значения $V_k^{(c)}$ и $I_k^{(c)}$ произвольные, так как они в работе программы не используются. Число и расположение точек разбиения зависят от степени «гладкости» ВАХ; нужно помнить, что в ЭВМ на каждом участке истинная ВАХ будет заменена гладкой кривой, совпадающей с истинной на краях и в середине участка. Одну из точек V_k нужно взять при $V=0$.

4. Ввести последовательно основную и описательную части со значением $G \simeq \tilde{G}$ и просчитать программу до выдачи G и A_0 . При этом произойдет вывод I_c для ряда значений A .

5. Построить график зависимости $I_c(A)$ и графически определить, для каких значений G имеет смысл время переходного процесса (12).

6. Для двух-трех значений G в диапазоне от нуля до этого «критического» значения найти A_0 и T . Для этого каждый раз следует вводить последовательно основную и описательную части программы, изменять на режиме «повт. ввод» значение G на новое, затем просчитывать программу до конца.

7. После окончания счета:

а) построить графики $A_0(G)$ и $T(G)$ для кубичной аппроксимации кривой по формулам (17), (18). При этом значения \tilde{G} и β находятся из ВАХ, как описывалось в § 2;

б) на том же графике отложить значения A_0 и T , найденные при расчете на машине;

в) разобраться в физическом смысле хода зависимостей и в источниках разности результатов, полученных при различных аппроксимациях ВАХ — кубичной и кусочно-параболической.

ПРОГРАММА СЧЕТА

```

****6.PI=3.1416;''ВЫВ''''ЗАГ''''ТА''1,АМПЛИТУДА,IC;1.A= ''E''V[N+1]<-V[1]''ТО''(V
[N+1])''ИН''(-V[1]);Ш=A;S=3;2.''НА''10;3.D=G×Λ+IC;''E''Ш<ДШ''ТО''(''НА''4);''E
''D<O''ТО''(Ш=Ш/2;A=A+Ш)''ИН''(Ц=Ш/2;A=A-Ш);''НА''2;4.АО=A;''ВЫВ''''ПРО

```

$B''5, G, ''\text{ПРОБ}''5, AO, ''\text{СТР}''5, T=O; A1=AO \times .1; A2=AO \times .9001; DA=AO \times .2; ''\text{ДЛЯ}'' A=$
 $A1''\text{ШАГ}''DA''D0''A2''\text{ВЫП}''(S=6; ''\text{НА}''10; 6.T=T+2/(-A-IC/G)); ''\text{ДЛЯ}'' A=A1+DA/$
 $2''\text{ШАГ}''DA''D0''A2--DA/2''\text{ВЫП}''(S=7; ''\text{НА}''10; 7.T=T+4/(-A-IC/G)); A=A1; S=8; ''$
 $\text{НА}''10; 8.T=T-1/(-A-IC/G); A=A2; S=9; ''\text{НА}''10; 9.T=T-1/(-A-IC/G); T=T \times DA/$
 $6; ''\text{ВЫВ}''''\text{ПРОБ}''5, T, ''\text{ПРОБ}''5; ''\text{СТОП}''\text{ВАРИАНТ ПРОСЧИТАН}; 10.''E''-A < V[I1]''T0$
 $''('' \text{НА}''11); ''E''A > V[N+1]''T0''('' \text{НА}''12); ''\text{НА}''14; 11.'' \text{ВЫВ}''V[I1], ''\text{ПРОБ}''5; ''\text{НА}$
 $''13; 12.'' \text{ВЫВ}''V[N+1], ''\text{ПРОБ}''5; 13.'' \text{ВЫВ}''[\text{БОЛ.АМПЛИТУДА } J, A, ''\text{СТОП}''; 14.'' \text{ДЛЯ}$
 $''K=1''\text{ШАГ}''1''D0''N''\text{ВЫП}''(''E''V[K] > -A''T0''(N1=K; ''\text{НА}''15)); 15.'' \text{ДЛЯ}''K=N$
 $+1''\text{ШАГ}''-1''D0''1''\text{ВЫП}''(''E''V[K] < A''T0''(N2=K; ''\text{НА}''16)); 16.'' \text{ДЛЯ}''K=N1-1''\text{Ш}$
 $\text{АГ}''1''D0''N2+1''\text{ВЫП}''(P[K]=I[K] \times V[K]PC[K]=IC[K] \times VC[K]); IC=O; I; M=5; ''\text{ДЛЯ}''$
 $L=1''\text{ШАГ}''1''D0''M''\text{ВЫП}''(\Phi=PI \times L/M; SS=17; ''\text{НА}''20; 17.IC=IC+P\Phi; \Phi=PI \times (L-)/$
 $M; SS=18; ''\text{НА}''20; 18.IC=IC+P\Phi; \Phi=PI \times (L-.5)/M; SS=19; ''\text{НА}''20; 19.IC=IC+4 \times$
 $P\Phi; IC=IC/3/M/A; ''\text{ВЫВ}''''\text{ТА}''1, A, IC; ''E''S=3''T0''('' \text{НА}''3); ''E''S=6''T0''(\text{НА}''$
 $6); ''E''S=7''T0''('' \text{НА}''7); ''E''S=8''T0''('' \text{НА}''8); ''E''S=9''T0''('' \text{НА}''9); 20.V\Phi=A \times$
 $\text{COS}(\Phi); ''\text{ДЛЯ}''J=N1''\text{ШАГ}''1''D0''N2+1''\text{ВЫП}''(''E''V\Phi < V[J]''T0''(K=J; ''\text{НА}''21)); 2$
 $1.H=(V[K]-V[K-1])/2; X=(V\Phi-V[K-1])/H; CO=P[K-1]; C1=(-3 \times P[K-1]+4 \times PC[$
 $K]-P[K])/2; C2=(P[K-1]-2 \times PC[K]+P[K])/2; P\Phi=C2 \times X^2+C1 \times X+CO; ''E''SS=17''$
 $T0''('' \text{НА}''17); ''E''SS=18''T0''('' \text{НА}''18); ''E''SS=19''T0''('' \text{НА}''19)''\text{ГДЕ}''$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гострем Р. В., Зиновьев Г. С. Туннельные диоды и их применение. Новосибирск, 1964.
2. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1964.
3. Мигулин В. В. Методическая разработка по курсу «Теория колебаний», ч. 1. Ротапринт физфака МГУ, 1969.
4. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М., «Наука», 1972.

4. РАСЧЕТ АМПЛИТУДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ПРИНУДИТЕЛЬНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ОДНОКОНТУРНОГО ГЕНЕРАТОРА

В задаче производится расчет амплитуды синхронизированного генератора для различных расстроек частоты и внешнего воздействия и нескольких значений амплитуды внешней силы.

§ 1. Введение

Если на автоколебательную систему с собственной частотой ω_0 действует внешняя гармоническая сила с частотой p , близкой к ω_0 , то происходит «захватывание» или принудительная синхронизация автоколебательной системы. Сущность этого явления состоит в том, что внешняя сила «навязывает» генератору свою частоту, так что в диапазоне расстроек $p-\omega_0$ в системе существует периодический синхронный режим с частотой p и амплитудой и фазой, зависящими от параметров системы и внешнего воздействия.

При теоретическом анализе синхронного режима приходится сталкиваться с серьезными математическими трудностями. В данной задаче с помощью ЭВМ производится расчет амплитудных характеристик синхронного режима для нескольких значений амплитуд внешней силы.

Выполнение задачи предполагает предварительное знакомство студента с основами теории явления «захватывания» [1] и с элементами программирования на ЭВМ «МИР» в объеме [2].

§ 2. Вывод уравнения амплитудных характеристик

На рис. 1 приведена принципиальная схема генератора с контуром в цепи сетки и внешней эдс $E \sin pt$, включенной в контур генератора. Уравнение движения для этой схемы может быть записано в виде

$$\ddot{V} + 2(-\delta_0 + \delta_2 V^2) \dot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 E \sin pt. \quad (1)$$

Здесь V — напряжение на сетке лампы,

$$2\delta_0 = \frac{1}{L} \left(-R + \frac{|M|S_0}{C} \right); \quad 2\delta_2 = \frac{|M|S_2}{LC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

При выводе уравнения (1) предполагалось, что генератор работает в мягком режиме, т. е. характеристика лампы может быть аппроксимирована полиномом

$$i_a = S_0 V - \frac{1}{3} S_2 V^3. \quad (2)$$

В предположении, что $p \approx \omega_0$, т. е. имеет место захватывание, ищем гармоническое решение уравнения (1) в виде

$$V = V_0 \sin(pt - \varphi),$$

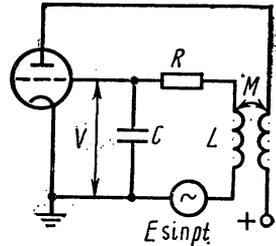


Рис. 1. Схема генератора

где V_0 и φ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза колебаний. Обычным методом [3] могут быть получены укороченные уравнения для амплитуды и фазы синхронного колебания:

$$\begin{aligned} \frac{dV_0}{dt} &= \delta_0 V_0 - \frac{1}{4} \delta_2 V_0^3 + \frac{\omega_0^2 E \cos \varphi}{2\rho}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\rho^2 - \omega_0^2}{2\rho} - \frac{\omega_0^2 E \sin \varphi}{2\rho V_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

В режиме стационарных колебаний $\frac{dV_0}{dt} = 0$ и $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, поэтому стационарные амплитуда и фаза синхронных колебаний должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 -\delta_0 V_0 + \frac{1}{4} \delta_2 V_0^3 &= \frac{\omega_0^2 E}{2\rho} \cos \varphi, \\
 \frac{\rho^2 - \omega_0^2}{2\rho} V_0 &= \frac{\omega_0^2 E}{2\rho} \sin \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Исключая из системы уравнений (4) фазу φ , получим уравнение амплитудных характеристик синхронного режима:

$$-\frac{2\rho\delta_0}{\omega_0^2} \frac{V_0}{E} + \frac{\rho\delta_2 E^2}{2\omega_0^2} \left(\frac{V_0}{E}\right)^3 = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\rho^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 \left(\frac{V_0}{E}\right)^2}. \tag{5}$$

Решение кубического уравнения (5) позволяет построить амплитудные характеристики синхронизированного генератора, т. е. зависимости амплитуды V_0 от расстройки частот $\frac{\rho^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2}$ при различных амплитудах внешней силы E . Для расчета удобно записать уравнение (5) в виде

$$-AX + BE^2 X^3 \pm \sqrt{1 - D^2 X^2} = 0, \tag{6}$$

где $X = \frac{V_0}{E}$ — безразмерная амплитуда колебаний;

$D = \frac{\rho^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2}$ — расстройка;

$A = \frac{2\rho\delta_0}{\omega_0^2}$ — коэффициент, характеризующий регенерацию;

$B = \frac{2\rho\delta_2}{\omega_0^2}$ — характеризует нелинейность лампы.

Коэффициент A по своей величине порядка обратной добротности контура генератора. Такого же порядка может достигать относительная расстройка частот генератора и внешней силы, а также отношение амплитуд внешней силы и автоколебания. Для того чтобы амплитуда автоколебания была величиной порядка единицы, необходимо выбрать параметр нелинейности B примерно равным A . Поскольку обычно добротность контура генератора близка к 100, параметры уравнения (6) нужно выбрать следующим образом: A и B порядка 0,01; D меняется от 0 до A ; E порядка 0,01.

§ 3. Программа расчета амплитудных характеристик

Чтобы построить зависимость амплитуды V_0 от расстройки частот D при различных амплитудах внешней силы E , необходимо найти корни уравнения (6) при различных D и E . Значения посто-

янных A и B в уравнении (6) считаем известными и равными следующим величинам: $A=0,02$; $B=0,01$; начальная амплитуда внешней силы $E1=7 \cdot 10^{-3}$.

Переменная X изменяется от 0 до $X1$, где $X1$ выбираем следующим образом. При $D=0$ в уравнении (6) можно пренебречь последним членом и для X получаем оценку

$$X1 = \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{1}{E}. \quad (7)$$

Учитывая конкретные значения A и B , полагаем $X1=2/E$. Но при $D \neq 0$ необходимо учесть, что так как подкоренное выражение $(1-D^2X^2)$ должно быть больше или равно нулю, то X должен быть меньше $1/D$. Поэтому в случае, когда $\sqrt{A/BE^2} > 1/D$, необходимо принять $X1=1/D$.

Корни уравнения (6) находятся из следующих соображений. Пусть некоторая функция $F=F(x)$ имеет в точке x_0 корень, т. е. $F(x_0)=0$. На каждом шаге по x вычисляется значение $F_i(x_i)$ и сравнивается с модулем разности абсолютных значений $F_i(x_i)$ и $F_{i-1}(x_{i-1})$ (рис. 2).

Как нетрудно видеть, для точек x , лежащих близко к x_0 и при $x=x_0$, выполняется неравенство

$$|F_i| < ||F_i| - |F_{i-1}||. \quad (8)$$

Значения x , удовлетворяющие неравенству (8), считаются корнями функции F .

В случае, когда функция F пересекает ось x под большим углом, неравенству (8) может удовлетворять несколько значений x , лежащих в окрестности x_0 . Тогда в качестве корня необходимо взять среднее значение. Очевидно, что корни вычисляются тем точнее, чем меньше шаг по x , но при уменьшении шага существенно увеличивается время нахождения корней.

Применим все сказанное выше к конкретному случаю решения уравнения (6). Введем обозначения:

$$F1 = AX - BE^2X^3 \equiv A \times X - B \times E \uparrow 2 \times X \uparrow 3;$$

$$F2 = \sqrt{1 - D^2X^2} \equiv \sqrt{(1 - D \uparrow 2 \times X \uparrow 2)};$$

$$F3 = F1 - F2; \quad F4 = F1 + F2;$$

$$M1 = \text{ABS}(\text{ABS}(F3) - C1); \quad M2 = \text{ABS}(\text{ABS}(F4) - C2),$$

где $C1$ и $C2$ — абсолютные величины $F3$ и $F4$ на предыдущем шаге интегрирования.

При $\text{ABS}(F3) < M1$ или при $\text{ABS}(F4) < M2$ на печать выводятся значения $V_0 = X \times E$, D и E . Величины $F3$ и $F4$ должны быть под-

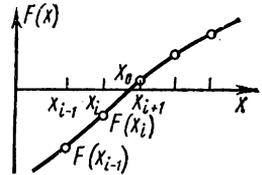


Рис. 2. Принцип вычисления корней

считаны при различных X , D и E . Для этого используется оператор цикла, имеющий следующий вид:

Для $X=A$ «ШАГ» H «ДО» K «ВЫП» P

В программе амплитуда внешней силы E изменяется от $E_1=7 \cdot 10^{-3}$ до $E_2=A$ с шагом $6 \cdot 10^{-3}$ расстройка D изменяется от $D=0$ до $D_1=A$ с шагом $2 \cdot 10^{-3}$; X изменяется от $X=3$ до X_1 с шагом 3.

Время счета программы 12 минут.

§ 4. Упражнения

1. Рассчитать зависимость амплитуды колебаний синхронизированного генератора от расстройки D для трех значений амплитуды внешней силы E . Построить графики зависимости $V=f(D)$. Выделить участки, на которых ход функции $V=f(D)$ недостаточно ясен.

2. Составить вторичную программу для расчета амплитуды на выделенных в предыдущем упражнении участках с более мелким шагом по D (например, взять D равным $0,5 \cdot 10^{-3}$).

3. Произвести расчет амплитуды с помощью вторичной программы. Построить уточненные графики зависимости

$$V = f(D).$$

ПРОГРАММА СЧЕТА

```

''5.D1=A;E2=A;''ДЛ''E=E1''Ш''610-3''ДО''E2''ВЫП''(''ВЫВ''''СТР0'',E;''ДЛ''D=0''
Ш''210-3''ДО''D1''ВЫП''(''ВЫВ''''СТР'',D;''ПР''4;C1=.001;C2=.001;''E''D<E/2''Т0''(X
1=2/E)''ИН''(X1=1/D);''ДЛ''X=3''Ш''3''ДО''X1''ВЫП''(F1=A×X-B×E↑2×X↑3;F2=
√(1-D↑2×X↑2);F3=F1-F2;F4=F1+F2;M1=ABS(ABS(F3)-C1);M2=ABS(ABS(F4)-C2)
;C1=ABS(F3);C2=ABS(F4);''E''ABS(F3)<M1''Т0''(''ВЫВ''X×E;''ПР''2);''E''ABS(F
4)<M2''Т0''(''ВЫВ''X×E;''ПР'')))))''ГДЕ''A=.02;B=.01;E1=710-3''K0''

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Капчинский И. М. Методы теории колебаний в радиотехнике. М.—Л., Госэнергоиздат, 1954.
2. Пономарев В. А. Программирование для ЭЦВМ «МИР-1». М., «Сов. радио», 1975.
3. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1964.

5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ЛИНЕЙНЫЙ ПРИБОР ПО ВЫХОДНОМУ СИГНАЛУ МЕТОДОМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Описывается применение дискретного преобразования Фурье, осуществляемого ЦВМ, для решения часто встречающейся задачи восстановления вида входного воздействия на линейную систему по виду ее выходной реакции.

§ 1. Теория

1. Постановка задачи. Подобная задача возникает в различных областях радиотехники, радиоастрономии и оптики в тех случаях, когда полоса пропускания линейного прибора оказывается по ширине сравнимой или более узкой, чем полоса частот входного воздействия, или же частотная характеристика измерительного линейного прибора неравномерна в требуемой полосе.

В этих случаях, если искажающее действие прибора недопустимо велико, возникает необходимость «коррекции» результатов измерения. В оптике эту задачу приходится решать для улучшения верности изображения, искаженного дифракционными явлениями на конечной апертуре телескопа или микроскопа, а в радиоастрономии — для устранения сглаживающего влияния конечной ширины диаграммы направленности антенны. В радиотехнике подобная задача возникает при необходимости восстановления истинной формы входного сигнала по сигналу на выходе линейного фильтра, например линии связи.

Известно, что выходной сигнал линейного прибора $y(t)$ выражается через входной сигнал $x(t)$ с помощью интегрального уравнения типа «свертки»

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (1)$$

Функция $h(t)$ — функция отклика линейного прибора на входной импульс в виде δ -функции в момент времени $t=0$. Координата t может иметь смысл времени для радиотехнических сигналов или смысл пространственной координаты в задачах восстановления изображения. В последнем случае функция отклика — это изображение точечного источника, расположенного в начале координат.

Условие причинности накладывает на функцию отклика линейного четырехполюсника известное ограничение $h(t)=0$ при $t<0$ (реакция на воздействие не может начаться раньше самого воздействия). На функцию отклика приборов, формирующих изображение в пространстве, подобное условие не накладывается.

Итак, для восстановления вида функции $x(t)$ необходимо найти решение интегрального уравнения (1) при заданном h и измеренном $y(t)$.

2. Формальное решение. Для решения этого уравнения следует переписать его для Фурье-образов функций $x(\tau)$, $y(t)$ и $h(t-\tau)$:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt; \\ Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i2\pi ft} dt; \end{aligned} \quad (2)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt.$$

Соответственно обратные преобразования Фурье дают:

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f\tau} df;$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{i2\pi ft} df; \quad (3)$$

$$h(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\eta) e^{i2\pi\eta(t-\tau)} d\eta.$$

Следовательно, уравнение (1) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H(\eta) e^{i2\pi(f-\eta)\tau + i2\pi\eta t} dt d\eta df.$$

Интегрируя по τ и учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(f-\eta)\tau} d\tau = \delta(f - \eta)$,

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{i2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) X(f) e^{i2\pi ft} df.$$

Тогда для Фурье-образов имеем

$$Y(f) = X(f) H(f). \quad (4)$$

Если $H(f)$ нигде не обращается в нуль, то решение уравнения (1) непосредственно следует из (4):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(f)}{H(f)} e^{i2\pi ft} df. \quad (5)$$

В случае, если на оси f имеются области $\{\Omega_i\}$, где $H(f) \equiv 0$, то в общем случае однозначное восстановление вида $x(t)$ возможно лишь тогда, когда известно что $X(f) \equiv 0$ во всех этих областях. Когда же такой уверенности нет, то восстановление происходит с точностью до произвольной функции со спектром, не равным нулю лишь в $\{\Omega_i\}$.

Имеется и другой случай, когда восстановление вида функции $x(t)$ возможно в случае существования областей $\{\Omega_i\}$. Однозначное восстановление в этом случае возможно, если известно, что воздействие было отлично от нуля на ограниченном отрезке оси t и представляло собой функцию, интегрируемую в квадрате.

Поскольку в реальных случаях воздействие на прибор удовлетворяет указанным ограничениям, то возможность качественного восстановления вида функции $x(t)$ по $y(t)$ ограничивается лишь требованиями к точности измерения $y(t)$, которые оказываются очень жесткими.

Более подробное изложение этих вопросов и описание процедуры восстановления вида ограниченного по t воздействия $x(t)$ на основании восстановления ее спектра

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)}$$

на ограниченном участке f выходят за рамки настоящей задачи и приведены в [1, 2].

В настоящей задаче рассматривается более простой случай, когда $H(f)$ не обращается в нуль в области значений f , в которой сосредоточена основная часть мощности входного процесса.

Восстановление сигнала проиллюстрировано рис. 1. На рис. 1, а изображен выходной процесс $y(t)$. Его Фурье-образ приведен на рис. 1, б. В общем случае это комплексная величина, лишь условно изображенная на рисунке единственной кривой. Аналогично на рис. 1, в и 1, г изображена функция $h(t)$ и ее Фурье-образ, а на рис. 1, д показано частное $Y(f)/H(f)$, обратное преобразование которого приводит к искомой функции $x(t)$.

Поскольку мы предполагаем, что спектр входного воздействия достаточно четко сосредоточен в известной полосе $[-F, F]$, то преобразование Фурье можно производить в этом интервале.

3. Влияние точности измерений. Большое значение для возможности качественного восстановления имеет точность проведения измерений. Поскольку измерение $h(t)$ обычно удается произвести со значительно большей относительной точностью, чем измерение $y(t)$, то ошибки последнего измерения оказываются определяющими. Величину ошибок и их спектр можно тем или иным способом оценить (с помощью измерений стандартного воздействия или расчетным путем). Обычно спектр ошибок оказывается более широким и равномерным, чем спектр неискаженного выходного процесса (спектр ошибок условно изображен на рис. 1, б пунктиром).

Восстановленный сигнал $y(t)$ будет мало отличаться от истинного входного воздействия, если после восстановления суммарный энергетический эффект помехи мал по сравнению с результатом входного воздействия длительности T :

$$T \int_{-F}^F \left\{ \frac{N(f)}{|H(f)|^2} \right\} df \ll \int_{-F}^F \left| \frac{Y(f)}{H(f)} \right|^2 df. \quad (6)$$

Эту оценку можно упростить, если спектральная мощность помехи постоянна: $N=N_0$, а $|H(f)|^2$ не обращается в нуль в полосе $[-F, F]$;

$$\frac{2FN_0}{\min |H(f)|^2} \ll \frac{\int y^2(t) dt}{\max |H(f)|^2},$$

или же

$$N_0 \ll \frac{\int y^2(t) dt \min |H(f)|^2}{2FT \max |H(f)|^2}.$$

Смысл этого неравенства заключается в том, что верхняя оценка мощности измерительных шумов после процесса восстановления должна быть малой по сравнению с нижней оценкой мощности вос-

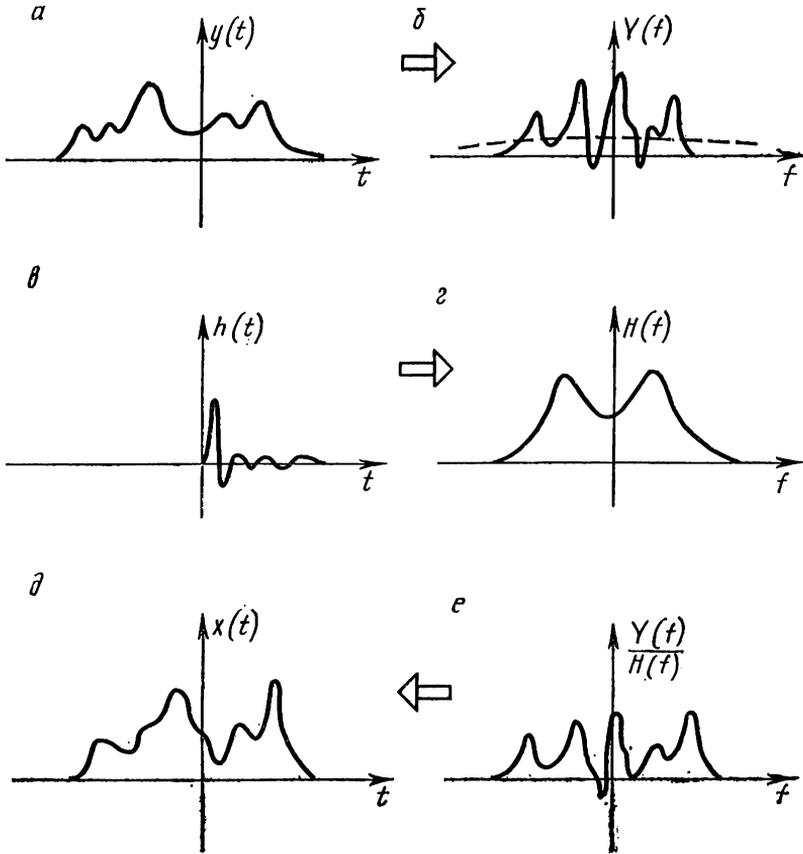


Рис. 1. Схема восстановления сигнала

становленного процесса. Такая оценка, являясь в некоторых случаях излишне строгой, обеспечивает тем не менее хорошую точность процесса восстановления.

Возможность восстановления входного сигнала в более сложном случае существенного влияния измерительных шумов проана-

лизирована в [5]. В этой работе показано, что максимально точное (в смысле среднеквадратичной ошибки) восстановление входного сигнала происходит при применении процедуры (5) к наблюдаемым результатам, предварительно «сглаженным» с помощью фильтра, дающего минимальную среднеквадратичную ошибку сглаживания.

Частотная характеристика такого фильтра имеет вид

$$K(f) = \langle |S_{\text{вых}}(f)|^2 \rangle / \{ \langle |S_{\text{вых}}(f)|^2 \rangle + N(f) \}.$$

Здесь $\langle |S_{\text{вых}}(f)|^2 \rangle$ — среднее значение спектра мощности выходных сигналов, связанное со средним значением спектра мощности входного воздействия $\langle |S_{\text{вх}}(f)|^2 \rangle$ соотношением

$$\langle |S_{\text{вых}}(f)|^2 \rangle = \langle |S_{\text{вх}}(f)|^2 \rangle |H(f)|^2.$$

Полная процедура восстановления $X(f)$ в этом случае будет

$$X(f) = \frac{K(f)Y(f)}{H(f)} = \frac{Y(f)}{H(f)} \frac{\langle |S_{\text{вых}}(f)|^2 \rangle}{N(f) + \langle |S_{\text{вых}}(f)|^2 \rangle}.$$

Из этого уравнения видно, что в области частот, где помехи малы:

$$N(f) \ll \langle |S_{\text{вых}}(f)|^2 \rangle \approx \langle |Y(f)|^2 \rangle$$

(сравните с (6)), восстановление происходит по идеальной схеме (5). Та же область частот, в которой справедливо обратное неравенство, практически отбрасывается. Учет этой области в процессе восстановления привел бы лишь к увеличению ошибок из-за преобладающего влияния шума.

Использование этой, более точной процедуры восстановления требует предварительного знания характера шумов и входных воздействий.

Значение $N(f)$ может быть получено усреднением выходных сигналов системы в отсутствие входных сигналов

$$N(f) = \langle |Y(f)|_{S=0}^2 \rangle.$$

Оценку $\langle |S_{\text{вых}}(f)|^2 \rangle$ удастся получить лишь при достаточно подробных сведениях об их источнике или же при большом объеме экспериментальных данных. В последнем случае можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\langle |S_{\text{вых}}(f)|^2 \rangle \approx \langle |Y(f)|^2 \rangle_{S \neq 0} - \langle |Y(f)|^2 \rangle_{S=0}.$$

В целях упрощения учебной задачи предполагается, что влияние ошибок измерения незначительно и возможно использование упрощенного метода (4) — (5).

4. Дискретное преобразование Фурье. При использовании описанного метода для восстановления сигнала сложного по своей форме воздействия большой объем вычислений требует применения ЭЦВМ. При проведении необходимых операций основной объем вычислений заключается в осуществлении дискретных преобразований Фурье. Для проведения этих преобразований выходной процесс предварительно дискретизируют во времени, т. е. превращают в серию результатов измерений (в цифровой форме), произведенных в точках t_k , которым приписывают номера $k=0, 2, \dots, N-1$.

Минимальная частота следования точек измерения определяется полосой частот процесса F и равна $2F$. При этой (или большей) частоте полученные результаты практически полностью характеризуют весь непрерывный процесс. Таким образом, общее число отсчетов $N=2FT$.

Дискретное преобразование Фурье сводится к нахождению комплексных чисел, характеризующих спектр, согласно аналогу уравнений (2):

$$Y(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k) e^{-i2\pi jk/N}. \quad (7)$$

Соответственно обратное преобразование (3) приобретает в дискретной форме вид

$$y(k) = \sum_{j=0}^{N-1} Y(j) e^{i2\pi jk/N}. \quad (8)$$

При дискретном анализе процессов $x(t)$, $y(t)$, $h(t)$, отличных от нуля на ограниченном отрезке оси t , предполагается их периодическое продолжение с периодом T . Поэтому спектр такого продолженного процесса будет иметь дискретные составляющие на частотах, кратных $1/T$, а общее их число в случае, когда спектр исходного однократного процесса сконцентрирован в полосе F , будет насчитывать $2FT$ компонент, определяемых приведенным выше преобразованием (7). Непосредственное вычисление спектров по этим уравнениям связано с большим числом операций, равным $(2FT)^2$. Однако в последнее время были разработаны алгоритмы «быстрого преобразования Фурье» (БПФ) [3], позволяющие сократить число вычислительных операций до значения

$$(FT) \log_2 (2FT) = \frac{N}{2} \log_2 N.$$

§ 2. Алгоритм быстрого преобразования Фурье

Если обозначить $e^{2\pi i/N} = W$, то уравнения (7) и (8) будут иметь вид:

$$Y(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k) W^{-jk},$$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{N-1} Y(j) W^{jk}.$$

Наиболее простой вид алгоритм БПФ имеет при N , равном целой степени числа 2, т. е. $N=2^S$. Дальнейшее изложение ведется для случая $S=4$, $N=16$, на примере которого видны все особенности алгоритма БПФ.

Прежде всего цифровые индексы j и k представляются в двоичной форме:

$$j = j_3 \cdot 8 + j_2 \cdot 4 + j_1 \cdot 2 + j_0 \cdot 1,$$

$$k = k_3 \cdot 8 + k_2 \cdot 4 + k_1 \cdot 2 + k_0 \cdot 1,$$

где индексы $j_0, j_1, j_2, j_3, k_0, k_1, k_2, k_3$ могут принимать значения 0 или 1. В таких обозначениях индексов вместо (8) записывается уравнение

$$Y(j_3, j_2, j_1, j_0) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 y(k_3, k_2, k_1, k_0) W^{-(j_3 8 + j_2 4 + j_1 2 + j_0 1)(k_3 8 + k_2 4 + k_1 2 + k_0 1)}.$$
(9)

Очевидно, что

$$W^{-(j_3 8 + j_2 4 + j_1 2 + j_0 1)(k_3 8 + k_2 4 + k_1 2 + k_0 1)} =$$

$$= W^{-(j_3 8 + j_2 4 + j_1 2 + j_0 1)k_3 \cdot 8} W^{-(j_3 8 + j_2 4 + j_1 2 + j_0 1)k_2 \cdot 4} \times$$

$$\times W^{-(j_3 8 + j_2 4 + j_1 2 + j_0 1)k_1 \cdot 2} W^{-(j_3 8 + j_2 4 + j_1 2 + j_0 1)k_0}.$$

Каждый из сомножителей можно упростить

$$W^{-(j_3 8 + j_2 4 + j_1 2 + j_0 1)k_3 \cdot 8} = W^{-16(4j_3 + 2j_2 + j_1)k_3} W^{-j_0 k_3 \cdot 8},$$

$$W^{-(j_3 8 + j_2 4 + j_1 2 + j_0 1)k_2 \cdot 4} = W^{-16(2j_3 + j_2)k_2} W^{-(2j_1 + j_0)k_2 \cdot 4},$$

$$W^{-(j_3 8 + j_2 4 + j_1 2 + j_0 1)k_1 \cdot 2} = W^{-16j_3 k_1} W^{-(4j_2 + 2j_1 + j_0)k_1 \cdot 2}.$$

Поскольку $W^{16} = 1$, то первые сомножители равны 1. Тогда уравнение (9) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
Y(j_3, j_2, j_1, j_0) = & \frac{1}{N} \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 y(k_3, k_2, k_1, k_0) W^{-j_0 k_3 \cdot 8} \cdot W^{-(j_1 \cdot 2 + j_0) k_2 \cdot 4} W^{-(j_2 \cdot 4 + j_1 \cdot 2 + j_0) k_1 \cdot 2} W^{-(j_3 \cdot 8 + j_2 \cdot 4 + j_1 \cdot 2 + j_0) k_0} \\
& \left[\begin{array}{l} A_1(j_0, k_2, k_1, k_0) \\ A_2(j_0, j_1, k_1, k_0) \\ A_3(j_0, j_1, j_2, k_0) \\ A_4(j_0, j_1, j_2, j_3) \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

При этом A_4 отличается от Y лишь инверсией порядка двоичных разрядов индекса

$$Y(j_3, j_2, j_1, j_0) = A_4(j_0, j_1, j_2, j_3). \quad (11)$$

Преобразование (8) имеет вид, аналогичный (10) с той лишь разницей, что степени W имеют обратный знак. Выражение (10) имеет ярко выраженный циклический характер. На каждом шаге $Ш$, число которых равно $S = \log_2 N$, весь массив $A_{Ш-1}(M)$ ($M=1, \dots, N$), число членов которого равно N , преобразуется однородным образом, причем вид преобразования на каждом шаге определяется значением одного двоичного разряда номера индекса M соответствующего члена массива. Каждый член нового массива $A_{Ш}(P)$ является суперпозицией (с комплексными весами) двух членов предыдущего массива $A_{Ш-1}(M)$. Со своей стороны каждый член $A_{Ш-1}(M)$ участвует в образовании двух членов $A_{Ш}(P)$.

Для вычислений на следующем шаге существенны лишь результаты предыдущего шага. Таким образом, обозначая исходный массив комплексных чисел через $RE[M]$ и $IM[M]$, а результат через $RE1[P]$ и $IM1[P]$, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} 1 [P] &= \operatorname{Re} [M] \cos F + \operatorname{IM} [M] \sin F, \\ \operatorname{IM} 1 [P] &= -\operatorname{Re} [M] \sin F + \operatorname{IM} [M] \cos F, \\ M, P &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) нумерация членов массива в отличие от уравнения (10) производится начиная с единицы в десятичной системе, как это необходимо для ввода программы в ЭЦВМ «МИР-1». Согласно (10) номер P представляется в двоичной форме

$$\begin{aligned} P &= 1 + L_0 \cdot 2^0 + L_1 \cdot 2^1 + \dots + L_{S-1} \cdot 2^{S-1}, \\ M &= 1 + K_0 \cdot 2^0 + K_1 \cdot 2^1 + \dots + K_{S-1} \cdot 2^{S-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$K_j = \begin{cases} L_j, & \text{если } j \neq S - Ш, \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } j = S - Ш. \end{cases} \quad (14)$$

Аргумент тригонометрических функций F представляется в виде

$$F = 2\pi C/N, \quad (15)$$

где $C = \pm B \cdot R$ («+» — для прямого преобразования, а «-» — для обратного).

$$R = \sum_{i=1}^Ш L_{S-i} 2^{i-1}; \quad B = K_{S-Ш} 2^{S-Ш}. \quad (16)$$

Поскольку из (14) следует, что имеются два значения $K_{S-ш}$, то операция (12) производится для обоих значений V , и результаты складываются для $RE1$ и $IM1$ отдельно.

Полученные таким образом результаты $RE1[P]$ и $IM1[P]$ переводятся перед новым шагом в $RE[M]$ и $IM[M]$.

§ 3. Описание программы

Особенности входного языка ЭЦВМ «МИР-1» и десятичная система записи входных данных и нумерации массивов делают программу более громоздкой и требуют большего времени на вычисление, чем программа, введенная согласно (10) непосредственно на внутреннем языке машины, основанном на двоичной системе. Тем не менее при большом N экономия в вычислительном времени продолжает оставаться существенной.

Общая структура программы следующая. После выведения на печать исходных массивов X (наблюдаемый сигнал) и $H1$ (функция отклика) исходный массив X согласно (7) делится на N и заносится в массив RE в качестве исходных для процесса БПФ. Массивы X и $H1$ предварительно заносятся в программу либо в описательную часть (вместо символа Ψ), либо предварительно вычисляются по вспомогательным программам, вводимым в основную перед меткой $A1$.

Собственно БПФ начинается с метки Φ и заканчивается циклом по параметру L . Считающий оператор D служит для определения того, какой из массивов подвергается БПФ и позволяет менять прямое преобразование для X и $H1$ ($D=1, 2$) на обратное при преобразовании частного ($D=3$). В программе БПФ основным тригонометрическим операциям предшествует ряд циклов подготовительных вычислений. Представление индекса P (уравнение (13)) в двоичном исчислении (циклы по P и Π), вычисление значений K (цикл по J) согласно (14), определение соответствующих M (цикл по $I1$), а также вычисление значений переменных V , R и C , необходимых согласно (15) и (16) для определения F с учетом значения D .

После тригонометрических операций, находящихся внутри цикла по J , производится перенос результатов вычисления в исходные массивы RE и IM для следующего шага по Ψ (циклы по Q).

После выполнения всех шагов ($\Psi=S$) происходит перестановка членов массива согласно (11), для чего в циклах по W , Z и U устанавливается соответствие индексов H и W и производится занесение результатов расчета в массивы REY и IMY , которые выводятся на печать.

Далее (поскольку $D=1$) происходит считывание массива функции отклика $H1$ и возвращение на программу БПФ.

Результаты преобразования — массивы REN и IMN — также выводятся, а далее производится операция деления Фурье-образов по правилам деления комплексных величин. Полученные новые

исходные массивы RE и IM после печати подвергаются обратному преобразованию Фурье ($D=3$). Окончательный результат выводится на печать в виде массивов RE1 и IM1.

В описательную часть вместо символа Π при решении задачи заносятся: значение N, значение S, описания массивов X[] и H1[], а также определяются рабочие массивы

$$\begin{aligned} & \{REY[N]; IMY[N]; REN[N]; IMH[N]; RE[N]; \\ & IM[N]; RE1[N]; IM1[N]; L[S]; K[S]; Y[S] \end{aligned}$$

(N и S — числа).

Возможно также введение в начало программы вспомогательной программы вычисления массивов X и H1 по аналитическим формулам, описывающим типовые сигналы и функции отклика. В этом случае в описательной части программы массивы X[] и H1[] будут уже не исходными, а рабочими.

§ 4. Упражнения

1. Подготовить для вычислений необходимые массивы X[] и H1[], используя полученные от преподавателя данные в виде графиков либо аналитических выражений, описывающих выходной сигнал и функцию отклика. Количество точек разложения (16 или 32) указывается преподавателем.

2. Ввести в машину с перфоленты основную программу.

3. Дополнить программу по заданию.

а. Если массивы определены заранее, то программа замены имеет вид

$$\text{«BM» } \Pi \text{ «ЗАП» } N = 16 \text{ (или 32); } S = 4 \text{ (или 5);}$$

$$X[16] = \dots; H1[16] = \dots$$

(далее идет описание рабочих массивов):

б. Если массивы X и H1 вычисляются вспомогательной программой, то вторичная программа начинается так:

$$\text{«BM» } A1. \text{ «ЗАП» } A1,$$

далее следует вспомогательная программа.

$$\text{«BM» } \Pi \text{ «ЗАП»,}$$

далее идет определение рабочих массивов, включая X и H1.

4. После ввода полной программы машина начинает счет. В процессе счета выводятся массивы:

X[] — сигнал на выходе фильтра,

H1[] — функция отклика фильтра.

REY[] } — спектр выходного сигнала,
IMY[] }

$REN [\] \}$ — спектр функции отклика,
 $IMH [\] \}$
 $RE [\] \}$ — спектр входного сигнала,
 $IM [\] \}$
 $RE1 [\] \}$ — искомый входной сигнал.
 $IM1 [\] \}$

Результаты работы представляют в виде ленты с выдачей массивов и графиков, построенных по ним.

Пример. Решение задачи можно проиллюстрировать на простейшем примере для массивов из 8 точек.

Пусть наблюдаемый сигнал имеет треугольную форму (рис. 2, а), а функция отклика — прямоугольную форму с тремя

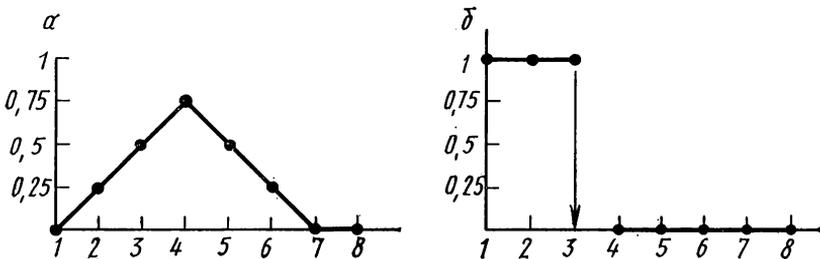


Рис. 2

единичными отсчетами, а остальными — нулями (рис. 2, б). Очевидно, что сигнал, дающий такой выходной эффект в результате свертки с H , имеет форму, идентичную с H , и амплитуду 0,25. Замена в основной программе и результат счета имеют вид:

«BM» Щ «ЗАП» $N = 8$; $S = 3$; $X [8] = 0,25, .5, .75, .5, .25, 0, 0$; $H1 [8] = 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0$; $REY [8]$; $IMY [8]$; $REN [8]$; $IMH [8]$; $RE [8]$; $RE1 [8]$; $IM [8]$; $IM1 [8]$; $L [3]$; $Y [3]$; $K [3]$

$RE1 [8]$

$.0475_{ю} - 3$ $.2_{ю} - 3$ $-.06_{ю} - 2$ $.5_{ю} - 3$ $-.0672_{ю} - 3$
 $.2495$ $.2506$ $.2493$

$IM1 [8]$

$.2974_{ю} - 3$ $-.7907_{ю} - 3$ $.4362_{ю} - 3$ $-.6607_{ю} - 3$ $-.1627_{ю} - 3$
 $.9193_{ю} - 3$ $-.191_{ю} - 3$ $.6593_{ю} - 3$

""4. A1. "ВЫВ""МАСС"X;"ВЫВ""МАСС"Н1;"ДЛЯ"А=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"(RE[A]=X[A]/N;IM[A]=O;RE1[A]=O;IM1[A]=O);Д=1;Ф."ДЛЯ"Ш=1"Ш"1"ДО"С"ВЫП"("ДЛЯ"Р=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"(П=Р-1;"ДЛЯ"Т=1"Ш"1"ДО"С"ВЫП"("Е"П-2×g(.5×Π) >O"ТО"(L(T)=1)"ИН"(L(T)=O);Π=.5×(Π-L(T));"ДЛЯ"J=1"Ш"1"ДО"2"ВЫП"("ДЛЯ"И=1"Ш"1"ДО"С"ВЫП"("Е"И=S-Ш+1"ТО"(K(I)=J-1)"ИН"(K(I)=L(I));B=K[S-Ш+1]×(2↑(S-Ш));R=O;"ДЛЯ"И=1"Ш"1"ДО"Ш"ВЫП"(R=R+(2↑(И-1))×L[S-И+1]);"Е"Д=3"ТО"(C=-B×R)"ИН"(C=B×R);F=6.283×C/N;M=1;"ДЛЯ"П=1"Ш"1"ДО"С"ВЫП"(M=M+(2↑(П-1))×K(П));RE1[P]=RE[M]×COS(F)+IM[M]×SIN(F)+RE1[P];IM1[P]= -RE[M]×SIN(F)+IM[M]×COS(F)+IM1[P]);"ДЛЯ"Q=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"(RE[Q]=RE1[Q];IM[Q]=IM1[Q];RE1[Q]=O;IM1[Q]=O);"ДЛЯ"W=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"(V=W-1;"ДЛЯ"Z=1"Ш"1"ДО"С"ВЫП"("ЕСЛИ"V-2×g(.5×V)>O"ТО" "{Y[Z]=1}"ИН"(Y[Z]=O);V=O.5×(V-Y[Z]));H=1;"ДЛЯ"U=1"Ш"1"ДО"С"ВЫП"(H=H+(2↑(U-1))×Y[S-U+1]);RE1[H]=RE[W];IM1[H]= -IM[W]);"Е"Д=1"ТО" "ДЛЯ"Л=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"(REY[L]=RE1[L];IMY[L]=IM1[L];RE1[L]=O;IM1[L]=O);"ВЫВ""МАСС"REY;"ВЫВ""МАСС"IMY;Д=2;"ДЛЯ"Э=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"(RE[Э]=H1[Э]/N;IM[Э]=O);"НА"Ф)"ИН"("Е"Д=2"ТО"("ДЛЯ"Б=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"(REH[B]=RE1[B];IMH[B]=IM1[B];RE1[B]=O;IM1[B]=O);"ВЫВ""МАСС"REN;"ВЫВ""МАСС"IMH;Д=3;"ДЛЯ"Г=1"Ш"1"ДО"Н"ВЫП"(RE[Г]=((REY[Г]×REN[Г])+(IMY[Г]×IMH[Г]))/((REN[Г])↑2+(IMH[Г])↑2)/N;IM[Г]=((REN[Г]×IMY[Г])-(REY[Г]×IMH[Г]))/((REN[Г])↑2+(IMH[Г])↑2)/N;"ВЫВ""МАСС"RE;"ВЫВ""МАСС"IM;"НА"Ф)"ИН"("ВЫВ""МАСС"RE1;"ВЫВ""МАСС"IM1))"ГДЕ"Ш"К0"

ЛИТЕРАТУРА

1. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М., «Наука», 1962. § 6.1, 6.2.
2. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М., «Наука», 1971, § 8.1, 8.2, 8.3.
3. Бернглад. Руководство к быстрому преобразованию Фурье. — «Зарубежная радиоэлектроника», 1971, № 3, с. 52—56.
4. Эдгар. Получение и применение интегральных преобразований изображения. — «Зарубежная радиоэлектроника», 1971, № 3, с. 39—41.
5. Арсенин В. Я., Иванов В. В. О разрешающей способности и точности метода регуляризации решения интегральных уравнений первого рода типа свертки. — «Радиотехника и электроника», 1969, вып. 1, с. 167—169.

6. РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ

Изучается анизотропия характеристик распространения объемных акустических волн в кристаллах: фазовая и групповая скорости, поляризация волн, коэффициент электромеханической связи. •

§ 1. Введение

Анизотропия физических свойств кристаллов, в частности упругих и пьезоэлектрических свойств, существенно сказывается на анизотропии характеристик распространения объемных акустических волн. Фазовая и групповая скорости акустических волн, их поляризация, коэффициент электромеханической связи в случае пьезоэлектрических кристаллов и т. п. сильно зависят от выбранного направления распространения акустической волны. Учет анизотропии распространения акустических волн важен при проведении экспериментов в кристаллоакустике, при исследовании физических свойств кристаллов акустическими методами, а также при расчетах ультразвуковых устройств акустоэлектроники. Поэтому необходимо знать зависимость характеристик распространения акустических волн в кристаллах от направления распространения. Для произвольных направлений в кристалле расчет основных характеристик распространения акустической волны сложен. Однако применение ЭВМ позволяет довольно быстро рассчитывать эти характеристики и их зависимость от направления распространения — анизотропию акустических свойств.

Цель данной работы — изучить методы расчета характеристик распространения объемных волн в кристаллах, ознакомиться с программой расчета этих характеристик на ЭВМ «МИР-1» и провести конкретный расчет для одного из кристаллов, перечисленных в задании.

Программа расчета пригодна как для пьезоэлектрических, так и для непьезоэлектрических кристаллов: металлов, полупроводников, диэлектриков — и позволяет для каждого заданного направления распространения ультразвука в кристалле рассчитать значения фазовой и групповой скоростей любой из объемных упругих волн, направление потока энергии и отклонение вектора смещения от волновой нормали, коэффициент электромеханической связи.

§ 2. Алгоритм расчета анизотропии распространения объемных акустических волн в кристаллах

Теория распространения объемных акустических волн в кристаллах изложена в книгах [1—5].

Алгоритм расчета характеристик распространения объемных акустических волн в кристаллах основан на решении уравнения Грина — Кристоффеля для каждого заданного направления распространения акустической волны:

$$\text{Det} |\Gamma_{ik} - \rho v^2 \delta_{ik}| = 0, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\Gamma_{ik} = c_{ijkl} n_j n_l$ — тензор Кристоффеля для данного направления распространения волны k ; c_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости; n_j, n_l — компоненты единичного вектора волновой нормали; δ_{ik} — символ Кронекера.

Таблица 1

**Направляющие косинусы для расчета анизотропии распространения
объемных акустических волн в главных плоскостях**

	(100)	(010)	(001)	(110)	(111)
n_1	0	$\cos \varphi$	$\cos \varphi$	$\cos \varphi$	$\frac{1}{2} \left(-n_3 + \sqrt{2-3n_3^2} \right)$
n_2	$\cos \varphi$	0	$\sin \varphi$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi$	$\frac{1}{2} \left(-n_3 - \sqrt{2-3n_3^2} \right)$
n_3	$\sin \varphi$	$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi$	$\frac{2}{\sqrt{6}} \cos \varphi$

Таблица 2

Компоненты упругого тензора Кристоффеля

$\Gamma_{ik} \backslash n_j n_l$	n_1^2	$n_1 n_2$	$n_1 n_3$	n_2^2	$n_2 n_3$	n_3^2
Γ_{11}	c_{11}	$2c_{16}$	$2c_{15}$	c_{66}	$2c_{36}$	c_{55}
Γ_{12}	c_{16}	$c_{12} + c_{66}$	$c_{14} + c_{56}$	c_{26}	$c_{25} + c_{46}$	c_{45}
Γ_{13}	c_{15}	$c_{14} + c_{56}$	$c_{13} + c_{55}$	c_{46}	$c_{36} + c_{45}$	c_{35}
Γ_{22}	c_{66}	$2c_{26}$	$2c_{46}$	c_{22}	$2c_{24}$	c_{44}
Γ_{23}	c_{56}	$c_{25} + c_{46}$	$c_{36} + c_{45}$	c_{24}	$c_{23} + c_{44}$	c_{34}
Γ_{33}	c_{55}	$2c_{45}$	$2c_{35}$	c_{44}	$2c_{34}$	c_{33}

совместно с условием нормировки

$$(u_k^m)^2 = 1. \quad (4)$$

Для выполнения этих расчетов в данной программе для каждой собственной волны вычисляются величины

$$\begin{aligned} \Gamma_1^m &= \Gamma_{11} - \rho v_m^2, \\ \Gamma_2^m &= \Gamma_{22} - \rho v_m^2, \\ \Gamma_3^m &= \Gamma_{33} - \rho v_m^2 \end{aligned} \quad (5)$$

и далее из (3)—(5) строится система неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}\Gamma_1 u_1 + \Gamma_{12} u_2 + \Gamma_{13} u_3 &= 0, \\ \Gamma_{12} u_1 + \Gamma_2 u_2 + \Gamma_{23} u_3 &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

или

$$\begin{aligned}\Gamma_1 u_1 / u_3 + \Gamma_{12} u_2 / u_3 &= -\Gamma_{13}, \\ \Gamma_{12} u_1 / u_3 + \Gamma_2 u_2 / u_3 &= -\Gamma_{23}.\end{aligned}$$

Здесь индекс m для простоты опускается. Если определитель последней системы D_{33} не равен нулю, то для компонент вектора смещения получим

$$u_1 = D_{31}/D_3, \quad u_2 = D_{32}/D_3, \quad u_3 = D_{33}/D_3, \quad (7)$$

где

$$D_3 = (D_{31}^2 + D_{32}^2 + D_{33}^2)^{1/2}.$$

Если же определитель системы $D_{33} = 0$, то следует выбрать другую пару уравнений (табл. 3).

Таблица 3

Расчет векторов смещения упругих волн в кристаллах

$\Gamma_2 u_2 + \Gamma_{23} u_3 = -\Gamma_{12} u_1$ $\Gamma_{23} u_2 + \Gamma_3 u_3 = -\Gamma_{13} u_1$	$\Gamma_1 u_1 + \Gamma_{13} u_3 = -\Gamma_{12} u_2$ $\Gamma_{13} u_1 + \Gamma_3 u_3 = -\Gamma_{23} u_2$	$\Gamma_1 u_1 + \Gamma_{12} u_2 = -\Gamma_{13} u_3$ $\Gamma_{12} u_1 + \Gamma_2 u_2 = -\Gamma_{23} u_3$
$D_{11} = \Gamma_2 \Gamma_3 - \Gamma_{23}^2$	$D_{21} = \Gamma_{13} \Gamma_{23} - \Gamma_{12} \Gamma_3$	$D_{31} = \Gamma_{12} \Gamma_{23} - \Gamma_{23} \Gamma_1$
$D_{12} = \Gamma_{13} \Gamma_{23} - \Gamma_{12} \Gamma_3$	$D_{22} = \Gamma_1 \Gamma_3 - \Gamma_{13}^2$	$D_{32} = \Gamma_{12} \Gamma_{13} - \Gamma_{23} \Gamma_1$
$D_{13} = \Gamma_{12} \Gamma_{23} - \Gamma_{13} \Gamma_2$	$D_{23} = \Gamma_{12} \Gamma_{13} - \Gamma_{23} \Gamma_1$	$D_{33} = \Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_{12}^2$
$D_1 = \sqrt{D_{11}^2 + D_{12}^2 + D_{13}^2}$	$D_2 = \sqrt{D_{21}^2 + D_{22}^2 + D_{23}^2}$	$D_3 = \sqrt{D_{31}^2 + D_{32}^2 + D_{33}^2}$

По известным компонентам единичного вектора смещения трудно определить угол Θ между вектором смещения и направлением распространения волны k (см. рис. 1):

$$\Theta = \arccos(n_i u_i). \quad (8)$$

Угол Θ определяет тип волны.

Групповая скорость в кристаллах определяется выражением

$$v_{gk}^m = \frac{1}{\rho v_m} c_{ijkl} n_j u_l, \quad (9)$$

т. е. для расчета групповой скорости объемных упругих волн в кристаллах надо знать фазовую скорость волны в данном направлении и компоненты ее вектора смещения. Для удобства расчета групповой скорости введем вектор \mathbf{C} с компонентами

$$c_i = A_{il}n_l. \quad (10)$$

Компоненты тензора A_{il} определяются сверткой

$$A_{il} = c_{ijlm}u_ju_m. \quad (11)$$

Аналогичным образом определяются компоненты тензора Кристоффеля Γ_{ik} , т. е. для определения компонент тензора A_{il} можно пользоваться той же табл. 2 для Γ_{ik} , заменив n_i на u_i . Далее для каждой волны с фазовой скоростью v_m групповая скорость будет определяться соотношением

$$\mathbf{v}_g^m = \frac{1}{\rho v_m} (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3). \quad (12)$$

Проверку правильности расчета групповой скорости всегда можно сделать, пользуясь соотношением

$$\mathbf{v}_g^m \mathbf{n} = v_m, \quad (13)$$

т. е. тем, что фазовая скорость может быть представлена как проекция групповой скорости на направление распространения волны.

В общем случае в кристаллах направление групповой скорости, т. е. направление потока акустической энергии, не совпадает с направлением распространения волны. Поток энергии может отклоняться от направления распространения волны, иногда на довольно значительный угол. Это может наблюдаться даже для «чистых» направлений в кристаллах.

Для определения направления потока энергии введем единичные векторы потока энергии:

$$\mathbf{g}_i = \frac{c_i}{\rho v_m |\mathbf{v}_g^m|}. \quad (14)$$

Тогда угол между направлением распространения волны и направлением потока энергии определяется соотношением

$$\gamma = \arccos(g_i u_i). \quad (15)$$

Для пьезоэлектрических кристаллов уравнение Грина — Кристоффеля представляется следующим образом:

$$(\Pi_{ik} - \rho v^2 \delta_{ik}) u_k = 0; \quad \Pi_{ik} = \Gamma_{ik} + K_{ik}, \quad (16)$$

где пьезоэлектрическая добавка

$$K_{ik} = \frac{\mathcal{E}_i \mathcal{E}_k}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_i = e_{nij} n_n n_j,$$

Таблица 4

Пьезоэлектрические векторы и эффективные диэлектрические постоянные

\mathcal{E}_i \ $n_n n_k$	n_1^2	$n_1 n_2$	$n_1 n_3$	n_2^2	$n_2 n_3$	n_3^2
\mathcal{E}_1	ϵ_{11}	$\epsilon_{16} + \epsilon_{21}$	$\epsilon_{15} + \epsilon_{31}$	ϵ_{26}	$\epsilon_{25} + \epsilon_{36}$	ϵ_{35}
\mathcal{E}_2	ϵ_{16}	$\epsilon_{12} + \epsilon_{28}$	$\epsilon_{14} + \epsilon_{36}$	ϵ_{22}	$\epsilon_{24} + \epsilon_{32}$	ϵ_{34}
\mathcal{E}_3	ϵ_{15}	$\epsilon_{14} + \epsilon_{25}$	$\epsilon_{13} + \epsilon_{35}$	ϵ_{24}	$\epsilon_{23} + \epsilon_{34}$	ϵ_{33}
ϵ	ϵ_{11}	$2\epsilon_{12}$	$2\epsilon_{13}$	ϵ_{22}	$2\epsilon_{23}$	ϵ_{33}

Таблица 5

Свертка пьезоэлектрических коэффициентов для определения групповой скорости в пьезокристаллах

\mathcal{E}_i^u	n_1			n_2			n_3		
	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3
\mathcal{E}_1^u	ϵ_{11}	ϵ_{16}	ϵ_{15}	ϵ_{21}	ϵ_{26}	ϵ_{25}	ϵ_{31}	ϵ_{36}	ϵ_{35}
\mathcal{E}_2^u	ϵ_{16}	ϵ_{12}	ϵ_{14}	ϵ_{26}	ϵ_{22}	ϵ_{24}	ϵ_{36}	ϵ_{32}	ϵ_{34}
\mathcal{E}_3^u	ϵ_{15}	ϵ_{14}	ϵ_{13}	ϵ_{25}	ϵ_{24}	ϵ_{23}	ϵ_{35}	ϵ_{34}	ϵ_{33}

\mathcal{E}_k — пьезоэлектрические векторы и $\epsilon = \epsilon_{mn} n_m n_n$ — эффективная диэлектрическая проницаемость кристалла определяются по табл. 4, где даны выражения для сверток соответствующих тензоров.

Поляризация упругих волн в пьезокристаллах определяется аналогично поляризации в непьезоэлектрических кристаллах, но с учетом пьезоэлектрической добавки K_{ik} .

Для расчета групповой скорости для пьезоэлектрических кристаллов вводим тензор

$$B_{ik} = \frac{\mathcal{E}_i^u \mathcal{E}_k^u}{\epsilon}; \quad \mathcal{E}_i^u = \epsilon_{nij} n_n u_j, \quad (17)$$

где \mathcal{E}_i^u , \mathcal{E}_k^u — свертки пьезоэлектрических тензоров, определяемые из табл. 5. Групповая скорость в пьезокристаллах определяется выражением

$$v_{gi} = \frac{(A_{ik} + B_{ik}) n_k}{\rho v}. \quad (18)$$

Обобщенной характеристикой упругих и пьезоэлектрических свойств кристалла является коэффициент электромеханической связи K^2 . В данной задаче

$$K^2 = \frac{v^2 - v_0^2}{v_0^2}, \quad (19)$$

где v и v_0 — фазовые скорости в одном направлении с учетом пьезоэффекта и без него соответственно.

§ 3. Программы расчета характеристик распространения упругих волн

Программы предусматривают расчет зависимостей от направления распространения упругой волны в кристалле, ее фазовых скоростей v и v_0 (без пьезоэффекта), коэффициента электромеханической связи K^2 , компонент вектора смещения u_i каждой из волн, модуля групповой скорости $|v_g|$, поляризационных углов β , Θ , γ (см. рис. 1).

Программа состоит из четырех частей:

1. Определение компонент тензора Кристоффеля Γ_{ik} , Π_{ik} .
2. Расчет фазовых скоростей v_i и коэффициентов электромеханической связи K^2 .
3. Расчет компонент вектора смещения и углов $\Theta = \text{ТЭТ}$ и $\beta = \text{ВЕТ}$.
4. Расчет групповой скорости v_g и углов $\gamma = \text{ГАМ}$.

Для каждого значения угла выполняются все вычисления, печатается результат в виде строки из таблицы, а затем программа возвращается к началу, и проводятся вычисления для нового значения угла. Так как функции вычисляются от значения аргументов в радианах, предусмотрен перевод градусов в радианы: $\Phi = 1,7453 \cdot 10^{-2} \times A$, где A — угол в градусах.

В первой части определяются величины компонент тензора Кристоффеля по заданным в описательной части компонентам тензора модулей упругости кристалла и направляющим косинусам ($n_1 = N1$, $n_2 = N2$, $n_3 = N3$), пьезоэлектрические добавки K_{ik} , тензоры Π_{ik} . В программе приняты следующие обозначения:

$$\Gamma_{ik} = \text{ГК}, \quad \Pi_{ik} = \text{ПК}, \quad c_{ik} = \text{СГК}, \quad e_{ik} = \text{ЕК}, \quad \varepsilon_{ik} = \text{ЭК}, \quad \rho = \text{Р0}.$$

Плотность кристалла, упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические константы даны в описательной части.

Во второй части определяются собственные значения тензора Кристоффеля Γ_{ik} или Π_{ik} . Для этого решается уравнение 3-й степени (2). По значениям компонент тензоров Γ_{ik} и Π_{ik} вычисляются коэффициенты уравнения (2) B , C , D . Здесь приняты обозначения: коэффициенты B , C , D , и корни $X1$, $X2$, $X3$ — с учетом пьезоэффекта и $B0$, $C0$, $D0$ и $X10$, $X20$, $X30$ — без пьезоэффекта. Корни

уравнения определяются по методу Кардана — Тарталье. Затем по значениям корней для каждой волны вычисляется фазовая скорость

$$V_1 = V(X_1/P_0)$$

и коэффициент электромеханической связи

$$K_1 = (X_1 - X_{10})/X_{10}.$$

В третьей части программы рассчитываются компоненты векторов смещения по формулам (3)—(7). Расчет идет отдельно для каждой волны. Для этого вводится обозначение $X = P_0 \times V^2 \uparrow 2$, где вместо V_2 может быть записана любая из трех скоростей волн. Для выбранной волны в дальнейшем рассчитываются компоненты вектора смещения u , угол между вектором смещения и направлением распространения ТЭТ и поляризационный угол ВЕТ (в дан-

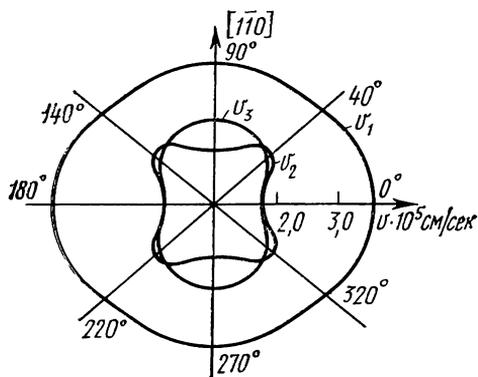


Рис. 2. Диаграмма фазовых скоростей упругих волн, распространяющихся в плоскости (110) кристалла германата висмута

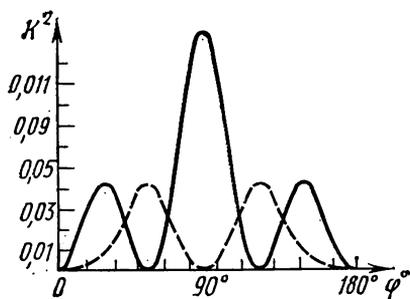


Рис. 3. Зависимость коэффициента электромеханической связи от направления распространения для кристалла германата висмута

ном варианте угол с осью X_3). В последней части рассчитывается групповая скорость упругой волны, по уравнениям (9)—(15), (17), (18) с использованием вычисленных в предыдущей части векторов смещения. Здесь же вычисляются значения угла между потоком энергии и направлением распространения ГАМ.

Результаты расчета выводятся на печать в виде таблицы. Следует отметить, что углы для таблицы переводятся и печатаются в градусах. В описательной части должны быть заданы все константы кристалла, в том числе и равные нулю. В качестве примера на рис. 2 и 3 приведены результаты расчета анизотропии характеристик распространения упругих волн в кубическом пьезоэлектрическом кристалле германата висмута для плоскости (110).

§ 4. Упражнения:

1. Рассчитать характеристики распространения упругих волн в диагональной плоскости одного из кубических кристаллов: NaCl, Ge, Cu.

2. Рассчитать характеристики распространения и коэффициент электромеханической связи одного из пьезоэлектрических кристаллов: $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$, CdS, LiNbO_3 .

3. Провести расчет групповой скорости и отклонения потока энергии для одной из трех волн кристалла.

4. Построить график рассчитанных характеристик распространения волн в зависимости от угла φ по пп. 1—3.

5. Определить направление распространения чистых волн в кристаллах.

6. Найти акустические оси по данным расчета.

7. Определить направления максимального коэффициента электромеханической связи.

Приложение. Данные для кубических и гексагональных кристаллов (приведены только отличные от нуля компоненты тензоров, см. [1]; для SiO_2 и LiNbO_3 см. ч. I, с. 300)

NaCl

$$\rho = 2,164 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$C_{11} = 4,942 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad C_{12} = 1,269 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$C_{44} = 1,281 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

Ge

$$\rho = 5,322 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$C_{11} = 12,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad C_{12} = 4,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$C_{44} = 6,68 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

Cu

$$\rho = 8,94 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$C_{11} = 16,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad C_{12} = 12,2 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$C_{44} = 7,55 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

CdS

$$\rho = 4,82 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$C_{11} = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad C_{12} = 4,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$C_{13} = 4,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad C_{33} = 8,0 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$C_{44} = 1,43 \cdot 10^{10} \text{ H/M}^2;$$

$$\varepsilon_{11} = 0,83 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/М}; \quad \varepsilon_{33} = 0,914 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/М};$$

$$e_{11} = 0,44 \text{ Кл/М}^2; \quad e_{33} = -0,24 \text{ Кл/М}^2; \quad e_{15} = -0,21 \text{ Кл/М}^2.$$

CdSe

$$\rho = 5,81 \cdot 10^3 \text{ кг/М}^3;$$

$$C_{11} = 7,41 \cdot 10^{10} \text{ H/M}^2; \quad C_{12} = 4,52 \cdot 10^{10} \text{ H/M}^2; \quad C_{13} = 3,39 \cdot 10^{10} \text{ H/M}^2;$$

$$C_{33} = 8,36 \cdot 10^{10} \text{ H/M}^2; \quad C_{44} = 1,317 \cdot 10^{10} \text{ H/M}^2; \quad C_{66} = 1,445 \cdot 10^{10} \text{ H/M}^2;$$

$$\varepsilon_{33} = 0,9 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/М}; \quad \varepsilon_{11} = 0,82 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/М};$$

$$e_{15} = -0,152 \text{ Кл/М}^2; \quad e_{33} = 0,317 \text{ Кл/М}^2; \quad e_{31} = -0,1605 \text{ Кл/М}^2.$$

ZnO

$$\rho = 5,676 \cdot 10^3 \text{ кг/М}^3;$$

$$C_{11} = 2,09 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2; \quad C_{12} = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2;$$

$$C_{13} = 1,05 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2; \quad C_{33} = 2,109 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2;$$

$$C_{44} = 0,4247 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2; \quad C_{66} = 0,4429 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2;$$

$$\varepsilon_{11} = 0,75 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/М}; \quad \varepsilon_{33} = 0,964 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/М};$$

$$e_{15} = 0,353 \text{ Кл/М}^2; \quad e_{31} = -0,351 \text{ Кл/М}^2; \quad e_{33} = 1,566 \text{ Кл/М}^2.$$

Bi₁₂GeO₂₀

$$\rho = 9,2 \cdot 10^3 \text{ кг/М}^3;$$

$$C_{11} = 1,2848 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2; \quad C_{12} = 0,2942 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2;$$

$$C_{44} = 0,2552 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2;$$

$$\varepsilon_{11} = 0,38 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/М}; \quad e_{14} = 0,983 \text{ Кл/М}^2.$$

ПРОГРАММА СЧЕТА (SiO₂)

""6."ВЫВ"[КЛАСС 3М];"ДЛЯ"А=О"Ш"Ю"Д0"180"ВЫП"(ФИ=1.7453₁₀-2×А;N1=C
 0S(ФИ);N2=O;N3=SIN(ФИ);Г11=C11×N1↑2+C66×N2↑2+2×C14×N2×N3+C44×N3↑2
 ;Г12=(C12+C66)×N1×N2+2×C14×N1×N3;Г13=2×C14×N1×N2+(C13+C44)×N1×N3;
 Г22=C66×N1↑2+C11×N2↑2-2×C14×N2×N3+C44×N3↑2;Г23=C14×N1↑2-C14×N2↑2
 +(C13+C44)×N2×N3;Г33=C44×N1↑2+C44×N2↑2+C33×N3↑2;E1=-E11×(N1↑2+N2↑2
)+E14×N2×N3;E2=-E11×N1×N2+E14×N1×N3;Э=Э11×N1↑2+Э11×N2↑2+Э33×N
 3↑2;П11=Г11+E1↑2/Э;П12=Г12+E1×E2/Э;П13=Г13+E1×E3/Э;П22=Г22+E2↑2/Э;П23
 =Г23+E2×E3/Э;П33=Г33+E3↑2/Э;B0=-(Г11+Г22+Г33);B=-(П11+П22+П33);C0
 =(Г11×Г33+Г11×Г22+Г22×Г33)-(Г12↑2+Г13↑2+Г23↑2);C=(П11×П33+П11×П22
 +П22×П33)-(П12↑2+П13↑2+П23↑2);Д0=(Г11×Г23↑2+Г22×Г13↑2+Г33×Г12↑2)-

$(\Gamma11 \times \Gamma22 \times \Gamma33 + 2 \times \Gamma12 \times \Gamma13 \times \Gamma23); D = (\Pi11 \times \Pi23 \uparrow 2 + \Pi22 \times \Pi13 \uparrow 2 + \Pi33 \times \Pi12 \uparrow 2) - (\Pi11 \times \Pi22 \times \Pi33 + 2 \times \Pi12 \times \Pi13 \times \Pi23); Q0 = B0 \uparrow 3 / 27 - B0 \times C0 / 6 + D0 / 2; Q = B \uparrow 3 / 27 - B \times C / 6 + D / 2; P0 = C0 / 3 - B0 \uparrow 2 / 9; P = C / 3 - B \uparrow 2 / 9; R0 = \text{SIGN}(Q0) \times \sqrt{(\text{ABS}(\Pi0))}; R = \text{SIGN}(Q) \times \sqrt{(\text{ABS}(P))}; \Phi0 = "E" \cdot Q0 / R0 \uparrow 3 > 1" \cdot T0 \cdot (O) \cdot "ИИ" (\text{ARCCOS}(Q0 / R0 \uparrow 3)); \Phi = "E" \cdot Q / R \uparrow 3 > 1" \cdot T0 \cdot (O) \cdot "ИИ" (\text{ARCCOS}(Q / R \uparrow 3)); X1O = -2 \times R0 \times \text{COS}(\Phi0 / 3) - B0 / 3; X1 = -2 \times R \times \text{COS}(\Phi / 3) - B / 3; X2O = 2 \times R0 \times \text{COS}((3.1415 - \Phi0) / 3) - B0 / 3; X2 = 2 \times R \times \text{COS}((3.1415 - \Phi) / 3) - B / 3; X3O = 2 \times R0 \times \text{COS}((3.1415 + \Phi0) / 3) - B0 / 3; X3 = 2 \times R \times \text{COS}((3.1415 + \Phi) / 3) - B / 3; "E" \cdot X1 > X2" \cdot T0 \cdot (K1 = (X1 - X1O) / X1O; V1 = \sqrt{(X1 / P0)}) \cdot "ИИ" (K1 = (X2 - X2O) / X2O; V1 = \sqrt{(X2 / P0)}); "E" \cdot X2 < X1" \cdot T0 \cdot (V2 = \sqrt{(X2 / P0)}; K2 = (X2 - X2O) / X2O) \cdot "ИИ" (V2 = \sqrt{(X1 / P0)}; K2 = (X1 - X1O) / X1O); K3 = (X3 - X3O) / X3O; V3 = \sqrt{(X3 / P0)}; X = P0 \times V2 \uparrow 2; \Pi = \Pi11 - X; \Pi2 = \Pi22 - X; \Pi3 = \Pi33 - X; D11 = \Pi2 \times \Pi3 - \Pi23 \uparrow 2; D12 = \Pi13 \times \Pi23 - \Pi12 \times \Pi13; D13 = \Pi12 \times \Pi23 - \Pi13 \times \Pi2; D22 = \Pi1 \times \Pi3 - \Pi13 \uparrow 2; D23 = \Pi12 \times \Pi13 - \Pi23 \times \Pi1; D33 = \Pi1 \times \Pi2 - \Pi12 \uparrow 2; D1 = \sqrt{(D11 \uparrow 2 + D12 \uparrow 2 + D13 \uparrow 2)}; D2 = \sqrt{(D12 \uparrow 2 + D22 \uparrow 2 + D23 \uparrow 2)}; D3 = \sqrt{(D13 \uparrow 2 + D23 \uparrow 2 + D33 \uparrow 2)}; "E" \cdot D11 = O" \cdot T0 \cdot ("E" \cdot D22 = O" \cdot T0 \cdot ("E" \cdot D33 = O" \cdot T0 \cdot (U1 = N1; U2 = N2; U3 = N3) \cdot "ИИ" (U1 = D13 / D3; U2 = D23 / D3; U3 = D33 / D3)) \cdot "ИИ" (U1 = D12 / D2; U2 = D22 / D2; U3 = D23 / D2)) \cdot "ИИ" (U1 = D11 / D1; U2 = D12 / D1; U3 = D13 / D1); US = U1 \times N1 + U2 \times N2 + U3 \times N3; ТЭТ = "E" \cdot US > 1" \cdot T0 \cdot (O) \cdot "ИИ" (\text{ARCCOS}(US) / 1.7453_{10} - 2); BET = "E" \cdot U3 > 1" \cdot T0 \cdot (O) \cdot "ИИ" (\text{ARCCOS}(U3) / 1.7453_{10} - 2); EU1 = N1 \times U1 \times E11 - N2 \times (E11 \times U2 + E14 \times U3); EU2 = N1 \times (E14 \times U3 - E11 \times U2) - N2 \times E11 \times U1; EU3 = N1 \times E14 \times U2 - E14 \times U1 \times N2; W = (EU1 \times N1 + EU2 \times N2 + EU3 \times N3) / \text{Э}; C1\Gamma = N1 \times (C11 \times U1 \uparrow 2 + C66 \times U2 \uparrow 2 + 2 \times C14 \times U1 \times U2 + U3 + C44 \times U3 \uparrow 2) + N2 \times ((C12 + C66) \times U2 \times U1 + 2 \times C14 \times U1 \times U3) + N3 \times (2 \times C14 \times U1 \times U2 + (C13 + C44) \times U1 \times U3); C2\Gamma = N1 \times ((C12 + C66) \times U1 \times U2 + 2 \times C14 \times U1 \times U3) + N2 \times (C33 \times U1 \uparrow 2 + C11 \times U2 \uparrow 2 - 2 \times C14 \times U2 \times U3 + C44 \times U3 \uparrow 2) + N3 \times (C14 \times U1 \uparrow 2 - C14 \times U2 \uparrow 2 + (C13 + C44) \times U2 \times U3); C3\Gamma = N1 \times (2 \times C14 \times U1 \times U2 + (C13 + C44) \times U1 \times U3) + N2 \times (C14 \times U1 \uparrow 2 - C14 \times U2 \uparrow 2 + (C13 + C44) \times U2 \times U3) + N3 \times (C44 \times U1 \uparrow 2 + C44 \times U2 \uparrow 2 + C33 \times U3 \uparrow 2); C1 = C1\Gamma + W \times EU1; C2 = C2\Gamma + W \times EU2; C3 = C3\Gamma + W \times EU3; G = P0 \times \sqrt{(X / P0)}; VG = (\sqrt{(C1 \uparrow 2 + C2 \uparrow 2 + C3 \uparrow 2)}) / G; G1 = C1 / (G \times VG); G2 = C2 / (G \times VG); G3 = C3 / (G \times VG); GS = G1 \times N1 + G2 \times N2 + G3 \times N3; ГАМ = "E" \cdot GS > 1" \cdot T0 \cdot (O) \cdot "ИИ" (\text{ARCCOS}(GS) / 1.7453_{10} - 2); "ВЫВ" \cdot "ТА" \cdot 2, A, VG, ГАМ, ТЭТ, BET) \cdot "ГДЕ" \cdot C11 = 8.51_{10} 10; C12 = .695_{10} 10; C14 = 1.68_{10} 10; C66 = 3.907_{10} 10; C44 = 5.71_{10} 10; E15 = O; C33 = 10.53_{10} 10; E31 = O; E22 = O; Э33 = 4.68 \times 8.85_{10} - 12; P0 = 2.6484_{10} 3; C13 = 1.41_{10} 10; Э11 = 4.52 \times 8.85_{10} - 12; E33 = O; E3 = O; E14 = O.0406; E11 = O.171; NЖ = O" \cdot K0"$

ПРОГРАММА СЧЕТА (NaCl)

""6. "ВЫВ" [КУБ]; "ДЛЯ" A = O" \cdot Ш" \cdot IO" \cdot DO" \cdot 18O" \cdot ВЫП" (\PhiИ = 1.7453_{10} - 2 \times A; N1 = \text{SIN}(\PhiИ); N2 = \text{COS}(\PhiИ); N3 = O; \Gamma11 + C11 \times N1 \uparrow 2 + C44 \times (N2 \uparrow 2 + N3 \uparrow 2); \Gamma12 = (C12 + C44) \times N1 \times N2; \Gamma13 = (C12 + C44) \times N1 \times N3; \Gamma22 = C44 \times N1 \uparrow 2 + C11 \times N2 \uparrow 2 + C44 \times N3 \uparrow 2; \Gamma23 = (C12 + C44) \times N2 \times N3; \Gamma33 = C44 \times (N1 \uparrow 2 + N2 \uparrow 2) + C11 \times N3 \uparrow 2; B0 = -(\Gamma11 + \Gamma22 + \Gamma33); C0 = (\Gamma11 \times \Gamma33 + \Gamma11 \times \Gamma22 + \Gamma22 \times \Gamma33) - (\Gamma12 \uparrow 2 + \Gamma13 \uparrow 2 + \Gamma23 \uparrow 2); D0 = (\Gamma11 \times \Gamma23 \uparrow 2 + \Gamma22 \times \Gamma13 \uparrow 2 + \Gamma33 \times \Gamma12 \uparrow 2) - (\Gamma11 \times \Gamma22 \times \Gamma33 + 2 \times \Gamma12 \times \Gamma13 \times \Gamma23); Q0 = B0 \uparrow 3 / 27 - B0 \times C0 / 6 + D0 / 2; \Pi0 = C0 / 3 - B0 \uparrow 2 / 9; R0 = \text{SIGN}(Q0) \times \sqrt{(\text{ABS}(\Pi0))}; \Phi0 = "E" \cdot Q0 / R0 \uparrow 3 > 1" \cdot T0 \cdot (O) \cdot "ИИ" (\text{ARCCOS}(Q0 / R0 \uparrow 3)); X1O = -2 \times R0 \times \text{COS}(\Phi0 / 3) - B0 / 3; X2O = 2 \times R0 \times \text{COS}((3.1415 - \Phi0) / 3);

$-B0/3; X30=2 \times R0 \times C0S((3.1415+\Phi0)/3) - B0/3; V1=\sqrt{X10/P0}; V2=\sqrt{X20/P0};$
 $V3=\sqrt{X30/P0};$ "ВЫБ" "ТА" 1, A, V1, V2, V3 "ГДЕ" P0=2.164; C11=4.942₁₀11; C12
 $=1.269_{10}11; C44=1.281_{10}11$ "K0"

ЛИТЕРАТУРА

1. Най Дж. Физические свойства кристаллов. М., ИЛ, 1960.
2. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. И. Основы кристаллофизики. М., «Наука», 1975.
3. Федоров Ф. И. Теория распространения упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
4. Лямов В. Е. Распространение гиперзвуковых волн в кристаллах. Ротапринт физфака МГУ, 1970.
5. Лямов В. Е. СВЧ-акустика твердого тела. Ротапринт физфака МГУ, 1970.

7. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ИММЕРСИОННОЙ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ЛИНЗЕ

Методом Эйлера производится решение дифференциальных уравнений движения электрона в электростатическом поле иммерсионной электронной линзы, состоящей из двух бесконечных полуцилиндров с различными потенциалами.

§ 1. Теория

При расчете электронных траекторий в аксиально-симметричных электростатических полях используются цилиндрические координаты (r, φ, z) , ось z которых совпадает с осью симметрии поля (рис. 1). В электронной оптике доказывается, что распределение

Рис. 1. Система координат и электронная траектория



поля в пространстве аксиально-симметричной системы однозначно определяется значениями потенциала на оси системы $\Phi(z)$. При этом уравнение движения электрона в поле имеет вид (так называемое «уравнение луча»):

$$r'' + \frac{r' \Phi'}{2\Phi} + \frac{r \Phi''}{4\Phi} = 0, \quad (1)$$

где штрихи означают производные по z . Таким образом, для расчета электронной траектории необходимо найти решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно $r(z)$ при известной функции $\Phi(z)$. При этом задаются начальные условия в плоскости вылета электрона: $z=z_0; r(z_0)=r_0$ и $r'(z_0)=r'_0$.

Иммерсионной электростатической линзой называется система, состоящая из двух электродов в форме цилиндров или диафрагм,

имеющих разные потенциалы. Такая система является собирающей электростатической линзой, фокусное расстояние которой зависит от соотношения между потенциалами второго и первого электродов и от радиуса электродов и их формы.

Распределение потенциала на оси иммерсионной линзы с высокой точностью передается формулой

$$\Phi(z) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2} \operatorname{th} \frac{2,63z}{D}, \quad (2)$$

где V_1 и V_2 — потенциалы 1-го и 2-го электродов относительно катода, эмитировавшего электроны; D — диаметр цилиндров, образующих электроды. При этом предполагается, что цилиндры имеют одинаковый диаметр и являются полубесконечными, а щель между ними пренебрежимо мала по сравнению с диаметром (рис. 2).

Расчет 1-й и 2-й производных функций $\Phi(z)$ для подстановки их в уравнение луча дает

$$\Phi'(z) = \frac{V_2 - V_1}{2} \frac{2,63}{D} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{2,63z}{D} \right); \quad (3)$$

$$\Phi''(z) = (V_2 - V_1) \left(\frac{2,63}{D} \right)^2 \operatorname{th} \frac{2,63z}{D} \left(\operatorname{th}^2 \frac{2,63z}{D} - 1 \right). \quad (4)$$

Уравнение (1) с учетом выражений (2)—(4) не решается аналитическими методами, как и большинство уравнений движения в электронной оптике. Обычно для расчета конкретных электронно-

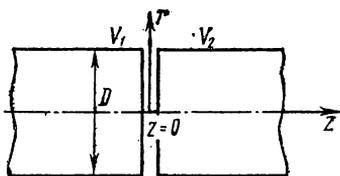


Рис. 2. Электроды

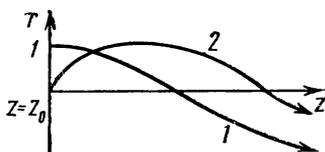


Рис. 3. Линейно-независимые траектории

оптических систем применяют поэтому численные методы интегрирования.

Для решения дифференциальных уравнений типа (1) разработано несколько способов численного интегрирования. Наиболее известным и широко применяемым способом является метод Рунге—Кутты, дающий достаточно высокую точность при относительно малом числе шагов. Обычно программа вычислений по методу Рунге—Кутты содержится в числе стандартных подпрограмм ЭВМ. Однако в случае работы на ЭВМ «МИР-1» память ее и

быстродействие недостаточны для возможности эффективной работы по методу Рунге—Кутты.

Поэтому в данном случае расчет производится по более простому способу ломаных Эйлера, который, однако, дает меньшую точность. Расчет по этому способу производится методом последовательных шагов при линейной экстраполяции приращения функций на каждом шаге. Для этого записываем значения функции $r(z)$ и ее производных при переходе от координаты z к $z+\Delta z$ в виде

$$\begin{cases} r(z+\Delta z) = r(z) + r'(z)\Delta z, \\ r'(z+\Delta z) = r'(z) + r''(z)\Delta z, \\ r'' = -\frac{1}{\Phi} \left(\frac{\Phi' r'}{2} + \frac{\Phi'' r}{4} \right). \end{cases} \quad (5)$$

В программе производится вычисление функций r , r' и r'' по формулам (5) методом последовательных шагов, начиная с некоторого значения $z=z_0$. Величины D , Δz , V_1 , V_2 , z_0 задаются в программе и могут быть изменены при необходимости.

В программе для обозначения различных величин введены следующие идентификаторы:

$Z=z$; $V1=V_1$; $V2=V_2$; $\Phi1=\Phi'$; $\Phi2=\Phi''$; $R=r$; $R1=r'$; $R2=r''$; $DZ=\Delta z$; $D=D$; $\Phi=\Phi$.

Кроме того, для экономии времени работы ЭВМ введены следующие добавочные величины: $A=2,63/D$; $U1=(V1+V2)/2$; $U2=(V2-V1)/2$. Поскольку эти величины должны вычисляться на каждом шаге в цикле, введение новых переменных дает значительную экономию во времени.

В электронной оптике принято рассчитывать не одну, а две линейно-независимые траектории, и в качестве начальных условий для них, как правило, берутся следующие: 1) $r_0=1$; $r'_0=0$; 2) $r_0=0$; $r'_0=1$. Легко видеть, что путем линейной комбинации этих двух траекторий можно получить любую траекторию, удовлетворяющую произвольным начальным условиям r_0 и r'_0 (рис. 3).

Для расчета двух траекторий вводятся массивы $MR[M]$ и $MR1[M]$, которые соответствуют r_0 и r'_0 , причем берется $MR[1]=1$, $MR1[1]=0$ и $MR[2]=0$, $MR1[2]=1$; в программе осуществляется 1-й цикл по M и $M=1$ и 2.

Начальное условие по z берется $z=-5D$, поскольку при этом потенциал практически уже постоянен и равен V_1 .

Затем осуществляется двойной цикл для расчета траекторий по формулам (5). Двойной цикл берется потому, что нет необходимости выводить данные о траектории на печать на каждом шаге. Поэтому машина осуществляет $N1$ шагов и затем производит выдачу данных на печать; такого рода циклов с выдачей производится $K1$.

На печать в каждом цикле выводятся величины Z , R , R_1 и Φ . Остановка производится после выполнения заданного количества циклов.

§ 2. Упражнения

1. Расчет по программе:

- ознакомиться с программой;
- ввести в машину перфоленду с программой;
- по указанию преподавателя произвести замену параметров, видимых в конце программы, и произвести счет.

2. Построить графики $r(z)$ для двух траекторий с различными начальными данными. По траекториям оценить:

- фокусное расстояние иммерсионной линзы при заданных параметрах;
- положение главной плоскости линзы;
- положение плоскости изображения предмета;
- увеличение изображения предмета.

ПРОГРАММА СЧЕТА

```
'РАЗР'5,D=1;V1=1;N1=5;K1=3O;DZ=D/1O;'ВЫВ'D,'ПР'4,V1,'ПР'4,V2,'ПР'
4,N1,'ПР'4,K1,'ПР'4,DZ,'СТР0';U1=(V2+V1)/2;U2=(V2-V1)/2;A=2.63/D;
'ДЛЯ'М=1'ШАГ'1'Д0'2'ВЫП'(R=MR[M];R1=MR1[M];R2=O;Z=-5×D;Φ=
V1;'В/ЫВ''ЗАГ''ТА'1,Z,R,R1,Φ;'ВЫВ''ТАБЛ'1,Z,R,R1,Φ;'ДЛЯ'К=1'ШАГ'
1'Д0'К1'ВЫП'(ДЛЯ'N=1'ШАГ'1'Д0'N1'ВЫП'(P=TH(A×Z);Φ=U1+U2×
P;Φ1=U2×A×(1-P↑2);Φ2=2×U2×A↑2×P×(P↑2-1);R=R+R1×DZ;R1=R1+R2×
DZ;R2=-((Φ1×R1/2+Φ2×R/4)Φ;Z=Z+DZ);'ВЫВ''ТАБЛ'1,Z,R,R1,Φ)'ГДЕ'V2
=4;MR[2]=1,O;MR1[2]=O,1'К0'
```

8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЕЕ ОПТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Изучаются основные методы диагностики пространственного распределения параметров неоднородной цилиндрически-симметричной плазмы по собственному интегральному (по лучу зрения) излучению плазмы либо по поглощению или рефракции прошедшего через плазму внешнего излучения. Использование этих методов приводит к необходимости решения интегральных уравнений первого рода, сводимых к уравнению Абеля. В задаче анализируются методы и особенности численного решения подобных уравнений.

§ 1. Введение

В физике вообще и в физике плазмы в частности имеется большое число задач, связанных с исследованием эффектов взаимодействия излучения с неоднородной поглощающей или диспергирующей

щей средой либо с исследованием собственного излучения такой среды. Изучение этих эффектов нашло широкое применение в различных методах физической диагностики параметров неоднородной среды (плазмы) и их пространственного распределения, таких, как теневой и шпирен-методы, интерферометрия, спектральные методы, основанные на изучении распределения собственного излучения плазмы. Особенно широкое применение эти методы получили в последнее время в связи с развитием лазерной техники. В первой группе методов измеряется пространственная картина поглощения (или отклонения) световых пучков, прошедших через объект вдоль различных направлений, во второй — пространственное распределение интегрального по лучу зрения собственного излучения плазмы. Задача состоит в том, чтобы по наблюдаемой картине рассчитать пространственное распределение характеристик самого объекта (например, показателя поглощения или показателя преломления).

Расчет пространственного распределения параметров объектов в большинстве случаев приводит к необходимости решения уравнения Абеля. В настоящей задаче анализируется метод численного решения уравнения Абеля для некоторых реальных физических задач и на конкретных модельных примерах демонстрируется поведение соответствующих решений при различных наблюдаемых распределениях, как гладких, так и негладких.

§ 2. Методы оптической диагностики пространственного распределения параметров плазмы

В общем случае для определения спектральной интенсивности выходящего из плазмы излучения I_ν необходимо решить уравнение переноса излучения, которое записывается в виде [1]

$$\Omega \Delta I_\nu = \epsilon_\nu(s) - \kappa_\nu(s) I_\nu, \quad (1)$$

где $\epsilon_\nu(s)$ и $\kappa_\nu(s)$ — спектральные коэффициенты излучения и поглощения плазмы; Ω — единичный вектор в направлении распространения квантов (рис. 1). Если собственным излучением плазмы по сравнению с внешним можно пренебречь (при использовании в качестве источника внешнего излучения оптических квантовых генераторов это условие для большинства реальных плазм легко выполняется), то решение уравнения (1) запишется в виде

$$I_\nu(a) = I_\nu(0) e^{-\int_0^a \kappa_\nu(s) ds} = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu}, \quad (2)$$

$$\tau_\nu = \int_0^a \kappa_\nu(s) ds,$$

где τ — оптическая толщина плазмы в данном направлении. Таким образом, измеряя интенсивности сигналов, прошедших вдоль различных направлений, можно определить оптические толщины плазмы вдоль этих направлений:

$$\tau_v(s) = \int_0^a \kappa_v(s) ds = - \ln \frac{I_v(s)}{I_v(0)}. \quad (3)$$

Если, далее, имеется и известна симметрия объекта, то из полученных данных о $\tau_v(s)$ в принципе может быть рассчитано пространственное распределение спектрального показателя поглощения плазмы.

Наиболее распространенным в практике и в то же время наиболее удобным для обработки является случай цилиндрической симметрии плазмы (рис. 2). В этом случае обычно измеряется ослабление излучения, прошедшего вдоль заданной хорды. Если расположить оси координат таким образом, чтобы ось oy совпадала с направлением светового потока, а ось ox располагалась поперек этого направления, то экспериментально

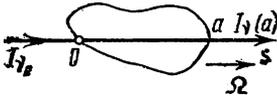


Рис. 1. Схема исследования плазмы

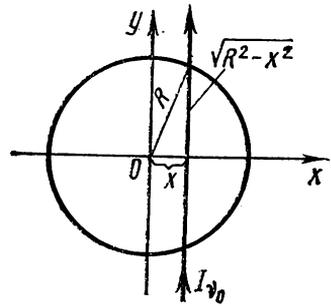


Рис. 2. Плазменный цилиндр

определяется «поперечное распределение» мощности прошедшего через плазму излучения $I_v(x)$, а отсюда с помощью соотношения (3) — поперечное распределение оптической толщины плазменного цилиндра. Поскольку в $\tau_v(x)$ вносит вклад поглощение от различных элементов, расположенных вдоль по длине хорды, то интегральное уравнение

$$\tau_v(x) = 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \kappa_v(r) dy, \quad (4)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

связывает наблюдаемое поперечное распределение $\tau_v(x)$ с реальным распределением $\kappa_v(r)$, и его решение дает искомое пространственное распределение показателя поглощения.

Рассмотрим теперь собственное излучение плазмы. Для его анализа также необходимо решать уравнение переноса излучения (1), которое позволяет рассчитать интенсивность, излучаемую плазмой на данной частоте, причем излучение может принадлежать как к линейчатому, так и сплошному спектру. Дальнейшее существенно зависит от того, является ли плазма для данной частоты оптически прозрачной или нет. Оптически прозрачной для данной частоты называется такая плазма, оптическая толщина которой

$$\tau_\nu(a) \ll 1. \quad (5)$$

В этом случае в уравнении переноса излучения можно пренебречь вторым слагаемым, и его решение записать в виде

$$I_\nu(x) = 2 \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \varepsilon_\nu(r) dy, \quad (6)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, интенсивность излучаемого в данном направлении света просто складывается из интенсивностей, излучаемых всеми различными элементами плазмы вдоль данного направления, т. е. определяется пространственным распределением лучеиспускательной способности плазмы. Так же как и в предыдущем примере, уравнение (6) связывает наблюдаемое поперечное распределение спектральной интенсивности $I_\nu(x)$ с реальным радиальным распределением интенсивности излучения $\varepsilon_\nu(r)$. Нетрудно видеть, что уравнение (6) совпадает с уравнением (4), т. е. также является интегральным уравнением Абеля.

Если речь идет об излучении спектральной линии, то очень важно знать не столько ее абсолютную интенсивность, сколько контур линии, т. е. относительное распределение интенсивности по частотам в спектре линии. Важнейшей характеристикой спектральной линии при этом служит ее полуширина, т. е. частотный интервал, внутри которого интенсивность превышает половину от своего максимального значения в центре линии. Радиальное распределение контура спектральной линии можно получить, решая уравнение (6) для каждой частоты в спектре линии. Однако такая процедура весьма громоздка и сложна. Поэтому используются некоторые приближенные методы анализа. Так, например, можно показать [2], что в случае доплеровского контура, когда уширение линии связано с тепловым движением излучающих частиц (атомов или ионов), справедливо следующее уравнение:

$$I(x) [\Delta\nu(x)]^2 = 2 \int_{0^*}^{\sqrt{R^2-x^2}} \varepsilon(r) [\Delta\nu(r)] dy, \quad (7)$$

где $\Delta\nu(r)$ — истинная полуширина линии, излучаемой данным элементом плазмы; $\Delta\nu(x)$ — полуширина линии, наблюдаемой на прицельном расстоянии x ; $I(x)$ и $\varepsilon(r)$ — распределение полной мощности излучения линии по всем частотам

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu. \quad (8)$$

Таким образом, если определить радиальное распределение $\varepsilon(r)$, то с помощью уравнения (7) можно найти искомое радиальное распределение полуширины линии.

Определение радиального распределения коэффициента поглощения $\kappa(r)$, лучеиспускательной способности $\varepsilon(r)$ и других характеризующих излучение плазмы величин обычно интересно не столько само по себе, сколько потому, что оно позволяет рассчитать распределение таких важнейших характеристик плазмы, как температура и концентрация различных компонент плазмы (электроны и ионы различного сорта, возбужденные атомы). Так, например, если состояние плазмы близко к термодинамически равновесному, то концентрации возбужденных атомов распределены по закону Больцмана. Интенсивность излучения линии прямо пропорциональна числу атомов, находящихся в соответствующем возбужденном состоянии, т. е.

$$I_{\nu_1} \sim h \nu_1 e^{-\frac{E_1}{kT}}, \quad (9)$$

где ν_1 — частота, соответствующая переходу с верхнего возбужденного уровня с энергией возбуждения E_1 ; T — температура электронов плазмы; k — постоянная Больцмана; h — постоянная Планка. Таким образом, если взять отношение интенсивностей двух спектральных линий, то окажется, что [3, 5, 6]

$$\frac{I_{\nu_1}}{I_{\nu_2}} \sim \frac{\nu_1}{\nu_2} e^{-\frac{E_1 - E_2}{kT}}, \quad (10)$$

т. е. по радиальному распределению интенсивности спектральных линий можно определить радиальное распределение электронной температуры $T(r)$.

Показатель поглощения $\kappa_{\nu}(r)$ обычно является довольно сложной функцией температуры и концентрации заряженных частиц [1]. Однако вид этой зависимости обычно известен, поэтому при известном законе $T(r)$, исходя из зависимости $\kappa_{\nu}(r)$, может быть рассчитано радиальное распределение концентрации заряженных частиц.

Точно так же, если спектральная линия уширена вследствие эффекта Доплера, то по распределению полуширины ионной спектральной линии можно рассчитать радиальное распределение температуры ионов. Если же спектральная линия уширена вслед-

ствии эффекта Штарка в электрическом поле взаимодействующих с данной излучающей частицей всех остальных частиц плазмы, то по полуширине контура спектральной линии [3] может быть определена концентрация заряженных частиц.

Таким образом, круг задач, приводящих к необходимости решения уравнений типа (4), весьма широк. Поэтому важно нахождение методов решения подобных уравнений. Известно, что уравнение Абеля (4) допускает точное решение (преобразование Абеля)

$$\kappa(r) = - \frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{\tau'(x) dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}. \quad (11)$$

Однако использование этого точного решения обычно невозможно по следующей причине. В выражение (11) входит производная по координате $\tau'(x)$, вследствие чего оно оказывается чрезвычайно чувствительным к разбросу экспериментальных точек, вызванному погрешностью измерений. Поэтому обычно либо необходимо провести предварительное «сглаживание» экспериментальных кривых, либо с помощью численных методов решать непосредственно уравнение (4).

§ 3. Численный метод решения уравнения Абеля

Рассмотрим численный метод решения уравнения Абеля на примере определения радиального распределения коэффициента поглощения в оптически плотной плазме.

Рассмотрим цилиндрический оптически плотный плазменный столб с радиусом R (см. рис. 2). Оптическая толщина τ по лучу зрения x с учетом цилиндрической симметрии записывается так (см. (4)):

$$\tau(x) = 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \kappa(\sqrt{x^2 + y^2}) dy, \quad (12)$$

где $\kappa(r)$ — коэффициент поглощения плазмы на радиусе r , причем $\tau|_{x=R} = 0$.

По условию задачи из эксперимента известна оптическая толщина $\tau(x)$, где x изменяется от 0 до R . Требуется найти $\kappa(r)$.

Предлагаемый метод позволяет найти радиальное распределение коэффициента поглощения без использования преобразования Абеля (11). Точность метода оценивается в 3—4% [4].

Разобьем плазменный столб на $N \geq 3$ колец с радиусами (рис. 3)

$$R = r_1 > r_2 > r_3 > \dots > r_N = 0. \quad (13)$$

Примем, что внутри кольца $r_{k+1} > r > r_k$ коэффициент поглощения $\kappa(r)$ изменяется линейно, т. е. аппроксимируем реальное поведение $\kappa(r)$ отрезком прямой

$$\kappa(r) \Big|_{r_{k+1} > r > r_k} = \frac{\kappa_k - \kappa_{k+1}}{r_k - r_{k+1}} (r - r_{k+1}) + \kappa_{k+1}, \quad (14)$$

где $\kappa_k = \kappa(r_k)$ и $\kappa_{k+1} = \kappa(r_{k+1})$ — значения $\kappa(r)$ на концах отрезка $[r_{k+1}, r_k]$.

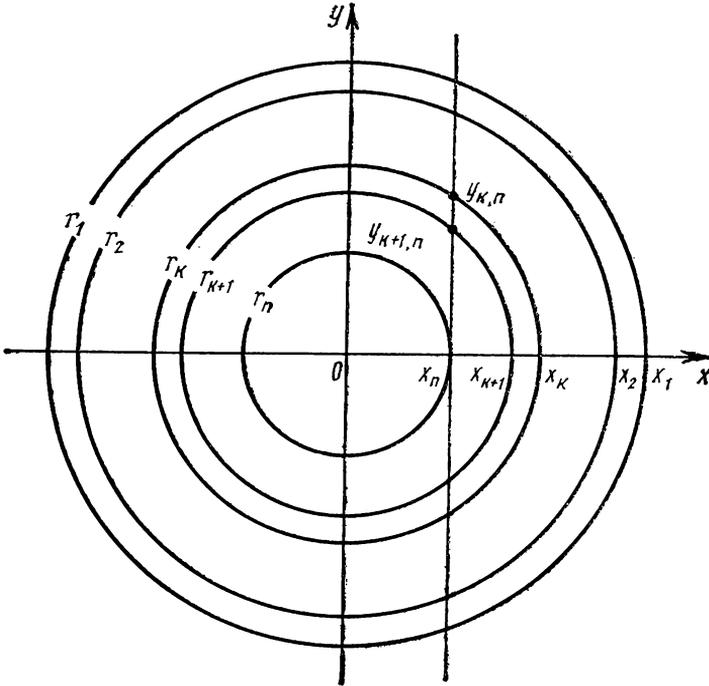


Рис. 3. Метод расчета коэффициента поглощения

Заменяя интеграл, стоящий в уравнении (12), суммой интегралов по кольцам, запишем оптическую толщину плазменного столба по лучу зрения x_n :

$$\tau(x_n) = \tau_n = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \int_{y_{k+1,n}}^{y_{k,n}} \kappa(\sqrt{x_n^2 + y^2}) dy, \quad (15)$$

где

$$y_{i,j} = \sqrt{r_i^2 - x_j^2} \quad (i \leq j). \quad (16)$$

Подставляя аппроксимацию (14) в соотношение (15) и произведя интегрирование, получим систему уравнений

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n-1} [A_{k,n} \kappa_k + (2B_{k,n} - A_{k,n}) \kappa_{k+1}], \quad n = 2, 3, \dots, N, \quad (17)$$

где

$$B_{k,n} = y_{k,n} - y_{k+1,n}, \quad (18)$$

$$A_{k,n} = \left\{ \left[y \sqrt{y^2 + x_n^2} + x_n^2 \ln \left(y + \sqrt{y^2 + x_n^2} \right) \right] \Big|_{y_{k+1,n}}^{y_{k,n}} - 2r_{k+1} B_{k,n} \right\} \frac{1}{r_k - r_{k+1}} \quad (n < N). \quad (19)$$

Для $n = N$

$$A_{k,N} = \left\{ \left[y \sqrt{y^2 + x_N^2} + x_N^2 \ln \left(y + \sqrt{y^2 + x_N^2} \right) \right] \Big|_{y_{k+1,N}}^{y_{k,N}} - 2r_{k+1} B_{k,N} \right\} \frac{1}{r_k - r_{k+1}}.$$

Легко видеть, что система уравнений (17) — треугольного вида.

Из физических соображений полагаем на границе плазменного столба $\kappa|_{r=r_1}(r) = 0$, т. е. $\kappa_1 = 0$. Тогда

$$\tau_2 = A_{12} \kappa_1 + (2B_{12} - A_{12}) \kappa_2, \quad (20)$$

$$\kappa_2 = \frac{\tau_2}{2B_{12} - A_{12}}.$$

Решение системы уравнения (17) для $3 \leq n \leq N$ записывается следующим образом:

$$\kappa_n = \left\{ \tau_n - \sum_{k=1}^{n-2} [A_{k,n} \kappa_k + (2B_{k,n} - A_{k,n}) \kappa_{k+1}] - A_{n-1} \kappa_{n-1} \right\} \frac{1}{2B_{n-1,n} - A_{n-1,n}}. \quad (21)$$

§ 4. Упражнения

1. Дано распределение оптической толщины плазменного столба по лучу зрения

$$\tau(x) = a^2 - \frac{x^2}{b^2}; \quad R = ab.$$

Найти радиальное распределение коэффициента поглощения, используя:

- 1) преобразование Абеля (11);
- 2) численный метод решения уравнения Абеля.

Сравнить точное решение $\kappa p(r)$ с численным $\kappa(r)$:

$$\begin{aligned} \kappa p(r) &= -\frac{1}{\pi} \int_r^{ab} \frac{\tau'(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = \frac{2}{b^2 \pi} \int_r^{ab} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \\ &= \frac{2}{b^2 \pi} \sqrt{x^2 - r^2} \Big|_r^{ab} = \frac{2}{b^2 \pi} \sqrt{a^2 b^2 - r^2}. \end{aligned}$$

В программе делаются следующие изменения:

«ВМ» Щ «ЗАП» Т(X1) = описание функций оптической толщины;

XP(R1) = точное решение;

RO = описание граничного радиуса;

NO = m — число точек разбиения при численном решении;

R[m]; X[m]; A[m] — рабочие массивы.

Построить график $\tau(x)$; $\kappa p(r)$; $\kappa(r)$.

2. Задано радиальное распределение коэффициента поглощения

$$\kappa p(r) = a; R = b.$$

Вычислить распределение оптической толщины по лучу зрения $\tau(x)$ (формула (12)), а затем найти распределение $\kappa(r)$ численным методом и сравнить с заданным:

$$\tau(x) = 2 \int_0^{\sqrt{b^2 - x^2}} a dy = 2a \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Замены:

«ВМ» Щ «ЗАП» Т(X1) =

XP(R1) = см. упр. 1'

RO =

NO = m ; R[m]; X[m]; A[m].

Построить графики $\kappa p(r)$; $\tau(x)$; $\kappa(r)$.

Объяснить различие между $\kappa p(r)$ и $\kappa(r)$ около границы столба.

3. Задано радиальное распределение коэффициента поглощения

$$\kappa p(r) = a - r; R = a.$$

Найти распределение оптической толщины по лучу зрения, а затем распределение $\kappa(r)$ численным методом и сравнить с заданным:

$$\tau(x) = 2 \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (a - \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 2a \sqrt{a^2 - x^2} -$$

$$\begin{aligned}
 & -y \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} - x^2 \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\
 & = a \sqrt{a^2 - x^2} - x^2 [\ln \sqrt{a^2 - x^2} + a] - \ln x.
 \end{aligned}$$

Построить графики $\kappa p(r)$; $\tau(x)$; $\kappa(r)$. Объяснить поведение расчетных значений $\kappa p(r)$; $\tau(x)$ при $x, r=0$.

4. Задано радиальное распределение коэффициента поглощения

$$\kappa p(r) = -r^2 + 2r; R = 2.$$

Найти распределение $\tau(x)$ и численное решение $\kappa(r)$:

$$\begin{aligned}
 \tau(x) &= 2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (2\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2) dy = \\
 &= 4\sqrt{4-x^2} + 2x^2 [\ln(\sqrt{4-x^2} + 2) - \ln x] - \\
 &\quad - 2x^2 \sqrt{4-x^2} - \frac{2}{3} (\sqrt{4-x^2})^3.
 \end{aligned}$$

Замены:

«ВМ» Ш «ЗАП» $T(X1) = \sqrt{(4-X1 \uparrow 2) \times 4 + 2 \times X1 \uparrow 2} \times (\text{LN}(\sqrt{(4-X1 \uparrow 2) + 2}) - \text{LN}(X1)) - 2 \times X1 \uparrow 2 \times \sqrt{(4-X1 \uparrow 2)} - 2/3 \times (\sqrt{(4-X1 \uparrow 2)}) \uparrow 3$; $XP(R1) = -R1 \uparrow 2 + 2 \times R1$; $RO=2$; $NO=21$; $R[21]$; $X[21]$; $A[21]$.

Построить графики $\kappa p(r)$; $\tau(x)$; $\kappa(r)$.

Объяснить особенности счета при $x, r=0$.

5. Задано поперечное распределение относительной интенсивности спектральных линий сильноточного импульсного разряда $I_1(x)/I_2(x)$. Определить радиальное распределение температуры в разряде по соотношению $T(r) = k \ln \frac{\epsilon_1(r)}{\epsilon_2(r)}$. Коэффициент k задается.

6. Задано поперечное распределение интенсивности $I_1(x)$ прошедшего через плазму лазерного излучения — измеряется в задаче «Динамика и излучение сильноточного импульсного разряда». Найти радиальное распределение коэффициента поглощения.

ПРОГРАММА СЧЕТА

```

''''6.''ДЛЯ''N=1''Ш''1''ДО''NO''ВЫП''(R[N]:=RO-RO*((N-1)/(NO-1
))) ;X[1]:=O;N=1;П.N=N+1;K:=O;Б.K=K+1;B:=V(R[K]↑2-R[N]↑
2);B1:=V(R[K+1]↑2-R[N]↑2);''Е''N=NO''ТО''(''НА''Г);A[K]=(F
(B,B1,R[N])-2×R[K+1]×(B-B1))/(R[K]-R[K+1]);''НА''И;Г.
A[K]=(Ф(B,B1)-2×R[K+1]×(B-B1))/(R[K]-R[K+1]);И.''Е''K
<N-1''ТО''(НА''Б);''Е''N=2''ТО''(X[N]=T(R[N])/(2×(B-B1))-A
([K]);''НА''L);X[N]=(T(R[N])-Σ(J=1,N-2,A[J]×X[J])+2×(V

```

$$\begin{aligned}
 & (R[J]\uparrow^2 - R[N]\uparrow^2) - \sqrt{(R[J+1]\uparrow^2 - R[N]\uparrow^2)} - A[J] \times X[J+1] - A \\
 & [N-1] \times X[N-1]) / (2 \times (B-B1) - A[N-1]); L. "ВЫБ" "ТА" I, R[N], T \\
 & (R[N]), X[N], XP(R[N]); "E" N < NO "ТО" ("НА" П) "ИН" ("СТОП") \\
 & "ГДЕ" Ф(Z, Y) = Z\uparrow^2 - Y\uparrow^2; F(U, V, W) = U \times \sqrt{(U\uparrow^2 + W\uparrow^2)} - U \times \sqrt{(V\uparrow^2 + W \\
 & \uparrow^2)} + W\uparrow^2 \times \text{LN}((U + \sqrt{(U\uparrow^2 + W\uparrow^2)}) / (U + \sqrt{(U\uparrow^2 + W\uparrow^2)})); Ш "КО"
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966, гл. II, V.
2. Кузнецов Э. И., Щеглов Д. А. Методы диагностики высокотемпературной плазмы. М., Атомиздат, 1974, гл. I.
3. Подгорный И. М. Лекции по диагностике плазмы. М., Атомиздат, 1968, гл. III, IV.
4. Колобова Г. А. Определение радиального распределения коэффициентов поглощения и излучения в оптически плотной плазме. — «Изв. высш. учеб. заведений. Физика», 1967, № 12, с. 75—80.
5. Методы исследования плазмы. Под ред. В. Лохте-Хольтгрёвена. М., «Мир», 1971.
6. Диагностика плазмы. Под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда. М., «Мир», 1967.

9. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУДЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН В АКТИВНОМ ПЛОСКОМ СЛОЕ

Решаются нелинейные уравнения дискретной модели активного плоского слоя двухуровневых атомов или молекул, находящихся при отрицательной температуре. Вычисляется распределение амплитуды электромагнитного поля вдоль системы, возникающее в результате интерференции прямой и обратной волн. Рассматривается взаимодействие встречных волн в неоднородном слое.

§ 1. Введение

Для усиления и генерации электромагнитных колебаний и волн сверхвысоких частот и оптического диапазона часто используются протяженные активные среды, линейные размеры которых гораздо больше длины волны. Потери в этих средах зависят от амплитуды и содержат отрицательную линейную, а также положительную нелинейную части. Волна малой амплитуды, возбужденная на входе активного участка, усиливается при распространении вдоль слоя. После достижения некоторого уровня амплитуды усиление насыщается и энергия переходит во встречную волну. Распространение встречных волн характеризуется сложной перекачкой энергии между ними.

Особенности распространения и взаимодействия прямой и встречной волн удобно анализировать на примере активного плоского слоя — среды, однородной и бесконечно протяженной в поперечном направлении. В продольном направлении ее свойства могут

меняться. Меняются распределенные проводимость и диэлектрическая проницаемость.

При сложном изменении свойств среды в продольном направлении и достаточно большой амплитуде волнового процесса приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз, обычно используемое в теории, оказывается непригодным. Необходимо переходить к непосредственному решению нелинейного волнового уравнения численными методами, используя дискретные модели сред. Характерным примером такой задачи является рассматриваемое ниже взаимодействие плоских волн в активном лазерном слое.

§ 2. Уравнения стационарных колебаний

Активный лазерный слой представляет собой совокупность атомов или молекул, находящихся под действием внешней накачки. В среде может быть создана отрицательная температура, характеризующаяся возрастанием заселенности уровней при увеличении их номера. Для описания активных свойств пригодна двухуровневая модель вещества. Заселенность верхнего уровня определяется накачкой и превышает заселенность нижнего уровня. При переходе с верхнего уровня на нижний возникает спонтанное и вынужденное излучение. Спектральная линия спонтанного излучения достаточно широка. Спектр вынужденного излучения определяется спектральной линией вынуждающего поля или условиями генерации в активном слое. Он может быть гораздо уже спектра спонтанного излучения отдельных молекул.

Будем считать, что электромагнитное поле содержит много квантов, имеет бесконечно узкий спектр и описывается классическими формулами. Пренебрежем действием кулоновских сил и столкновениями молекул. Их взаимодействие происходит через поле излучения.

Предположим, что двухуровневые молекулы обладают дипольными моментами. В уравнения Максвелла входит поляризация или дипольный момент единицы объема $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. Если исключить напряженность магнитного поля, то для вихревой составляющей электрического поля можно записать уравнение:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где ϵ , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Вещество описывается квантовыми формулами. Вектор поляризации выражается через недиагональные элементы матрицы дипольных моментов $\hat{\mathbf{d}}$ и матрицы плотности $\hat{\rho}$ [1]:

$$\mathbf{P} = \text{Sp}(\hat{\mathbf{d}} \hat{\rho}) = \mathbf{d}_{12} \rho_{21} - \mathbf{d}_{21} \rho_{12}. \quad (2)$$

Уравнения для компонент матрицы плотности имеют вид

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} - i \omega_0 \rho_{12} + \frac{1}{T_2} \rho_{12} = \frac{i}{\hbar} (\mathbf{E} \mathbf{d}_{21}) N \rho_{12}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (N - N_0) = \frac{2i}{\hbar} [(\mathbf{E} \mathbf{d}_{21}) \rho_{12} - (\mathbf{E}^* \mathbf{d}_{21}) \rho_{21}],$$

где $N = \rho_{22} - \rho_{11}$ — разность заселенностей уровней; ω_0 — частота перехода; N_0 — число активных молекул единицы объема в отсутствие поля; T_1 — продольное время релаксации (время релаксации заселенности); T_2 — поперечное время релаксации (время потери фазы).

Для нахождения режима стационарных колебаний полагается, что величины ρ_{12} и \mathbf{E} гармонически изменяются во времени:

$$\rho_{12} = \sigma(\mathbf{r}) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + \mathbf{e}^*(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (4)$$

Исключая из уравнений (1)–(3) переменные σ и N , перейдем к уравнению стационарных колебаний

$$\text{rot rot } \mathbf{e} - k^2 \mathbf{e} = \frac{i \alpha k^2 \frac{\mathbf{d}^*}{d} \left(\frac{\mathbf{d}}{d} \cdot \mathbf{e} \right)}{1 + \beta^2 \left| \left(\frac{\mathbf{d}}{d} \cdot \mathbf{e} \right) \right|^2}. \quad (5)$$

В уравнении введены следующие обозначения: $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$, $\Delta \omega = \omega - \omega_0$,

$$\alpha = \frac{T_2 N_0 |\mathbf{d}|^2 (1 - iT_2 \Delta \omega)}{\hbar [1 + T_2^2 (\Delta \omega)^2]}, \quad \beta^2 = \frac{4T_1 T_2 |\mathbf{d}|^2}{\hbar^2 [1 - T_2^2 (\Delta \omega)^2]}. \quad (6)$$

При рассмотрении плоского слоя обычно полагают $\mathbf{e} \parallel \mathbf{d}$. Если переменные зависят от координаты z , уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + k^2 F = -i \alpha k^2 \frac{F}{1 + FF^*}, \quad (7)$$

где введена безразмерная переменная $F = \beta e$.

Объемные потери энергии в слое учитываются введением в уравнение (7) дополнительного члена $ik^2 g F$:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + k^2 F = -i \alpha k^2 \frac{F}{1 + FF^*} + ik^2 g F. \quad (8)$$

Если параметр α мал, решение (8) ищется в виде двух взаимодействующих волн с медленно меняющимися комплексными амплитудами $C_1(z)$ и $C_2(z)$:

$$F = C_1(z) e^{-ikz} + C_2(z) e^{ikz}. \quad (9)$$

Аналитическое решение уравнения (8) позволяет построить фазовую плоскость переменных $m_1 = |C_1|^2$ и $m_2 = |C_2|^2$, показанную на рис. 1. Она содержит четыре особые точки:

1. Начало координат — седло, $m_1 = m_2 = 0$.
2. Точка A — седло, $m_1 = \frac{\text{Re } \alpha}{g} - 1$, $m_2 = 0$.
3. Точка B — седло, $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{\text{Re } \alpha}{g} - 1$.
4. Точка M — центр,

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{Re } \alpha}{g} - \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\text{Re } \alpha}{g} + \frac{1}{8} \right)} \right].$$

Точки A и B относятся к постоянным в пространстве амплитуд бегущих волн, точка M относится к стоячей волне. Описанное решение справедливо при условии усиления в системе волн малых амплитуд и условии $\text{Re } \alpha/g > 1$. Если преобладают потери $\text{Re } \alpha/g < 1$,

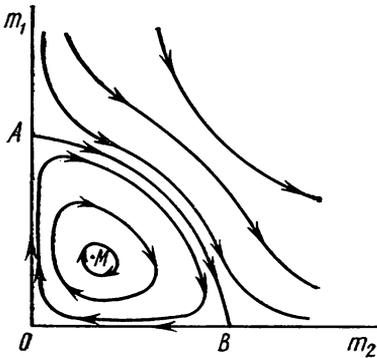


Рис. 1. Фазовая плоскость

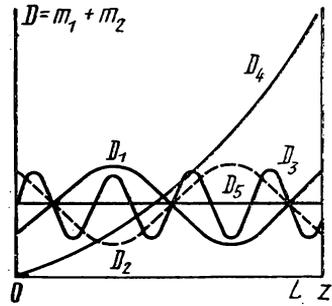


Рис. 2. Изменение энергии вдоль слоя

особые точки исчезают, кроме особой точки — начала координат.

На рис. 1 стрелками показано направление изменения координаты z . Линия OA соответствует усилению прямой волны, линия OB — усилению обратной волны. Кривая AB разделяет две области решений. Решения, лежащие вне AB , являются затухающими волнами. Затухание нелинейное, обусловлено большой амплитудой колебаний. Усиление не в состоянии компенсировать потери. Одновременно происходит взаимодействие волн [1, 2].

Внутри области OAB находятся периодические в пространстве решения. Изменение энергии поля вдоль слоя, получающееся при движении по замкнутым фазовым траекториям, показано на рис. 2. Пространственный период пульсации зависит от близости

траекторий к точке M . Для прилегающих траекторий период мал — кривая D_3 . Для внешних траекторий он велик (кривая D_1) и вблизи границы AB стремится к бесконечности.

Предположение о малости α ($\alpha \rightarrow 0$) не всегда выполняется. В ряде предельных случаев характеризующие вещество параметры T_1, T_2, N_0 и $|d|$ обеспечивают конечные значения α , сравнимые с 1. Нарушаются условия медленного изменения амплитуд $C_1(z)$ и $C_2(z)$. Траектории на рис. 1 могут пересекать линию AB . Для решения уравнения (8) следует переходить к дискретной модели и численному методу анализа.

§ 3. Дискретная модель в численный метод решения

Активный слой разбивается на N равноотстоящих сечений. Уравнение (8) для последовательности сечений, расстояние между которыми Δz гораздо меньше длины волны, в разностном виде записывается следующим образом:

$$F_{n+1} - 2F_n + F_{n-1} + k^2 \Delta z^2 F_n = -i\alpha_n k^2 \Delta z^2 \frac{F_n}{1 + F_n F_n^*} + ik^2 \Delta z^2 g_n F_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (10)$$

Входящие в уравнение комплексные величины разделяются на действительные и мнимые части:

$$F_n = A_n + iB_n, \quad \alpha_n = R_n + iS_n, \quad g_n = G_n. \quad (11)$$

Вводится обозначение

$$D_n = F_n F_n^* = A_n^2 + B_n^2. \quad (12)$$

При произвольном изменении параметров R_n, S_n и G_n в зависимости от номера сечения решение должно находиться методом последовательных приближений, позволяющим удовлетворить граничным условиям с необходимой точностью. Однако он требует повышенного машинного времени, поэтому используется более простой способ решения, основанный на задании условий на одном конце. Считаются известными величины A_0, B_0 в первом сечении и величины A_1, B_1 — во втором сечении. Меняя их, можно получить условия распространения одной прямой или одной обратной волны, стоячей волны, одновременного распространения прямой и обратной волн с произвольным соотношением амплитуд.

Для задания сложного закона изменения параметров слоя в продольном направлении (величин R_n, S_n и D_n) реальное распределение заменяется ломаной линией, состоящей из M отрезков прямых. В машину вводятся числа N и M . Вводятся также значения параметров на границах отрезков прямых N_m, R_m, S_m и G_m .

Значения параметров в остальных сечениях находятся по формулам:

$$\begin{aligned} R_n &= R_m + \frac{R_{m-1} - R_m}{N_{m+1} - N_m} (n - n_m), \\ S_n &= S_m + \frac{S_{m+1} - S_m}{N_{m+1} - N_m} (n - n_m), \\ G_n &= G_m + \frac{G_{m+1} - G_m}{N_{m+1} - N_m} (n - n_m). \end{aligned} \quad (13)$$

Сдвиг фаз на ячейку $\psi = k\Delta z$, характеризующий волновой процесс, задается параметром $K = \psi^2$. Длина волны в системе без учета поправки $\lambda = 2\pi/k$ укладывается на интервале $2\pi/\psi$ ячеек.

Уравнение (10) легко преобразуется в уравнения для действительной и мнимой частей:

$$A_{n+1} = -A_{n-1} + A_n \left(\frac{KS_n}{1 + D_n} - K + 2 \right) - KB_n \left(G_n - \frac{R_n}{1 + D_n} \right), \quad (14)$$

$$B_{n+1} = -B_{n-1} + B_n \left(\frac{KS_n}{1 + D_n} - K + 2 \right) - KA_n \left(G_n - \frac{R_n}{1 + D_n} \right).$$

Амплитуды прямой и обратной волн C_1 и C_2 на входе системы связаны со значениями A_n и B_n соотношением

$$F_n = A_n + iB_n = C_1 e^{-in\psi} + C_2 e^{in\psi}, \quad (15)$$

которое преобразуется к виду

$$\begin{aligned} A_0 &= C_1 + C_2, \quad A_1 = (C_1 + C_2) \cos \psi, \\ B_0 &= 0, \quad B_1 = (C_2 - C_1) \sin \psi. \end{aligned} \quad (16)$$

§ 4. Структура программы

Вначале определяются значения параметров в первом и втором сечениях ($n=0, 1$). Затем по формуле (14) рассчитываются величины A_2 и B_2 ($n=2$). Дальнейшие вычисления по формуле (14) оформлены в виде цикла по параметру n ($n=3, 4, \dots, N$). В процессе выполнения операций внутри цикла рассчитываются величины R_n, S_n и G_n . Вычисляются и запоминаются в виде массива числа D_n . После окончания цикла числа D_n выводятся на печать. В машину вводятся числовые значения параметров N, M, A_0, B_0, A_1, B_1 и массивы чисел N_m, R_m, S_m и G_m . В цикле, вместо запоминания всего массива величин A_n и B_n , вычисляются текущие значения чисел $A_n, B_n, A_{n-1}, B_{n-1}, A_{n-2}, B_{n-2}$ с помощью вспомогательного массива.

В программе использованы следующие обозначения:

$$(n \geq 3)$$

AO → A ₀	G1 → G ₁	A [1] → A ₁ ; A _{n-2}
A1 → A ₁	NL [M] → N _m	A [2] → A ₂ ; A _{n-1}
BO → B ₀	RL [M] → R _m	A [3] → A ₃ ; A _n
B1 → B ₁	SL [M] → S _m	B [1] → B ₁ ; B _{n-2}
N → n	GL [M] → G _m	B [2] → B ₂ ; B _{n-1}
NN → N	K → K	B [3] → B ₃ ; B _n
M → m	D [M] → D _m	
MM → M	R → R _{n-1} (n ≥ 3)	
R1 → R ₁	S → S _{n-1} (n ≥ 3)	
S1 → S ₁	G → G _{n-1} (n ≥ 3)	

§ 5. Упражнения

1. Определение параметров модели. Выбрать параметр K таким, чтобы длина бегущей волны составила 10—20 ячеек модели слоя.

Выбрать конкретный вид неоднородности среды (однородный, линейный или параболический слой; прямоугольные барьеры и т. д.). Рекомендуется рассматривать слои, для которых имеются аналитические решения одномерного волнового уравнения или эквивалентного ему уравнения Шредингера [3, 4].

Задать параметры N и M в пределах $N=100-300$, $M=3-6$. Задать распределение величин R_n , G_n и S_n .

Выбрать вид поля на начальном участке слоя: прямую или обратную волну, стоячую волну. Вычислить параметры A_0 , B_0 , A_1 и B_1 . Они должны находиться в пределах 0—10.

2. Проведение вычислений. Ввести в машину ленту с программой. Ввести параметры задачи. Выбрать разрядность 4—6. Провести расчеты намеченных вариантов.

3. Оформление результатов. Построить графики изменения параметров R_n , G_n и S_n , а также соответствующих частей диэлектрической проницаемости в линейном приближении в зависимости от номера n .

Построить расчетные зависимости D_n от n . Определить амплитуду отдельных волн. В случае однородного слоя сравнить результаты с видом кривых на рис. 1, 2.

ПРОГРАММА СЧЕТА

```

''''6.R1=RL[1];S1=SL[1];G1=GL[1];A[1]=A1;B[1]=B1;D[1]=A1↑2+B1↑2;A[2]
]=--AO+A[1]×(K×S1/(1+D[1])—K+2)—K×B[1]×(G1—R1/(1+D[1]));B[2]=—BO+B
[1]×(K×S1/(1+D[1])—K+2)+K×A[1]×(G1—R1/(1+D[1]));D[2]=A[2]↑2×B[2]↑
2;''Для''N=3''Ш''1''Д0''NN''ВЫП''(''Для''M=1''Ш''1''Д0''MM—1''ВЫП''(''Е''N≤NL
[M+1]''

```

$T_0''('E''N \geq NL[M]''T_0''(R=RL[M]+(RL[M+1]-RL[M])/(NL[M+1]-NL[M]) \times (N-1-NL[M])); S=SL[M]+(SL[M+1]-SL[M])/(NL[M+1]-NL[M]) \times (N-1-NL[M]); G=GL[M]+(GL[M+1]-GL[M])/(NL[M+1]-NL[M]) \times (N-1-NL[M])); A[3]=-A[1]+A[2] \times (K \times S/(1+D[N-1])-K+2)-K \times B[2] \times (G-R/(1+D[N-1])); B[3]=-B[1]+B[2] \times (K \times S/(1+D[N-1])-K+2)+K \times A[2] \times (G-R/(1+D[N-1])); D[N]=A[3]^2+B[3]^2; A[1]=A[2]; A[2]=A[3]; B[1]=B[2]; B[2]=B[3];''ДЛЯ''N=1''Ш''4''ДО''NN-3''ВЫП''(''ВЫВ''N,[;],D[N],[;],D[N+1],[;],D[N+2],[;],D[N+3],[;],''СТР'')'ГДЕ''NN=2O$
 $O; MM=4; AO=1O; BO=O; A1=1O; B1=O; K=.2; RL[4]=1O,1O,1O,1O; NL[4]=1,1O,1O,2OO; SL[4]=O,O,O,O; GL[4]=.1,.1,.1,.1; A[3]; B[3]; D[2OO]''K0''$

ЛИТЕРАТУРА

1. Файн В. М., Ханин Я. И. Квантовая радиофизика. М., «Сов. радио», 1965.
2. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией. — «Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика», 1970, 13, № 2, с. 163—213.
3. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1965.
4. Бом Д. Квантовая теория. М., «Наука», 1965.

Специальный физический практикум, ч. 3

Зав. редакцией *Т. Г. Батенина*
Редактор *С. И. Зеленский*
Мл. редактор *В. В. Конкина*
Переплет художника *В. В. Гарбузова*
Художественный редактор *Л. В. Мухина*
Технический редактор *Г. Д. Дегтярева*
Корректоры *Л. А. Костылева,*
И. А. Большакова, С. С. Мазурская

Тематический план 1977 г. № 70

ИБ № 251

Сдано в набор 23.III 1977 г.
Подписано к печати 4.XI 1977 г.
Л-86492 Формат 60×90¹/₁₆ Бумага тип. 3
Усл. печ. л. 24,0 Уч.-изд. л. 23,50
Изд. № 3098 Зак. 99 Тираж 12 450 экз.
Цена 1 р. 10 к.

Издательство Московского университета.
Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ.
Москва, Ленинские горы

1р. 10к.



Ω СПЕЦИАЛЬНЫЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ