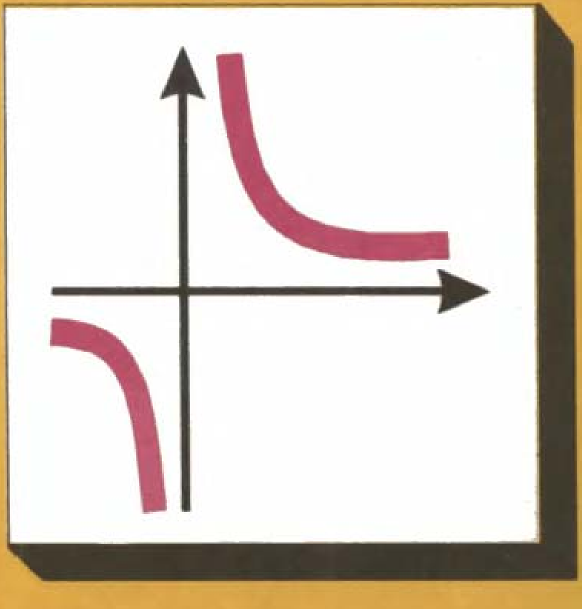
И. Кушнир

Шедевры школьной МАТЕМАТИКИ

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$$

КНИГА 1



Задачи с решениями

И. Кушнир
Шедевры школьной математики
1

И. Кушнир

Шедевры школьной МАТЕМАТИКИ

Рекомендуется лабораторией
математики
Киевского Межрегионального
института усовершенствования
учителей
им. Б. Гринченко

АСТАРТА
КИЕВ
1995

ББК 22.1
К13

Книга написана Заслуженным учителем Украины, лауреатом фонда Сороса.

В двух томах собраны более тысячи задач с решениями золотого фонда школьной и конкурсной математики (алгебра, тригонометрия, начала математического анализа, геометрия).

Для учащихся общеобразовательных школ, колледжей, гимназий, классов с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов университетов, преподавателей.

ББК 22.1

ISBN 5-7707-8248-X
ISBN 5-7707-8249-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

За многие сотни лет ученые и учителя математики накопили материал громадной педагогической ценности. Он сконцентрирован в задачах, которые без преувеличения можно отнести к золотому фонду школьной математики. Такие задачи, а также примеры, как правило, присутствуют в любой теме школьного курса. Из года в год, из задачника в задачник переходят они, демонстрируя новым поколениям образцы остроумных и обобщающих педагогических идей. Автор берет на себя смелость назвать их ***шедеврами*** школьной математики.

В данном пособии собрано более тысячи задач, где та или иная идея выделяется особенно выпукло и ярко. Двухтомник поможет учащимся систематизировать свои знания при подготовке к поступлению в высшие учебные заведения, в том числе и самого престижного уровня. Все задачи подробно решены, некоторые — несколькими способами.

Автор не настаивает на том, что в каждом из решений найден наилучший способ. Читатель при желании сможет найти его сам, ведь «...математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед» (*А. Невен*).

Дерзайте! Желаем успехов!

Глава I. ОТ ЧЕТВЕРТЫХ ДО ОДИННАДЦАТЫХ КЛАССОВ: ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. ЛОГИЧЕСКИЕ И ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

На каждой из планет некоторой солнечной системы находится астроном, который наблюдает ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Доказать, что если количество планет нечетно, то есть планета, которую никто не наблюдает.

Решение.

Применим метод математической индукции. Для трех планет утверждение очевидно. Допустим, что оно верно и для $2n - 1$ планет. Пусть есть еще и $n + 1$ планета. Обозначим через A и B ближайшие между собой планеты. Тогда астроном из A наблюдает планету B, а астроном из B — планету A. Если еще какой-нибудь астроном наблюдает планету A или B, то среди оставшихся планет есть такая, которую никто не наблюдает. Если же планеты A и B никто не наблюдает, то, «отбросив» эти две планеты, будем иметь задачу про $2n - 1$ планету.

Задача 2.

Сколькими нулями оканчивается число, полученное от умножения всех чисел от 1 до 100?

Решение.

Заметим, что $2 \cdot 5 = 10$. Так как четных чисел в этом произведении больше, чем чисел, кратных 5, то надо подсчитать количество сомножителей, кратных 5. Нетрудно видеть, что их будет 20. Но среди этих множителей есть числа 25, 75, 50, 100 — кратные 25. Поэтому всего произведений $2 \cdot 5$ будет 24. Следовательно, это произведение оканчивается 24 нулями.

Задача 3.

Для нумерации страниц учебника потребовалось 411 цифр. Сколько страниц в учебнике?

Решение.

Для нумерации страниц учебника употребили: 9 однозначных чисел — 9 цифр; все двузначные числа — 90 чисел — 180 цифр. Всеми однозначными и двузначными числами занумеровано 99 страниц и на это ушло 189 цифр. Осталось 411 − 198 = 222 цифры, которые ушли на написание 222 : 3 = 74 трехзначных чисел. В учебнике 99 + 74 = 173 страницы.

Задача 4.

Написать цифры вместо букв:

$$
\begin{array}{l|l}
\textit{абвгдс} & \textit{жзи} \\
- & \\ \cline{2-2}
\textit{мнпр} & \textit{к8л} \\
\textit{стд} & \\
\textit{уфч} & \\
\textit{шяэс} & \\
\textit{шяэс} &
\end{array}
$$

Решение.

жзи · 8 = *уфч*, отсюда *ж* = 1, *стд* − *уфч* = *шяэ*, значит, *з* = 0 или 1. Но *жзи* · *к* = *мнпр*, откуда *к* = 9 и аналогично *л* = 9. Тогда *з* = 1, а *и* = 2.

$$110768 : 112 = 989.$$

Задача 5.

Расшифровать пример на умножение

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & \text{ш} & \text{е} & \text{с} & \text{т} & \text{ь} \\
 & & & & \times & & & & & \\
 & & & & & \text{ш} & \text{е} & \text{с} & \text{т} & \text{ь} \\
 & & & & + & + & + & + & + & + \\
 & & & + & + & + & + & + & + & \\
 & & + & + & + & + & + & + & & \\
 & + & + & + & + & + & + & & & \\
 & & & & & & & & & \\
+ & + & + & + & + & \text{ш} & \text{е} & \text{с} & \text{т} & \text{ь}
\end{array}
$$

Решение.

Обозначим искомое число шесть через a, тогда число $a^2 - a = a(a-1)$ оканчивается пятью нулями и, следовательно, делится на $100000 = 5^5 \cdot 2^5$.

Так как числа a и $a - 1$ не имеют общих делителей, то одно из них делится на $2^5 = 3125$, а другое — на $2^5 = 32$.

Рассмотрим сначала случай, когда a делится на 3125, а $a - 1$ — на 32. Из записи примера сразу ясно, что $c = 0$. Так как каждое из чисел *ш0сть* и *ш0000* делится на 625, то разность этих чисел *сть* также делится на 625. Следовательно,

$$сть = 625.$$

Но число $ш0625 = 10000ш + 625$ при делении на 625 дает частное $16ш + 1$, и для того, чтобы это частное разделилось на 5, нужно, чтобы цифра $ш$ равнялась 4 или 9. При $ш = 4$ получаем число 40625, которое не удовлетворяет условию задачи, поскольку 40625 не делится на 32, при $ш = 9$ получаем число 90625, которое является решением задачи.

Второй случай рассматривается аналогично и других решений не дает.

Задача 6.

Внутри выпуклого стоугольника выбрано 30 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Стоугольник разрезан на треугольники так, что совокупность вершин всех треугольников состоит из 30 выбранных точек и 100 вершин первоначального многоугольника. Сколько имеется треугольников?

Решение.

Вычислим сумму внутренних углов всех треугольников. Углы треугольников, имеющие вершину в данной внутренней точке, в сумме составляют 360°. Так как имеется 30 таких точек, то им соответствуют углы, сумма которых равна $360° \times 30 = 10800°$. Остаются неучтенные углы, вершины которых совпадают с вершинами стоугольника. Понятно, что они составляют в сумме $180° \, (100 - 2) = 17640°$. Сумма внутренних углов одного треугольника 180°, значит, число треугольников $\frac{28440}{180} = 158$.

Задача 7.

Тысяча точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, в середине которого расположено 500 точек так, чтобы ни одни три из них не лежали на одной прямой. Многоугольники разрезают на треугольники, вершинами которых есть эти 500 точек. Сколько треугольников получится?

Решение.

Сумма внутренних углов всех треугольников равна сумме углов тысячеугольника и еще $360° \cdot 500$. Поэтому всех треугольников будет:

$$\frac{180° \cdot (1000 - 2) + 360° \cdot 500}{180} = 1998.$$

Задача 8.

Даны n различных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из них составляют всевозможные суммы с любым числом слагаемых (от 1 до n). Доказать, что из этих сумм найдется по крайней мере $\frac{n(n+1)}{2}$ попарно неравных.

Решение.

Можно считать, что числа расположены в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n$.

Рассмотрим числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$$a_n + a_1, \ a_n + a_2, \ a_n + a_3, \quad a_n + a_4, \ \ldots, \ a_n + a_{n-1};$$

$$a_n + a_{n-1} + a_1, \quad a_n + a_{n-1} + a_2, \ldots, a_n + a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Продолжая составление суммы подобным способом, получим:

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k} + a_1, \ a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k} + a_2 \ldots,$$

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k} + a_{n-k-1} \text{ и т.д.}$$

Наконец: $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1$.

Очевидно, что числа возрастают, и, следовательно, различны. Количество этих чисел

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n\frac{(n+1)}{2}$$

соответствует требованиям задачи.

Замечание: первые n натуральных чисел составляют пример положительных различных чисел, из которых нельзя составить более чем $n \frac{(n+1)}{2}$ различных сумм.

Задача 9.

Человек пил кофе следующим образом: сначала он наливал полную чашку кофе, выпивал некоторую ее часть, затем доверху наливал молоко, выпивал часть смеси, снова наливал молоко доверху и т.д. Каждый раз он выпивал вдвое меньше предыдущего, кроме последнего раза, когда он выпил чашку до дна. Чего он выпил больше — кофе или молока?

Решение.

Ясно, что в результате человек выпил ровно одну чашку кофе, а молока выпил столько, сколько долил. Если в первый раз он выпил, а значит, и долил p-ю часть чашки, то во второй раз он долил часть $\frac{p}{2}$ и т.д. Если всю операцию он проделал n раз, то молока долито

$$p + \frac{p}{2} + \frac{p}{4} + \cdots + \frac{p}{2^{n-1}} = \frac{p}{2^{n-1}}(1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) =$$

$$= \frac{p}{2^{n-1}}(2^n - 1).$$

Поэтому молока будет выпито меньше, чем кофе, если $p < 2^{n-1}/(2^n - 1)$.

Задача 10.

Разделить прямую на 5 равных частей.

Решение.

Разделим прямую на части следующим образом. Первая часть состоит из всех полуинтервалов вида $[5k, 5k+1)$, вторая — из полуинтервалов $[5k+1, 5k+2)$, третья — $[5k+2, 5k+3)$, четвертая — $[5k+3, 5k+4)$, пятая — $[5k+4, 5k+5)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Хотя каждая из частей не является связной, их равенство очевидно.

Задача 11.

На всемирном фестивале молодежи встретились 6 делегатов. Выяснилось, что среди любых трех из них двое могут объясниться между собой на каком-нибудь языке. Докажите, что тогда найдется тройка делегатов, каждый из которых может объясниться с каждым.

Решение.

Пусть делегат A может объясниться с тремя другими делегатами, назовем их B, C, D. Среди последних, по крайней мере двое, также могут объясниться между собой, скажем, B и C. Тогда A, B, C — искомая тройка. Если же A может объясниться не более, чем с двумя другими делегатами, то найдутся три делегата E, F, G, ни с одним из которых A не может говорить. Тогда E, F, G образуют искомую тройку. (Доказать!)

Задача 12.

Восстановить результат сложения в записи

$$\begin{array}{rccccc} & f & o & r & t & y \\ + & & & & & \\ & & & t & e & n \\ + & & & & & \\ & & & t & e & n \\ \hline & s & i & x & t & y \end{array},$$

где каждая буква обозначает цифру, причем разными буквами обозначены разные цифры.

Решение.

$$29786 + 850 + 850 = 31486.$$

Докажем сначала, что

$$n = 0; \quad e = 5; \quad o = 9; \quad i = 1; \quad s = f + 1.$$

Далее, $r + 2t + 1 > 21$, откуда $2t > 20 - r$. Поскольку наиболее возможное решение для r есть 8, то $2t > 12$, $t > 6$, то есть t равняется 7 или 8. Если $t = 7$, то $r > 20 - 2t = 6$ и $r = 8$ есть единственно возможное значение для r. Но в этом случае $x = 3$ и среди неизвестных цифр нет двух последовательных, что возможно, так как $s = t + 1$. Если $t = 8$, то r

может принимать два значения — 6 или 7. При $r = 6$ среди неизвестных цифр также нет двух последовательных. Остается случай $t = 8$, $r = 7$.

Задача 13.

Имеются две кучи камней. Игра состоит в том, что каждый из двух игроков по очереди забирают любое число камней только из одной кучи. Выигрывает тот, кто берет последним. Найти способ игры, обеспечивающий выигрыш тому игроку, который может либо начинать игру, либо предоставить первый ход своему партнеру.

Решение.

Каждым ходом нужно брать камни из той кучи, которая больше, так, чтобы обе кучи становились одинаковыми. Если в начале игры обе кучи содержали равное количество камней, следует передать первый ход партнеру.

Задача 14.

Из картона вырезано два одинаковых правильных восьмиугольника. В вершинах одного из них поставлены по порядку (против часовой стрелки) числа от одного до восьми. Можно ли расставить в вершинах другого восьмиугольника те же числа так, чтобы при любом наложении второй фигуры на первую какая-нибудь вершина попадала в вершину с тем же номером.

Решение.

Допустим, что это возможно. Наложим второй восьмиугольник так, чтобы единицы совпадали. Пусть при этом против цифры i на верхнем восьмиугольнике на нижнем находится цифра a_i ($a_1 = 1, 2, \ldots, 8$). Для того, чтобы совместить цифры a_i верхнего и нижнего восьмиугольников, можно повернуть верхний восьмиугольник против часовой стрелки на угол $b_i \cdot 45°$, где

$$b_i = \begin{cases} i - a_i, & \text{если } i > a_i, \\ i - a_i + 8, & \text{если } i \leqslant a_i. \end{cases}$$

Докажите, что b_i принимает все значения 1, 2, ... , 8. Складывая b_i, получим

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_8 = (1 + 2 + \ldots + 8) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_8) + 8k,$$

где k — какое-нибудь целое число. Но

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_8 = b_1 + b_2 + \ldots + b_8 = 1 + 2 + \ldots + 8 = 36.$$

Так как 36 не делится на 8, то приходим к противоречию.

Задача 15.

Восстановите числа в примере:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & * & 1 & * & * \\
 & \times & & & & \\
 & & & 1 & * & * \\
\hline
 & & * & 1 & * & * \\
* & * & * & 1 & * & \\
* & * & * & 1 & & \\
\hline
8 & * & * & 4 & * & *
\end{array}$$

Решение.

По пятой строке имеем: последняя цифра первой строки 1, вторая цифра в обоих множителях может быть только 9, иначе не получится 1 в четвертой строке. Последняя цифра второго множителя только 1. Первую цифру подбираем проверкой. Это только 4. Итак, имеем:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 4 & 1 & 9 & 1 \\
 & \times & & & & \\
 & & & 1 & 9 & 1 \\
\hline
 & & 4 & 1 & 9 & 1 \\
3 & 7 & 7 & 1 & 9 & \\
4 & 1 & 9 & 1 & & \\
\hline
8 & 0 & 0 & 4 & 8 & 1
\end{array}$$

Задача 16.

Найти все числа, которые уменьшаются в 12 раз при зачеркивании в них последней цифры.

Решение.

Искомое число $y = 10x + a$, где a — число единиц, а x — десятков. По условию задачи $10x + a = 12$, $2x = a$, $1 \leqslant a \leqslant 9$, a — четно. Значит, если $a = 2$, то $x = 1$, а $y = 12$;

если $a = 4$, то $x = 2$, а $y = 24$;

если $a = 6$, то $x = 3$, а $y = 36$;

если $a = 8$, то $x = 4$, а $y = 48$.

Задача 17.

На столе лежит 80 одинаковых по виду металлических шариков. Один из них несколько легче остальных. Как найти этот шарик не более чем четырьмя взвешиваниями на чашечных весах без гирь?

Решение.

Все шары сначала разделим на три части по 27, 27 и 26 шаров и на весы положим по 27 шаров. Если одна из чашек весов легче, то там и более легкий шар. Если чашки весов будут в равновесии, то более легкий шар в партии, где 26 шаров. Это первый этап. Далее берем часть шаров, содержащую более легкий шар. В первом случае, т.е. когда более легкий шар содержится в партии из 27 шаров, дальнейшая схема взвешивания такая: *а*) 9, 9, 9; *б*) 3, 3, 3; *в*) 1, 1, 1.

Во втором случае, т.е. когда легкий шар находится среди 26 шаров, на втором этапе шары распределяют на три части так: 9, 9, 8. на весы кладут по 9 шаров. Далее рассуждают аналогично описанному вначале. Во всех случаях более легкий шар находится четырьмя взвешиваниями.

Задача 18.

Мать поделила между сыновьями груши. Первому выдала половину всех груш и еще половину груши, второму — половину оставшегося и еще половину груши, а третьему — половину того, что осталось и еще половину груши. Ни одной груши при этом не нужно было разрезать. Сколько груш получил каждый сын, если мать раздала все груши?

Решение.

Последний сын получил одну грушу. Это была половина остатка и еще полгруши, поэтому второй остаток — одна груша. Второй сын получил две груши. А для первого сына половина остатка и еще полгруши — это 4 груши. Ясно, что у матери было 7 груш.

Задача 19.

Доказать, что двух- и пятикопеечными монетами можно разменять 1 рубль большим количеством способов, чем трех- и пятикопеечными.

Решение.

Рассмотрим числа 100, 95, 90, ..., 10, 5, 0, которые можно получить, отняв от 100 $5k$. Среди них больше тех, что делятся на 2, чем тех, которые делятся на 3. Эту задачу можно решить и так. Неопределенное уравнение $2x + 5y = 100$.

Задача 20.

Из трех рабочих первый и третий произвели продукции в 2 раза больше, чем второй, а второй и третий — в 3 раза больше, чем первый. Кто из трех рабочих заработал больше?

Решение.

Обозначим объем продукции, произведенной первым, вторым и третьим рабочими соответственно x, y, z. Тогда имеем: $x + z = 2y$; $y + z = 3x$. вычтем из первого уравнения второе: $x - y = 2y - 3x$, т.е. $4x = 3y$.

Следовательно, $x = 0{,}75\,y$, т.е. $y > x$; $z = -y + 2.25y$. Значит, $z > y > x$. Итак, больше всех заработал третий рабочий, затем — второй и меньше всех — первый рабочий.

Задача 21.

В ящике лежит 100 шариков: 30 красных, 30 синих, 30 зеленых, остальные — белые и черные. Какое наименьшее количество шариков нужно вынуть, чтобы достать 20 шариков какого-либо цвета?

Решение.

Решая такие задачи, полезно перефразировать предложение задачи так: какое наибольшее количество шариков можно вынуть так, чтобы при этом невозможно было достать 20 шариков одного цвета? Понятно, что среди $19 + 19 + 19 + 10 = 67$ шариков. Может не быть 20 шариков одного цвета, зато среди 68 шариков 20 одного цвета будут обязательно.

Задача 22.

В зале $p \geqslant 2$ людей. Доказать, что среди них найдется по меньшей мере 2 человека, которые имеют среди присутствующих одинаковое количество знакомых.

Решение.

Допустим, что A знаком с B, то B знаком с A. Понятно, что нельзя считать, что кто-то знакомый сам себе. Если в зале будет минимум 2 человека, которые не имеют знакомых среди присутствующих, то утверждение доказано. Пусть осталось k особ, каждая из которых может иметь $1, 2, \dots, k-1$ знакомых. На основании принципа Дирихле минимум два человека, из которых k особ имеют одинаковое количество знакомых.

Задача 23.

Каждый день на протяжении года ученик решал не меньше одной задачи, при этом каждую неделю он решал не больше 12 задач. Доказать, что найдется несколько последовательных дней, за которые он решил ровно 20 задач.

Решение.

Будем считать, что в году 52 недели. За это время ученик решил не больше 624 задач. Обозначим через a_1 количество задач, решенных за первый день; через a_2 — количество задач, решенных за два дня; a_3 — количество задач, решенных за три дня и т.д. Каждое из чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{364}$ не больше, чем $52 \cdot 12 = 624$. Все эти числа разные. Рассмотрим также 364 таких числа: $a_1 + 20$, $a_2 + 20$, $a_3 + 20$, ... , $a_{364} + 20$. Среди этих чисел нет ни одной пары одинаковых, каждое из них меньше 644.

Значит, среди 728 целых положительных чисел, каждое из которых меньше 644, найдется больше, чем одна пара равных. Пусть $a_k = a_i + 20$, тогда $a_k - a_i = 20$. А это значит, что за время между «k-тым» и «i -тым» днями ученик решал ровно 20 задач. Кстати, на протяжении года будет 84 таких промежутка времени, когда ученик решал по 20 задач.

В данной задаче достаточно ограничиться временем, значительно меньшим, чем год. Аналогично можно показать, например, что на протяжении 77 дней тоже найдется несколько последовательных дней, в течение которых ученик решит ровно 20 задач.

Задача 24.

В школе 740 учеников. Доказать, что по крайней мере трое из них в один и тот же день празднуют свой день рождения.

Решение.

Если бы каждый день два ученика праздновали свой день рождения, то в школе было бы 732 ученика.

Задача 25.

Из 61 монеты за 4 взвешивания выделить фальшивую (она тяжелее, чем другие).

Решение.

Разделим монеты на три группы: 21, 21 и 19. На весы положим первые две группы по 21 монете, а третью группу из 19 монет отложим. При этом возможны два случая: чашечки весов уравновешены и неуравновешены. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Чашечки уравновешены, следовательно, тяжелая (фальшивая) монета находится среди 19 отложенных. Разделим эти 19 монет на три группы (7, 7 и 5) и сравним на весах вес первых двух групп (это будет второе взвешивание). Опять может получиться, что:

а) весы уравновешены,

б) весы неуравновешены.

В случае *а*) фальшивая монета среди 5 отложенных. Из них за следующих два взвешивания сначала сравним 2 и 2 монеты, отложив пятую. Если пятая не фальшивая, тогда взвесим две монеты из той чашки весов, что перевесила.

Если же весы неуравновешены (случай *б*)), тогда фальшивая монета находится среди 7 монет. Разделим эту группу на 3, 3 и 1 монету и положим на чашечки весов по три монеты и т.д. И в этом случае для решения необходимо два взвешивания — не больше.

2. Чашечки с монетами (на каждой по 21) неуравновешены. Откладываем 7 монет. На каждую чашечку кладем тоже по 7 монет. Это будет второе взвешивание. Следовательно, и в этом случае нужно четыре взвешивания.

В том случае, когда из условия задачи не выплывает вес «особенного» предмета (легче он или тяжелее, чем другие), для его выделения надо, как правило, выполнить дополнительное взвешивание. Так, в задаче о выделении из 9 монет одной фальшивой (неизвестно, легче она или тяжелее в сравнении с настоящей), двумя взвешиваниями не обойтись. Придется «перевешивать» монеты трижды.

Иногда в таких задачах кое-что изменяют, вводя, например, ограниченное число гирь определенного веса.

Задача 26.

Каждый из трех друзей сыграл одинаковое число шахматных партий с другим. При этом выяснилось, что первый из них выиграл наибольшее количество партий, второй проиграл наименьшее количество партий, а третий получил наибольшее количество очков. Могло ли так быть? Если нет, — докажите. Если да — приведите пример.

Решение.

Так могло случиться. Пусть каждые двое сыграли между собой по 10 партий. При этом первый выиграл у второго 3 партии и второй выиграл у него столько же. У третьего первый выиграл 4 партии, но проиграл ему 5 партий. Все другие партии закончились вничью. Тогда первый, который выиграл 7 партий, проиграл 8 и 5 закончил вничью, будет иметь 9,5 очков, второй, который проиграл 3 партии и выиграл 3 партии, а в 14 партиях сыграл вничью, будет иметь 10 очков. Третий наберет 11,5 очков, так как у него 5 выигрышей, 4 поражения и 11 ничьих.

Задача 27.

Учитель проверил работы трех учеников — Алексеева, Василенко и Сергиенко, но не принес их в класс. Ученикам он сказал: «Один из вас получил «3», второй — «4», а третий — «5». У Сергиенко не «5», у Василенко не «4», а у Алексеева, кажется, «4».»

Когда принесли тетради, то выяснилось, что учитель только одному ученику сказал правильную оценку, двоим другим — неправильную. Какие оценки получили ученики?

Решение.

Возможны шесть вариантов распределения оценок: *АВС*, *АСВ*, *ВАС*, *ВСА*, *САВ* и *СВА*. Каждая запись обозначает, что пятерку получил первый ученик, четверку — второй, тройку — третий. Из этих записей лишь первый подходит к условию задачи: в утверждениях учителя одна оценка правильна, а две другие — нет. Поэтому Сергиенко получил «3», Василенко — «4», Алексеев — «5».

Задача 28.

Есть 5 монет, среди которых одна — фальшивая. Неизвестно, легче она или тяжелее настоящей. Вес настоящей монеты — 5 г. Как с помощью двух взвешиваний на весах можно обнаружить фальшивую монету, имея одну гирю весом 5 г?

Решение.

Обозначим монеты A, B, C, D, E. Положим монеты A и B на одну чашечку весов, а монету C с гирей — на вторую. Если весы уравновешены, тогда фальшивая монета среди отложенных D и E. Следующим взвешиванием, положив на весы гирю и монету D, найдем фальшивую (при равновесии весов — E, при неравновесии — D). В одном из этих случаев нельзя установить, легче или тяжелее фальшивая монета, но этого и не требуется в условии задачи.

Когда же весы не уравновешены, то нужно рассмотреть два случая. Если перевешивает чашечка с монетами A и B, тогда фальшивая монета среди трех: A, B (тогда она тяжелее) или C (тогда C легче). Отложенные же монеты D и E — настоящие.

Для второго взвешивания положим на одну чашечку весов монеты A и C, а на вторую — две настоящие (или одну настоящую и гирю, что одно и то же); а монету B отложим. Если взвешиваемые монеты уравновесятся, то монета B — фальшивая (тяжелее настоящей). Если же весы не уравновесятся и перевешивает чашечка с монетами A и C, тогда фальшивая A (тяжелее), когда же эта чашечка легче, тогда и фальшивая монета (C) легче.

Задача 29.

Три разбойника хотят разделить добычу поровну. Каждый из них уверен, что только он разделил бы добычу на равные части, но другие ему не доверяют. Если бы разбойников было двое, тогда было бы легче выйти из положения: один бы разделил добычу на две части, а второй взял бы ту часть, которая показалась ему большей. Как должны действовать разбойники, чтобы каждый из них был уверен, что его добыча не меньше третьей части всей добычи?

Решение.

Пусть один из разбойников поделит добычу на три, по его мнению, равные части. Если при этом другие разбойники выберут себе по одной из разделенных частей, то третья часть останется для разбойника, который делил эту добычу. Если двое захотят взять одну и ту же часть, то они поделят ее на две части между собой способом, который описан в условии задачи. Если два разбойника, которые получили половину своей части добычи, показывают на разные части, то каждый из них поделит эти части с разбойником, который совершал первый раздел.

Задача 30.

Плитка шоколада состоит из 35 квадратиков (7×5). Ее ломают по прямым, которые делят квадратики до тех пор, пока не получат отдельных 35 квадратиков. Сколько раз нужно поделить шоколадку?

Решение.

При любом разламывании плитки количество квадратиков увеличивается на 1. Чтобы получить 35 квадратиков, нужно разломать плитку 34 раза.

Задача 31.

Какое наибольшее количество слонов можно расставить на шахматной доске, чтобы ни один из двух слонов не был под обоюдным боем?

Решение.

Слон, который стоит на внутренней клетке доски, держит под угрозой большее количество клеток, нежели слон, который стоит на клетке какого-нибудь крайнего ряда (горизонтального или вертикального). Нужно расставить слонов так, чтобы они угрожали наименьшему количеству клеток, а значит, их надо поставить на клетки одного из крайних рядов. Эти восемь слонов не будут угрожать шести клеткам противоположного крайнего ряда (в этом ряду под угрозой поставленных восьми слонов находятся только две крайние клетки) — на эти шесть клеток и поставим еще по слону на каждую. Следовательно, $8 + 6 = 14$ слонов, это наибольшее количество слонов, которые можно расставить на шахматной доске так, чтобы ни один из двух слонов не был под обоюдным боем.

Задача 32.

Среди трех монет одна фальшивая (она легче, чем две другие, одинакового веса). С помощью одного взвешивания на весах (без гирь) найти фальшивую монету.

Решение.

Положим на чашечки весов по одной монете, а третью отложим в сторону. Если чашечки находятся в равновесии, то отложенная монета и есть фальшивой. В другом случае весы покажут монету, которая легче, т.е. фальшивую.

Задача 33.

Трем ученикам в темной комнате надели на головы по черной шапке. Перед ними поставлено задание отгадать, кто в какой шапке, если всего шапок 5, причем две из них — серые, а три — черные. Серые шапки спрятали перед тем, как в комнате включили свет. Через некоторое время один ученик отгадал, что он стоит в черной шапке. Как он это сделал?

Решение.

Этот ученик думал так: «Пусть я в серой шапке, тогда мой сосед слева будет видеть меня в серой, а третьего ученика в черной шапке. Так как серых шапок только две, то один из моих товарищей должен сразу догадаться, что он в черной шапке. Но он молчит, а поэтому я не могу быть в серой шапке. Значит, на мне черная шапка.»

Задача 34.

Два ученика на соревнованиях по стрельбе сделали по 5 выстрелов. При этом были такие попадания: 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3 и 2. Известно, что за первых три выстрела они набрали одинаковое количество очков. А за три последних выстрела первый ученик набрал в три раза больше очков, чем другой. Сколько очков каждый из учеников набрал при третьем выстреле?

Решение.

Наименьшее количество очков, которые засчитывают за три выстрела, равняется 9, а наибольшее — 28. Очевидно, что первый ученик за три последних выстрела получил 27 очков, а второй — 9. Это станет возможным, если первый наберет соответственно 10, 9, 8 очков, а второй — 2, 3, 4. Во время первых двух выстрелов было выбито 9, 8, 4, 5 очков. Сумма очков за первые два выстрела первого ученика по крайней мере на 4 меньше, чем сумма очков за первые два выстрела другого. Поэтому первый набрал за два выстрела только 9 очков, а второй — 17. Чтобы эти суммы были равны между собой, необходимо, чтобы первый ученик во время третьего выстрела набрал 10 очков, а второй — только 2.

Задача 35.

Один из пяти братьев разбил окно. На вопрос отца: «Кто это сделал?» они ответили:

Андрей: Это сделал или Виктор, или Борис.

Виктор: Это сделал не я и не Юра.

Борис: Вы вдвоем говорите неправду.

Дима: Только один из братьев сказал правду.

Юрий: Нет, Дима, ты сам говоришь неправду.

Отец уверен, что три брата сказали правду.

Решение.

Из ответа Бориса, который противоречит сказанному ранее Виктором и Андреем, получается, что он сказал неправду. Поэтому утверждения Андрея и Виктора правдивые. А значит, окно разбил Борис.

Задача 36.

Среди шести офицеров, фамилии которых начинаются буквами *А, Б, В, Г, Д, К* три полковника, два майора и один капитан. Известно, что *А* первый приветствует *Б*; *Г* и *Д* имеют одинаковые звания, *В* и *К* служат в одном полку. Полковник, майор и *Г* — танкисты, *Б* и капитан — артиллеристы. Один из офицеров — радист. Какое звание он имеет? Какая первая буква его фамилии?

Решение.

В условии сказано, что *Б* и капитан — артиллеристы. Поэтому *В* и *К* должны быть танкистами. Один из них полковник, а второй — майор. Так как *Г* и *Д* имеют одинаковые звания, то капитаном может быть только *А*. Тогда *Д* — радист. Он имеет с *Г* одинаковое звание. Майорами они не могут быть, так как тогда майорами были бы *Д*, *Г* и еще один танкист. Теперь понятно, что *Д* — полковник.

Задача 37.

Корреспонденту удалось узнать, что в составе команды космического корабля будут Петренко, Олеськов и Тарасов. Подумав, он записал в своем блокноте предположение, что командиром корабля будет Тарасов, Петренко — физиком, а Олеськов — радистом, так как он не может быть командиром корабля. В пресс-центре корреспонденту сказали, что только одно из этих предположений верное. Какие обязанности выполняли Олеськов, Петренко и Тарасов?

Решение.

Если считать правильным только одно предположение, как сказано в условии, то первое предположение не может быть правильным, так как она противоречит третьему. Третье также неправильное, так как в нем высказываются две гипотезы. Поэтому возможно лишь такое распределение: Олеськов — командир, Петренко — физик, Тарасов — радист. Это показывает, что второе предположение верное.

Задача 38.

Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть полным квадратом.

Решение.

Доказываем методом от противного. Обозначив эти пять чисел через $n-1$; $n-2$; n; $n+1$, $n+2$, получим:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=$$

$$=5n^2+10=5\,(n^2+2).$$

Выражение $5\,(n^2+2)$ может быть полным квадратом лишь при условии, что n^2+2 делится на 5, что невозможно, так как тогда бы n^2 заканчивалось цифрой 8 или цифрой 3. Таким образом, данное утверждение доказано.

Задача 39.

На площади задано 17 точек, из которых ни одна из трех не лежит на одной прямой. Каждые две точки соединены отрезком одного из трех цветов. Доказать, что существует треугольник с вершинами в данных точках, стороны которого закрашены в один и тот же самый цвет.

Решение.

Пусть не существует такого треугольника. Докажем, что такое предположение неправильное. Пусть из некоторой точки выходит 16 отрезков, которые соединяют ее с другими точками. Среди этих точек минимум 6 закрашено одинаково, например, красным цветом. Очевидно, что ни одну пару из этих 6 точек уже нельзя соединить красным цветом, так как тогда будет образован треугольник, все стороны которого закрашены в красный цвет. Соединим некоторую точку (из этих точек) с другими точками. Среди пяти образованных отрезков минимум три закрашены одним цветом, например, зеленым. Если бы концы этих трех отрезков соединить красным или зеленым цветом, то мы бы получили треугольник, который искали. Но, если их соединить отрезками третьего цвета, то тоже образуется такой же треугольник.

Задача 40.

В квадрате со стороною 1 произвольно размещено 126 точек. Доказать, что какие-то 6 из них обязательно лежат в середине круга, радиус которого равняется $\frac{1}{7}$.

Решение.

Если поделить квадрат на 25 равных квадратиков, то, по крайней мере, в одном их них будет 6 точек. Если из центра этого квадрата описать круг радиусом $\frac{1}{7}$, то все точки квадрата будут лежать в середине круга. Действительно, $\frac{1}{7} > \frac{\sqrt{2}}{10}$, поэтому этот круг и будет искомым.

(Аналогично можно решить задачу: В кубе со стороною 1 м летает 2001 комар. Доказать, что хотя бы 3 из них находятся в середине сферы радиуса 0,1 м).

Задача 41.

В городе насчитывается 10000 телефонов. Их номера обозначаются четырьмя цифрами. В центральном районе установлено больше, чем половина всех телефонов. Доказать, что хотя бы один из номеров телефонов центрального района равняется сумме номеров двух других телефонов этого же района.

Решение.

Обозначим наименьший номер телефона через a_1 и рассмотрим числа — номера телефонов центрального района, размещенных в порядке увеличения $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{5001}$. Для общности будем считать их четырехцифровыми, обозначая числа 1 как 0001, 12 — как 0012, 173 — как 0173. Получим разности $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1, \ldots, a_{5001} - a_1$. Четырехцифровые числа, которые мы получили положительные и их количество больше, чем 10 000. Поэтому по крайней мере два их них равны, откуда $a_j = a_k + a_1$.

Задача 42.

Доказать, что из $n + 1$ разных натуральных чисел, меньших $2n$, можно выбрать три такие, сумма двоих которых равняется третьему числу.

Решение.

Например, среди четырех чисел 1, 2, 4, 5, каждое из которых меньше 6, есть три таких, что $1 + 4 = 5$. Разместим данные числа в порядке возрастания и обозначим их так: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$. Образуем числа $a_2 - a_1$; $a_3 - a_1$; $a_4 - a_1$; ..., $a_{n+1} - a_1$ где a_1 — наименьшее из данных чисел. Тогда среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_2 - a_1; \ldots; a_{n+1} - a_1$ по меньшей мере два одинаковых. Действительно, всех чисел $2n + 1$ и каждое из них — положительное целое число, меньшее $2n$, поэтому по меньшей мере два из них одинаковые.Среди данных чисел одинаковых нет, нет их и среди образованных разностей, поэтому возможно лишь такое равенство: $a_k = a_j - a_1$, откуда $a_k = a_j - a_1$.

Задача 43.

Доказать, что среди 101 целого числа можно выбрать два, разность которых делится на 100.

Решение.

Напомним, что при делении числа на 100 может быть 100 остатков: 0, 1, 2, ... , 99. Среди 101 остатка, которые мы получаем от деления данных в условии 101 числа на 100, по крайней мере два одинаковы. Разность этих двух чисел и делится на 100.

Задача 44.

Имеем лист бумаги. Его надо разрезать на 8 или 12 частей. Каждую из частей, которая получилась после разрезания опять разрезать на 8 или 12 частей или оставить без изменений. Можно ли продолжая таким образом разрезание, получить 60 частей листа?

Решение.

После нескольких разрезов получим $1 + 7k + 11n$ частей листа, где k — количество разрезов на 8 частей, n — количество разрезов на 12 частей. Уравнение $1 + 7k + 11n = 60$ не имеет решений в целых числах, так как $n = \dfrac{59 - 7k}{11}$ ни при одном целом $0 \leqslant k < 8$ не будет целым числом.

Задача 45.

Было 6 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 6 частей и т.д., потом некоторые опять разрезали на 6 частей и т.д. Когда подсчитали, то оказалось, что их было 1974. Доказать, что подсчет выполнен неправильно.

Решение.

Вследствие каждого разрезания количество листов увеличивается на 5, поэтому число листов, уменьшено на 6, должно делиться на 5. Этой возможности как раз и не имеет число 1974.

Задача 46.

В одном месяце три среды выпали на парные числа. Какого числа в этом месяце было второе воскресенье?

Решение.

Это возможно лишь тогда, когда месяц начинается со вторника. Второе воскресенье выпадает на 13-й день месяца.

Задача 47.

В автобусе ехало 20 учеников. Имея лишь монеты 10, 15, 20 коп. каждый из них расплатился за проезд и получил нужную сдачу. Доказать, что у учеников было не меньше 25 монет.

Решение.

Так как каждый ученик получил не меньше одной монеты сдачи и в кассу опустил не менее 5 монет, то, очевидно, у них должно быть не меньше 25 монет.

Легко доказать, что 5 монет — минимальное количество для расчета 4 человек. Это монеты 15, 15, 10, 10, 20 коп. Поэтому можно доказать, что у учеников вместе должно быть не менее 3 руб. 50 коп., так как $(15 + 20 + 15 + 10 + 10) \cdot 5 = 350$.

Задача 48.

Летела стая сороконожек и трехголовых драконов. У них было всего 26 голов и 298 ног. У каждой сороконожки одна голова. Сколько ног у трехголовых драконов?

Решение.

Пусть было x сороконожек и y драконов. Количество сороконожек не более 7, кроме того, $x + 3y = 26$; $y = \frac{26-x}{3}$. Чтобы y было целым положительным числом, нужно, чтобы $x = 5$. Случай $x = 2$ ведет к тому, что у драконов будет разное количество ног. Если $x = 5$, то $y = 7$. Тогда сороконожки будут иметь 200 ног, а драконы 98 ног. Следовательно, у трехголового дракона было 14 ног.

Задача 49.

Женщина сдает в багажное отделение рюкзак, чемодан, саквояж и корзинку. Чемодан тяжелее, чем рюкзак; саквояж и рюкзак тяжелее, чем корзинка и чемодан, а корзинка и саквояж вместе весят столько, сколько чемодан и рюкзак. Какой из этих грузов самый тяжелый, а какой самый легкий?

Решение.

Обозначим вес предметов их первыми буквами. Получим отношения $ч > р$; $с + р > к + ч$ и $к + с = ч + р$. Прибавив почленно два последних соотношения, получим, что $с > ч$. Из разницы этих соотношений следует, что $р > к$. Поэтому $с > ч > р > к$.

Задача 50.

Имеется 10 мешков монет. В девяти мешках монеты настоящие (весят по 10 г), а в одном мешке все монеты фальшивые (весят по 11 г). Одним взвешиванием определить, в каком мешке фальшивые монеты.

Решение.

Занумеруем мешки числами от 1 до 10. Возьмем из первого мешка одну монету, из второго — две, ... , из десятого — десять и определим их общий вес. Пусть он равен P. Если бы все монеты были настоящие, то они весили бы $10 + 20 + \ldots + 100 = 550$ г. Избыток $P - 550$ совпадает, очевидно, с номером мешка, в котором хранятся фальшивые монеты.

Задача 51.

Из девяти одинаковых монет одна фальшивая. Она отличается от других весом, хотя неизвестно, более легкая она или тяжелая. Выявить фальшивую монету тремя взвешиваниями на весах.

Решение.

Разложим монеты на три кучки по три монеты в каждой. Кладем на разные чашки весов сначала первую и вторую, а потом первую и третью кучку. После этих двух взвешиваний выясняется в какой из трех кучек фальшивые и тяжелее ли она или легче, чем настоящие. Теперь достаточно одного взвешивания, чтобы обнаружить фальшивую монету.

Задача 52.

Сто монет разложены в 10 стопок, по 10 монет в каждой. В одной из стопок все монеты фальшивые. Масса каждой нормальной монеты 5 г, а фальшивой на 0,5 г меньше. Как при помощи одного взвешивания на весах с разновесами определить в какой стопке находятся фальшивые монеты.

Решение.

Пронумеруем стопки. Из первой положим на весы одну монету, из второй — две монеты и т.д. Всего 55 монет. Вычислим, на сколько «полграммов» масса 55 монет меньше 275 граммов. В стопке с таким номером и будут фальшивые монеты.

Задача 53.

По вертикальному столбу высотой 6 м движется улитка. За день она поднимается на 4 м, за ночь опускается на 3 м. Сколько дней ей потребуется, чтобы добраться до вершины?

Решение.

Через день и ночь улитка будет на высоте $4 - 3 = 1$ (м).

В конце вторых суток она будет на высоте $1 \cdot 2 = 2$ (м).

В конце третьего дня улитка достигнет вершины: $2 + 7 = 6$ (м).

Ответ: Через три дня улитка достигнет вершины.

Задача 54.

Имеется 3 ключа от трех чемоданов с разными замками. Достаточно ли трех проб, чтобы подобрать ключи к чемоданам?

Решение.

Берем любой ключ и пробуем поочередно к каждому из первых двух чемоданов.

Возможны случаи:

1) Ключ к этим чемоданам не подходит. Тогда он от третьего чемодана. Второй ключ пробуем к одному из остав-

шихся двух чемоданов. Если ключ не подходит к этому чемодану, то он от другого чемодана.

2) Ключ подходит к одному из чемоданов. Тогда следующей пробой определяем, от какого чемодана другой ключ. Оставшийся ключ — от последнего чемодана.

Ответ: Да, достаточно.

Задача 55.

Математик M любил говорить, что ему исполнилось x лет в x^2 году. Математик N, желая его перещеголять, говорил, что ему было a^2+b^2 лет в a^4+b^4 году, что его возраст равнялся $2m$ в $2m^2$ году и, наконец, что ему исполнилось $3n$ лет в $3n^4$ году. В каком году родились математики M и N.

Решение.

Математик M родился в 1806 году. Когда ему было 43 года, то текущий год равнялся квадрату его возраста — 1849.

Математик N родился в 1860 г. Ему было 5^2+6^2 (61) лет в 5^4+6^4 (1921) году. В $2\cdot 31^2$ (1922) году ему исполнилось $2\cdot 31$ (62 года). И, наконец, его возраст был равен $3\cdot 5$ (15) годам в $3\cdot 5^4$ (1875) году.

Задача 56.

На какие множители разлагается число 1 000 000 000 001?

Решение.

Если число нулей, заключенных между двумя единицами, равно любому числу, кратному 3, плюс 2, то два сомножителя можно выписать с помощью правила:

$$1001 = 11\cdot 91,\quad 1\,000\,001 = 101\cdot 9901;$$

$$1\,000\,000\,001 = 1001\cdot 999\,001;$$

$$1\,000\,000\,000\,001 = 10\,001\cdot 9\,999\,001.$$

В последнем случае мы получили требуемый ответ, а

$$10\,001 = 73\cdot 137.$$

Задача 57.

Докажите, что любую сумму, большую семи копеек, можно уплатить трехкопеечными и пятикопеечными монетами, не получая сдачи.

Решение.

1 способ.

Достаточно проверить, что трехкопеечными и пятикопеечными монетами можно уплатить 8, 9 и 10 к. ($8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$), а затем добавлять монеты по 3 к.

2 способ.

Любое натуральное число m, большее 7, можно представить в одном из следующих видов:

$m = 3n$, где $n \in N$, $n \geqslant 3$;
$m = 3n + 1$, где $n \in N$, $n \geqslant 3$;
$m = 3n + 2$, где $n \in N$, $n \geqslant 2$

Если $m = 3n$, то очевидно, сумму можно уплатить трехкопеечными монетами.

Если $m = 3n + 1$, то

$$m = 3(n-3) + 3 \cdot 3 + 1 = 3(n-3) + 5 \cdot 2,$$

где $n - 3 \in Z$ (так как $n \geqslant 3$).

Данную сумму можно уплатить трехкопеечными и одной пятикопеечной монетой.

Задача 58.

В ящике лежат разноцветные шарики: 5 белых, 12 красных и 20 черных. Какое наименьшее число шариков надо вытянуть из ящика, не заглядывая внутрь, чтобы среди них оказались обязательно: *а*) хотя бы по одному шарику всех указанных цветов; *б*) 10 шариков одного цвета?

Решение.

а) В самом неблагоприятном случае могут быть вытянуты 20 черных и 12 красных шариков, затем вытянутый шарик (белый) обеспечит наличие шариков трех указанных цветов. Следовательно, достаточно вытянуть 33 шарика ($20 + 12 + 1 = 33$), чтобы среди них обязательно оказались хотя бы по одному шарику всех указанных цветов.

б) В самом неблагоприятном случае могут быть вытянуты все белые шарики (5), 9 красных и 9 черных, затем любой вытянутый шарик (красный или черный) обеспечит наличие 10 шариков одного цвета (красного или черного). Следовательно, достаточно вынуть 24 шарика, чтобы среди вынутых шариков оказалось 10 шариков одного цвета.

Задача 59.

Сколько лет брату и сколько сестре, если 2 года назад брат был старше сестры в два раза, а 8 лет назад — в пять раз?

Решение.

1 способ.

Пусть 2 года назад сестре было x лет, брату $2x$ лет. Восемь лет назад сестре было $(x - 6)$ лет, брату $(2x - 6)$ лет. По условию задачи имеем

$$2x - 6 = 5(x - 6), \text{ откуда } x = 8.$$

Следовательно, в настоящее время сестре 10 лет $(8 + 2 = 10)$, брату 18 лет $(16 + 2 = 18)$.

Ответ: 18 лет; 10 лет.

Задача 60.

Сколько лет дяде?

— Дядя, сколько тебе лет?

— Два раза столько, сколько лет тете Вале.

— А сколько лет тете Вале?

— В три раза меньше, чем тете Гале.

— Тетя Галя на 20 лет старше Нюры.

— Дядя, а сколько лет Нюре?

— Нюра в пять раз старше Ани.

— А сколько лет Ане?

— Не надоедай. Через год ей исполнится шесть лет.

— Дядя, а дядя, я сейчас скажу сколько тебе лет.

А и вправду, сколько лет дяде?

Решение.

Ане 5 лет.

Нюре $5^2 = 25$ лет.

Тете Гале $25 + 20 = 45$ лет.

Тете Вале $45 : 3 = 15$ лет.

Дяде $15 \cdot 2 = 30$ лет.

Задача 61.

Собака погналась за лисицей. В то время, когда собака делает 2 скачка, лисица делает 3 скачка, но скачок лисицы равен 1 м, а собаки 2 м. Какое расстояние пробежит собака, чтобы догнать лисицу, если первоначальное расстояние между ними равно 50 м.

Решение.

За 2 скачка собака пробегает 4 м, а лисица за 3 скачка 3 м. За один раз расстояние уменьшается на 1 м. Значит, собака пробежит $4 \cdot 50 = 200$ (м).

Задача 62.

Сколько страниц. Для того, чтобы пронумеровать страницы одного крупного научного труда, потребовалось 3389 цифр. Сколько страниц в этой книге?

Решение.

Для того, чтобы пронумеровать страницы от 1 до 9, необходимо $1 \cdot 9 = 9$ цифр.

Для того, чтобы пронумеровать страницы от 10 до 99, необходимо $2 \cdot 20 = 180$ цифр.

Для того, чтобы пронумеровать страницы от 100 до 999, необходимо $3 \cdot 900 = 2700$ цифр; следовательно, для того, чтобы пронумеровать страницы от 1 до 999, необходимо $9 + 180 + 2700 = 2889$ цифр. Остаток $3389 - 2889 = 500$ цифр использовались для нумерации следующих страниц, начиная со страницы 1000. Этих страниц было $500 : 4 = 125$. Следовательно, всего в книге $999 + 125 = 1124$ страниц.

2. ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Задача 1.

Доказать, что при всяком целом n число $n^3 - n$ делится на 3.

Доказательство.

Имеем $n^3 - n = (n-1)\,n\,(n+1)$, а из трех последовательных чисел одно обязательно делится на 3.

Задача 2.

Доказать, что при всяком целом n число $n^5 - n$ делится на 5.

Доказательство.

Имеем $n^5 - n = n\,(n-1)(n+1)(n^2+1)$.

Если целое число оканчивается одной цифр 0, 1, 4, 5, 6 или 9, то один из первых трех множителей делится на 5. Если n оканчивается одной из цифр 2, 3, 7 или 8, то n^2 оканчивается на 4 и 9 и $n^2 + 1$ делится на 5.

Задача 3.

Доказать, что при всяком целом n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.

Доказательство.

Имеем $n^5 - 3n^3 + 4n = n\,(n^2-1)(n^2-4) =$

$$= (n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)$$

Но из пяти последовательных целых чисел одно делится на 5, по крайней мере одно делится на 3 и по крайней мере два на 2, причем из этих двух последних чисел одно делится на 4. Таким образом, произведение пяти последовательных целых чисел всегда делится на $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120$.

Задача 4.

Доказать, что $11^{10} - 1$ делится на 100.

Доказательство.

$$11^{10} - 1^{10} = (11-1)\cdot(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + $$
$$+ 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1).$$

Легко видеть, что второй сомножитель делится на 10, так как он представляет сумму 10 слагаемых, каждое из которых оканчивается на 1.

Итак, $11^{10} - 1$ есть произведение 10 на число, делящееся на 10, и, значит, делится на 100.

Задача 5.

Доказать, что при любом четном n число $n^3 + 20n$ делится на 48.

Доказательство.

Всякое четное число может быть выписано в виде $n = 2k$, где k — целое число. Поэтому $n^3 + 20n$ может быть представлено следующим образом:

$$N = n^3 + 20n = 8k\,(k^2 + 5).$$

Отсюда видно, что N делится на 8.

Докажем, что число $k\,(k^2 + 5)$ делится на 6.

Перепишем это число так:

$$k\,(k^2 + 5) = k^3 - k + 6k = (k - 1)\,k\,(k + 1) + 6k.$$

Очевидно, что второе слагаемое $6k$ на 6 делится. Первое же слагаемое является произведением трех последовательных чисел. Поэтому один из сомножителей этого произведения обязательно делится на 3. Кроме того, из двух последовательных целых чисел (а тем более трех) одно является четным. Значит, произведение $(k - 1)\,k\,(k + 1)$ делится на 6, и требуемое доказано.

Задача 6.

Доказать, что $n^7 - n$ делится на 42 при любом натуральном n.

Доказательство.

Сделаем необходимые преобразования

$$n^7 - n = n\,(n^6 - 1) = n\,(n^3 - 1)\,(n^3 + 1) =$$

$$= n\,(n - 1)(n^2 + n + 1)(n + 1)(n^2 - n + 1) =$$

$$= (n - 1)\,n\,(n + 1)(n^4 + n^2 - 1). \qquad (1)$$

Ясно, что произведение $(n-1)\,n\,(n+1)$ делится на 6. Осталось показать, что заданное число делится на 7. Это было бы доказано, если бы удалось записать $n^7 - n$ в виде произведения семи последовательных натуральных чисел. В связи с этим рассмотрим произведение:

$$A_n = (n-3)(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)(n+3). \qquad (2)$$

Три множителя $(n-1)\,n\,(n+1)$ имеются в разложении (1). Определим произведение крайних множителей, входящих в выражение (2):

$$(n-3)(n-2)(n+2)(n+3) = (n^2-4)(n^2-9) = n^4 - 13n^2 + 36.$$

Видно, что число $A_n \neq n^7 - n$, то есть $n^7 - n$ не может быть представлено в виде (2).

Но это еще не означает, что число $n^7 - n$ не делится на 7. Напротив, приведенные выкладки наводят на мысль о сравнении $n^7 - n$ с делящимся на 7 числом A_n. Действительно, имеем:

$$n^7 - n = (n-1)\,n\,(n+1)\,(n^4 + n^2 + 1) = (n-1)\,n\,(n+1)\times$$
$$\times\,(n^4 - 13n^2 + 36) + (n-1)\,n\,(n+1)\,(14n^2 - 35) =$$
$$= A_n + 7\,(n-1)\,n\,(n+1)\,(2n^2 - 5),$$

откуда непосредственно следует делимость числа $n^7 - n$ на 7.

Задача 7.

Доказать, что ни при каком натуральном n число $n^2 + 1$ не делится на 3.

Доказательство.

Так как речь идет о делимости на 3, рассмотрим три класса натуральных чисел:

- класс чисел, делящихся на 3 (Это числа вида $3k$, где k — любое натуральное число);
- класс чисел, дающих при делении на 3 в остатке единицу (это числа вида $3k+1$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$);
- числа, дающие при делении на 3 в остатке 2 (это числа вида $3k+2$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Произвольное натуральное число обязательно попадает в один из таких классов.

Поэтому задача будет решена, если мы докажем неделимость на 3 числа $n^2 + 1$ для каждого из выделенных классов.

Если $n = 3k$, то $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$. Ясно, что при делении на 3 число $n^2 + 1$ дает в остатке 1.

Если $n = 3k + 1$, то $n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$. Число $9k^2 + 6k$ делится на 3, и поэтому в рассматриваемом случае $n^2 + 1$ при делении на 3 имеет в остатке 2.

Если $n = 3k + 2$, то

$$n^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 3 = (9k^2 + 12k + 3) + 2.$$

Число, заключенное в скобках, делится на 3. Отсюда получаем, что $n^2 + 1$ при делении на 3 и в этом случае имеет в остатке 2.

Следовательно, ни при каком натуральном n число $n^2 + 1$ не делится на 3.

Задача 8.

Доказать, что число $3^{105} + 4^{105}$ делится на 13.

Доказательство.

Замечая, что $105 = 3 \cdot 35$ представим заданное число в виде: $3^{105} + 4^{105} = (3^3)^{35} + (4^3)^{35} = 27^{35} + 64^{35}$.

Для нечетных чисел n справедливо равенство:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}\, b + a^{n-3}\, b^2 + b^{n-1}).$$

Запишем нашу сумму в виде:

$$3^{105} + 4^{105} = 27^{35} + 64^{35} = 91\ (27^{34} - \ldots + 64^{34}).$$

Поскольку $91 = 13 \cdot 7$, то наша сумма делится на 13.

Задача 9.

Сумма трех целых чисел делится на 6. Доказать, что и сумма кубов этих чисел делится на 6.

Доказательство.

Достаточно доказать, что разность $x^3 + y^3 + z^3 - (x + y + z)$ делится на 6. Это действительно так, поскольку каждый из слагаемых $x^3 - x$, $y^3 - y$, $z^3 - z$ делится на 6, так как эти слагаемые можно представить как произведение трех целых последовательных чисел:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Задача 10.

Доказать, что $p^2 - q^2$ делится на 24, если p и q — простые числа, больше 3.

Доказательство.

Каждое их простых чисел p и q можно представить как $3k - 1$ или $3k + 1$. Но

$$p^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1;$$

$$q^2 = (3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1.$$

Поэтому их разность делится на 3.

Так как p и q — нечетные числа, то выражение в одних скобках делится на 4, а в других — на 2, поэтому их произведение делится и на 8.

Задача 11.

Доказать, что если сумма двух чисел есть число нечетное, то произведение этих чисел всегда будет числом четным.

Доказательство.

Сумма двух чисел — число нечетное, следовательно, одно слагаемое — четное, а другое — нечетное. Произведение четного числа ни любое целое число есть число четное.

Задача 12.

Найдите двузначное число, которое при делении на цифру единиц дает в частном цифру единиц, а в остатке — цифру десятков.

Решение.

Имеем $N = 10a + b = b \cdot b + a$, или $9a = b(b - 1)$.

Числа b и $b - 1$ — взаимно простые, и $b - 1$ на 1 меньше b. Отсюда $b = 9$, $a = 8$. Искомое число 89.

Задача 13.

Доказать, что по крайней мере одно из двух чисел $m + n$, $m - n$, где m и n — натуральные числа, кратно трем.

Доказательство.

Если m и n — кратны трем, то утверждение верно. Если ни m, ни n не кратны трем, то возможны три случая:

1) $m = 3k + 1, \ \ n = 3p + 1;$
2) $m = 3k + 2, \ \ n = 3p + 2;$
3) $m = 3k + 2, \ \ n = 3p + 1;$

где k, $p \in N$. Случай $m = 3k + 1$, $n = 3p + 1$ аналогичен случаю 3).

В случаях 1) и 2) число $m - n$ будет кратно трем, а в случае 3) $m + n$ будет кратно трем.

Задача 14.

Если $1 \cdot 2 \cdot 3 \ \ldots \ \cdot (n - 2)(n + 1) + 1$ делится на n, то n — простое число. Доказать это.

Доказательство.

Пусть n — непростое число. Тогда оно имеет делитель p, причем $1 < p < n$. Но это невозможно, так как первое произведение, которое содержит $n - 1$ множитель, делится на p, а 1 не делится на p, поэтому данная сумма не делится на p. Поэтому n простое число.

Задача 15.

Доказать, что $24^{1995} + 14^{1995}$ делится на 19.

Доказательство.

$$24 = 19 + 5; \ \ 14 = 19 - 5.$$

Имеем

$$N = (19 + 5)^{1995} + (19 - 5)^{1995} = 19 \cdot A + 5^{1995} + 19 \cdot B - 5 \cdot 1995 =$$
$$= 19\,(A + B), \text{ где } A, B \in N$$

Задача 16.

Доказать, что $25^{123456789} + 1$ делится на 601.

Доказательство.

Показатель 123456789 делится на 3 и поэтому данное число можно представить в виде $(25^3)^k + 1$, причем число k очевидно, нечетно. Используя тождество

$$x^n + 1 = (x + 1)(x^n - x^{n-2} + \ldots + x^2 - x - 1),$$

получаем, что данное число делится на $25^3 + 1$, а, следовательно, и $25^2 - 25 + 1 = 601$.

Задача 17.

Доказать, что $2^{55} + 1$ делится на 11.

Доказательство.

Имеем

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n+2} \cdot b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Положим $a = 2^5$, $n = 11$, $b = -1$. Получим

$$2^{55} + 1 = (2^5 + 1)(2^{50} - 2^{45} + 2^{40} - \ldots - 2^5 + 1) = 33m.$$

Задача 18.

Докажите, что значение выражения $11^6+14^6-13^2$ кратно 10.

Доказательство.

Число 11^6 оканчивается цифрой 1.

Число 14^6 оканчивается цифрой 6, так как $14^6 = (14^2)^3$, а 14^2 оканчивается цифрой 6. Число 13^3 оканчивается цифрой 7. Следовательно, число $11^6 + 14^6 - 13^2$ оканчивается цифрой 0, т.е. кратно 10.

Задача 19.

Доказать, что ни одно из чисел 1, 11, 111, .., кроме первого, не есть квадратом целого числа.

Доказательство.

Допустим, что одно из чисел — полный квадрат. Обозначим его k^2. Тогда $k^2 - 1$ должен делиться на 4.

Действительно, $k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$, следовательно, $k - 1$ и $k + 1$ — четные числа. Однако, если от числа, которое оканчивается на 11, отнять 11, то получится число, которое на 4 не делится.

Задача 20.

Докажите, что значение выражения $96^7 - 22^5 - 48^6$ кратно 10.

Доказательство.

Определим, какой цифрой оканчивается каждая степень данного выражения. Так как 6^7 оканчивается цифрой 6, то и 96^7 оканчивается цифрой 6.

Число 2^5 оканчивается цифрой 2, следовательно, 22^5 также оканчивается цифрой 2 Число 48^6, как и 8^6 оканчивается цифрой 4.

Учитывая знаки выражения, найдем, что цифра единиц равна нулю $(6 - 2 - 4 = 0)$ Следовательно значение данного выражения кратно 10.

Задача 21.

Сколько делителей у числа 10^{10}?

Решение.

$$10^{10} = (2 \quad 5)^{10} = 2^{10} \quad 5^{10}$$

Делители данного произведения имеют вид $2^k \; 5^n$ где k и n — целые, неотрицательные числа, не больше 10. Среди них имеется 11 делителей, содержащих только степени 2:

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2, \ldots \ 2^{10}$$

и столько же делителей, содержащих только степени 5:

$$5^0 \quad 5^1,\ 5^2 \qquad 5^{10}$$

Все делители данного числа получим, если каждый из делителей первого вида (степени числа 2) умножим на каждый из делителей второго вида (степени числа 5). Всего имеем $11 \quad 11 = 121$ делитель.

Задача 22.

Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 168, а их наибольший общий делитель равен 24.

Решение.

Пусть a и b — два таких натуральных числа, что $a + b = 168$, где $a = 24n_1$, $b = 24n_2$, где n_1 и n_2 — натуральные числа. Тогда имеем

$$24n_1 + 24n_2 = 168,$$

откуда $n_1 + n_2 = 7$. Учитывая, что n_1 и n_2 — натуральные числа, в сумме равные 7, находим числа a и b:

$$a = 24 \ \ (n_1 = 1),$$

$$a = 48 \ \ (n_1 = 2),$$

$$a = 72 \ \ (n_1 = 3),$$

$$b = 144 \ \ (n_2 = 6),$$

$$b = 120 \ \ (n_2 = 5),$$

$$b = 96 \ \ (n_2 = 4).$$

Ответ: 24 и 144, или 48 и 120, или 72 и 96.

Задача 23.

Если x и y — целые, взаимно простые числа, то наибольший общий делитель чисел $x - y$ и

$$x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + x^{n-3} \ y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

есть делитель числа n. Доказать.

Решение.

Обозначим частное от деления многочлена

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} = F(x, y)$$

на разность $x - y$ через $Q(x, y)$.

По теореме Безу имеем:

$$F(x, y) = (x - y)\, Q(x, y) + ny^{n-1}.$$

Обозначим наибольший общий делитель для $F(x, y)$ и $x - y$ через D. Тогда:

$$F(x, y) = k\,D \text{ и } x - y = t\,D, \text{ где } k \text{ и } t \text{ — целые.}$$

Отсюда следует, что $D \cdot k = D \cdot t \cdot Q(x, y) + ny^{n-1}$, или

$$k = t \cdot Q(x, y) + \frac{n \cdot y^{n-1}}{D}.$$

Так как D не является делителем y (ибо в противном случае y и $x - y$ имели бы общий делитель, а следовательно,

x и y также имели бы общий делитель), а $\dfrac{n \cdot y^{n-1}}{D}$ — целое, то D является делителем n.

Задача 24.

$2^p - 1$ и $2^q - 1$ взаимно просты. Доказать, что p и q — так же взаимно просты. Обратно, если p и q — взаимно просты, то и $2^p - 1$ и $2^q - 1$ взаимно просты.

Решение.

Пусть p и q имеют общий делитель d, тогда $p = p_1 d$, $q = q_1 d$.

$$2^p - 1 = (2^d)^{p_1} - 1 = (2^d - 1)\cdot(2^{d\cdot(p_1-1)} + 2^{d(p_1-2)} + \ldots + 1),$$

$$2^q - 1 = (2^d)^{q_1} - 1 = (2^d - 1)\cdot(2^{d\cdot(q_1-1)} + 2^{d(q_1-2)} + \ldots + 1).$$

Следовательно, если $2^p - 1$ и $2^q - 1$ взаимно просты, то p и q также взаимно просты, т.е. $d = 1$.

Пусть теперь p и q взаимно просты и $p > q$. Если d — общий делитель чисел $2^p - 1$ и $2^q - 1$, то d — делитель также числа $2^p = 2^q = 2^q\cdot(2^{p-q} - 1)$. Так как $2^k - 1$ на 2 не делится $(k > 0)$, то $2^{p-q} - 1$ делится на d. Если еще $p - q > q$, то рассуждая аналогично получим, что $2^{p-lq} - 1$ делится на d, где $p - lq < q$. Обозначим $p - lq = q_1$ и, повторяя рассуждения, найдем l_1 такое, что $2^{q-l_1q_1} - 1$ делится на d, где $q - l_1q_1 < q_1$. Так дойдем до $q_i = 1$, т.е. $2 - 1 = 1$ делится на d, значит, $d = 1$.

Задача 25.

Натуральные числа a и b взаимно просты. Доказать, что наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a^2 + b^2$ равен 1 или 2.

Решение.

Достаточно доказать, что не существует числа d, большего 2, на которое делились бы числа $a + b$ и $a^2 + b^2$ (при условии, что a и b взаимно просты).

Если $a^2 + b^2$ и $a + b$ делятся на d, то и числа $2a^2 = (a^2 + b^2) + (a - b)(a + b)$ и $2b^2 = (a^2 + b^2) + (b - a)(a + b)$ делятся на d. Но поскольку числа a и b взаимно просты, то числа a^2 и b^2 также взаимно просты; следовательно, $2a^2$ и $2b^2$ не могут делиться на число d. Но на 2 они делятся, так как на 2 делятся $2a^2$ и $2b^2$.

Задача 26.

Доказать, что многочлены

$$a^5 + 4a^3 + 3a \text{ и } a^4 + 3a^2 + 1$$

не имеют общих делителей ни при каком целом a.

Решение.

$$a^5 + 4a^3 + 3a = a(a^2 + 1)(a^2 + 3) \text{ и}$$

$$a^4 + 3a^2 + 1 = a^2(a^2 + 3) + 1.$$

Пусть a_0 — некоторое целое число. Тогда делители числа

$$a_0^5 + 4a_0^3 + 3a_0$$

являются делителями по крайней мере одного из чисел a_0, $a_0^2 + 1$ и $a_0^2 + 3$. Пусть число d — делитель числа a_0 или числа $a_0 + 3$. Очевидно, что это число не может быть делителем числа $a_0^4 + 3a_0^2 + 1$. Пусть d — делитель числа $a_0 + 1$. Так как $a_0^4 + 3a_0^2 + 1 = a_0^4 + 3a_0^2 + 2 - 1 = (a_0^2 + 1)(a_0^2 + 2) - 1$, то очевидно, что d не может быть делителем числа $a_0^4 + 3a_0^2 + 1$.

Задача 27.

Найти два числа, зная их разность (66) и общее наименьшее кратное (360).

Решение.

Обозначив искомые числа через M и N, а их наибольший общий делитель через d, мы можем написать:

$$M = xd, \quad N = yd, \tag{1}$$

где x и y — взаимно простые числа.

По условию имеем:

$$M - N = xd - yd = 66; \quad MN = 360d$$

$$\text{или } (x - y)\,d = 66, \; xyd = 360. \qquad (2)$$

Так как x и y числа взаимно простые, то d является наибольшим общим делителем чисел 66 и 360.

Отсюда $d = 6$. Подставив в (2), получим:

$$x - y = 11, \quad xy = 60.$$

Решив эту систему, найдем:

$$x = 15; \quad y = 4,$$

и, следовательно, $M = 90$; $N = 24$.

Задача 28.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, (x, y) — наибольший общий делитель чисел x и y.

$$\begin{cases} (x, y) = 10, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{17}. \end{cases}$$

Решение.

$$x = 10u, \; y = 10v, \; (u, v) = 1,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{10u}{10v} = \frac{u}{v}, \quad \frac{u}{v} = \frac{4}{17},$$

значит, $u = 4$, $v = 17$. Тогда $x = 40$, $y = 170$.

Ответ: $\{(40; 170)\}$.

Задача 29.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, (x, y) — наибольший общий делитель чисел x и y.

$$\begin{cases} (x, y) = 4, \\ xy = 240. \end{cases}$$

Решение.

$x = 4u$, $y = 4v$, $(u, v) = 1$, $4u \cdot 4v = 240$, то есть

$$\begin{cases} (u, v) = 1, \\ u \cdot v = 15. \end{cases}$$

Это означает, что u и v — два взаимно простых числа, произведение которых равняется 15. Таким образом,

$$u \in \{1; 3; 5; 15\}, \quad v = \frac{15}{u}.$$

Значит, $x \in \{4; 12; 20; 60\}$, $y = \dfrac{240}{x}$.

Ответ: $\{(4; 60), (12; 20), (20; 12), (60; 4)\}$.

Задача 30.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, (x, y) — наименьшее общее кратное чисел x и y.

$$\begin{cases} [x, y] = 84, \\ x = 12. \end{cases}$$

Решение.

$[x, y] = (x, y)\, uv$, где $(u, v) = 1$, $x = (x, y)\, u$, $y = (x, y)\, v$.

Дано, что $[x, y] = 84$ и $x = 12$, значит, $(x, y)\, uv = 84$, $(x, y)\, u = 12$.

Тогда $v = 7$, $y = (x, y) \cdot 7$.

Так как наибольший общий делитель (x, y) чисел x и y делит x, а $x = 12$, то $(x, y) \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Соответственно $y \in \{7; 14; 21; 28; 42; 84\}$.

Ответ: $\{(12; 7), (12; 14), (12; 21), (12; 28), (12; 42), (12; 84)\}$.

Задача 31.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y.

$$\begin{cases} [x, y] = 540, \\ xy = 16\,200. \end{cases}$$

Ответ:
$\{(30; 540), (60; 270), (90; 180), (180; 90), (270; 60), (540; 30)\}$.

Задача 32.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y.

$$\begin{cases} [x, y] = 132, \\ x - y = 22. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $(x, y) = d$, $x = du$, $y = dv$, $(u.\ v) = 1$. Тогда

$$x - y = d\,(u - v),\quad [x, y] = d \cdot u \cdot v,$$

кроме того, имеем

$$((x - y),\ [x, y]) = d = (22, 132) = 22.$$

$$x = 22u,\quad y = 22v,\quad x - y = 22\,(u - v),$$

$$22\,(u - v) = 22,\ \text{значит},\ u - v = 1,$$

$$uv - \frac{132}{d} = \frac{132}{22} = 6,$$

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u \cdot v = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3, \\ v = 2. \end{cases}$$

Таким образом, $x = 3 \cdot 22 = 66$, $y = 2 \cdot 22 = 44$.

Ответ: $\{(66;\ 44)\}$.

Задача 33.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y.

$$\begin{cases} [x, y] = 350, \\ x + y = 95. \end{cases}$$

Решение.

$[x, y] = (x, y)\,uv$, где $(u, v) = 1$, $x = (x, y)\,u$, $y = (x, y)\,v$.

Из условия делаем вывод, что

$$\begin{cases} (x, y)\,uv = 350, \\ (x, y)\,(u, v) = 95. \end{cases}$$

Легко доказать, что когда $(u, v) = 1$, то $(uv, u + v) = 1$. Тогда $(350, 95) = (x, y)$, значит $(x, y) = 5$. Отсюда

$$\begin{cases} uv = 70, \\ u + v = 19. \end{cases}$$

Решения этой системы: $u = 5$, $v = 14$ и $u = 14$, $v = 5$.

Поскольку $x = 5u$, $y - 5v$, то $y = 70$ или $x = 70$, $y = 25$.

Ответ: $\{(25; 70), (70; 25)\}$.

Задача 34.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, (x, y) — наибольший общий делитель чисел x и y, а $[x, y]$ — их наименьшее общее кратное.

$$\begin{cases} x - y = (x, y), \\ [x, y] = 60. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $(x, y) = d$, $x = du$, $y = dv$, $(u, v) = 1$.

По условию $d(u - v) = d$, $u - v = 1$, $u = v + 1$.

Возможны случаи:

а) $v = 2$, $u = v + 1 = 3$, $d = 10$. Тогда $x = 30$, $y = 20$;

б) $v = 3$, $u = 4$, $d = 5$. Тогда $x = 20$, $y = 15$;

в) $v = 4$, $u = 5$, $d = 3$. Тогда $x = 15$, $y = 12$.

Ответ: $\{(30; 20), (20; 15), (15; 12)\}$.

Задача 35.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, (x, y) — наибольший общий делитель чисел x и y, а $[x, y]$ — их наименьшее общее кратное.

$$\begin{cases} (x, y) = 12, \\ [x, y] = 180. \end{cases}$$

Решение.

$$x = 12u, \quad y = 12v, \text{ где } (u, v) = 1,$$

$$[x, y] = 12\,uv, \quad uv = \frac{180}{12} = 15.$$

Тогда $x \in \{12, 36, 60, 180\}$, $y \in \{180, 60, 36, 12\}$, поскольку $y = 12 \cdot \frac{15}{u}$.

Ответ: $\{(12; 180), (36; 60), (60; 36), (180; 12)\}$.

Задача 36.

Найти НОД двух чисел:

$$\underbrace{11\ldots1}_{100\text{ раз}} \text{ и } 11\,111\,111.$$

Решение.

$$\underbrace{11\ldots1}_{100\text{ раз}} = 11\,111\,111 \cdot k + 1\,111,$$

$$11\,111\,111 = 1\,111 \cdot 10\,001.$$

Ответ: 1 111.

Задача 37.

Найти наибольший общий делитель (НОД) двух чисел: 19 461 377 и 472 397.

Решение.

$$19\,461\,377 = 472\,397 \cdot 41 + 93\,100,$$

$$472\,397 = 93\,100 \cdot 5 + 6\,897,$$

$$93\,100 = 6\,897 \cdot 13 + 3\,439,$$

$$3\,439 = 19 \cdot 181.$$

Ответ: 19.

Задача 38.

Найти наибольший общий делитель (НОД) двух чисел: 1 486 276 и 343 751.

Решение.

$$1\,486\,276 = 343\,751 \cdot 4 + 111\,272,$$

$$343\,751 = 111\,272 \cdot 3 + 9\,935,$$

$$111\,272 = 9\,935 \cdot 11 + 1\,987,$$

$$9\,935 = 1\,987 \cdot 5.$$

Ответ: 1 987.

Задача 39.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, (x, y) — наибольший общий делитель чисел x и y.

$$\begin{cases}(x, y) = 6, \\ x + y = 42.\end{cases}$$

Решение.

Из условия $(x, y) = 6$ делаем вывод, что $x = 6u$, $y = 6v$, $(u, v) = 1$. Так как $x + y = 42$, то $6u + 6v = 42$, $u + v = 7$. Возможны случаи:

$$u = 1,\ v = 6;\ \ u = 2,\ v = 5;\ \ u = 3,\ v = 4;$$

$$u = 4,\ v = 3;\ \ u = 5,\ v = 2;\ \ u = 6,\ v = 1.$$

Ответ: $\{(6; 36), (12; 30), (18; 24), (24; 18), (30; 12), (36; 6)\}$.

Задача 40.

Решить систему уравнений, где $x \in N$, $y \in N$, (x, y) — наибольший общий делитель чисел x и y.

$$\begin{cases}(x, y) = 3, \\ x = 6.\end{cases}$$

Решение.

Из условия $(x, y) = 3$ делаем вывод, что $x = 3u$, $y = 3v$, $(u, v) = 1$. Так как $x = 6$, то $u = 2$ и $(2, v) = 1$. Очевидно, что $v = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, $y = 2\,(2n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Ответ: $\{(6; 3\,(2n + 1)),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Задача 41.

Найти два числа, зная их разность (66) и общее наименьшее кратное (360).

Решение.

Обозначив искомые числа через M и N, а их наибольший общий делитель через d, мы можем записать:

$$M = xd,\ \ N = yd, \tag{1}$$

где x и y — взаимно простые числа.

По условию имеем

$$M - N = xd - yd = 66,\ \ MN = 360 \cdot d$$

$$\text{или } (x - y)\,d = 66,\ \ xyd = 360. \tag{2}$$

Так как x и y — числа взаимно простые, то d является наибольшим общим делителем чисел 66 и 360

Отсюда $d = 6$.

Подставив в (2), получим

$$x - y = 11, \quad xy = 60.$$

Решив эту систему, найдем:

$$x = 15, \quad y = 4 \text{ и, следовательно,}$$

$$M = 90, \quad N = 24.$$

Задача 42.

Найти все пары натуральных чисел, больше 0 и меньших 180, таких, что их НОД равен 6, а разность положительна и является точным квадратом.

Решение.

Искомые пары чисел представим в виде $(6n, 6k)$, где $k, n \in N$. При этом $\frac{n}{k}$ — несократимая дробь. Кроме того, $6n < 180$, т.е. $n < 30$, $k < 30$. Следовательно, $6n - 6k = m^2$ $n - k = \frac{m^2}{6}$, т.е. $\frac{m^2}{6}$ — целое.

Имеем два случая:

а) $n - k = \frac{6^2}{6} = 6$, откуда $n = k + 6$ и для взаимно простых чисел n и k, меньших 30 получаем набор (7; 1); (11; 5); (13; 7); (17; 11); (19; 13); (23; 17); (25; 19); (29; 23). Таким образом, искомые пары (6; 6); (42; 6); (66; 30); (78; 42); (102; 66); (114; 78); (138; 102); (150; 114); (174; 138); (150; 6); (174; 3)

Задача 43.

Доказать, что квадрат любого простого числа, кроме 2 и 3, при делении на 24 дает в остатке 1.

Решение.

Пусть p — любое простое число, причем $p > 3$.

$$p^2 = (p^2 - 1) + 1.$$

Покажем, что $p^2 - 1$ делится на 24, откуда и будет следовать утверждение задачи.

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1).$$

Так как p — простое число и $p > 3$, то p — нечетное число, заведомо не делящееся на 3. Тогда одно из чисел $p - 1$ или $p + 1$ обязательно делится на 3. Каждое из них делится на 2, а так как среди двух последовательных четных чисел одно всегда делится на 4, то $p^2 - 1$ делится на 8.

Задача 44.

Доказать, что всякое простое число при делении на 30 дает в остатке снова простое число.

Решение.

Пусть $p = 30n + m$, где p — простое число, а m — остаток, $m < 30$ и m — нечетное число. Тогда m может делиться лишь на числа, отличные от 3 и 5. Если же $m = m_1 \cdot m_2$, где $m \geqslant 7$, то $m_2 = 1$ или $m_2 \geqslant 7$. Второй случай, очевидно, отпадает, значит, m — простое число.

3. ЧИСЛА

Задача 1.

Может ли двузначное число равняться сумме своих цифр?

Решение.

Пусть существует такое число $\overline{ab}$. Тогда $\overline{ab} = a + b$, или $10a + b = a + b$ и $9a = 0$, $a = 0$. Значит, такого числа нет.

Задача 2.

Доказать, что частное от деления двузначного числа на сумму его цифр не более 10.

Доказательство.

Рассмотрим отношения

$$\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10a+b}{a+b} = \frac{9a+a+b}{a+b} = 1 + \frac{9a}{a+b}.$$

В правой части этого равенства дробь, не большая, чем 9, поэтому левая часть не больше 10.

Задача 3.

Найти двузначное число, которое в 9 раз больше, чем цифра его единиц.

Решение.

Пусть $\overline{ab} = 9b$, тогда $10a + b = 9b$, $5a = 4b$. Отсюда $a \neq 0$ и $b \neq 0$, a делится на 4, b делится на 5. Условию задачи удовлетворяет только пара цифр $a = 4$, $b = 5$.

Ответ: 45.

Задача 4.

Найти цифры x и y пятизначного числа, которое в десятичной системе записывается так: $42x4y$, если известно, что это число делится на 72.

Решение.

Первая цифра частного 5, так как $72 \cdot 6 = 432 > 42x$.

Вторая цифра частного 8 или 9.

1) Если вторая цифра частного 8, то полученное в остатке трехзначное число $(x + 2)\,8y$ должно делиться на 72. Из таких чисел только 288 имеет цифру десятков 8

$$\begin{array}{r|l} 42x4y & 72 \\ \cline{2-2} 360 & 58 \\ \cline{1-1} 6x4 & \\ 576 & \\ \hline (x+2)\,8y & \end{array}$$

$$x + 2 = 2; \quad x = 0; \quad y = 8.$$

2) Если вторая цифра частного 9, то имеем: $(x - 5)\,6y$ кратно 72; по цифре 6 находим, что это число 360.

$$\begin{array}{r|l} 42x4y & 72 \\ \cline{2-2} 360 & 59 \\ \cline{1-1} 6x4 & \\ 648 & \\ \hline (x-5)\,6y & \end{array}$$

$$x - 5 = 3; \quad x = 8; \quad y = 0.$$

Задача 5. Найти все простые числа p такие, что $p^2 + 8$ — простое число.

Решение.

Всякое простое число $p > 3$, имеет один из следующих видов:

1) $p = 3k + 1$;
2) $p = 3k + 2$.

Пусть $p = 3k + 1$, тогда $(3k + 1)^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 9$. Это число делится на 3, и, значит не является простым. Пусть теперь $p = 3k + 2$, тогда $(3k + 2)^2 + 8 = 9k^2 + 12k + 12$ делится на 3, то есть опять не простое число.

Наконец, рассмотрим два оставшихся простых числа: $p = 2$ и $p = 3$. Если $p = 2$, то $p^2 + 8 = 12$ — число не простое. При $p = 3$ имеем $p^2 + 8 = 17$ — число простое.

Ответ: $p = 3$.

Задача 6.

Доказать, что если разность, полученная от вычитания числа, выраженного тремя последними цифрами данного числа, из числа, выраженного всеми остальными цифрами (или наоборот), равна 0, или делится на 7, на 11, на 13, то все данное число делится соответственно на 7, или на 11, или на 13 (Признак делимости на 7, на 11, на 13)

Решение.

Пусть дано число A. Обозначим число, выраженное тремя последними цифрами числа A через N, а число, выраженное всеми остальными числами через M. Имеем: $A = M \cdot 1000 + n$. Число 1001 + 1 делится на 7, и на 11, и на 13. Заметив это преобразуем полученную сумму:

$$A = M(1000 + 1) - M + N,$$

которую можно записать.

$$A = M \cdot 1000 + 1 + (M - N), \text{ если } M > N \text{ и}$$

$$A = M \cdot 1000 + 1 + (N - M), \text{ если } M < N.$$

Так как $M \cdot 1001$ всегда делится на 7, на 11, на 13, то для того, чтобы A делилось на 7, на 11, на 13 необходимо и достаточно, чтобы разность $(M - N)$ или $(N - M)$ делилось соответственно на 7, на 11, на 13.

Задача 7.

Число $\overline{aabb}$ — полный квадрат. При каких a и b это возможно?

Решение.

Рассмотрим числа вида $\overline{aabb}$. Они, безусловно, делятся на 11, поэтому число $10x + y$, в котором $(10x + y)^2 = \overline{aabb}$, тоже должно делиться на 11. Кроме того, $10x + y > 31$.

Так как произведение двух последних цифр квадрата целого числа — четное число, то условие задачи могут удовлетворить только четные числа 44, 66, 88. Непосредственной проверкой устанавливаем, что искомое число 88, значит, $a = 7$, $b = 4$.

Свойства целых чисел, используемые для решения непосредственной задачи, сформулируем как отдельную задачу.

Задача 8.

Найти трехзначное число, квадрат которого является пятой степенью числа, образованной суммой его цифр.

Решение.

$$(x + y + z)^5 = (100x + 10y + z)^2.$$

Установить, сколько трехзначных чисел будет пятой степенью целого числа.

$$2^5 = 32, \quad 3^5 = 243, \quad 4^5 = 1024.$$

Поэтому существует только одно трехзначное число, которое может удовлетворить условию задачи. Действительно:

$$2 + 3 + 4 = 9, \text{ а } 9^5 = 243^2.$$

Задача 9.

Найти все целые слагаемые n, при которых число $2^n - 1$ делится на 7. Найдутся ли целые слагаемые значения n, при которых число $2^n + 1$ делится на 7?

Решение.

Если $n = 3k$, то выражение $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$ будет делиться на 7. При $n = 3k + 1$ имеем $2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 8^k - 1 =$ $= (8^k - 1) + 8^k$ — выражение, которое не делится на 7. Так как 2^{3k} можно представить, как $7m + 1$, то при $n = 3k + 2$ выражение $2^{3k+2} - 1 = 4 \cdot 2^{3k} - 1 = 4\,(7m + 1) - 1 = 28m + 3$. Значит, если $n = 3k + 2$, выражение $2^n - 1$ при делении на 7 дает в остатке 3.

Ответ на второй вопрос задачи негативен. Если $n = 3k$, выражение $2^n + 1 = 2^{3k} + 1 = 7m + 2$ в результате деления на 7 дает в остатке 3. Если же $n = 3k + 2$, то

$$2^n + 1 = 2^{3k+2} + 1 = 4\,(7m + 1) + 1 = 28m + 5.$$

Это число вследствие деления на 7 дает в остатке 5.

Задача 10.

Доказать, что натуральное число, сумма цифр которого равняется 15, не может быть квадратом целого числа. Может ли число, записанное в каком-нибудь порядке с помощью произвольного множества нулей и 30 единиц, быть квадратом целого числа?

Решение.

Данные числа делятся на 3, но не делятся на 9. Поэтому они не могут быть квадратами целых чисел.

Задача 11.

Найдите четырехзначное число, которое увеличивается в 4 раза при перестановке его цифр в обратном порядке.

Решение.

$4\,\overline{abcd} = \overline{dcba}$. Отсюда a — четно. Если $a + 2$, то $d = 8$. Других значений a и d иметь не могут, так как при $a > 2$ после умножения на 4 получается пятизначное число, а при $d \neq 8$ после умножения на 4 не получается на конце цифры 2. Тогда $b < 3$, так как иначе $d > 8$. Итак, $b = 1$ или $b = 2$. Если $b = 1$, то $4 \cdot \overline{21c8} = \overline{8c12}$. Отсюда

$$8000 + 400 + 40c + 32 = 8000 + 100c + 12,\ 60c = 420,\ c = 7.$$

Искомое число 2178.

Если $b = 2$, то $4\ \overline{22c8} = \overline{8c22}$,

$$8000 + 800 + 40c + 32 = 8000 + 100c + 88\ —$$

уравнение не имеет целых решений.

Задача 12.

Доказать, что в любом тридцатизначном числе, в записи которого участвуют только цифры 1, 2 и 3 можно найти две тройки из подряд стоящих цифр, таких, что образованные ими трехзначные числа равны.

Решение.

В тридцатизначном числе троек из подряд стоящих цифр 28. Из цифр 1, 2 и 3 можно составить не более 27 различных трехзначных чисел. Таким образом, из 28 трехзначных чисел, по крайней мере, два равны.

Задача 13.

Существует ли натуральное число, которое в 1995 раз больше суммы своих цифр?

Решение.

Пусть число b в 1995 раз больше суммы своих цифр, которую мы обозначим через S: $b = 1995S$. Но $b - S$ делится на 9 (именно это свойство используется при выведении признака делимости на 9), поэтому $1995S$ делится на 9, а тогда и S делится на 9.

Поэтому мы можем искать требуемые в условии числа, последовательно умножая 1995 на 9, 18, 26 и т.д. Вторая попытка приводит к цели: $1995 \cdot 18 = 35910$.

Задача 14.

Двузначное число разделили на однозначное и к частному прибавили то же самое однозначное число, после чего получилось обратное к данному двузначное число. Найти все такие двузначные числа.

Решение.

Пусть $\dfrac{10a+b}{c} + c = 10b + a$,

т.е. $10a + b + c^2 = 10bc + ac$, $(10 - c)\,a + c^2 = b\,(10c - 1)$. При $c \in \{1, 4, 7\}$ правая часть делится на 3, а левая не делится, так что равенство не выполняется. При $c = 2$ $8a + 4 = 19b$, так что b делится на 4, и поскольку $8a + 4 \leqslant \leqslant 76$, то $b = 4$, $a = 9$, при $c = 3$ имеем $29b = 7a + 9 \leqslant 72$, откуда $b \in \{1, 2\}$, но равенство $29 = 7a + 9n$ при целом a не выполняется, а из $58 = 7a + 9$ получаем $a = 7$.

При $c = 5$, $c = 6$ и $c = 8$ имеем

$$5a + 25 = 49b, \quad 4a + 36 = 59b, \quad 2a + 64 = 79b,$$

откуда соответственно

$$49b \leqslant 70, \quad 59b \leqslant 72, \quad 79b \leqslant 82,$$

т.е. $b \leqslant 1$. Но при $b = 1$ эти равенства не выполняются.

Наконец, при $c = 9$ имеем $a + 81 = 89b$, откуда $b = 1$, $a = 8$. Таким образом, искомые числа – 94, 72 и 81.

Задача 15.

Определить несократимую дробь, которая не изменяет своей величины от прибавления к числителю 21, а к знаменателю 28.

Решение.

Обозначим эту дробь $\frac{m}{n}$, тогда $\frac{m+21}{n+28} = \frac{m}{n}$;

$$mn + 21n = mn + 28m;\ \ 21n = 28m;\ \ \frac{m}{n} = \frac{3}{4}.$$

Задача 16.

Найти цифры x, y, z, если $\sqrt{\overline{xyz}} = z\sqrt{x+y}$.

Решение.

Данное равенство означает, что

$$z^2(x+y) = 10\,\overline{xy} + z \text{ или } z^2(x+y) - 10\,\overline{xy} = z.$$

Если число z не делится на 3, то z^2 при делении на 3 дает остаток 1, а тогда левая часть полученного равенства делится на 3, поскольку числа $x + y$ и $10\,\overline{xy}$ при делении на 3 дают одинаковые остатки. Полученное противоречие показывает, что z делится на 3, а тогда $\overline{xy}$ и $x + y$ делится на 3.

Следовательно, число $\overline{xyz} = z^2(x+y)$ делится на 27, а возможные значения частного: 17, 18, 19, 27, 28, 29, поскольку лишь в этих случаях последняя цифра произведения делится на 3. Проверка этих чисел показывает, что условию задачи удовлетворяет единственный набор цифр: $x = 7$, $y = 2$, $z = 9$.

Задача 17.

Найти цифры x, y, z, если $\sqrt{\overline{xyz}} = (x+y)\sqrt{z}$.

Решение.

Данное равенство означает, что $(x+y)^2z = 10\,\overline{xy} + z$, или $((x+y)^2 - 1)\,z = 10\,\overline{xy}$.

Если число $\overline{xy}$ не делится на 3, то $x + y$ не делится на 3, а $(x+y)^2$ при делении на 3 дает остаток 1. Но тогда левая часть полученного равенства делится на 3, и мы пришли к противоречию. Следовательно, $\overline{xy}$, а значит, $x + y$ и z делятся на 3.

Если $x + y$ принимает значения 12, 15, 18, то $\overline{xy}$ делится соответственно на 143, 224, 323, а тогда $\overline{xy}$ делится на 143, 112, 323, что невозможно, так как $\overline{xy}$ — двузначное число.

При $x + y = 3$ имеем равенство $8z = 10\,\overline{xy}$, что невозможно, так как z — однозначное, а $\overline{xy}$ — двузначное число. При $x + y = 6$ имеем $7z = 2\,\overline{xy} = 20x + 2y = 18x + 12$, откуда z делится на 6, $z = 6$, $30 = 18x$, что невозможно.

Наконец, при $x + y = 9$ имеем $8z = \overline{xy} = 9x + 9$, откуда $z = 9$, $x = 7$, $y = 2$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяет единственный набор цифр: $x = 7$, $y = 2$, $z = 9$.

Задача 18.

Решить уравнение $\overline{1x} + \overline{2x} = \overline{x6}$.

Решение.

$$10 + x + 20 + x = 10x + 6, \quad x = 3.$$

Задача 19.

Решить уравнение $\overline{x4} + \overline{x7} = \overline{1x1}$.

Решение.

$$10x + 4 + 10x + 7 = 100 + 10x + 1, \; x = 4$$

Задача 20.

Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n - m}{5n + 2n}$, если известно, что она сократима?

Решение.

Из условия задачи следует, что $3n - m = kp$ и $5n - 2m = kq$, где p и q — взаимно просты. Умножая первое уравнение на 2 и складывая со вторым, получим $11n = k\,(2p + q)$, умножая первое на 5, второе на 3 и складывая, получим $11m = k(-5p + 3q)$. Из полученных уравнений не сложно вывести, что k делится на 11 и $k = 11$.

Ответ: дробь $\dfrac{3n - m}{5n + 2n}$ можно сократить на 11.

Задача 21.

Найти пятизначное число, которое в 45 раз больше произведения его цифр.

Решение.

Путь выполняется равенство

$$m = \overline{abcde} = 45 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e.$$

Тогда все цифры числа m нечетные — иначе не делится на 10, т.е. $e = 0$ и $m = 0$, что неверно. Отсюда следует, что $e = 5$, так что m делится на 25, и поэтому $d = 7$.

Из того, что m делится на 9, получаем, что $a + b + c + 12$ делится на 9, откуда следует, что $a + b + c = 15$.

Кроме того, из неравенства $45 \cdot 35\, abc < 100000$ следует, что $abc \leqslant 63$.

Из последних двух условий перебором находим две возможные тройки чисел a, b, c — это 1, 7 и 7 и 1, 5, 9.

Для первой тройки имеем равенство

$$77175 = 45 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 5,$$

и, следовательно, число 77175 удовлетворяет условию задачи; вторая тройка условию задачи не удовлетворяет.

Таким образом, искомое число равно 77175.

Задача 22.

Если к некоторому пятизначному числу приписать слева цифру 6, то получится число в 4 раза больше, чем получилось бы, если цифру 6 приписать справа. Найти это число.

Решение.

По условию $\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} abcde6 \\ 4 \end{array} \\ \hline 6abcde \end{array}$.

Осуществляя умножение, последовательно находим цифры данного числа:

$$e = 4, \quad d = 8, \quad c = 3, \quad b = 5, \quad a = 1.$$

Итак, искомое число равно 15384.

Задача 23.

Когда четыре последовательных цифры записали одну за другой, а затем две первые цифры поменяли местами, то получилось число, являющееся точным квадратом. Найти это число.

Решение.

Легко видеть, что получившееся число есть одно из чисел: 2134, 3245, 4356, 5467, 6578, 7689.

Первые два из этих чисел не являются точными квадратами, поскольку первое делится на 2, но не делится на 4, а второе делится на 5, но не делится на 25. Третье число равно 66^2. Следующие два числа не являются точными квадратами, так как квадрат числа не может оканчиваться цифрами 7 и 8. наконец, число 7689 также не является точным квадратом, так как оно делится на 3, но не делится на 9.

Таким образом, искомое число равно 4356.

Задача 24.

Определить при каких целых значениях n выражение $n^4 + 4$ является простым числом.

Решение.

Дополним $n^4 + 4$ до полного квадрата:

$$n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 =$$

$$= (n^2 - 2n + 2) \times (n^2 + 2n + 2).$$

Число $n^4 + 4$ может быть простым только в том случае, если либо $n^2 - 2n + 2 = 1$, либо $n^2 + 2n + 2 = 1$. Решая эти уравнения, получим $n = 1$, $n = -1$. При $n = \pm 1$ данное выражение равно 5, т.е. является простым числом.

Ответ: $n = \pm 1$.

Задача 25.

Найти двузначное число, равное неполному квадрату суммы его цифр.

Решение.

По условию

$$10x + y = x^2 + xy + y^2, \text{ или } 10x + y + xy = (x + y)^2.$$

Так как $x \leqslant 9$ и $y \leqslant 9$, то $10x + y + xy \leqslant 180$, а тогда $x + y \leqslant 13$; но при $x + y < 13$, $10x + y + xy \leqslant 130$, значит, $x + y \leqslant 11$.

При $x + y = 10$, $x = 9$, $y = 1$.

При $x + y = 9$, $x + y = 8$, $x + y = 7$, $x + y = 6$, $x + y = 5$ — решений нет.

При $x + y = 4$, $x = 1$, $y = 3$.

Ответ: 91; 63; 13.

Задача 26.

Докажите, что из любых ста целых чисел можно выбрать одно или несколько чисел так, чтобы сумма выбранных чисел оканчивалась двумя нулями.

Решение.

Обозначим заданные числа через $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$ и рассмотрим суммы $S_1 = n_1$, $S_2 = n_1 + n_2$, $S_3 = n_1 + n_2 + n_3, \ldots$, $S_{100} = n_1 + n_2 + \ldots + n_{100}$. Допустим, что ни одна из них не делится на 100. Тогда они при делении на 100 могут дать только 99 различных остатков: 1, 2, 3,..., 99, поэтому обязательно найдутся две суммы, которые дают одинаковый остаток.

Пусть это будет, например, S_{21} и S_{87}. Тогда

$$n_{22} + n_{23} + n_{24} + \ldots + n_{86} + n_{87} = S_{87} - S_{21}$$

делится на 100.

Задача 27.

Если число — точный квадрат, то сумма его цифр или делится на 3 или в результате деления на 3 дает в остатке 1. Доказать это.

Решение.

Любое число можно представить в виде одного из видов: $3k$, $3k-1$, $3k+1$. Квадрат первого выражения делится на 3, квадраты двух других выражений при делении на 3 дают в остатке 1.

Задача 28.

Доказать, что найдется бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы кубов трех натуральных чисел.

Указание. Доказать, что куб любого натурального числа может быть записан в виде $9k$, $9k+1$ или $9k-1$, где $k \in N$. Выведите отсюда, что числа вида $9k+4$ и $9k+5$ непредставимы в виде суммы кубов трех натуральных чисел.

Задача 29.

Докажите, что не существует двух, трех и четырехзначных натуральных чисел, которые увеличиваются в 2 раза от перестановки первой цифры в конец числа.

Доказательство.

Предположим обратное. Тогда имеем

$$\overline{abcd} = 2\,\overline{dcba}, \text{ т.е.}$$

$$1000a + 100b + 10c + d = 2000d + 200a + 20b + 2c.$$

Отсюда $800a + 80b + 8c = 1999d$, или, иначе, $8(100a + 10b + c) = 1999d$. Значит, d делится на 8, т.е. $d = 8$. Тогда $100a + 10b + c = 1999$, что невозможно. Аналогично решается вопрос о трех- и двузначных числах.

Задача 30.

Докажите, что разность между трехзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, не может быть квадратом натурального числа в десятичной системе.

Решение.

Пусть трехзначное число будет $\overline{abc}$, а разность d. Тогда

$$d = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99\,(a - c) =$$

$$= 9 \cdot 11\,(a - c), \text{ так как } a - c < 11, \text{ то } d \neq n^2.$$

Задача 31.

Может ли сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел равняться сумме кубов двух последовательных натуральных чисел?

Решение.

Пусть для натуральных чисел k и n выполняется равенство $(k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 = n^3 + (n+1)^3$ или $n^3 + (n+1)^3 = 3k^2 + 2$. Если число n делится на 3 или дает при делении на 3 остаток 1, то левая часть этого равенства делится на $3n$ дает остаток 2, так что

$$3k^2 + 2 = (3p-1)^3 + 27p^3 = 54p^3 - 27p^2 + 9p - 1,$$

$$k^2 = 18p^3 - 9p^2 + 3p - 1.$$

Отсюда следует, что число k^2 при делении на 3 дает остаток 2, чего быть не может. Следовательно, рассматриваемое равенство невозможно.

Задача 32.

Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, которое делилось бы на число 33...3 (сто троек).

Решение.

Если число $N = \underbrace{111\ldots1}_{m}$ делится на $\underbrace{33\ \ldots\ 3}_{100}$, то N делится на 3 и делится на $B = \underbrace{111\ldots1}_{100}$. Но если A делится на B, то $m = l \cdot 100$. С другой стороны, так как A делится на 3, то m должно делиться на 3, т.е. $m = 3n \cdot 100$. Наименьшее число с таким свойством будет при $m = 300$.

Ответ: число состоит из 300 единиц.

Задача 33.

Может ли

а) сумма пяти последовательных натуральных чисел быть простым числом?

б) сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел быть простым числом?

Решение.

а) Обозначим A — сумму пяти последовательных чисел. Имеем

$$A = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) =$$
$$= 5n + 10 = 5(n + 2).$$

Так как по условию $n \in N$, то $n + 2 \in N$ и $5(n + 2) \in N$, причем $5(n + 2) > 5$. Следовательно, указанная сумма кратна 5, но не равна 5, т.е. A — число составное.

б) обозначим B — суму квадратов пяти последовательных натуральных чисел.

$$B = (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 =$$
$$= 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2).$$

Так как $n \in N$, то $5(n^2 + 2) \in N$ и $5(n^2 + 2) > 5$. Следовательно, число B кратно 5, но не равно 5, т.е. B — число составное.

Задача 34.

Найдите наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 станет квадратом, а после умножения на 3 — кубом натурального числа.

Решение.

Пусть x — наименьшее, натуральное число, такое, что $2x = b^2$, $3x = c^3$, где b и c — натуральные числа. Из равенства $2x = b^2$ следует, что x кратно 2. А так как $3x = c^3$, то x кратно $2^3 = 8$ и кратно $3^2 = 9$, т.е. $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot a^6 = 72a^6$, где a — любое натуральное число. Наименьшее x получаем при $a = 1$.

Ответ: 72.

Задача 35.

Сколькими нулями оканчивается число, равное произведению

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100?$$

Решение.

Число нулей в произведении равно числу множителей 5, а оно равно $20 + 4 = 24$. Значит, число, полученное в произведении оканчивается 24 нулями.

Задача 36.

Найдите два целых числа, разность между которыми минимальна, а их произведение равно 1234567890.

Решение.

Число 1234567890 разлагается на множители следующим образом:

$$2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 3607 \times 3803.$$

Если 3607 мы умножим на 10, а 3803 на 9, то получим два составных множителя: 36070 и 34227, дающих в произведении 1234567890 и обладающих наименьшей разностью.

Задача 37.

Какое число обладает тем свойством, что если его умножить на 16 2, 3, 4, 5 или 6, то в ответе появятся лишь те цифры, которые содержатся в записи исходного числа?

Ответ: 142857

Задача 38.

Найти два числа, разность квадратов которых представляет собой куб, а разность кубов — квадрат?

Каковы два наименьших числа, обладающих этим свойством?

Решение.

$$10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 = 4^3,$$

$$100^3 - 6^3 = 1000 - 216 = 784 = 28^2.$$

Задача 39.

Найдите наименьшее число, которое при последовательном делении на 45, 454, 4545 и 45454 дает в остатке соответственно 4, 45, 454, 4545.

Ответ: наименьшее число, удовлетворяющее всем условиям равно 35 641 667 749.

Другие числа получаются прибавлением к данному любого целого, кратного числу 46 895 573 610.

Задача 40.

Докажите, что если m и m^2+2 простые, то число m^3+2 тоже простое.

Доказательство.

Любое простое число m, отличное от 3, можно представить в виде $3n+1$ или в виде $3n-1$, где $n \in Z$. В первом случае можно записать

$$m^2 + 2 = 9n^2 + 6n + 3$$

во втором случае

$$m^2 + 2 = 9n^2 - 6n + 3.$$

Так как $m \geqslant 2$, то в любом случае m^2+2 больше 3 и делится на 3, значит, m^2+2 — составное. Следовательно, число m^2+2 может быть простым, только если $m = 3$. В этом случае $m^2+2 = 11$ — число простое, $m^3+2=24$ — тоже простое.

Задача 41.

Найти такое трехзначное число, удвоив которое мы получим число, выражающее количество цифр, необходимое для написания всех последовательных целых чисел от 1 до этого трехзначного числа.

Решение.

Обозначив искомое число через x, составим уравнение:

$$9 + 90 \cdot 2 + (x - 99) \cdot 3 = 2x.$$

Ответ: 108.

Задача 42.

Найдите трехзначное число, которое равно квадрату двузначного и кубу однозначного числа.

Решение.

Выпишем все кубы однозначных чисел·

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3.$$

Рассмотрим те из них, которые, являясь трехзначными числами, могут быть равны квадрату двузначных. Очевидно, что 5^3 и 7^3 не могут быть квадратами двузначных чисел (5 и 7 — числа простые).

Разложим на простые множители оставшиеся числа:

$$6^3 = 2^3 \cdot 3^3 \neq a^2;$$

$$8^3 = (2^3)^3 = 2^9 \neq a^2;$$

$$9^3 = (3^2)^3 = 3^6 = (3^3)^2 = 27^2 = 729.$$

Искомое число $729 = 27^2 = 9^3$.

Ответ: 729.

Задача **43.**

Записан первый миллиард натуральных чисел. Какую цифру наиболее часто использовали для записи?

Решение.

Если представить себе эти записи как девятизначные числа, то будем иметь:

$$\begin{array}{c} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{array},$$

т.е. в столбике единиц цифры чередуются последовательно и их будет одно и то же количество. В столбике десятков цифры чередуются десятками. Всех значащих цифр поровну, нулей меньше. Аналогично, что и в последующих столбиках значащих цифр поровну, а нулей меньше. В крайнем левом столбике лишь одна цифра — 1. Итак, в записи минимально нулей, а максимально единиц.

Задача **44.**

Найти все цифры a, b, c, d, если $\overline{aab}^2 = \overline{ccdbdb}$.

Решение.

Так как число $A = \overline{aab}$ и его квадрат оканчиваются одинаковыми цифрами, то b есть одна из цифр 0, 1, 5, 6. При $b = 0$ квадрат числа А оканчивается двумя нулями, то есть $d = 0$, то тогда само число А оканчивается двумя нулями, т.е. $a = 0$, что неверно.

При $b = 5$ имеем $d = 2$, и остаток от деления числа $\underline{cc25}25$ на 8 равен 5, а с другой стороны — $aa5^2 = (2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1 = 8n + 1$ $(n \in N)$ и мы пришли к противоречию.

При $b = 6$

$$A^2 = (100a + 10a + 6)^2 = (110a + 6)^2 =$$
$$= 110k + 36 \quad (k \in N),,$$

так что $A^2 - 3 = \overline{ccd6d3}$ делится на 11. Но тогда по соответствующему признаку делимости получаем, что $2d - 9$ делится на 11, $2d - 1$ делится на 11, откуда $d = 6$.

При умножении столбиком $\overline{aa1}$ на $\overline{aa1}$ можно заметить, что при сложении $a + a$ во втором разряде произведения получается цифра 6, так что a равно либо 3, либо 8. Так как

$$331^2 = 109561, \quad 881^2 = 776161, \text{ то } a = 8.$$

Таким образом, $a = 8$, $b = 1$, $c = 7$, $d = 6$.

Задача 45.

При каких натуральных n число $n^4 + 64^n$ является составным?

Решение.

Ясно, что при n четном число $n^4 + 64^n$ также четно (и больше 2), т.е. является составным.

Если $n = 2k + 1$, то, положив $a = 8^m$, будем иметь:

$$n^4 + 64^n = n^4 + 64a^4 = (n^2 + 8a^2)^2 - 16a^2n^2 =$$
$$= (n^2 - 4an + 8a^2)(n^2 + 4an + 8a^2).$$

При этом $n^2 - 4an + 8a^2 = (n - 2a)^2 + 4a^2 > 1$, так что при любом n рассматриваемое число составное.

Задача 46.

Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых положительных чисел никогда не является квадратом целого числа.

Решение.

Обозначим пять последовательных целых чисел следующим образом: $(n - 2)$, $(n - 1)$, n, $(n + 1)$, $(n + 2)$, тогда $(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5\,(n^2 + 2)$. Для того, чтобы $5\,(n^2 + 2)$ было квадратом, необходимо, чтобы $n^2 + 2$ делилось на 5, т.е. n^2 должно оканчиваться на 3 или 8, что невозможно. Следовательно, $n^2 + 2$ не делится на 5.

Задача 47.

Число 531441 надо разбить на такие числа, чтобы первое из них было 1, второе — в k раз больше, третье — в k раз больше суммы первых двух, четвертое — в k раз больше суммы первых трех и т.д. Последнее число — в k раз больше суммы всех предыдущих. Найти множитель k и число слагаемых, если известно, что оно не менее четырех.

Решение.

Согласно условию задачи, сумма слагаемых представляется так:

$$1 + k + (1 + k)\,k + (1 + k)^2\,k + (1 + k)^3\,k + \ldots +$$
$$+ (1 + k)^{n-1}\,k + (1 + k)^{n-2}\,k = 531441 = 3^{12}.$$

где n — число слагаемых.

Так как последнее слагаемое равно $(1 + k)^{n-2}\,k$, то сумма всех ему предыдущих $(1 + k)^{n-2}$; тогда

$$3^{12} = (1 + k)^{n-2} + (1 + k)^{n-2}k =$$
$$= (1 + k)^{n-2}\,(1 + k) = (1 + k)^{n-1} \text{ или}$$
$$1 + k = \sqrt[n-1]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{n-1}}.$$

Но число слагаемых должно быть не меньше четырех. Проверяем, зная, что $\frac{12}{n-1}$ есть число целое и что делители 12 есть 2, 3, 4, 6, 12:

1) если $n - 1 = 3$, то $n_1 = 4$; тогда $1 + k = 3^4$, $k_1 = 80$;
2) если $n - 1 = 4$, то $n_2 = 5$; тогда $1 + k = 3^3$; $k_2 = 26$;
3) если $n - 1 = 6$, то $n_3 = 7$; тогда $1 + k = 3^2$; $k_3 = 8$;
4) если $n - 1 = 12$, то $n_4 = 13$; тогда $1 + k = 3$; $k_4 = 2$.

Итак, получаем четыре значения для множителя k (80, 26, 8, 2) и соответственно им возможное число слагаемых (4, 5, 7, 13).

Задача **48.**

Какие значения может принимать сумма цифр квадрата натурального числа?

Решение.

Если n делится на 3, то n^2 делится на 9, так что сумма цифр n^2 делится на 9. Если n не делится на 3, то n^2, а значит и сумма цифр n^2 дают при делении на 3 остаток 1. Следовательно, сумма цифр числа n^2 имеет вид $9k$ или $3k + 1$.

С другой стороны, при любом k

$$\underbrace{33\ldots3}_{k}{}^2 = \underbrace{11\ldots1}_{k-1}\underbrace{88\ldots89}_{k-1}$$

и последнее число имеет сумму цифр $9k$, а при $k > 1$

$$\underbrace{33\ldots3}_{k-1}2^2 = \underbrace{11\ldots1}_{k-1}\underbrace{22\ldots24}_{k-1}$$

и последнее число имеет сумму цифр $k - 1 + 2(k - 1) + 4 = 3k + 1$.

Наконец, для $k = 1$ сумму цифр 4 имеет квадрат числа 2.

Таким образом, сумма цифр квадрата натурального числа принимает все значения вида $9k$ и $3k + 1$ ($k \in N$) и не принимает значений другого вида.

Задача 49.

Найти наименьшее простое число, которое может быть представлено в виде суммы двух, трех, четырех и пяти простых слагаемых.

Решение.

Наименьшая сумма пяти простых слагаемых равна, очевидно, 10, и поэтому искомое простое число a не меньше 11 Однако $11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 5 + 6 = 7 + 4$ не может быть представлено в виде суммы двух простых чисел и следовательно, $a \neq 11$ С другой стороны,

$$13 = 2 + 11 = 3 + 3 + 7 = 2 + 2 + 2 + 7 =$$
$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 5$$

удовлетворяет условию задачи, и поэтому $a = 13$.

Если считать, что все слагаемые различны, то искомое число должно быть не меньше, чем

$$3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 39$$

(заметим, что числа 2 среди слагаемых не должно быть, так как по условию число a нечетно), так что $a \geqslant 41$. Но 41 нельзя представить в виде суммы, например, двух простых слагаемых.

Следующая по величине сумма пяти простых слагаемых получается, если заменить 13 — наибольшее из слагаемых — на 17 (следующее простое число), и эта сумма равна 43. Подбором убеждаемся, что

$$43 = 2 + 41 = 7 + 17 + 19 = 2 + 5 + 17 + 19 =$$
$$= 3 + 5 + 7 + 11 + 17$$

Следовательно, искомое число a равно 43.

Задача 50.

Запишите произвольное целое число n с помощью трех двоек, используя математические знаки и символы.

Решение.

При $n > 0$ $\quad n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n \text{ радикалов}}$, при $n<0 \quad n = \log_2 \log_2 \sqrt{\underbrace{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}_{n \text{ радикалов}}}\,,$

при $n=0 \quad n = \log_2 \log_2 2.$

Задача 51.

Число начинается цифрой 4. Если ее переставить с первого на последнее место, число уменьшится в 4 раза. Найти число.

Решение.

$$\overline{4\quad a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots 4} = \overline{4 a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots}$$

Перепишем условие:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots 4} = \overline{4 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots} : 4.$$

Итак, $a_1 = 1$, т.е.

$$\overline{1 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots 4} = \overline{4\, 1\, a_2 a_3 a_4 \ldots}\quad 4.$$

Но единица не делится на 4, значит, $a_2 = 0$ и

$$\overline{1\, 0\, a_3 a_4 a_5\ \ldots 4} = \overline{4\quad 10\, a_3 a_4 a_5\ \ .\, 4}$$

10 при делении на 4 дает остаток 2 и частное 2, поэтому $a_3 = 2$, потому

$$\overline{1\,0\,2\, a_4 a_5 \ldots 4} = \overline{4 \cdot 1\,0\,2\, a_4 a_5 \ldots} : 4.$$

Аналогично, $a_4 = 5, \quad a_5 = 6.$

Ответ: 410256.

Задача 52.

Решить уравнение

$$\overline{xyz+u} = x^5 + y^4 + z^3 + t^2 + u.$$

Решение.

Так как x, y, z, t, u — цифры, причем $x>0$, то

$$x^5 < 10^4 x, \quad y^4 \leqslant 10^3 y, \quad z^3 \leqslant 10^2 z, \quad t^2 \leqslant 10t.$$

И поэтому правая часть уравнения меньше числа

$$10^4 x + 10^3 y + 10^2 z + 10 + + u = \overline{zyz+u}.$$

Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Задача 53.

Доказать, что число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n (так числа 111 и 222 делятся на 3).

Решение.

Если число составлено из 3-х одинаковых цифр $\overline{a\,a\,a}$ (черта поставлена сверху, чтобы не путать число это с произведением), то сумма его цифр $3a$ делится на 3^n. Число, составленное из 3^{n+1} одинаковых цифр, можно представить в виде

$$\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ цифр}}\ \underbrace{aa\ldots a}_{3^n}\ \underbrace{aa\ldots a}_{3^n} = \underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ цифр}} \cdot 1\underbrace{000\ldots 01}_{3^n}\ \underbrace{000\ldots 01}_{3^n}$$

Но первый сомножитель делится на 3^n в силу предположения, а второй сомножитель делится на 3, следовательно, само число $\underbrace{\overline{aaa\ldots a}}_{3^{n+1} \text{ цифр}}$ делится на 3^{n+1}.

Задача 54.

Найти такое трехзначное число, удвоив которое, мы получим число, выражающее количество цифр, необходимых для написания всех последовательных целых чисел от 1 до этого трехзначного числа.

Решение.

Обозначив искомое число через x, составим уравнение

$$9 + 90 \cdot 2 + (x - 99)\,3 = 2x;$$

$$x = 108.$$

Ответ: 108.

Задача 55.

Доказать, что у числа, являющегося точным квадратом, произведение двух последних цифр четно.

Решение.

Пусть число B является точным квадратом числа

$$A = a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Две последние цифры числа B получаются при умножении числа $a_1 10 + a_0$ на себя. Если a_0 — четное число, то утверждение справедливо. Пусть теперь a_0 — нечетно, тогда легко проверить, что у a_0^2 вторая цифра всегда четная. Вторая же цифра числа B получается, если ко второй цифре числа $2a_1a_0 10$ добавить вторую цифру числа a_0^2 и, быть может, полученную суму уменьшить на число, кратное 10, следовательно, если a_0 — нечетно, то вторая цифра числа будет четным числом.

Задача 56.

Найдите два простых двузначных числа, состоящих из одних и тех же цифр, если разность между этими числами равна полному квадрату.

Решение.

1 число: $10x + y$, $1 \leqslant x$, $y \leqslant 9$.

2 число: $10y + x$, $1 \leqslant y$, $x \leqslant 9$.

Составим уравнение

$$(10x + y) - (10y + x) = n^2, \quad 9\,(x - y) = n^2,$$

откуда $x - y = 1$ или $x - y = 4$. Если $x - y = 1$, то одно двузначное число будет четным и, следовательно, составным, значит, $x - y = 4$. Тогда $x \geqslant y$. Если $x = 5$, то $y = 1$, то 51 — составное число. Если $x = 7$, то $y = 3$. Тогда одно число 73, второе 37. Их разность $73 - 37 = 36 = 6^2$. Если $x = 9$, то $y = 5$, то 95 — составное число. Итак, искомые числа 73 и 37.

Задача 57.

Если p и q — простые числа близнецы $(p - 1 = q + 1)$, то $p^p + q^q$ кратно $p + q$. Доказать.

Решение.

Пусть $p > q$; p и q — нечетные.

По формуле:

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + b^{m-1})$$

имеем:

$$p^p - 1 = (p - 1)(p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + 1) = (p - 1)(2k + 1),$$

так как $p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + 1$ — число нечетное.

По формуле (для нечетного m):

$$a^m + b^m = (a + b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \ldots + b^{m-1})$$

имеем:

$$q^q + 1 = (q + 1)(q^{q-1} - q^{q-2} + q^{q-3} - \ldots + 1) = (q + 1)(2n + 1).$$

Здесь k и n — целые числа. Значит,

$$p^p + q^q = (p^p - 1) + (q^q + 1) = (p - 1)(2k + 1) + (q + 1)(2n + 1) =$$
$$= 2(p - 1)(k + n + 1) = (p - 1 + q + 1)(k + n + 1) =$$
$$= (p + q)(k + n + 1).$$

Из этого следует, что $p^p + q^q$ делится на $p + q$.

Замечание: Сформулированное в задаче предложение имеет место и для любых нечетных натуральных p и q таких, что $p = q + 2$.

Задача 58.

Дано шестизначное число, делящееся на 7. Доказать, что число, полученное из него перестановкой последней цифры на место начальной, также делится на 7.

Решение.

Пусть $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{6n}$ — данное число, $a_{6n} a_1 a_2 \ldots a_{6n-1}$ — число, полученное перестановкой последней цифры на первое место.

Заметим, что $10^{6n} - 1$ делится на 7. Действительно, $10^3 + 1 = 1001$ делится на 7, а $10^{6n} - 1$ всегда делится при $n > 0$ на $10^3 + 1$.

Рассмотрим число $a_{6n}(10^{6n} - 1)$, которое делится на 7.

Тогда

$$a_{6n}\left(10^{6n}-1\right)+a_1 a_2 \ldots a_{6n}=a_{6n} a_1 a_2 \ldots a_{6n-1} 0$$

также делится на 7. Отсюда, очевидно, следует, что $a_{6n} a_1 a_2 \ldots a_{6n-1}$ делится на 7.

Задача 59.

Если n — произвольное число, то существует число, кратное n, записанное с помощью двоек и нулей. Доказать.

Решение.

При делении любого целого числа на n остаток либо равен нулю, либо меньше n.

Если среди n различных чисел, написанных только двойками: 2, 22, 222,..., $\underbrace{222\ldots2}_{n}$ найдется число, кратное n, тогда остается приписать справа один или несколько нулей и положение доказано. Если же среди этих чисел не будет числа, кратного n, то по крайней мере два числа при делении на n дадут одинаковые остатки, ибо остатки будут 1, 2,..., $n-1$, чисел n. Разность этих двух чисел кратна n и состоит из двоек и нулей.

Задача 60.

Вычеркнуть 100 цифр из числа:

123456789101112...9899100

так, чтобы полученное число было наибольшим.

Решение.

При вычеркивании цифр надо учитывать, что цифры нельзя переставлять и что наибольшее число будет получаться, если в старшем разряде будет 9 единиц.

Вычеркиваем первые 8 цифр, затем от 10 до 18 и единицу у числа 19, то есть еще 19 цифр и т.д. до 4 у числа 49. Итого вычеркнуто цифр: $8+19+19+19+19=84$. Вычеркиваем далее 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, и цифры 5 у 57 и 58.

Остается число:

9999978596061...9899100.

Задача 61.

Найти положительное четырехзначное число, кратное 7 и представляющее собой сумму куба и квадрата некоторого целого числа.

Решение.

Из условия, что $x = y^2 + y^3$ и x является четырехзначным числом, следует, что

$$1000 \leqslant y^2 + y^3 \leqslant 10000,$$

$$1000 \leqslant y^2(1 + y) \leqslant 10000.$$

При $y = 9$ $x = 810$, при $y = 10$ $x = 1100$.

С увеличением y в 2 раза x увеличивается примерно в 8 раз.

Рассмотрим:

$$y = 20; \quad x = 8400;$$
$$y = 21; \quad x = 9702;$$
$$y = 22; \quad x = 11132.$$

Поэтому $9 < y < 22$.

Так как $x = y^2(y + 1)$ и это число должно быть кратно 7, то хоть один из двух множителей y^2 и $(y + 1)$ должен быть кратен 7.

Из значений y, удовлетворяющих этому условию, остаются 13, 14, 20 и 21.

Ответ: $13^2(13 + 1) = 2366$; $14^2(14 + 1) = 2940$; $20^2\,21 = 8400$; $21^2\,22 = 9702$.

Задача 62.

Какое из двух чисел больше:

$19931993 \cdot 199419941994$ или $19941994 \cdot 199319931993$?

Решение.

Обозначив числа 1993 и 1994 соответственно через a и b, заметим, что данные числа равны

$$a \cdot 10001 \cdot b \cdot 10001001 \text{ и } b \cdot 10001 \cdot a \cdot 100010001,$$

т.е. равны между собой.

Задача 63.

Сколько цифр имеет число 2^{100}?

Решение.

$$2^{100} = x.$$

Тогда $\lg x = 100 \lg 2 = 100 \quad 0{,}3010 = 30{,}1$
Число имеет 31 цифру.

Задача 64.

Доказать истинность числового равенства

$$3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot (1 + 2^{2^n}) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

Решение.

Пусть $P = (1 + 2)(1 + 2^2)(1 + 2^{2^2}) \cdot \ldots \cdot (1 + 2^{2^n})$.
Умножив обе части на $(1 - 2)$, получим

$$-P = (1 - 2^2)(1 + 2^2)(1 + 2^{2^2}) \cdot \ldots \cdot (1 + 2^{2^n}) =$$

$$= (1 - 2^{2^2})(1 + 2^{2^2}) \cdot \ldots \cdot (1 + 2^{2^n}) = 1 - 2^{2^{n+1}}.$$

Следовательно, $P = 2^{2^{n+1}} - 1$.

Задача 65.

Найти три последние цифры разности

$$19^{70} - 18^{70}.$$

Решение.

$$18^{70} = (20 - 2)^{70} = 1000M + 35 \cdot 69 \cdot 20^2 \cdot 2^{68} -$$

$$- 70 \cdot 20 \cdot 2^{69} + 2^{70} = 1000M + 69 \cdot 1400 \cdot 2^{68} - 1400 \cdot 16^{17} \cdot 2 +$$

$$+ (2^{10})^7 = 1000M_1 - 800 + (1000 + 24)^7 = 1000M_2 + 200 +$$

$$+ 24^7 = 1000M_2 + 200 + (500 + 76)^3 \cdot 24 = 1000M_3 +$$

$$+ 200 + 76^3 \cdot 24 = 1000M_4 + 624.$$

Аналогично, $19^{70} = (20 - 1)^{70} = 1000N + 601$.

Следовательно, $19^{70} - 18^{70} = 1000T + 977$.

Задача 66.

Могут ли числа $x^2 + y$ и $y^2 + x$, одновременно быть точными квадратами $(x, y \in N)$?

Решение.

Если $x < y$, то $y^2 < y^2 + x < y^2 + y < (y + 1)$, так что число $y^2 + x$ находится между двумя точными квадратами. Аналогично получаем, что при $x > y$ число $x^2 + y$ не может быть точным квадратом.

Задача 67.

Девятизначные числа, записанные цифрам 1, 2, 3 разбили на три множества, причем числа, отличающиеся во всех разрядах, попали в разные множества, а числа 121322313, 222333111, 333111222 попали в множества A, B, C. В какое множество попало число 131322313?

Решение.

Числа $d = 313111222$ и $a = 121322313$ отличаются во всех разрядах, так что $d \notin A$. Точно так же получаем, что $d \notin B$, и поэтому $d \in C$. Аналогично, число $e = 212233131$ не принадлежит ни A, ни C, так что $e \in B$. Данное число $f = 131322313$ отличается во всех разрядах и от d, и от e, и поэтому $f \in A$.

Задача 68.

Какое наибольшее и наименьшее значение принимает отношение двузначного числа к сумме его цифр?

Решение.

Пусть x, y — соответственно первая и вторая цифры двузначного числа. Так как $x \neq 0$, то рассматриваемое отношение $t = \dfrac{10x + y}{x + y} = 1 + \dfrac{9x}{x + y} = 1 + \dfrac{9}{1 + \frac{y}{x}}$.

Отсюда видно, что t тем больше, чем меньше отношение $\frac{y}{x}$, и поэтому наибольшее значение $t = 10$ получается при

$y = 0$ и любом x, а наименьшее $t = 1{,}9$ — при $\frac{y}{x} = 9$, т.е. при $x = 1$, $y = 9$.

Задача 69.

Дано 1989 положительных чисел. Известно, что произведение любых 22 из них больше 1. Докажите, что произведение всех данных чисел больше 1.

Решение.

Разобьем все числа подряд на группы по 22 числа. Получим 90 групп. Произведение всех чисел в каждой группе больше единицы. Кроме того, у нас осталось еще 9 чисел. Выберем в первых 9 группах по одному наибольшему числу. Каждое выбранное число больше единицы. Оставшиеся первоначально после объединения 9 чисел распределим в каждую из групп по одному. Так что в них вновь станет по 22 числа. Значит, произведение чисел в каждой группе больше 1. Но оно равно произведению всех данных 1989 чисел. Следовательно, произведение больше единицы.

Задача 70.

Найдите двузначное число, которое равно удвоенному произведению его цифр.

Решение.

$$10x + y = 2xy.$$

Отсюда y — четно, $y \geqslant 2$.

Вычтем из обеих частей уравнения $4x$, получим $2x(y-2) = 6x + y$. Здесь $y - 2 > 0$, значит, $y \geqslant 4$. Вычтем еще по $4x$, получим $2x + y = 2x(y-4)$. Здесь $2x + y > 0$, значит, $y - 4 > 0$, то есть $y \geqslant 6$. Если $y = 6$, то $10x + 6 = 2 \cdot 6 \cdot x$, $x = 3$. Тогда искомое число 36. Если $y = 8$, то $10x + y = 16x$ откуда $6x = 8$, что невозможно.

Задача 71.

Найдите двузначное число, равное сумме чисел его десятков и квадрата числа единиц.

Решение.

$$10x + y = x + y^2; \quad 9x = y(y-1).$$

Значит, x — четно. Отсюда ясно, что $x = 8$, $y = 9$, то есть это число 89.

Задача 72.

Найти три последние цифры числа 19^8.

Решение.

Имеем:

$$19^{50} = (20 - 1)^{50} = 1000A = \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 20^2 + 20 \cdot 50 + 1,$$

а, следовательно, 19^{50} при делении на 1000 дает остаток 1. С другой стороны,

$$8^7 = 2^{21} = 2 \cdot 2^{20} = 2 \cdot 1024 \cdot 1024 = 50B + 2 \cdot 24 \cdot 24 =$$
$$= 50C + 2,$$

и поэтому при делении на 1000 данное число дает тот же остаток, что и 19^2, то есть искомые цифры составляют число 361.

Задача 73.

Если между каждыми двумя цифрами числа 1331 вписать k нулей, то получим кубы целых чисел. Доказать это.

Решение.

Легко увидеть, что $1331 = 11^3 = (10 + 1)^3$, $1030301 = 101^3 = (100 + 1)^3 = (10^2 + 1)^3$. Вписав k нулей, получаем $(10^{k+1} + 1)^3$

Задача 74.

Все цифры некоторого четырехзначного числа, которое есть точным квадратом, можно уменьшить на одно и то же число так, что новое четырехзначное число тоже будет точным квадратом. Найти все такие числа.

Решение.

Пусть данное число равняется a^2. Тогда $a < 100$. Обозначим через x число, на которое уменьшается каждая цифра данного числа. Имеем $a^2 - 1111x = b^2$. Отсюда $a^2 - b^2 = 1111x$ или

$(a + b)(a - b) = 101 \cdot 11x$. Значения a и b должны удовлетворять равенствам $a + b = 101$ и $a - b = 11x$. Числа a и b разной четности, поэтому x — нечетное число. Если $x = 1$, то $a = 56$ и $b = 45$, если $x = 3$, то $a = 67$ и $b = 34$. Когда $x > 3$, то число b^2 не будет четырехзначным. Значит искомые числа 3136 и 4489.

Задача 75.

Дано пятизначное число 25762. Какую цифру и на каком месте надо записать, чтобы получить число, которое делится на 36?

Решение.

Число делится на 36 тогда, когда оно делится на 4 и 9. Искомое шестизначное число поделится на 4, если вторая с конца цифра у него будет нечетной или последняя цифра кратна 4. Если это число поделится на 9, надо дописать цифру 5. Ее можно дописать только на место десятков. Значит, искомое число 257652.

Задача 77.

Доказать, что любое рациональное число может быть представлено в виде $x^3 + y^3 + z^3$, где x, y, z — рациональные числа.

Доказательство.

Доказательство впервые было получено в 1825 году:

«Выглядит оно потрясающе» — для рационального a непосредственно пишется его представление в виде суммы трех кубов рациональных чисел:

$$a = \left(\frac{a^3 - 3^6}{M}\right)^3 + \left(\frac{-a^3 + 3^5a + 3^6}{M}\right)^3 + \left(\frac{a^2 + 3^4a}{\underbrace{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}_{M}}\right)^3.$$

Задача 78.

Доказать, что сумма всех дробей с числителем 1 и знаменателями 2, 3...4, не может быть целым числом ни при каком n.

Указание. Рассмотреть наименьшее из чисел вида $\frac{1}{2^m}$, содержащиеся в сумме $\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, и доказать, что при приведении к общему знаменателю дополнительные множители остальных чисел будут четными.

Задача 78.

Каких чисел больше среди первых 10 000 000 целых положительных чисел: тех, в записи которых есть 1, или тех, в записи которых ее нет?

Решение.

Семицифровых чисел, в записи которых нет цифры 1, $9^7 - 1$. Всех семицифровых чисел 10^8, поэтому чисел с цифрой 1 будет $10^8-(9^7-1)$. Установим, какое из чисел $10^8-(9^7-1)$ или $9^7 - 1$ больше.

$$9^7 = 729 \cdot 729 \cdot 9 = 4782969,$$

$$10000000 - 4782969 = 5217032.$$

Следовательно, семицифровых чисел, в записи которых есть цифра 1, больше, чем чисел без этой цифры. Характерно, что для шестицифровых чисел такое утверждение будет неправильным.

Задача 79.

Найти трехзначное число, являющееся точным квадратом N^2, и такое, чтобы произведение его цифр было равно $N-1$.

Решение.

По условию задачи $100 \leqslant N^2 \leqslant 1000$, следовательно, пусть $10 \leqslant N \leqslant 31$.

$$N^2 = 100x + 10y + z, \qquad (1)$$

$$xyz = N - 1; \qquad (2)$$

$z \neq 0$, так как произведение xyz в этом случае равно нулю. z — нечетное число, так как в противном случае четно N [из (1)], а $N - 1$, равное xyz, нечетно, что невозможно. Итак, z — нечетно, следовательно, N — нечетно, $N - 1$ — четно. Кроме того, z может быть равным только 1,5 или 9.

Пользуясь таблицей квадратов, выбираем трехзначные числа, оканчивающиеся на 1, 5 или 9, произведение цифр которых меньше 31: 121, 225, 361, 441.

Второму условию удовлетворяет только 361.

Задача 80.

Найти все простые p, для которых число $p^2 + 14$ также будет простым числом.

Решение.

Как и в предыдущих задачах, имеем:

$$p^2 + 14 = (3k \pm 1)^2 + 14 = 3k^2 \pm 6k + 15 = 3\,(3k^2 \pm 2k + 5).$$

Поэтому для любого k выражение $((3k \pm 1)^2 + 14)$ делится на 3.

Поэтому простые числа, которые можно представить как $3k \pm 1$ не удовлетворяют условию задачи. Итак: $p = 3$, откуда $3^2 + 14 = 23$ — простое число.

Задача 81.

Доказать, что целое число N^5 оканчивается той же цифрой, что и N

Указание. Пусть число $N = \ldots + 10a + b$. Последняя цифра числа N^5 совпадает с последней цифрой числа b^5. Подставив вместо b 0, 1, ... , 9, видим, что $(b^5 - b) \vdots 10$.

Задача 82.

Доказать, что бесконечная непериодичная десятичная дробь 0,123456789101112..., которая получается дописыванием последующих натуральных чисел, иррациональное число.

Решение.

Допустим, что это так, и в этом числе найдется период, который содержит k чисел. Соответственно закону создания бесконечной дроби эти цифры разные. В результате последовательного выписывания мы выпишем число, в котором k нулей или k других одинаковых цифр. Ясно, что последовательность одинаковых цифр, которую мы получим, будет отличаться от периода, а это противоречит нашему допущению. Значит, данное число иррациональное.

Задача 83.

Выражение $\frac{10^a + 8}{9}$ есть целым числом при любом натуральном a. Доказать.

Решение.

Так как сумма цифр числа 10^a равняется 1, то сумма цифр числителя 9, а такое число делится на 9.

Задача 84.

Найти все простые числа вида $1 + n^n$ меньше, чем 10^{19} (n — натуральное число).

Решение.

Если $n = 1$, то $1 + n^n = 2$ — простое число; если $n = 2$, то $1 + n^n = 5$ — простое число. Так как $16^{16} > 10^{19}$ то надо рассмотреть только $n < 16$. Если n — нечетное число, отличное от 1, то сумма $1 + n^n$ — четное число, которое не может быть простым. При $n = 6$ имеем сумму $6^6 + 1$, которую можно разложить на множители, как сумму третьих степеней $6^6 + 1 = 36^3 + 1$. Так же суммы $8^8 + 1 = 2^{24} + 1 = 256^3 + 1$;

$$10^{10} + 1 = 100^5 + 1;\ 12^{12} + 1 = (12^4)^3 + 1;\ 14^{14} + 1 = 197^7 + 1$$

тоже раскладываются на множители. Значит, только при $n = 1$, $n = 2$ и $n = 4$ получаем простые числа.

Задача 85.

Доказать, что существует полный квадрат, начинающийся с любой комбинации цифр.

Доказательство.

Пусть $\underbrace{abc\ldots f}_{k}$ — данный в условии задачи набор цифр.

Рассмотрим два числа:

$$N_1 = \underbrace{\overline{abc\ldots f}}_{k}\,\underbrace{\overline{00\ldots 0}}_{3k} \text{ и } N_2 = \underbrace{\overline{abc\ldots f}}_{k}\,\underbrace{\overline{99\ldots 9}}_{3k}.$$

Пусть n^2 — наибольший полный квадрат, не превосходящий N_1. Заметим, что $n < 10^{2k}$. Тогда

$$N_1 < (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < N_1 + 2\cdot 10^{2k} + 1 < N_1 + 10^{3k} - 1 - N_2.$$

Поэтому число $(n+1)^2$ удовлетворяет условиям задачи. Подумайте сами, справедливо ли аналогичное утверждение для кубов, четвертых степеней и т.д.

Задача 86.

Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — число иррациональное.

Доказательство.

Проведем доказательство от противного. Пусть число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — рациональное, т.е. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=\frac{p}{q}$ (p и q — целые). Тогда $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\frac{p}{q}-\sqrt{3}$.

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$5+2\sqrt{10}+2=\frac{p^2}{q^2}+3-\frac{2p}{q}\sqrt{3}, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{10}+\frac{p}{q}\sqrt{3}=\frac{p^2}{2q^2}-2=\frac{p_1}{q_1}.$$

Снова возводя в квадрат, получим:

$$10+\frac{3p^2}{q^2}+\frac{2p}{q}\sqrt{30}=\frac{p_1^2}{q_1^2}.$$

Отсюда

$$\sqrt{30}=\frac{q}{2p}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2}-\frac{2p^2}{q^2}-10\right),$$

т.е. $\sqrt{30}$ — рациональное число. Но это не так: число $\sqrt{30}$ иррационально. Полученное противоречие доказывает иррациональность числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Задача 87.

Доказать, что произведение двух последних цифр квадрата целого числа — четное число.

Доказательство.

Правда, $(10x+y)^2=100x^2+20xy+y^2$.

Сумма $100x^2+20xy$ имеет четное число десятков. Проверим, может ли не дать y^2 число, которое заканчивается двумя нечетными цифрами. Это невозможно, потому что $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$.

Задача 88.

Найти наименьшее натуральное число, которое заканчивается цифрой 6 и возрастает в 4 раза, если его последнюю цифру поставить на первое место.

Решение.

Так как последняя цифра данного числа 6, то последней цифрой числа, большего в 4 раза от данного будет 4. Цифра стоящая перед ней будет последней цифрой числа $4 \times 4 + 2$, то есть 8. Перед цифрой 8 стоит 3 или $8 \times 4 + 1 = 33$. Следующая цифра 5, пред ней 1 и, наконец, последняя цифра 6. Значит, искомое число 153846.

Задача 89.

Доказать, что если к 1 прибавить произведение четырех последовательных чисел, то получим полный квадрат

Решение.

$$1 + n(n-1)(n+1)(n+2) = 1 + (n^2-1)(n^2+2n) =$$
$$= 1 + n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = n^4 + n^2 + 1 + 2n^3 - 2n^3 -$$
$$- 2n = (n^2 + n - 1)^2.$$

Задача 90.

Доказать, что не существует отличных от 0 целых чисел, которое бы удваивались от переноса первой цифры в конец числа.

Доказательство.

Если такое число существует, то должна быть четной цифра единиц числа, в два раза больше данного. Поэтому эта цифра не может быть больше 5, и первая цифра в искомом числе или 2, или 4. Пусть рассматриваемое число имеет n цифр, первая цифра из которых x. Это число можно представить так: $10^{n-1}x + y$, где $y - (n-1)$ — цифровое число. После перестановки цифры x в конец числа получаем:

$$10y + x = 2(10^{n-1}x + y),$$

отсюда $8y = x(2 \quad 10^{n-1} - 1)$. Правая часть равенства ни при каком целом n и x не делится на 8, поэтому числа, про которые говорится в условии задачи, не существует.

Задача 91.

Три простых числа, больших, чем 10, образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что разность прогрессии делится на 6.

Доказательство.

Все данные простые числа нечетные. Поэтому их разность делится на 2. Покажем, что она делится и на 3. Пусть данные числа будут a; $a + d$; $a + 2d$. Ни одно из них не делится на 3, поэтому каждое при делении на 3 даст в остатке или 1, или 2. Отсюда следует, что хотя бы два из чисел при делении на 3 имеют одинаковый остаток. Разность этих чисел, которая равняется d или $2d$, делится на 3. Значит, разность прогрессии, которая делится и на 2, и на 3, делится и на 6.

Задача 92.

Доказать, что нет целых чисел, которые от перестановки начальной и конечной цифры увеличивались бы в 5, в 6 или в 8 раз.

Доказательство.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ — данное число, $a_k\, a_2 \dots a_{k-1}\, a_1$ — число, полученное из него перестановкой первой и последней цифры. Для выполнения требований задачи необходимо, чтобы $a_1 = 1$, так как при $a_1 \geqslant 2$ $a_k\, a_2 \dots a_{k-1}\, a_1$ не может быть больше в 5, тем более в 6 или в 8 раз. Таким образом, $a_1 = 1$.

Но никакое число при умножении на 5, 6 или 8 не может оканчиваться на 1.

Задача 93.

Доказать, что если между цифрами числа 1331 написать по равному количеству нулей, то получится точный куб.

Доказательство.

Вставим между цифрами числа 1331 по n нулей. Получим число $N = 1000\dots0300\dots0300\dots01$. Это число имеет $3n + 4$ цифры и может быть записано так:

$$N = 10^{3n+3} + 10^{2n+2} \cdot 3 + 10^{n+1} \cdot 3 + 1 = (10^{n+1} + 1)^3.$$

Задача 94.

Доказать, что число вида

$$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1) \cdot (10^{n+1} + 5) + 1$$

есть точный квадрат.

Доказательство.

Выражение в первой скобке есть геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем 10.

$$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1) \cdot (10^{n+1} + 5) + 1 =$$

$$= \frac{10^{n+1} - 1}{9} \cdot (10^{n+1} + 5) + 1 = \frac{10^{2(n+1)} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4}{9} =$$

$$= \frac{(10^{n+1} + 2)^2}{3^2} = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3}\right)^2.$$

Задача 95.

Найти последние две цифры числа $7^{9^{9^9}}$.

Решение.

$9^{9^9} = (8 + 1)^{9^9} = 8m + 1$, где m — целое число.

Отсюда:

$$7^{9^{9^9}} = 7^{8m+1} = (7^4)^{2m} \cdot 7 = 2401^{2m} \cdot 7 =$$

$$= (2400 + 1)^{2m} \cdot 7 = (100n + 1) \cdot 7 = 100 \cdot 7n + 7,$$

где n — целое число.

Из этого видно, что две последние цифры данного числа образуют совокупность 07.

Задача 96.

При каких $x \in Z$ выражение $\frac{2x + 3}{5x + 1}$ является целым числом?

Решение.

Обозначим рассматриваемую дробь через y, тогда

$$5y = \frac{10x + 15}{5x + 1} = 2 + \frac{13}{5x + 1},$$

и, следовательно, $5y$ может быть целым числом только в случае, когда 13 делится на $5x + 1$, т.е. когда $5x + 1 \in \{1$ $-1, 13, -13\}$. Проверив все эти случаи, получаем, что $5y \in Z$ только при $x = 0$, поэтому решением задачи является число $x = 0$.

Задача 97.

При каких целых x выражение $\sqrt{x^2 - x + 1}$ представляет собой целое число?

Решение.

Данное выражение является целым числом, если

$$x^2 - x + 1 = n^2,$$

где n — натуральное число. Но тогда квадраты натуральных чисел

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2, \quad 4x^2 - 4x + 4 = (2n)^2$$

отличаются на 3, и, следовательно, первый из них равен 1. Отсюда $x = 0$ или $x = 1$.

Задача 98.

Доказать, что число

$$\underbrace{999\ldots9}_{n\text{-}1}\ 7\ \underbrace{000\ldots0}_{n\text{-}1}\ 2\ \underbrace{999\ldots9}_{n}$$

есть третья степень натурального числа.

Решение.

Данное число N может быть представлено так:

$$N = 9\,(10^{3n-1} + 10^{3n-2} + \ldots + 10^{2n+1}) + 7 \cdot 10^{2n} +$$

$$+ 2 \cdot 10^{n} + 9\,(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 1).$$

Но $9\,(10^{n-1} + \ldots + 10^{2n+1}) = 10\,(10^{3n-1} + \ldots + 10^{2n+1}) -$

$$-\,(10^{3n-1} + \ldots + 10^{2n+1}) = 10^{3n} - 10^{2n+1},$$

$$9\,(10^{n-1}+\ldots+1)=10\,(10^{n-1}+\ldots+1)-(10^{n-1}+\ldots+1)=$$
$$=10^n-1.$$

Следовательно,

$$N=10^{3n}-10^{2n+1}+7\cdot 10^{2n}+2\cdot 10^n+10^n-1=$$
$$=10^{3n}-3\cdot 10^{2n}+3\cdot 10^n-1=(10^n-1)^3.$$

Задача 99.

Все целые числа, начиная с 1, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 1975 месте?

Решение.

Однозначные числа занимают 9 мест. 90 двузначных чисел — 180 мест. Остается 1975 – 189 = 1786 мест. 1785 мест занимают 595 трехзначных чисел, последним из которых будет число 694. Значит, на 1975 месте будет стоять цифра 6.

Задача 100.

Конечно или бесконечно множество чисел, являющихся точными квадратами, имеющими сумму цифр 9, и не оканчивающихся цифрой 0?

Решение.

Поскольку число $(10^n+2)^2=10^{2n}+4\cdot 10^n+4$ имеет сумму цифр 9, то рассматриваемое множество бесконечно.

Задача 101.

Доказать, что число $0{,}101001000\ldots 1\underbrace{000\ldots 0}_{n}1\ldots$ иррационально.

Доказательство.

Для доказательства нужно установить, что данная десятичная дробь не является периодической. Действительно, между n-й единицей и $(n+1)$-й единицей стоит n нулей, чего не может быть в периодической дроби.

Задача 102.

Доказать, что $\sin 1^\circ$ — число иррациональное.

Доказательство.

Предположим противное: $\sin 1^\circ = \frac{m}{n}$, m, n — целое. Тогда

$$\cos^2 1^\circ = 1 - \sin^2 1^\circ \text{ и } \cos^2 1^\circ - \sin^2 1^\circ = \cos 2^\circ$$

тоже числа рациональные. Аналогично получим, что

$$\cos 4^\circ = 2\cos^2 2^\circ - 1, \quad \cos 8^\circ = 2\cos^2 4^\circ - 1,$$

$$\cos 16^\circ = 2\cos^2 8^\circ - 1$$

тоже рациональные. Далее

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \cos(32^\circ - 2^\circ) = \cos 32^\circ \cos 2^\circ +$$

$$= \sin 32^\circ \sin 2^\circ = (2\cos^2 16^\circ - 1)\cos 2^\circ + 2^4 \cos 16^\circ \times$$

$$\times \cos 8^\circ \cos 4^\circ \cos 2^\circ \sin 2^\circ.$$

Получили противоречие, так как слева стоит иррациональное число, а справа — рациональное.

Задача 103.

Найти четырехзначное число, равное квадрату числа, выражаемого его двумя последними цифрами.

Решение.

Согласно условию задачи имеем

$$\overline{abcd} = (\overline{cd})^2.$$

Отсюда

$$100\,(10a + b) + (10c + d) = (10c + d)^2 \text{ или}$$
$$100\,(10a + b) = (10c + d)\,(10c + d - 1).$$

Положим $10c + d = k$. Очевидно, $c \neq 0$, поэтому k — двузначное число. Следовательно,

$$100\,(10a + b) = k\,(k - 1).$$

Произведение $k\,(k-1)$ делится на 100, поэтому одно из чисел k и $k - 1$ должно делиться на 4, а второе — на 25.

Легко убедиться. что $k = 25$, $k - 1 = 24$ или же $k = 76$, $k - 1 = 75$.

В первом случае имеем $10a + b = 6$ и $a = 0$, что противоречит условию задачи. Во втором случае $10a + b = 19 \cdot 3$ и $a = 5$, $b = 7$. Тогда $76 = 10c + d$ и $c = 7$, $d = 6$.

Итак, искомое число равно **5776**.

Задача 104.

Доказать, что если числа a, b, c, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ рациональны, то числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ тоже рациональны.

Решение.

Будем считать, что числа a, b, c попарно различны. Если $r = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \in Q$, то $r^2 \in Q$, $S = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \in Q$, $S^2 \in Q$, $t = b\sqrt{ac} + a\sqrt{bc} + c\sqrt{ab} \in Q$, $u = t - bS = (a-b)\sqrt{bc} + (c - b)\sqrt{ab} \in Q$, $u^2 \in Q$, откуда следует, что $\sqrt{ac} \in Q$ и аналогично $\sqrt{ab} \in Q$. Следовательно, $a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac} \in Q$, $\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \in Q$, $\sqrt{a} \in Q$, что и требовалось доказать.

Задача 105.

Сколько точных квадратов можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, употребляя каждую только один раз?

Решение.

Точный квадрат не может заканчиваться на цифру 3, а в данном случае не может заканчиваться и цифрой 5 — в противном случае его предпоследняя цифра была бы 2, а этой цифры в числе нет.

Следовательно, этот квадрат оканчивается цифрой 4 или 6 и поэтому является четным числом. Поэтому и число, которое возводили в квадрат, является четным, а стало быть, его квадрат делится на 4. Значит, две последние цифры точного квадрата составляют число, делящееся на 4, т.е. 36, 56 или 64.

Остается рассмотреть числа

$$4536,\ 5436,\ 3456,\ 4356,\ 3564,\ 5364.$$

Для их проверки заметим, что все они делятся и на 4, и на 9, поэтому разделив их на 36, получим числа

$$126,\ 151,\ 96,\ 121,\ 99,\ 153.$$

Из этих чисел точным квадратом является только 121 и таким образом,

$$4356 = 36 \cdot 121 = 66^2$$

Задача 106.

Найти хотя бы два иррациональных числа α и β таких, что α^β — число рациональное.

Решение.

Искомыми числам будут, например, $\alpha = \sqrt{2}$ и $\beta = \log_{\sqrt{2}} 3$. Число $\sqrt{2}$ является известным иррациональным числом. Пусть $\log_{\sqrt{2}} 3 = \dfrac{m}{n}$, тогда $(\sqrt{2})^{\frac{m}{n}} = 3$, откуда $2^m = 3^{2n}$ что не выполняется ни при каких целых $m \neq 0$ и $n \neq 0$, поэтому и число $\log_{\sqrt{2}} 3$ — иррациональное.

Число же $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3$ — рациональное.

4. ОЛИМПИАДНЫЕ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

Пешеход идет через пункты A, B, C, D, причем $AB = 12$, $BC = 21$, $CD = 6$ км, скорость пешехода $v = 3$ км/ч. Найти последний момент времени, когда сумма расстояний от всех пунктов до пешехода будет минимальной.

Решение.

1) Пусть пешеход находится на промежутке AB и расстояние от пешехода до A: $AX = x$. Тогда сумма расстояний от пешехода до всех пунктов равна

$$S_1 = x + (AB - x) + (AC - x) + (AD - x) =$$

$$= x + 12 - x + 33 - x + 39 - x = 84 - 2x.$$

Очевидно, что расстояние S_1 минимально при $x = 12$, т.е.

$$S_{\min_1} = 84 - 24 = 60 \text{ (км)}.$$

2) Пусть пешеход находится на промежутке BC и $X_1A = x$. Тогда $S_2 = (x - AB) + x + (AC - x) + (AD - x) =$

$$= x - 12 + x + 33 - x + 39 - x = 60 \text{ км}.$$

Очевидно, что S_2 минимально при любых x, т.е. $S_{\min_2} = 60$ (км)

3) Пусть пешеход находится на промежутке CD и $X_2A = x$. Тогда $S_3 = x + (x - AB) + (x - AC) + (AD - x) =$

$$= x + x - 12 + x - 33 + 39 - x = 2x - 6.$$

Очевидно, что $S_3 = \min$ при наименьшем x (на промежутке CD), т.е. пешеход находится в пункте C и $AX = AC = 33$. В этом случае S_3 минимально, т.е. $S_{\min_3} = 66 - 6 = 60$ (км).

4) Сравнивая $S_{\min}$ на всех трех промежутках получим, что наименьшая сумма $S_{\min_2}$ на промежутке BC. Тогда последний момент времени, когда $S_{\min}$ будет в точке C и $t = \dfrac{AC}{v} = 11$ часов.

Ответ: 11 (часов).

Задача 2.

Несколько факультетов решили провести соревнование, поделив затраты поровну. Перед соревнованиями оказалось, что 4 факультета не будут участвовать. Поэтому остальным факультетам пришлось дополнительно внести по 4 тыс. рублей. Найти общий объем затрат S тыс. рублей, если $20 \leqslant S \leqslant 30$.

Решение.

$$\frac{S}{n} + 4 = \frac{S}{n-4},$$

где n — количество факультетов вначале;

$$S\frac{n-n+4}{n(n-4)} = 4, \quad n \in N, \ n > 4.$$

$$S = \frac{4n(n-4)}{4} = n(n-4);$$

$$20 \leqslant n(n-4) \leqslant 30;$$

$$\begin{cases} n^2 - 4n - 20 \geqslant 0, \\ n^2 - 4n - 30 \leqslant 0, \\ n \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sqrt{4+20} \leqslant n \leqslant 2 + \sqrt{4+30}, \\ n \in N \end{cases} \Rightarrow$$

$$n = 7 \Rightarrow S = 7(7-4) = 21.$$

Ответ: $S = 21$ тыс.

Задача 3.

В бассейн проведены 4 трубы. Когда открыты первая, вторая и третья трубы, бассейн заполняется за 12 минут; когда открыты 2, 3 и 4 трубы — за 15 минут; когда открыты только 1 и 4 трубы — за 20 минут. За какое время наполняется бассейн, если открыты все 4 трубы?

Решение.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — время (в минутах), необходимое для наполнения бассейна, одной трубой соответственно: первой, второй, третьей и четвертой. Можно составить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} = \dfrac{1}{15}, \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_4} = \dfrac{1}{20}. \end{cases}$$

Сложим левые и правые части уравнений.

$$2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = \frac{1}{5},$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{10},$$

следовательно, искомое время — 10 минут.

Ответ: 10 минут.

Задача 4.

В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

Решение.

Если в первом сосуде было x л спирта, то во втором $(30 - x)$ л спирта. После доливания первого сосуда водой в 1 л смеси стало $\dfrac{x}{30}$ л спирта и $\left(1 - \dfrac{x}{30}\right)$ л воды. После переливания из первого сосуда x л смеси во втором стало $\left(30 - x + \dfrac{x}{30}x\right)$ л спирта и $\left(1 - \dfrac{x}{30}\right)x$ л воды. В новой смеси в 1 л содержится $\dfrac{1}{30}\left(30 - x + \dfrac{x^2}{30}\right) = 1 - \dfrac{x}{30} + \left(\dfrac{x}{30}\right)^2$ л спирта. После того, как 12 л новой смеси было отлито в первый сосуд, в нем оказалось $12\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+\frac{x}{30}(30-x)$ л спирта, а во втором сосуде $18\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ л спирта.

По условию

$$18\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+2=\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+x-\frac{x^2}{30}.$$

Ответ: 20 л и 10 л.

Задача 5.

Можно ли из 36 спичек, не ломая их, сложить прямоугольный треугольник?

Решение.

В прямоугольном треугольнике $c^2=a^2+b^2$. В египетском треугольнике стороны равны 5, 4 и 3. Их сумма равна 12. Увеличим каждую сторону в 3 раза, получим прямоугольный треугольник со сторонами $c=15$, $a=12$, $b=9$. Взяв соответствующее число спичек, сложим прямоугольный треугольник.

Задача 6.

На покупку магнитофона ученик заработал в каникулы 52 р. Остальные деньги ему дали два старших брата и отец. Причем отец дал 50% всех собранных денег без его денег, первый брат дал $33\frac{1}{3}$ % всех собранных денег без его денег, и второй брат дал 25% всех собранных без его денег. Сколько денег дал каждый из них?

Решение.

Пусть первый брат дал x рублей, второй дал y рублей, а отец дал z рублей. Тогда из условия задачи имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(52+y+z)}{100} \cdot 33\dfrac{1}{3}, \\ y = \dfrac{(52+x+z)\cdot 25}{100}, \\ z = \dfrac{(52+x+y)\cdot 50}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 52+y+z, \\ 4y = 52+x+z, \\ 2z = 52+y+x. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $x = 60$, $y = 48$, $z = 80$.

Задача 7.

Для игры школьники разбились на 2 партии: «серьезных», отвечающих правильно на любой вопрос, и «шутников», дающих на любой вопрос только неправильный ответ. Учитель спросил Иванова, серьезный ли он человек или шутник. Не расслышав ответа Иванова, он спросил у Панькина и Демина: «Что ответил мне Иванов». Панькин сказал: «Иванов ответил, что он серьезный человек», а Демин сказал: «Иванов ответил, что он шутник». Кем были Панькин и Демин?

Решение.

Если Иванов серьезный человек, то он так и сказал о себе, что он серьезный человек. Если он шутник, то он должен был сказать о себе не то, что было в действительности, т.е. и в этом случае он мог сказать только одно, что он серьезный человек. Значит, Демин сказал не то, что сказал Иванов. Следовательно, Демин шутник, а Панькин серьезный человек.

Задача 8.

Узнать, через сколько минут после того, как часы показывали 9 часов, минутная стрелка догонит часовую.

Решение.

Минутной стрелке, чтобы догнать часовую, надо пройти на 45 минутных делений больше часовой стрелки. Так как часовая стрелка проходит одно деление за 12 минут, то она за каждую минуту проходит $\frac{1}{12}$ деления и, следовательно, минутная стрелка нагоняет ее за каждую минуту на $\frac{11}{12}$ делений. На 45 делений потребуется:

$$45 : \frac{11}{12} = \frac{45 \cdot 12}{11} = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11} \text{ минут.}$$

Задача 9.

Два одинаковых катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние по течению и возвращаются обратно. В какой реке на эту поездку потребуется больше времени: в реке с быстрым или медленным течением?

Решение.

Путь x км/ч — собственная скорость катера; y км/ч и z км/ч — скорости течений рек, $y > z$, расстояние, пройденное каждым катером в одном направлении, S км; время движения, затраченное на весь путь в реке с быстрым течением t_1 часов, с медленным t_2 часов.

$$t_1 = \frac{S}{x+y} + \frac{S}{x-y} = \frac{2Sx}{x^2 - y^2};$$

$$t_2 = \frac{S}{x+z} + \frac{S}{x-z} = \frac{2Sx}{x^2 - z^2}.$$

Из сравнения полученных дробей приходим к выводу, что $t_1 > t_2$.

Задача 10.

Тысяча точек являются вершинам выпуклого тысячеугольника, внутри которого расположено 500 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинам которых являются только данные 1500 точек. Сколько получится треугольников?

Решение.

Подсчитаем сумму углов всех полученных треугольников. Легко видеть, что она равна сумме всех внутренних углов тысячеугольника $4d \cdot 500$, т.е. равна

$$2d \cdot 998 + 2d \cdot 1000 = 1998 \cdot 2d.$$

Отсюда число полученных треугольников равно:

$$\frac{1998 \cdot 2d}{2d} = 1998.$$

Задача 11.

В каком году родились люди, которым в 1958 г. исполнилось столько лет, какова сумма цифр года их рождения?

Решение.

Выразив цифры года рождения этих людей буквами a, b, c и d, будем иметь $abcd = 1000a + 100b + 10c + d$;

$$1058 - (1000a + 100b + 10c + d) = a + b + c + d;$$

$$a = 1; \quad b = 9$$

($b = 8$) быть не может, так как это не удовлетворит смысла задачи). Следовательно,

$$1958 - (1000 + 900 + 10c + d) = 1 + 9 + c + d,$$

откуда $d = \frac{48 - 11c}{2}$. Так как d — число целое, то 11 есть число четное, тогда $c = 2, 4, 6, 8$.

Делаем испытание:

1) если $c = 2$, то $d = 13$ — не удовлетворяет.

2) если $c = 4$, то $d = 2$.

3) если $c = 6$, то $d = -2$ — не удовлетворяет.

Итак, $d = 2$, $c = 4$.

Люди родились в 1942 г., что соответствует требованию задачи: $1 + 9 + 4 + 2 = 16$; $1958 - 1942 = 16$.

Задача 12.

Тарас и Лена по очереди наполняют из крана лейки, каждая из которых наполняется за 10 сек. Сразу после их наполнения Тарас и Лена поливают цветы, опустошая лейки соответственно за 30 и 45 сек. Потом опять их наполняют водой. Если лейки не подставлены под кран, вода наполняет бочку, которая стоит под краном. Пустая бочка может наполниться за 15 мин. Кто из детей первым подойдет набирать воду после того, как бочка наполнится.

Решение.

Графически можно установить, что через каждые 230 секунд процесс повторяется. На продолжении этих 230 секунд 145 секунд будет наполняться бочка. Она наполнится за 900 секунд Для этого должно пройти 6 полных периодов и еще 55 секунд. Поэтому бочка наполнится через 23 мин. 55 сек. Первой к бочке, после того, как она наполнится, подойдет Лена.

Задача 13.

Из пункта A в заданном направлении с постоянной скоростью через одинаковые промежутки времени отправляются автобусы, которые идут к следующему городу без остановок. Дорожный мастер прошел 4 км, и за это время его обогнало 6 автобусов. В следующий раз он прошел 7 км, и его обогнало 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 км. Сколько автобусов обогнало мастера в этот раз, если все автобусы ехали одинаковой скоростью?

Решение.

За время, которое проходит между моментами встречи с первым и вторым автобусами, мастер прошел x км. Такие же расстояния он пройдет за время между каждыми двумя последовательными встречами. Расстояние 4 км не меньше, чем 5 таких расстояний, но меньше, чем 7. Поэтому имеем отношение $5x \leqslant 4 \leqslant 7x$. Аналогично $7x \leqslant 7 \leqslant 9x$. Сопоставляя эти отношения, находим, что $x \approx \frac{4}{5}$. Проходя расстояние 17 км, дорожный мастер встретит 21 или 22 автобуса.

Задача 14.

Расстояние между пунктами A и B кратно 5. Автобус проезжает его с постоянной скоростью 60 км/ч. Каждые 5 км он останавливается на 5 мин. Велосипедист проезжает это же расстояние с постоянной скоростью за 1 час. Сначала автобус обогнал велосипедиста, а на остановке автобуса велосипедист проехал возле него. Потом автобус опять обогнал велосипедиста и больше с ним не встречался. Установить, истратил ли автобус на проезд от A до B больше, чем 45 мин или нет?

Решение.

Скорость велосипедиста должна быть меньше чем 30 км/ч. Поэтому расстояние между пунктами A и B не превышает 25 км и время, на продолжительности которого автобус проедет его, не превышает 45 мин.

Задача 15.

За 9 одинаковых книжек заплатили больше чем 11 руб. но меньше чем 12 руб. За 13 таких книжек заплатили 15 руб. и несколько копеек, но не больше чем 16 руб. Какая цена одной книжки?

Решение.

Очевидно, что одна книжка стоит 1 руб. и x коп. Учитывая то, что $200 \leqslant 9x < 300$, имеем $23 \leqslant x < 33$. Но, кроме того, x удовлетворяет условию $200 \leqslant 13x < 300$, поэтому $16 \leqslant x \leqslant 23$. Значит, стоимость книжки 1 руб. 23 коп.

Задача 16.

В одном из подъездов восьмиэтажного дома на первом этаже размещены квартиры от № 97 до № 102. На каком этаже размещена квартира № 222, если все подъезды построены одинаково и на каждом этаже одинаковое количество квартир.

Решение.

Очевидно, что на каждом этаже имеется по 6 квартир, а в одном подъезде 48 квартир. Так как $222 = 4 \cdot 48 + 30$, то квартира № 222 размещена в пятом подъезде на пятом этаже.

Задача 17.

Возраст студента в 1977 году равнялся сумме цифр его года рождения. Сколько лет студенту?

Решение.

Пусть студент родился в $19xy$ году. Его возраст будет $10 + x + y$. Тогда $1900 + 10x + y + 10 + x + y = 1997$.

Отсюда $x = \dfrac{67 - 2y}{11}$.

Так как $x, y \leqslant 9$, то $x = 5$, $y = 6$. Следует, что студент родился в 1956 году и в 1977 году ему было 21 год.

Задача 18.

На доску размером 4×100 квадратиков положено столько прямоугольных костяшек, что каждая из них целиком покрывает ровно две клетки, никакие две не перекрываются и ни один квадратик не остается свободным. Докажите, что при этом можно распилить доску по одной из нанесенных на не продольных или поперечных прямых, не двигая с места и не распиливая ни одной костяшки.

Решение.

Рассмотрим произвольно продольную или поперечную прямую. Она делит доску на две области, в каждой из которых имеется четное число клеток. Из них четное число (может быть нуль) покрыто костяшками, не пересекающим границу областей. Следовательно, границу может пересекать только четное число костяшек: 0, 2, 4 или больше. Всего таких прямых 102 имеется, и для того, чтобы каждую из них пересечь костяшками, потребовалось бы не менее 204 костяшек. Но в нашем распоряжении только 200 костяшек.

Задача 19.

На кружке, в котором участвуют 20 школьников, было дано 20 задач. Оказалось, что каждый школьник решил две задачи, и каждая задача была решена двумя школьниками. Докажите, что разбор задач можно организовать так, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач и все задачи были разобраны.

Указание.

Вызовем произвольно ученика A_1. Пусть он решил задачи a_1 и a_2. Попросим его рассказать, скажем задачу a_2. Найдется единственный ученик A_2, решивший вместе с A_1 задачу a_2. Пусть он расскажет другую решенную им задачу a_3. Продолжим этот процесс. Покажите, что рано или поздно будет спрошен ученик, решивший вместе с A_1 задачу a_1. Что делать дальше, если остались еще не спрошенные ученики?

Задача 20.

В плоскости даны 10 точек. Сколько существует отрезков, соединящих эти точки.

Решение.

Ответ в этой задаче 45 отрезков. Чтобы уверится в этом, обозначим 10 точек цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Рассмотрим теперь любой отрезок, который соединяет эти точки. На концах отрезка стоят две разные цифры. Поставив их в порядке возрастания, получим двузначное число с возрастающим порядком цифр. Следовательно, двум разным отрезкам отвечает два разных числа и двум разным числам — два разных отрезка.

Задача 21.

В группе из 30 человек каждый пожал руку всем другим. Сколько будет сделано рукопожатий?

Решение.

Каждый из 30 человек пожал руку другим 29. Поэтому рукопожатий будет $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$.

Задача 22.

Можно ли организовать такой турнир, что в нем участвовало 40 команд и каждая команда сыграла ровно 3 матча?

Решение.

Поставим в соответствие каждой команде точку, а каждому матчу, сыгранному двумя командами, дугу, которая соединяет эти точки. Тогда из каждой точки должно выходить три дуги. Всех матчей будет

$$\frac{40 \cdot 3}{2} = 60.$$

Задача 23.

Можно ли организовать такой турнир, чтобы в нем участвовало 18 команд и каждая провела бы ровно 5 матчей?

Решение.

Как и в предыдущей задаче подсчитаем количество дуг, которые отвечают сыгранным матчам $\frac{18 \cdot 5}{2} = 32{,}5$. Количество дуг не выражается целым числом, поэтому турнир не может быть проведенным.

Задача 24.

Сосуд имеет четыре крана. Если открыть все четыре крана, то сосуд наполнится за 4 часа. Первый, второй и третий краны наполнят его за 5 ч, второй, третий и четвертый

— за 6 ч. За сколько времени наполнится сосуд, если открыть первый и четвертый краны?

Решение.

Обозначим время наполнения сосуда первым, вторым, третьим и четвертым кранами соответственно x, y, z и t. Тогда из условия задачи получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2 и вычтя из него второе и третье уравнение, получим:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{t} = \frac{2}{15}, \quad 1 : \frac{2}{15} = \frac{7}{2}.$$

Итак, первый и четвертый краны наполняют сосуд за 7 ч и 30 мин.

Систему уравнений можно было решить заменой переменных

$$\frac{1}{x} = u; \quad \frac{1}{y} = v; \quad \frac{1}{z} = w; \quad \frac{1}{t} = q.$$

Найти u, q, а затем x и t. Далее по найденным значениям x и t найти время наполнения сосуда первым и четвертым кранами.

Задача 25.

Докажите, что если из трехзначного числа вычесть число, записанное тем же цифрами, но в обратном порядке, то получим число, сумма цифр которого равна 18.

Решение.

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a =$$

$$= 99a - 99c = 99\,(a - c).$$

Естественно считать $a > c$, $(a - c)$ — число однозначное. Произведение 99 на любое однозначное число дает в произведении число, сумма цифр которого равна 18. Это легко проверить непосредственно. Можно установить закономерность результата иным путем, например, представив 99 как разность $100 - 1$ и рассмотрев произведение этой разности на однозначное число.

Задача 26.

Плывя вверх против течения реки и проплывая мост, пловец потерял спасательный круг. Потерю он заметил через 20 мин. Сразу повернув обратно и плывя с тем же усилием, пловец догнал спасательный круг в 2 км от моста. Определите скорость течения реки и скорость пловца, если скорость пловца в 2 раза больше скорости течения реки.

Решение.

Пусть собственная скорость пловца x км/ч, а скорость течения реки y км/ч. Против течения скорость пловца $(x - y)$ км/ч, проплыл он $(x - y) \cdot \frac{1}{3}$ км. По течению реки он проплыл $\left((x - y) \cdot \frac{1}{3} + 2\right)$ км за $\frac{(x - y) \cdot \frac{1}{3} + 2}{x + y}$ ч. Всего он плыл $\left(\frac{1}{3}, + \frac{(x - y) + 6}{3(x + y)}\right)$ ч, а спасательный круг $\frac{2}{y}$ ч. Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{(x - y) + 6}{3(x + y)} = \frac{2}{y}, \\ x = 2y, \end{cases}$$

откуда находим: собственная скорость пловца 6 км/ч, скорость течения реки 3 км/ч.

Задача 27.

В шахматном турнире принимают участие учащиеся двух классов, причем учащихся одного класса было в 10 раз больше, чем учащихся другого. Каждый участник турнира встречался с любым другим только раз. При подведении итогов турнира оказалось, что учащиеся класса с большим числом участников набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем учащиеся другого класса вместе. Сколько очков набрали учащиеся класса с меньшим числом участников?

Решение.

Пусть в турнире участвовало x шахматистов одного класса и 10х шахматистов другого класса, всего $11x$ чисел. Число сыгранных партий, а также и количество всех очков, набранных всеми участниками, равно

$$\frac{11x(11x-1)}{2}.$$

Так как эти очки поделены между классами в отношении 1 : 4,5, то класс с меньшим числом участников набрал

$$\frac{11x(11x-1)\cdot 2}{2\cdot 11} = x(11x-1) \text{ очков, а другой —}$$

$$\frac{x(11x-1)\cdot 9}{2} \text{ очков.}$$

Учащиеся класса с меньшим числом участников сыграли партий между собой $\frac{(x-1)x}{2}$ и $10x^2$ с шахматистами другого класса. Получим неравенство:

$$x(11x-1) \leqslant 10x^2 + \frac{x(x-1)}{2} \text{ или } x^2 \leqslant x.$$

Поскольку $x > 0$, то $x \leqslant 1$. Так как x — целое число и больше нуля, то $x = 1$. Значит, класс с меньшим числом участников набрал очков: $1(11-1) = 10$.

Задача 28.

По полю проходит прямолинейная дорога. Человек, стоящий на дороге в точке A, может двигаться по полю со скоростью не более 3 км/ч и по дороге со скоростью не более 6 км/ч. Найти геометрическое место точек, в которые он может попасть за 1 час.

Решение.

Если человек из точки A будет идти только по полю, то он, очевидно, сможет попасть за один час в любую точку внутри круга радиуса 3 км с центром в точке M и не сможет попасть ни в одну точку вне этого круга.

Обозначим через A_1 и A_2 точки на дороге, отстоящие от точки А на расстояние 6 км. проведем из этих точек касательные к кругу, рассмотренному выше. Докажем, что фигура, содержащаяся внутри контура, образованного отрезками касательных от точек A_1 и A_2 до точек касания с кругом и дугами окружностей, заключенными между точками касания BB_1 и CC_1, является исключительно геометрическим местом. Для этого достаточно доказать, что человек, идя сначала только по дороге, а затем по полю, или только по полю сможет попасть в любую точку этой фигуры за один час и не сможет за это время попасть ни в какую точку вне указанной фигуры. Действительно, если человек, стоящий на дороге, через некоторое время сходит с нее, а затем снова возвращается на дорогу, то при этом он тратит времени больше, чем идя только по дороге. Пусть человек идет t часов по дороге со скоростью 6 км/ч ($t \leqslant 1$) до некоторой точки M на отрезке AA_1, а оставшееся время идет по полю прямолинейно со скоростью 3 км/ч, тогда через один час он окажется на окружности радиуса $3(1-t)$ км с центром в точке M. Покажем, что эта окружность касается прямых A_1B_1 и A_2C_1. Восстановим из точки M перпендикуляр к прямой A_1B_1, до пересечения с этой прямой в точке N. Очевидно, что достаточно показать, что $MN = 3(1-t)$ км. Прямоугольные треугольники AB_1A_1 и MNA_1 подобны, отсюда $\frac{AA_1}{MA_1} = \frac{AB_1}{MN}$, но $AA_1 = 6$ км, $MA_1 = 6(1-t)$ км, $AB_1 = 3$ км, следовательно, $MN = 3(1-t)$ км. Таким образом, наша окружность касается прямых A_1C_1 и A_1B_1, фигуры $A_1B_1B_2A_2C_2C_1$, что и доказывает наше утверждение.

Задача 29.

В международном футбольном турнире, где каждый участник встречается с каждым по разу, команда «Динамо» (Киев) набрала больше всех очков — 4, а остальные команды набрали одинаковое количество очков. Как сыграли остальные команды?

Решение.

Если в футбольном турнире приняли участие n команд, то вместе они набрали $n(n-1)$ очков, и поэтому остальные

$n-1$ команд набрали $n(n-1)$ очков. Поскольку все они набрали очков поровну, то 4 делится на $n-1$, так что $n=5$ или $n=3$. Но при $n=5$ остальные команды также набрали бы по 4 очка. Следовательно, $n=3$, и эти команды сыграли между собой вничью.

Задача 30.

Футбольные команды «Динамо» и «Спартак» принимали участие в двух разных турнирах, в которых каждый участник встречается с каждым по разу. Когда турнир с участием динамовцев закончился, в другом турнире было проведено столько же игр, сколько в первом, и до конца оставалось три тура. Сколько команд участвовало в каждом турнире?

Решение.

Если в динамовском турнире участвовали n команд, а в спартаковском k команд, то в первом из них было сыграно $n(n-1):2$ матчей, а во втором к этому моменту каждая команда сыграла $k-4$ с соперниками. По условию,

$$n(n-1)=k(k-4).$$

Ясно, что $n<k$ — иначе первый турнир длился бы дольше второго, а тогда $n-1>k-4$, т.е. $n>k-3$, и, следовательно, n равно либо $k-1$, либо $k-2$.

В первом случае:

$$(k-1)(k-2)=k(k-4),\quad k^2-3k+2=k^2-4k,\quad k=-2,$$

что невозможно, во втором случае

$$(k-2)(k-3)=k(k-4),\quad k^2-5k+6=k^2-4k,\quad k=6.$$

Таким образом, в динамовском турнире играли 4 команды, в спартаковском — 6 команд.

Задача 31.

Дана таблица неотрицательных целых чисел, которая имеет n рядов и n колонок. таблица обладает таким свойством: если на пересечении каких-нибудь ряда и колонки стоит 0, то сумма всех чисел ряда и колонки не меньше, чем n. Доказать, что сумма всех чисел таблицы не меньше, чем $\frac{n^2}{2}$.

Решение.

Выпишем сумму чисел каждого ряда и каждой колонки таблицы. Обозначим через S наименьшее из этих чисел. Пусть S — сумма чисел в i-ом ряду. Тогда в i-ом ряду не более чем S чисел не равняется нулю. Поэтому в этом ряду не менее чем $(n - S)$ нулей. Рассмотрим какие-то $(n - S)$ нулей в i-ом ряду. По условию задачи сумма чисел в соответствующих колонках будет не меньше, чем $(n - S)$. Таким образом, сумма чисел во всех колонках вместе будет не меньше, чем $(n - S)^2$. Сумма чисел в остальных S колонках будет не меньше, чем S^2. Следовательно, если M — сумма всех чисел таблицы, то

$$M \geqslant (n - S)^2 + S^2 = n^2 - 2S\,(n - S).$$

Правая часть будет наименьшей при $S = \frac{n}{2}$.

$$M \geqslant \frac{n^2}{2}.$$

Задача 32.

Не дождавшись трамвая на остановке A, мальчик пошел к следующей остановке B. Преодолев треть пути, он оглянулся и увидел, что к остановке A приближается трамвай. Если мальчик побежит к остановке A или к остановке B, то в обоих случаях он успеет сесть на трамвай. С какой скоростью должен бежать мальчик, если известно, что трамвай, движется со скоростью 30 км/ч?

Решение.

Если мальчик побежит к остановке A, то он прибежит туда одновременно с приходом трамвая. Поскольку мальчик находится в два раза дальше от остановки B, чем от A, то когда он побежит к B и пробежит половину пути, трамвай как раз подойдет к остановке A. После этого трамвай и мальчик одновременно прибудут на остановку B, но трамвай проходит при этом путь в три раза длиннее, чем пробегает мальчик. Таким образом, скорость мальчика 10 км/ч.

Задача 33.

В шахматном турнире принимали участие n шахматистов. Каждый шахматист встречался с каждым из остальных один раз, причем ни одна партия не закончилась вничью. Доказать, что по результатам турнира всех шахматистов можно разместить в таком порядке, чтобы каждый предыдущий был победителем следующего.

Решение.

Применим метод математической индукции. Если $n = 2$, то утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для $n = k$. Пусть $n = k + 1$. Возьмем любых шахматистов и упорядочим их по результатам встреч между ними так, как это сказано в условии задачи (это возможно сделать по нашему допущению). Получим последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$. Теперь ставим еще одного шахматиста b в эту последовательность непосредственно перед тем шахматистом a_j, который имеет наименьший номер j среди всех шахматистов, проигравших b (если ни у кого не выиграл, то ставим его последним).

Задача 34.

Найти все десятизначные числа, у которых первая цифра равняется количеству нулей в написании этого числа, вторая — количеству единиц, третья — количеству двоек, четвертая — количеству троек, ... , десятая — количеству девяток.

Решение.

Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_9$ — цифры искомого числа. По условию задачи a_0 равняется количеству нулей среди цифр числа, a_1 — количеству единиц, a_2 — количеству двоек,..., a_9 — количеству девяток.

Сумма цифр числа равняется

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_2 + 2 \cdot a_2 + \ldots + 9 \cdot a_9,$$

откуда

$$a_0 = a_2 + 2a_3 + \ldots + (k-1)a_k + \ldots + 8a_9. \qquad (1)$$

Пусть $a_0 = k$ (заметим, что $2 \leqslant k \leqslant 9$), так как при этом из равенства (1) следует, что $a_2 = 1$, а все остальные цифры равняются нулю). Тогда a_k (количество цифр k) не равняется нулю. Равенство (1) справедливо тогда и только тогда, когда

$a_k = 1$, $a_2 = 1$, а все остальные a_i равняются нулю. Поскольку $a_2 = 1$, то одной из цифр искомого числа должна быть двойка; поэтому $a_1 = 2$. Получается, что только четыре цифры числа не равняются нулю. Поэтому количество нулей $a_0 = 6$. Таким образом, если задача имеет решение, то им обязательно будет единственное число 6210001000. Непосредственно удостоверяемся, что оно действительно есть решением задачи.

Задача 35.

В шахматном турнире принимали участие n шахматистов. Каждый шахматист встречался с каждым из остальных один раз, причем, ни одна партия не закончилась вничью. Известно, что каждый шахматист знает фамилии участников турнира, которых он победил, а также фамилии тех, кого победили побежденные им. Доказать, что по крайней мере один шахматист знает фамилии всех остальных.

Решение.

Пусть A — шахматист (или один из шахматистов), который выиграл наибольшее число партий. Докажем, что A знает фамилии всех участников турнира. Пусть B_1, B_2, ... , B_k — все те шахматисты, которые проиграли A. Допустим теперь, что шахматист A не знает фамилии шахматиста C. Тогда из условия задачи вытекает, что C не является ни одним из шахматистов B_1, B_2, ... , B_k и что все партии он выиграл. Получается, что C выиграл больше партий, чем A. Получили противоречие.

Задача 36.

С каждого из аэродромов, все расстояния между которыми разные, поднялся самолет и полетел на ближайший аэродром. Доказать, что на каждый аэродром прилетело не более пяти самолетов.

Решение.

Если A — аэродром, на который прилетел самолет с аэродрома B, то внутри и на сторонах угла 120° с вершиной в A и биссектрисой AB нет ни одного аэродрома, с которого самолет прилетел бы в A. Это следует из того, что для любой точки C этого угла справедливо одно из двух: либо $BC \leqslant AC$, либо $BC \leqslant AB$ (в другом случае самолет не мог бы с B лететь в A). Утверждение задачи вытекает теперь из этого замечания и из того, что полный угол равен 360°.

Задача 37.

Турист, приехавший в Киев поездом, весь день ходил по городу пешком. Очутившись на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал, идя лишь теми улицами, которыми он уже проходил нечетное количество раз. Доказать, что он сможет это сделать.

Доказательство.

От любого перекрестка улиц, кроме вокзала, турист имеет возможность идти по улице, которую до этого он проходил нечетное количество раз. В противном случае он не мог бы попасть на этот перекресток.

Задача 38.

Передние скаты грузового автомобиля стираются через 15000 км пути, а задние — через 25000 км (задние колеса имеют по два ската). Каким образом необходимо менять скаты на колесах, чтобы на тех же скатах проехать максимальное расстояние? Найти это расстояние.

Решение.

Пусть первая пара скатов проедет на передних колесах x, вторая — y км, третья — z км. Первая пара скатов сотрется, если

$$\frac{x}{15000} + \frac{y+z}{25000} = 1;$$

вторая сотрется, если

$$\frac{y}{15000} + \frac{x+z}{25000} = 1;$$

третья сотрется, если

$$\frac{z}{15000} + \frac{x+y}{25000} = 1.$$

Все скаты сотрутся одновременно, если выполняются все эти равенства. Решая систему уравнений находим:

$$x = y = z = 681\frac{9}{11} \text{ км}.$$

Задача 39.

Один из учеников фиксирует в уме определенную вершину начерченного выпуклого n-угольника. Какова вероятность того, что диагональ, проводимая другим учеником, пройдет через эту фиксированную вершину?

Решение.

Первый из учащихся может выбрать любую из n вершин, второй — провести любую из $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей. Таким образом, общее число возможных случаев равно $\frac{n^2(n-3)}{2}$. Поскольку через каждую вершину проходит $n-3$ диагоналей, то число случаев, при которых диагональ пройдет, через выбранную точку, равно $n(n-3)$. Следовательно, P для искомой вероятности будем иметь

$$P = n(n-3) : \frac{n^2(n-3)}{2} = \frac{2}{n}.$$

Задача 40.

Девять грибников собрали 220 грибов, причем каждые два собрали различное число грибов. Доказать, что найдутся пятеро грибников, собравших вместе не более 110 грибов.

Решение.

Пусть грибники собрали соответственно $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_9$ грибов, и пусть $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 > 110$. Тогда $x_5 \geqslant 25$: если $x_5 < 25$, то есть $x_5 \leqslant 24$, то $x_4 \leqslant 23$, $x_3 \leqslant 22$, ... , $x_1 \leqslant 20$, откуда $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 \leqslant 110$. Поэтому $x_6 \geqslant 26$, $x_7 \geqslant 27$, $x_8 > 28$, $x_8 \geqslant 29$, $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geqslant 110$, а тогда $x_1 + x_2 + \ldots + x_9 > 220$.

Следовательно, пятеро первых грибников собрали не более 110 грибов.

Задача 41.

100 шариков лежат в 50 коробках. Девочка и мальчик по очереди берут по одному шарику. Начинает девочка. Доказать, что мальчик может играть так, чтобы два последних шарика оказались в одной коробке.

Доказательство.

После каждого хода девочки остается нечетное число шариков, и поэтому имеется коробка, в которой число конфет нечетно. Поэтому мальчик всегда может сделать так, чтобы хотя бы в одной коробке число шариков было четным, и если он будет играть таким образом, то после 49-го хода две последние шарики будут в одной коробке.

Задача 42.

В банке лежат белые и черные зерна. Мы наугад достаем два зерна. Если зерна одного цвета, то мы их выбрасываем, а в банку добавляем черное зерно; если зерна разного цвета, то черное выбрасываем, а белое кладем обратно. В конце концов осталось одно зерно. Какого оно цвета, если известно исходное число белых зерен?

Решение.

Легко видеть, что число белых зерен каждый раз либо не меняется, либо уменьшается на 2, то есть не меняет своей четности. Если исходное число белых зерен было нечетным, то в конце концов оставшееся единственное зерно должно быть белым; если же это число четно, то оставшееся зерно черное.

Задача 43.

Записать цифры от 0 до 9 в строчку так, чтобы любое число, составленное из двух идущих подряд цифр, делилось на 7 или 13.

Решение.

Условию задачи удовлетворяет, например, строчка

$$0,\ 7,\ 8,\ 4,\ 9,\ 1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 6$$

Задача 44.

Имеется два трехлитровых сосуда. В один налит 1 л спирта, в другой — 1 л воды. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой. Можно ли за несколько переливаний сделать 60%-ный раствор спирта в том сосуде, где была вода?

Решение.

Ясно, что если в процессе переливаний мы смешаем спирт и воду в одном сосуде, то после этого получить 60%-ный раствор уже не удастся. И такое переливание мы дальше рассматривать не будем.

Пусть после некоторого переливания в одном сосуде содержатся a л спирта и b л воды, в другом сосуде — c л спирта и d л воды, так что $a + c = b + d = 1$. Тогда после переливания из второго сосуда в первый p л раствора, где $p < c + d$ концентрация раствора в первом сосуде будет равна $\left(a + \frac{c}{c+d}p\right) / (a + b + p)$, и мы докажем, что при $a > b$ эта концентрация больше $\frac{1}{2}$.

В самом деле,

$$\frac{a + \frac{c}{c+d}p}{a+b+p} > \frac{1}{2};\quad 2a(c+d) + 2cp > (a+b+p)(c+d);$$

$$(a-b)(c+d) > p(d-c);\quad (c+b)(c+d) > p(a-b);$$

$$p < c + d,$$

а последнее неравенство верно.

Отсюда следует, что в сосуде, первоначально содержащем чистый спирт, концентрация раствора всегда будет больше $\frac{1}{2}$, и поэтому в сосуде, где была вода, получить раствор с концентрацией 60% невозможно.

Задача 45.

В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить наименьшее возможное число учеников в этом классе.

Решение.

Если в классе x учеников и y из них повысили успеваемость, то по условию,

$$2{,}9 < 100\frac{y}{x} < 3{,}1 \text{ или } 29x < 1000y < 31x.$$

Если $x \leqslant 32$, то $31x \leqslant 992 < 1000y$; поэтому $x \geqslant 33$. Поскольку $29 \cdot 33 < 1000 < 31 \cdot 33$, то искомое число учащихся равно 33.

Задача 46.

На день рождения фрекен Бок испекла торт. Малыш и торт весили столько же, сколько Карлсон и фрекен Бок. Когда торт съели, Карлсон весил столько, сколько фрекен Бок и Малыш. Доказать, что Карлсон съел кусок торта, весивший столько же, сколько фрекен Бок до дня рождения.

Решение.

Из первого условия следует, что торт Малыш и фрекен Бок (до дня рождения) вместе весят столько же, сколько Карлсон и две фрекен Бок. Из второго условия следует, что торт, Малыш и фрекен Бок весят столько же, сколько бы весил Карлсон, если бы он съел еще такую же порцию торта. Поэтому Карлсон с двойной порцией торта весил бы столько же, сколько с двумя фрекен Бок. Следовательно, его порция торта и фрекен Бок весят одинаково.

5. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ИССЛЕДОВАНИЕМ

Задача 1.

Размер переднего колеса телеги по кругу — a метров, заднего — b метров. Определить, насколько путь, пройденный передним колесом за один оборот больше, чем путь ее заднего колеса.

Решение.

Обозначим искомый путь через x. По смыслу задачи

$$a>0, \quad b>0, \quad a>b, \quad x>0.$$

Составим уравнение $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = 1$.

Имеем $(b-a)\,x = ab$. Поскольку $b-a>0$, $x = \frac{ab}{b-a}$.

Ответ удовлетворяет параметрам задачи.

Задача 2.

В библиотеке S книг, расположенных на n полках больших и маленьких; на большой полке помещается a книг, а на меньшей — b книг. Сколько больших и маленьких полок?

Решение.

Пускай больших полок будет x, тогда маленьких $n-x$. Имеем уравнение:

$$xa + (n-x)\,b = S, \text{ или}$$

$$x\,(a-b) + bn = S, \quad (a-b)\,x = S - bn.$$

Решение существует, если $S > bn$; $x = 0$, если $a \neq b$ и $S = bn$, а именно, если все книги расположены на маленьких полках.

Задача 3.

В двух элеваторах собрано по p центнеров зерна. С первого элеватора каждый день берут по a центнеров зерна, из другого — по b центнеров. Через t дней в этих двух элеваторах осталось одинаковое количество зерна. Сколько центнеров зерна находилось отдельно в каждом элеваторе?

Решение.

Обозначим количество зерна в первом элеваторе через x центнеров, тогда в другом элеваторе будет $(p - x)$ ц. зерна. За t дней с первого элеватора забрали at центнеров зерна, с другого — bt центнеров зерна. Значит, в первом элеваторе осталось $x - at$, в другом — $p - x - bt$. Используя условие задачи, имеем уравнение

$$x - at = p \quad x - bt, \text{ или } 2x = at + p - bt,$$

откуда $x = \dfrac{p + t(a - b)}{2}$.

Ответ: если $a = b$, то в каждый элеватор собрано $\frac{1}{2}p$ центнеров зерна. Если $a \neq b$, то в первом элеваторе находилось $\dfrac{p + t(a - b)}{2}$ центнеров зерна, в другом — $\dfrac{p - t(a - b)}{2}$ центнеров. Задача имеет решение, если $p > t(a - b)$.

Задача 4.

Из аэродрома одновременно вылетели в город A в одном и том же направлении два самолета. Первый самолет летел со скоростью v км/ч, а скорость другого самолета была на d км/ч меньше. Определить расстояние от аэродрома до города A, если известно, что другой самолет прибыл туда на t часов позднее, чем первый.

Решение.

Обозначим через x расстояние от аэродрома до города A. Тогда первый самолет преодолел это расстояние за $\dfrac{x}{v}$ часов, а другой за $\dfrac{x}{v - d}$ часов. Поскольку второй самолет прибыл в город A на t часов позднее, то можно составить уравнение:

$$\frac{x}{v} - \frac{x}{v - d} = t;$$

$$x(v - d) - xv = tv(v - d);$$

$$xv - xd - xv = tv(v - d);$$

$$x = \frac{tv(d-v)}{d}.$$

Ответ: расстояние от аэродрома до города A равно $\dfrac{tv(d-v)}{d}$, t, v, $d>0$ и $d>v$.

Задача 5.

Из пункта A в пункт B сначала отправилась моторная лодка. А когда она прошла l км, вышел теплоход, который прибыл в пункт B на t часов раньше, чем лодка. Какое расстояние между A и B, если скорость лодки v_1 км/ч, а скорость теплохода v_2 км/ч?

Решение.

Расстояние x между A и B лодка пройдет за $\dfrac{x}{v_1}$ часов, а теплоход за $\dfrac{x}{v_2}$ часов. Но лодка пришла в B на t часов позднее, чем теплоход и перед выходом теплохода была в движении $\dfrac{l}{v_1}$ часов, то есть лодка плыла на $\left(t+\dfrac{l}{v_1}\right)$ часов больше, чем теплоход. Следовательно,

$$\frac{x}{v_1} - \frac{x}{v_2} = t + \frac{l}{v_1}.$$

Решим это уравнение:

$$xv_2 - xv_1 = v_1 v_2 t + l v_2;$$

$$x = \frac{v_2(v_1 t + l)}{v_2 - v_1} \quad (v_2 > v_1).$$

Задача 6.

Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Через a часов навстречу пешеходу выехал велосипедист; через b часов после своего выезда он встретил пешехода. Сколько времени потребовалось велосипедисту и сколько пешеходу, чтобы пройти весь путь между A и B, если велосипедисту на это надо на c часов меньше, чем пешеходу?

Решение.

Если велосипедисту на весь путь нужно x часов, то пешеходу — $(x + c)$ часов. Обозначим через y расстояние AB в километрах. До встречи пешеход прошел $\dfrac{y(a+b)}{x+c}$ км, а велосипедист проехал $\dfrac{by}{x}$ км. Составим уравнение

$$\frac{(a+b)\,y}{x+c} + \frac{by}{x} = y.$$

Поскольку $y \neq 0$, то $\dfrac{a+b}{x+c} + \dfrac{b}{x} = 1$, или

$$x^2 - (a + 2b - c)\,x - bc = 0. \qquad (1)$$

Учитывая, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и что произведение корней уравнения равно отрицательному числу $(-bc)$ видим, что уравнение (1) имеет один положительный и один отрицательный корень. Таким образом,

$$x = \frac{a + 2b - c + \sqrt{(a+2b-c)^2 + 4bc}}{2}.$$

Ответ: велосипедисту нужно $\dfrac{a+2b-c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}$ часов, пешеходу — $\dfrac{a + 2b - c + \sqrt{(a-2b-c)^2 + 4bc}}{2}$ часов.

Задача 7.

Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно S км, вылетел вертолет, а через t часов в этом же самом направлении вылетел самолет. Он догнал вертолет на расстоянии d км от A, долетел до B и сразу же повернул назад. На расстоянии d от B самолет встретил вертолет и прибыл в пункт A позднее, чем вертолет прибыл в B. На сколько раньше вертолет прибыл в B, чем самолет вернулся в A?

Решение.

Обозначим скорость самолета через x, а скорость вертолета — через y. До первой встречи с самолетом вертолет летел $\frac{d}{y}$ часов, а самолет — $\frac{d}{x}$ часов. Поскольку самолет вылетел на t часов позднее, то

$$\frac{d}{y} = \frac{d}{x} + t. \qquad (1)$$

Второе уравнение мы составим при условии второй встречи, когда вертолет был на расстоянии d от B и его полет длился $\frac{S-d}{y}$ часов, а самолет — $\frac{S+d}{x}$ часов.

Значит,

$$\frac{S-d}{y} = \frac{S+d}{x+t}. \qquad (2)$$

Мы получили систему уравнений (1) и (2) и хотя эту систему можно решить, а потом ответить на вопросы задачи, мы сначала посчитаем величину, которая нас интересует, считая, что x и y известны. Вертолет прибыл в B через $\frac{S}{y}$ ч после вылета. Самолет вернулся в A через $t + \frac{2S}{x}$ часов после того, как вертолет вылетел из A. Нас интересует величина

$$t + \frac{2S}{x} - \frac{S}{y},$$

следовательно, именно за столько часов самолет вернулся в B. Таким образом, из полученных уравнений нужно определить $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$.

Умножая первое уравнение на $d - S$, другое на d, складывая их, найдем

$$\frac{(S+d)\,d}{x} + \frac{d\,(d-s)}{x} + t\,(d-S) + td = 0,$$

значит, $\frac{2d^2}{x} = t\,(S-2d)$, откуда $\frac{1}{x} = \frac{t\,(S-2d)}{2d^2}$.

Из уравнения (1) определим $\frac{1}{y}$: $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{t}{d} = \frac{tS}{2d^2}$.

Таким образом,

$$t + \frac{2S}{x} - \frac{S}{y} = t + \frac{2St\,(S - 2d)}{2d^2} - \frac{tS^2}{2d^2} =$$

$$= t + \frac{St\,(S - 4d)}{2d^2}.$$

Задача имеет решение, если все компоненты положительны. Чтоб величина $\frac{1}{x}$ была реальной, необходимо, чтобы $S > 2d$.

По условию вертолет прилетел в B раньше, чем самолет вернулся в A. Поэтому

$$t + \frac{St\,(S - 4d)}{2d^2} > 0,$$

значит, $S^2 - 4Sd + 2d^2$.

Получили неравенство относительно $\frac{S}{d}$:

$$\left(\frac{S}{d}\right)^2 - 4 \cdot \frac{S}{d} + 2 > 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{S}{d} < 2 - \sqrt{2} \text{ или } \frac{S}{d} > 2 + \sqrt{2}.$$

Первое решение отбрасываем, поскольку $S < 2d - \sqrt{2}\,d$, а это противоречит условию, что $S > 2d$.

Ответ: $t + \dfrac{St\,(S - 4d)}{2d^2}$, $S > d\,(2 + \sqrt{2})$.

Задача 8.

По кругу, радиус которого R, в одном направлении двигаются две точки. Одна из них делает полный оборот на t секунд быстрее другой. Время между двумя последовательными их встречами равняется T. Определить скорость этих точек.

Решение

Обозначим V_1 и V_2 — скорости точек и причем $V_1 > V_2$. Первое условие задачи запишется уравнением

$$\frac{2\pi R}{V_2} - \frac{2\pi R}{V_1} = t.$$

Второе условие означает, что за время T точка, которая двигается с большей скоростью, пройдет по кругу путь на $2\pi R$ больший, чем вторая точка. Имеем второе уравнение

$$TV_1 - TV_2 = 2\pi R.$$

Из второго уравнения находим

$$V_2 = V_1 - \frac{2\pi R}{T}.$$

Подставляя это выражение для V_2 в первое уравнение, получаем квадратное уравнение для V_1:

$$V_1^2 - \frac{2\pi R}{T} V_1 - \frac{2\pi R}{T} \cdot \frac{2\pi R}{t}.$$

Решая его, найдем: $(V_1 > 0)$

$$V_1 = \frac{2\pi R}{T}\left(\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} + 1\right)$$

найдем $V_2 = V_1 - \dfrac{2\pi R}{T} = \dfrac{2\pi R}{T}\left(\sqrt{1 + \dfrac{4T}{t}} - 1\right)$.

Задача 9.

На двух прокатных станках можно прокатать a тонн стали за t часов. За какое время на каждом станке можно прокатать всю сталь, если известно, что на одном из них можно это сделать на p часов меньше, чем на втором.

Решение.

Допустим, что на первом станке a тонн стали прокатывают за x часов, а на втором — за y часов. Тогда производительность первого станка $\frac{a}{x}$ тонн, а второго — $\frac{a}{y}$ тонн. По условию задачи на обоих станках за час прокатывают $\frac{a}{t}$ тонн, значит, $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = \frac{a}{t}$, или

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{t}. \qquad (1)$$

Кроме того, $x - y = p$. Тогда уравнение (1) получит вид

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-p} = \frac{1}{t} \text{ или } x^2 - (p + 2t)\,x + pt = 0,$$

откуда $x_1 = \frac{p}{2} + t - \sqrt{\frac{p^2}{4} + t^2}$, $x_2 = \frac{p}{2} + t + \sqrt{\frac{p^2}{4} + t^2}$.

По условию задачи $p > 0$, $t > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $x > p$.

Тогда условию задачи удовлетворяет только второй корень уравнения.

Ответ: $\frac{p}{2} + t + \sqrt{\frac{p^2}{4} + t^2}$ (часов),

$-\frac{p}{2} + t + \sqrt{\frac{p^2}{4} + t^2}$ (часов).

Задача 10.

Производительность труда одного работника a деталей, второго — b деталей. Через сколько дней они изготовят одинаковое количество деталей, если первый до этого уже изготовил c деталей, а второй — d деталей?

Решение.

Обозначим искомое количество дней через x. Поскольку производительность труда первого работника a деталей, то за x дней он изготавливает xa деталей. Производительность труда второго работника b деталей, поэтому за x дней он изготавливает xb деталей. Учитывая условие задачи, составляем уравнение

$$xa + c = xb + d, \text{ или } x\,(a - b) = d - c.$$

Если $a \neq b$, $x = \dfrac{d-c}{a-b}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0)$.

Если $a = b$ и $c = d$, x — любое число.

Если $a = b$ и $c \neq d$ — задача не имеет решения.

Задача 11.

Водой из двух кранов наполняют бассейн за p часов. Если бы сначала из одного крана наполнили $\frac{1}{n}$ часть бассейна, а из второго — часть, которая осталась, то для наполнения всего бассейна достаточно было бы a часов. За какое время наполняется бассейн из каждого крана отдельно?

Решение.

Пускай из первого крана бассейн заполняют за x часов. Тогда за один час из второго крана наполнится $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а из первого — $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{x}\right)$ часть бассейна.

Для заполнения $\frac{1}{n}$ части бассейна из первого крана нужно $\frac{1}{n}:\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{x}\right)$ часов, а для заполнения части бассейна, которая осталась, $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$ из второго крана $\frac{n-1}{n}:\frac{1}{x}$ часов. Поскольку из обоих кранов одновременно бассейн заполняется за a часов, то

$$\frac{1}{n}:\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{x}\right)+\frac{n-1}{n}:\frac{1}{x}=a \text{ или}$$

$$(n-1)\,x^2-(an+np-2p)\,x+anp=0,$$

откуда $x=\dfrac{an+np-2t\pm\sqrt{(an+np+2p)^2-4anp\,(n-1)}}{2\,(n-1)}$.

Понятно, что $n>1$. Задача имеет решения при

$$(an+np-2p)^2\geqslant 4anp;\quad a>0,\quad n>1,\quad p>0.$$

Выражение

$$an+np-2p=n\,(a+p)-2p>n\cdot 2p-2p=2p\,(n-1)>0,$$

поскольку $a>p$ (по условию задачи). Оба найденные корни — положительные числа, потому что свободный член в преобразованном уравнении — положительное число, а второй коэффициент — отрицательный.

Задача 12.

Сплав двух металлов весит p кг. Когда его погружают в воду, он теряет в своем весе a кг. Такой же по весу кусок одного из двух металлов, которые входят в сплав в воде, теряет b кг, а кусок второго — c кг. Определить вес металлов в сплаве.

Решение.

Пускай вес первого металла x кг. Тогда вес другого — $(p - x)$ кг. Килограмм первого металла теряет при погружении его в воду $\frac{b}{p}$, а килограмм второго — $\frac{c}{p}$ кг. Поскольку потери веса данного куска сплава равен сумме потерь веса металлов, из которых он состоит, получим уравнение.

$$\frac{xb}{p} + \frac{(p-x)c}{p} = a, \text{ откуда}$$

$$x = p \cdot \frac{a-c}{b-c}, \quad p - x = p \cdot \frac{b-a}{b-c}$$

$$\left(x > 0, \ p - x > 0, \ \begin{cases} a - c > 0, \\ b - c > 0, \end{cases} \begin{cases} a - c < 0, \\ b - c < 0, \end{cases} \right.$$

$$\left. \begin{cases} b - a > 0, \\ b - c > 0, \end{cases} \begin{cases} b - a < 0, \\ b - c < 0. \end{cases} \right).$$

Задача 13.

В колбе находится раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{n} - y$ часть раствора и испаряют до того времени, пока процентное содержание соли в пробирке не станет в два раза больше. После этого раствор выливают назад в колбу. В результате количество соли в колбе повышается на p процентов. Определить изначальное количество соли в процентах.

Решение.

Обозначим V — объем раствора в колбе, x — количество соли, которая находится в растворе, в процентах.

В пробирку отливают $\frac{V}{n}$ раствора и испаряют до того времени, пока процентное количество соли не увеличится вдвое и вес испаренной воды будет равняться $\frac{V}{2n}$.

После переливания испаренного раствора назад в колбу там опять будет это же самое количество соли, что и раньше, а именно $V \cdot \frac{x}{100}$, а объем раствора уменьшится на $y \cdot \frac{V}{2n}$. Отсюда получим уравнение:

$$\frac{V \cdot \dfrac{x}{100}}{V - \dfrac{V}{2n}} = \frac{x+p}{100},$$

из которого имеем: $x = (2n - 1)\,p$.

Задача 14.

Из общего количества товара $a\%$ продано с прибылью $p\%$, а из части, которая осталась, $b\%$ продано с прибылью $q.\%$ С какой прибылью продана остаточная часть товара, если общий процент прибыли составляет $r\%$.

Решение.

Обозначим себестоимость всего товара — m денежных единиц. Тогда себестоимость первой проданной части составляет $a\%$ от m, а именно $\frac{ma}{100}$ д.е. По условию полученная от продажи прибыль составляет $p\%$ этой суммы, а именно $\frac{ma}{100} \cdot \frac{p}{100}$.

Себестоимость товара, который остался после продажи первой части равен

$$m - \frac{ma}{100} = m\left(1 - \frac{a}{100}\right) \text{ д.е.}$$

Себестоимость второй части равна $b\%$ от всей суммы, а именно

$$m\left(1 - \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{b}{100} \text{ д.е.}$$

При продаже второй части было получено $q\%$ прибыли, значит эта прибыль составляет

$$m\left(1 - \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{b}{100} \cdot \frac{q}{100} \text{ д.е.}$$

Себестоимость товара, который остался после второй продажи, составляет

$$m - \frac{ma}{100} - m\left(1 - \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{b}{100} = m \cdot \left(1 - \frac{a}{100}\right) \times$$
$$\times \left(1 - \frac{b}{100}\right) \text{ д.е.}$$

Обозначим через $x\%$ прибыль с продажи этой части товара. В денежных единицах это будет

$$m\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)\cdot\frac{x}{100}.$$

Общей прибылью будет

$$m\left(\frac{a}{100}\cdot\frac{p}{100}+\left(1-\frac{a}{100}\right)\cdot\frac{b}{100}\cdot\frac{q}{100}+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)\cdot\frac{x}{100}\right).$$

По условию общая прибыль должна составить $r\%$ от m д.е., значит, $\frac{mr}{100}$ д.е.

Поэтому

$$m\left(\frac{a}{100}\cdot\frac{p}{100}+\left(1-\frac{a}{100}\right)\cdot\frac{b}{100}\cdot\frac{q}{100}+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)\cdot\frac{x}{100}\right)=\frac{mr}{100}.$$

Ответ: $\dfrac{r-\dfrac{ap}{100}-\dfrac{bq}{100}\left(1-\dfrac{a}{100}\right)}{\left(1-\dfrac{a}{100}\right)\left(1-\dfrac{b}{100}\right)}\ \%$

$(a>0;\ n>0;\ q>0;\ a<100;\ b<100)$.

Задача 15.

Средний прирост продукции в процентах из года в год остается постоянным. Если бы прирост продукции увеличился на $p\%$ в год, то через 8 лет количество продукции увеличилось сравнительно с предыдущими условиями прироста вдвое. Определить годовой прирост продукции.

Решение.

Обозначим искомый прирост продукции за год через x. Если к началу первого года количество продукции было a, то к началу второго года она стала

$$a_1=a+\frac{ax}{100}=a\left(1+\frac{x}{100}\right),$$

а к началу третьего года

$$a_2 = a_1\left(1 + \frac{x}{100}\right) = a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 \text{ и т.д.}$$

К началу восьмого года количество продукции составляет $a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^7$, а к концу восьмого года — $a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^8$.

Рассуждая аналогично, когда прирост продукции за год составляет $(x + p)\%$, получим, что количество продукции к концу восьмого года будет равняться

$$a\left(1 + \frac{x+p}{100}\right)^8.$$

Согласно условию задачи, имеем

$$a\left(1 + \frac{x+p}{100}\right)^8 = 2a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 \text{ или}$$

$$\left(1 + \frac{x+p}{100}\right)^8 = \left(\sqrt[8]{2}\left(1 + \frac{x}{100}\right)\right)^8 \text{ или}$$

$$1 + \frac{x+p}{100} = \sqrt[8]{2}\left(1 + \frac{x}{100}\right),$$

откуда $x = \dfrac{p - 100\,(\sqrt[8]{2} - 1)}{\sqrt[8]{2} - 1}$.

Задача имеет решение только тогда, когда

$$p > 100\,(\sqrt[8]{2} - 1).$$

Ответ: $\dfrac{p - 100\,(\sqrt[8]{2} - 1)}{\sqrt[8]{2} - 1}$, где $p > 100\,(\sqrt[8]{2} - 1)$.

Задача 16.

Две железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг другу и пересекаются в пункте C, причем расстояния AC и BC соответственно равняются a км и b. Из пунктов A и B в пункт одновременно выходят два поезда, скорости которых равняются соответственно V_1 км/ч и V_2 км/ч. Через сколько времени расстояние между поездами будет наименьшим?

Решение.

Первый поезд за x часов проедет $V_1 x$ км, а второй — $V_2 x$ км. Тогда расстояние первого поезда от пункта C будет равняться $(a - V_1 x)$ км, а расстояние другого — $(b - V_2 x)$ км. Поскольку железные дороги взаимно перпендикулярны расстояние между поездами будет гипотенузой прямоугольного треугольника. Катеты будут равняться $a - V_1 x$ и $b - V_2 x$. Тогда по теореме Пифагора, имеем

$$y^2 = (a - V_1 x)^2 + (b - V_2 x)^2,$$

$$y^2 = (V_1^2 + V_2^2)\, x^2 - 2\,(aV_1 + bV_2)\, x + a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Расстояние между поездами будет наименьшим при том значении x, когда квадрат расстояния будет наименьшим, а квадрат расстояния является квадратным трехчленом (1), который имеет минимум $(V_1^2 + V_2^2) > 0$, а именно

$$x = \frac{aV_1 + bV_2}{V_1^2 + V_2^2}.$$

Ответ: $\dfrac{aV_1 + bV_2}{V_1^2 + V_2^2}$ (часов).

Задача 17.

Построить треугольник ABC, если известны его основание $BC = a$, сумма квадратов m^2 двух других сторон, где m — данный отрезок, и угол β при вершине.

Решение.

Предлагаем доказать самостоятельно, что геометрическим местом точек P, которые удовлетворяют условию

$$AP^2 + BP^2 = m^2,$$

где $AB = a$ и $m > \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ — данные отрезки, является окружность радиуса $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{2m^2 - a^2}$ с центром в середине M отрезка AB (употребите теорему: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равняется сумме квадратов его сторон). Перейдем к заданному построению треугольника ABC.

Из середины D отрезка BC, как из центра, описываем окружность k радиусом $r = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 - a^2}$ и строим на отрезке BC дуги BMC и BNC сегментов, которые вмещают угол β. Окружность k является геометрическим местом точек, сума квадратов которых в точках B и C равняется m^2. Очевидно, что вершина A должна лежать на пересечении окружности k с дугой одного из построенных сегментов. Мы получили четыре точки пересечения: A_1, A_2, A_3, A_4: каждую из них можно брать за вершину треугольника. В соответствии с этим получим четыре решения. Если окружность k касается дуг сегментов, то задача имеет два решения. Задача не имеет решений, если окружность k и дуги сегментов не пересекаются.

Это будет тогда, когда радиус r меньше половины основания a треугольника или больше длины h перпендикуляра DM, проведенного к отрезку BC из его середины D до пересечения с дугой BMC. Значит,

1) $\beta = 90°$. Задача не имеет решения, когда $r \leq \frac{a}{2}$, или $r > h$; имеет два решения, когда $r = h$; имеет четыре решения, когда $\frac{a}{2} < r < h$.

2) $\beta = 90°$. Задача не имеет решения, когда $r \neq \frac{a}{2}$; имеет бесконечное множество решений, когда $r = \frac{a}{2}$.

3) $\beta > 90°$. Задача не имеет решения, когда $r < h$ или $r > \frac{a}{2}$; имеет два решения, когда $r = h$; имеет четыре решения, когда $h < r < \frac{a}{2}$.

Задача 18.

Хозяйство купило для заправки тракторов на a д.е. лигроина, и на такую же сумму бензина, всего n кг. Сколько килограммов куплено лигроина и сколько бензина, если килограмм лигроина на b д.е. дороже килограмма бензина?

Решение.

Пускай куплено x кг лигроина. Тогда бензина было куплено $(n-x)$ кг. Цена лигроина $\frac{a}{x}$ д.е. за 1 кг, а бензина — $\frac{a}{n-x}$ д.е. Поскольку килограмм лигроина на b д.е. дороже, чем килограмм бензина, то получим уравнение

$$\frac{a}{x}-\frac{a}{n-x}=b.$$

Решим его.

$$a(n-x)-ax=bx(n-x);$$

$$bx^2-(2a+bn)x+an=0;$$

$$x=\frac{2a+bn\pm\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}.$$

Знак «плюс» перед корнем дает значение больше, чем n, поскольку $\frac{2a+bn}{2b}>\frac{bn}{2b}=\frac{n}{2}$.

$$\frac{\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}>\frac{\sqrt{b^2n^2}}{2b}=\frac{bn}{2b}=\frac{n}{2}.$$

Значит, имеем лигроина

$$\frac{2a+bn-\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b},$$

а бензина

$$n-\frac{2a+bn-\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}=$$

$$=\frac{bn-2a+\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}.$$

Глава II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Задача 1.

Упростить выражение

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}.$$

Решение.

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1-x^2};$$

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1-x^4}.$$

Прибавляя к полученному результату четвертую данную дробь, а затем пятую и шестую, получим окончательно

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}}.$$

Задача 2.

Показать, что

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$$

есть квадрат трехчлена.

Решение.

Данное выражение равно:

$$(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)+a^4=$$

$$=(x^2+5ax)^2+10a^2(x^2+5ax)+25a^4=(x^2+5ax+5a^2)^2.$$

Задача 3.

Упростить:

$$A=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение.

Приведя дроби к общему знаменателю, получим

$$A = \frac{1}{(a-b)(b-c)(a-c)} \cdot ((b-c)+(c-a)+(a-b)) = 0.$$

Ответ: $A = 0$.

Задача 4.

Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы дробь $\dfrac{ax+b}{mx+n}$ не зависела от x.

Решение.

Необходимость.

Пусть $\dfrac{ax+b}{mx+n} = k$, где k — не зависит от x. Освободившись от знаменателя, получим равенство $ax+b = kmx+kn$. Но из равенства многочленов следует равенство их коэффициентов при одинаковых степенях x. Поэтому можно написать, что $a = km$ и $b = kn$, и

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n}.$$

Если $m = 0$ (или $n = 0$), то пропорцию следует написать иначе:

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \left(\text{или } \frac{n}{m} = \frac{b}{a}\right).$$

Случай $m = n = 0$ исключается.

Достаточность.

Пусть $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = k$. Тогда

$$a = mk; \quad b = nk; \quad \frac{ax+b}{mx+n} = \frac{mkx+nk}{mx+n} = k\frac{mx+n}{mx+n} = k.$$

Задача 5.

Доказать, что если

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \text{ то}$$

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2.$$

Доказательство.

Положим $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, так что $x=ka$, $y=kb$, $z=kc$. Тогда имеем

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(k^2a^2+k^2b^2+k^2c^2)(a^2+b^2+c^2)=$$

$$=k^2(a^2+b^2+c^2)=(ka^2+kb^2+kc^2)^2=(ax+by+cz)^2.$$

Задача 6.

Доказать, что если

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\cdots=\frac{x_n}{x_{n+1}},$$

то имеет место равенство

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}}\right)^n=\frac{x_1}{x_{n+1}}$$

Доказательство.

На основании свойства ряда равных отношений имеем

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}^{\,n}}=\frac{x_1}{x_2},$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}}=\frac{x_2}{x_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}}=\frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

Перемножим все эти n равенств, получим

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}}\right)^n=\frac{x_1}{x_{n+1}}.$$

Задача 7.

Дано $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$, где

$$x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad 1 - yz \neq 0, \quad 1 - xz \neq 0, \quad x \neq y.$$

Доказать, что $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Доказательство.

Преобразуем равенство $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$, используем свойство равных отношений. Имеем

$$\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)} = \frac{(x^2 - yz) - (y^2 - xz)}{x(1 - yz) - y(1 - xz)};$$

$$\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)} = \frac{y(x^2 - yz) - x(y^2 - xz)}{yx(1 - yz) - xy(1 - xz)}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{(x^2 - yz) - (y^2 - xz)}{x(1 - yz) - y(1 - xz)} = \frac{y(x^2 - yz) - x(y^2 - xz)}{yx(1 - yz) - xy(1 - xz)},$$

или

$$\frac{(x^2 - y^2) + (x - y)z}{x - y} = \frac{xy(x - y) + z(x^2 - y^2)}{xyz(x - y)},$$

или

$$x + y + z = \frac{xy + z(x + y)}{xyz},$$

т.е. $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Задача 8.

Дано $a + b + c = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Вычислить $A = a^4 + b^4 + c^4$.

Решение.

Выделяя полный квадрат в выражении A, имеем

$$A = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) =$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c).$$

Согласно условию $A = 1 - 2\,(ab + ac + bc)^2$. Так как

$$2\,(ab + ac + bc) - (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = -1, \text{ то}$$

$$A = 1 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Задача 9.

Дано: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0$.

Доказать: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Доказательство.

Имеем $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}\right)^2 = 1$, или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right) = 1,$$

откуда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - 2\,\frac{xyc + xzb + yza}{abc}. \qquad (1)$$

Учитывая условие, имеем

$$xyc + xzb + yza = 0. \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Задача 10.

Доказать, что если $x + y + z + t = 0$, то

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 3\,(xy - zt)(z + t).$$

Доказательство.

Учитывая условие, имеем последовательно

$$x + y = -\,(z + t), \quad (x + y)^3 = -\,(z + t)^3,$$

$$x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y) = -\,z^3 - t^3 - 3zt\,(z + t),$$

$$x^3 + y^3 - 3xy(z + t) = -z^3 - t^3 - 3zt(z + t),$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 3(xy - zt)(z + t),$$

что и требовалось доказать.

Задача 11.

Доказать, что если

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

то $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} = 0.$

Доказательство.

Домножив обе части равенства на $a + b + c$, будем иметь:

$$a + b + c = \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(a+b+c)}{c+a} + \frac{c(a+b+c)}{a+b} =$$

$$= \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c,$$

и поэтому

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

Задача 12.

Числа x, y, z таковы, что выполняется соотношение:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1.$$

Докажите, что тогда справедливо равенство:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0.$$

Доказательство.

Умножив данное соотношение последовательно на числа x, y, z, получим следующие равенства:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{xy}{z+x} + \frac{xz}{x+y} = x;$$

$$\frac{xy}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{zy}{x+y} = y;$$

$$\frac{xz}{y+z}+\frac{yz}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} = z.$$

Сложим эти равенства и сгруппируем члены следующим образом:

$$\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)+\left(\frac{xy}{y+z}+\frac{xz}{y+z}\right)+$$

$$+\left(\frac{xy}{z+x}+\frac{yz}{z+x}\right)+\left(\frac{xz}{x+y}+\frac{yz}{x+y}\right)=x+y+z.$$

Заметив, что выражение в каждой из трех последних скобок равно соответственно x, y и z, получаем искомое равенство.

Задача 13.

Если $a+b+c=0$, то

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}-1 = 0.$$

Доказательство.

Имеем в числителе после приведения левой части к общему знаменателю:

$$3a^2b^2c^2 - a^4bc - ab^4c - abc^4 =$$

$$= - abc\,(a^3+b^3+c^3-3abc) =$$

$$= - abc\,(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab);$$

но $a+b+c=0$, а потому числитель равен 0 и, следовательно, левая часть равна нулю.

Задача 14.

Если $a+b+c=0$, то

1) $a^3+b^3+c^3=3abc$;

2) $a^4+b^4+c^4=2\,(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=$

$$= 2\,(ab + bc + ca)^2 = 2\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)^2.$$

Доказательство.

1) $a + b = -c$, следовательно, $a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b) = -c^3$, или $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

2) $a + b = -c$; $a^2 + 2ab + b^2 = c^2$, или $a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$, обе части возведем в квадрат:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 4a^2b^2,$$

откуда $a^4 + b^4 + c^4 = 2\,(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

Но $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2ab^2c - 2a^2bc -$

$$- 2abc^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc\,(a + b + c) = (ab + bc + ca)^2,$$

откуда $a^4 + b^4 + c^4 = 2\,(ab + bc + ca)^2$; так же

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab + bc + ca), \text{ или}$$

$$0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab + bc + ca), \text{ откуда}$$

$$ab + bc + ca = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

следовательно, $a^4 + b^4 + c^4 = 2\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)^2$.

Задача 15.

Если $a + b + c = 0$, то

1) $\dfrac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$;

2) $\dfrac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \dfrac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \cdot \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

Доказательство.

Докажите самостоятельно, что если

$$a + b + c = 0, \text{ то } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Поскольку $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab + ac + bc)$ и

$$a + b + c = 0, \text{ то}$$

$$ab + ac + bc = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Итак,

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = a^5 + b^5 + c^5 +$$

$$+ \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}, \text{ откуда}$$

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Задача 2) доказывается аналогично.

Задача 16.

Дано: $p + q = 1$.

Доказать: $\dfrac{p}{q^3 - 1} - \dfrac{q}{p^3 - 1} = \dfrac{2(q - p)}{p^2q^2 + 3}$.

Доказательство.

Имеем

$$\frac{1 - q}{q^3 - 1} - \frac{1 - p}{p^3 - 1} = \frac{1}{q^2 + q + 1} + \frac{1}{p^2 + p + 1} =$$

$$= \frac{(q - p)(q + p + 1)}{(q^2 + q + 1)(p^2 + p + 1)},$$

числитель равен $(q - p) \cdot 2$, а знаменатель равен

$$p^2q^2 + pq(p + q) + p(p + q) + (p + q) + q^2 + 1 =$$

$$= p^2q^2 + pq + p + 1 + q^2 + 1 =$$

$$= p^2q^2 + q(p + q) + p + 2 = p^2q^2 + q + p + 2 =$$

$$= p^2q^2 + 1 + 2 = p^2q^2 + 3.$$

Требование задачи доказано.

Задача 17.

Если $ab = cd$, то каждое из произведений равно

$$\frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)}.$$

Доказать.

Доказательство.

Имеем

$$\frac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)} =$$

$$= \frac{(a+c)\left(a+\frac{ab}{c}\right)(b+c)\left(b+\frac{ab}{c}\right)}{\left(a+b+c+\frac{ab}{c}\right)^2} =$$

$$= \frac{ab\,(a+c)^2\,(b+c)^2}{(ac+bc+c^2+ab)^2} = \frac{ab\,(a+c)^2\,(b+c)^2}{((a+c)(b+c))^2} = ab.$$

Задача 18.

Если $a + b = c + d$, то каждая сумма равна

$$\frac{abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}{ab+cd}.$$

Доказать.

Доказательство.

Имеем

$$\frac{abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}{ab+cd} =$$

$$= \frac{abcd\,\frac{cd\,(b+a)+ab\,(d+c)}{abcd}}{ab+cd} =$$

$$= \frac{cd\,(a+b)+ab\,(a+b)}{ab+cd} = \frac{(a+b)(cd+ab)}{ab+cd} = a+b.$$

Задача 19.

Дано: $b = a - 1, \quad c = a + 2.$

Доказать, что

$$\frac{a^2b^2c^2 - a^2b^2 - c^2 + 1}{a^2bc - \frac{c}{b} + b\left(a - \frac{1}{b^2}\right)} + 1 = a^2.$$

Доказательство.

Дробь равна $\dfrac{b\,(a^2b^2\,(c^2 - 1) - (c^2 - 1))}{a^2b^2\,(c + 1) - (c + 1)} =$

$$= \frac{b\,(c^2 - 1)(a^2b^2 - 1)}{(c + 1)(a^2b^2 - 1)} = b\,(c - 1),$$

следовательно, левая часть равна

$$b\,(c - 1) + 1 = (a - 1)(a + 1) + 1 = a^2.$$

Задача 20.

Доказать, что

$$\frac{b - c}{1 + bc} + \frac{c - a}{1 + ca} + \frac{a - b}{1 + ab} = \frac{(b - c)(c - a)(a - b)}{(1 + bc)(1 + ca)(1 + ab)}.$$

Доказательство.

Представив числитель $a - b$ в виде $-(c - a) - (b - c)$ и приведя дроби к общему знаменателю, получим в числителе левой части:

$$(b - c)(1 + ca)(1 + ab) + (c - a)(1 + ab)(1 + bc) -$$

$$- (c - a)(1 + bc)(1 + ca) - (b - c)(1 + bc)(1 + ca).$$

Выносим за скобки общие множители во втором и третьем, в первом и четвертом членах, получим в числителе:

$$(c - a)(1 + bc)(b - c)\,a - (b - c)(1 + ca)(c - a)\,b =$$

$$= (b - c)(c - a)(1 + abc - b - abc) = (b - c)(c - a)(a - b).$$

Задача 21.

Дано: $\frac{a-b}{1+ab}=\frac{d-c}{1+cd}$.

Доказать: $\frac{a-d}{1+ad}=\frac{b-c}{1+bc}$ и $\frac{a+c}{1-ac}=\frac{b+d}{1-bd}$.

Доказательство.

Из данного равенства:

$$a-b+acd-bcd=d-c+abd-abc, \text{ или}$$

$$a+abc-d-bcd=b-c+abd-acd, \text{ или}$$

$$a(1+bc)-d(1+bc)=(b-c)+ad(b-c), \text{ или}$$

$$(a-d)(1+bc)=(b-c)(1+ad), \text{ откуда}$$

$$\frac{a-d}{1+ad}=\frac{b-c}{1+bc}.$$

Так же из данного равенства

$$a+c-abd-bcd=b+d-acd-abc,$$

или

$$(a+c)(1-bd)=(b+d)(1-ac),$$

откуда $\frac{a+c}{1-ac}=\frac{b+d}{1-bd}$.

Задача 22.

Если $\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$ и $c\neq 0$, то каждая из дробей равна

$$\frac{ay-bx}{a-b} \text{ и } a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0.$$

Доказать.

Доказательство.

Пусть данное отношение равно k; тогда

$$bz-cy=k(b-c), \qquad (1)$$

$$cx - az = k(c - a), \qquad (2)$$

следовательно,

$$a(bz - cy) + b(cx - az) = k(a(b - c) + b(c - a)), \text{ или}$$

$$c(bx - ay) = kc(b - a), \text{ или}$$

$$ay - bx = k(a - b), \qquad (3)$$

откуда

$$k = \frac{ay - bx}{a - b}.$$

Сложим (1), (2) и (3) равенства; тогда получим:

$$bz - cy + cx - az + ay - bx = k(b - c + c - a + a - b), \text{ или}$$

$$z(y - z) + b(z - x) + c(x - y) = 0.$$

Задача 23.

Если $a^2 = m^2 = b^2 - n^2 = c^2 - p^2$, то

$$\frac{bp - cn}{a - m} + \frac{cm - ap}{b - n} + \frac{an - bm}{c - p} = 0.$$

Доказать.

Доказательство.

Левая часть последнего равенства равна

$$\frac{(bp - cn)(a + m)}{a^2 - m^2} + \frac{(cm - ap)(b + n)}{b^2 - n^2} +$$

$$+ \frac{(an - bm)(c + p)}{c^2 - p^2} = \frac{1}{a^2 - m^2}(abp - acn + bpm - cmn +$$

$$+ bcm - abp + cmn - anp + acn - bcm + anp - bpm) = 0.$$

Задача 24.

Упростить

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2x(x - 1)^2}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{2x^2(x^2 - 1)^2}{x^8 + x^4 + 1}.$$

Решение.

Имеем $x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) =$

$$= (x^4 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Поэтому общий знаменатель равен $x^8 + x^4 + 1$, а числитель равен

$$(x^2 - x + 1)^2(x^4 + x^2 + 1) + 2x\,(x - 1)^2(x^4 - x^2 + 1) +$$
$$+ 2x^2\,(x^2 - 1)^2 = x^8 - x^4 + 1.$$

Следовательно, искомая сумма равна

$$\frac{x^8 - x^4 + 1}{x^8 + x^4 + 1}.$$

Задача 25.

Доказать тождество

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3\,(a + b)(a + c)(b + c).$$

Доказательство.

Первый способ.

$$((a + b) + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)\,c^2 +$$

$$+ c^3 - (a^3 + b^3) - c^3 = (a + b)^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 -$$

$$- (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = (a + b)((a + b)^2 + 3(a + b)c + 3c^2 - a^2 -$$

$$- b^2 + ab) = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3ac + 3bc + 3c^2 - a^2 - b^2 + ab) =$$

$$= (a + b)(3ab + 3ac + 3bc + 3c^2) =$$

$$= (a + b)\cdot 3\,(a\,(b + c) + c\,(b + c)) = 3a\,(a + b)(a + c)(b + c).$$

Второй способ.

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = ((a + b + c)^3 - a^3) - (b^3 + c^3) =$$

$$= (a + b + c - a)((a + b + c)^2 + (a + b + c)\,a + a^2) -$$

$$- (b + c)(b^2 - bc + c^2) = (b + c)(a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + c^2 +$$

$$+ 2bc + a^2 + ab + ac + a^2 - b^2 + bc - c^2) =$$

$$= 3(b + c)(a^2 + ab + ac + bc) = 3(a + b)(a + c)(b + c).$$

Третий способ.

Применить замечательное тождество.

Задача 26.

Дано: $x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $y = \dfrac{(a + c - b)(a + b - c)}{(a + b + c)(b + c - a)}$.

Вычислить произведение $(x + 1)(y + 1)$.

Решение.

Имеем

$$x + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}.$$

$$y = \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2}.$$

$$y + 1 = \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2} + \frac{(b + c)^2 - a^2}{(b + c)^2 - a^2} = \frac{4bc}{(b + c)^2 - a^2}.$$

Итак,

$$(x + 1)(y + 1) = \frac{((b + c)^2 - a^2)}{2bc} \cdot \frac{4bc}{((b + c)^2 - a^2)} = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 27.

Упростить выражение

$$\frac{1 + (a + x)^{-1}}{1 - (a + x)^{-1}}\left(1 - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax}\right),$$

полученный результат вычислить при $x = \dfrac{1}{a - 1}$.

Решение. Первая дробь равна:

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}} = \frac{1+\dfrac{1}{a+x}}{1-\dfrac{1}{a-x}} = \frac{a+x+1}{a+x-1}.$$

Далее:

$$1-\frac{1-a^2+x^2}{2ax} = \frac{(a+x)^2-1}{2ax} = \frac{(a+x+1)(a+x-1)}{2ax}.$$

Итак, заданное выражение равно

$$\frac{a+x+1}{a+x-1}\cdot\frac{(a+x+1)(a+x-1)}{2ax} = \frac{(a+x+1)^2}{2ax}.$$

При подстановке $x=\dfrac{1}{a-1}$ находим, что

$$x+1+a=\frac{1}{a-1}+a+1=\frac{a^2}{a-1}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2}{2(a-1)}$.

Задача 28.

Показать, что при нечетном n из равенства

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$

следует равенство

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}$$

Доказательство.

Имеем

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{x+y+z}=\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz\,(x+y+z)}=0, \qquad (1)$$

откуда

$$(x+y)(x+z)(y+z)=0. \qquad (2)$$

Аналогично преобразуя доказываемое равенство, получаем

$$(x^n + y^n)(x^n + z^n)(y^n + z^n) = 0. \tag{3}$$

Таким образом, достаточно доказать, что при n нечетном из равенства (2) следует равенство (3).

Дейтвительно, пусть $y + z = 0$. Тогда $z = -y$, поэтому

$$y^n + z^n = y^n - y^n = 0.$$

Следовательно, неравенство (3) имеет место, а поэтому и доказываемое равенство также справедливо.

Задача 29.

Упростить выражение

$$\frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}.$$

Решение.

Рассматривая сумму первых двух слагаемых числителя как сумму кубов двух количеств, получим следующее выражение для числителя:

$$3\,(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2).$$

Аналогично поступая со знаменателем, найдем, что он равен $3\,(x - y)(y - z)(z - x)$.

Отсюда данное выражение

$$A = \frac{3\,(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)}{3\,(x - y)(y - z)(z - x)} = (x + y)(y + z)(z + x).$$

Задача 30.

Доказать, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, то имеет место равенство

$$\frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}.$$

Доказательство.

Согласно условию имеем

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc\,(a+b+c)}=0.$$

Следовательно, это равенство выполняется, когда $a+b=0$, или $b+c=0$, или $a+c=0$. Поэтому

$$a^{2n+1}=-\,b^{2n+1},\text{ либо } b^{2n+1}=-\,c^{2n+1},\text{ либо } c^{2n+1}=-\,a^{2n+1}.$$

Пусть $a^{2n+1}=-\,b^{2n+1}$, тогда

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$$

Аналогично доказывается это равенство в остальных двух случаях.

Задача 31.

Доказать, что если

$$\frac{x^2-yz}{x\,(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y\,(1-xz)},$$

где x, y, z отличны от нуля и попарно различные числа, то

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Доказательство.

Согласно условию имеем

$$\frac{x^2-yz}{x\,(1-yz)}-\frac{y^2-xz}{y\,(1-xz)}=0,\text{ или}$$

$$\frac{(x-y)(xy+yz+zx-xyz\,(x+y+z))}{xy\,(1-yz)(1-xz)}=0.$$

Поскольку по условию $x\neq y$, то $x-y\neq 0$, а потому

$$xy+yz+zx=xyz\,(x+y+z).$$

Так как $xyz\neq 0$, то поделив обе части последнего равенства на xyz, получим $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z$, что и требовалось доказать.

Задача 32.

Доказать, что если

$$\frac{y+z}{pb+qc}=\frac{z+x}{pc+qa}=\frac{x+y}{pa+qb}, \text{ то}$$

$$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{bc+ca+ab}.$$

Доказательство.

На основании свойства ряда равных отношений каждое из данных отношений равно

$$\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{(pb+qc)+(pc+qa)+(pa+qb)}=\frac{2(x+y+z)}{(p+q)(a+b+c)}. \qquad (1)$$

Умножим числители и знаменатели первого из данных отношений на a, второго на b и третьего на c. Получим

$$\frac{a(y+z)+b(z+x)+c(x+y)}{a(pb+qc)+b(pc+qa)+c(pa+qb)}=$$

$$=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{(p+q)(bc+ca+ab)}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1), (2) легко находим, что

$$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{bc+ca+ab},$$

что и требовалось доказать.

Задача 33.

Доказать, что если $b=\dfrac{a+c}{2}$, $\beta=\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$, $b^2\beta^2=ac\alpha\gamma$, то

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}.$$

Доказательство.

Подставим $b=\dfrac{a+c}{2}$ и $\beta=\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ в третье равенство, получим

$$\frac{\alpha^2\gamma^2}{(\alpha+\gamma)^2}=\frac{a\cdot c\cdot\alpha\cdot\gamma}{(a+c)^2},\ \text{или}\ \frac{\alpha\gamma}{(a+\gamma)^2}=\frac{a\cdot c}{(a+c)^2},$$

$$\text{или}\ \frac{(\alpha+\gamma)^2}{\alpha\cdot\gamma}=\frac{(a+c)^2}{a\cdot c},\ \text{или}\ \frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha\cdot\gamma}=\frac{a^2+c^2}{a\cdot c},$$

или $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.

Задача 34.

Доказать, что если $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$, где a, b, c отличны от нуля, то имеют равенства

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

Решение.

Данные равенства можно переписать так:

$$\frac{c\,(ay-bx)}{c^2}=\frac{b\,(cx-az)}{b^2}=\frac{a\,(bz-cy)}{a^2}.$$

На основании свойства равных отношений имеем

$$\frac{c\,(ay-bx)}{c^2}=\frac{b\,(cx-az)}{b^2}=\frac{a\,(bz-cy)}{a^2}=$$

$$=\frac{c\,(ay-bx)+b\,(cx-az)+a\,(bz-cy)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}=0.$$

Следовательно, $ay-bx=0$, $cx-az=0$, $bz-cy=0$, или

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\ \frac{x}{a}=\frac{z}{c},\ \frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

Отсюда $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, что и требовалось доказать.

Задача 35.

Доказать, что если

$$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c},$$

то $\dfrac{a}{x+2y+z} = \dfrac{b}{x-z} = \dfrac{c}{x-2y+z}$.

Доказательство.

На основании свойства равных отношений имеем

$$\frac{x+2y+z}{(a+2b+c)+2(a-c)+(a-2b+c)} =$$

$$= \frac{x-z}{(a+2b+c)-(a-2b+c)} =$$

$$= \frac{x-2y+z}{(a+2b+c)-2(a-c)+(a-2b+c)}.$$

Отсюда $\dfrac{x+2y+z}{a} = \dfrac{x-z}{b} = \dfrac{x-2y+z}{c}$, или

$$\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{x-z} = \frac{c}{x-2y+z},$$

что и требовалось доказать.

Задача 36.

Доказать, что если $ax + by + cz = 0$, то

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Доказательство.

Преобразуем знаменатель левой части доказываемого равенства. Имеем

$$bcy + bcz - 2bcyz + acz^2 + acx^2 - 2acxz + abx^2 + aby^2 - 2abxy =$$

$$= c(ax^2 + by^2) + b(ax^2 + cz^2) + a(by^2 + cz^2) - 2bcyz - 2acxz -$$

$$- 2abxy = c(ax^2 + by^2 + cz^2) - c^2z^2 + b(ax^2 + by^2 + cz^2) - b^2y^2 +$$

$$+ a(ax^2 + by^2 + cz^2) - a^2x^2 - 2bcyz - 2acxz - 2abxy =$$

$$= (a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2) - (ax + by + cz)^2 =$$

$$= (a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2),$$

так как по условию

$$ax + by + cz = 0.$$

Поэтому

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc\,(y - z)^2 + ca\,(z - x)^2 + ab\,(x - y)^2} =$$

$$= \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2)} = \frac{1}{a + b + c},$$

что и требовалось доказать

Задача 37.

Доказать, что если $\frac{3x + 2y}{3a - 2b} = \frac{3y + 2z}{3b - 2c} = \frac{3z + 2x}{3c - 2a}$, то

$$5\,(x + y + z)(5c + 4b - 3a) = (9x + 8y + 13z)(a + b + c).$$

Доказательство.

В силу свойства ряда равных отношений, каждое из данных отношений равно

$$\frac{(3x + 2y) + (3y + 2z) + (3z + 2x)}{(3a - 2b) + (3b - 2c) + (3c - 2a)} = \frac{5\,(x + y + z)}{a + b + c}.$$

Также каждое их данных отношений равно

$$\frac{(3x + 2y) + 2\,(3y + 2z) + 3\,(3z + 2x)}{(3a - 2b) + 2\,(3b - 2c) + 3\,(3c - 2a)} = \frac{9x + 8y + 13z}{5c + 4b - 3a}.$$

Следовательно,

$$\frac{5\,(x + y + z)}{a + b + c} = \frac{9x + 8y + 13z}{5c + 4b - 3a}, \text{ откуда}$$

$$5\,(x + y + z)\,(5c + 4b - 3a) = (9x + 8y + 13z)(a + b + c).$$

Задача 38.

Упростить $A = (x + a)(x^2 + a^2)(x^4 + a^4) \cdots (x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}})$.

Решение.

Разделим и умножим на $x - a$ $(x \neq a)$.

$$A = \frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\cdots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a} =$$

$$= \frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\cdots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a} =$$

$$= \frac{(x^4-a^4)(x^4+a^4)\cdots}{x-a} = \frac{x^{2n}-a^{2n}}{x-a}.$$

Ответ: если $x = a$, то $A = 2^n a^{2^{n-1}}$;

если $x \neq a$, то $A = \dfrac{x^{2n}-a^{2n}}{x-a}$.

Задача 39.

Доказать, что если $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$, то

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

Доказательство.

Преобразуем заданные отношения и воспользуемся свойством равных отношений:

$$\frac{a_1b_1}{b_1^2} = \frac{a_2b_2}{b_2^2} = \cdots = \frac{a_nb_n}{b_n^2} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}. \qquad (1)$$

Отсюда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \frac{a_1}{b_1}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2). \qquad (2)$$

Аналогичными преобразованиями получим

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \frac{b_1}{a_1}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2). \qquad (3)$$

Перемножая равенства (2) и (3) почленно, найдем

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Задача 40.

Доказать, что

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = \frac{c_1a_1^n + c_2a_2^n + \ldots + c_ka_k^n}{c_1b_1^n + c_2b_2^n + \ldots + c_kb_k^n},$$

если $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_k}{b_k}$, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — любые числа, не равные нулю одновременно.

Доказательство.

Из данной пропорции мы получаем

$$\frac{c_1\,a_1^n}{c_1\,b_1^n} = \frac{c_2\,a_2^n}{c_2\,b_2^n} = \cdots = \frac{c_k\,a_k^n}{c_k\,b_k^n}.$$

Отсюда, пользуясь свойством равных отношений, найдем

$$\frac{c_1a_1^n + c_2a_2^n + \ldots + c_ka_k^n}{c_1b_1^n + c_2b_2^n + \ldots + c_kb_k^n} = \frac{c_1\,a_1^n}{c_1\,b_1^n} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n.$$

Задача 41.

Доказать, что

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9,$$

если $a + b + c = 0$.

Доказательство.

Рассмотрим произведение первого множителя на первое слагаемое второго множителя:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b} = 1 + \frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) =$$

$$= 1 + \frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} =$$

$$= 1 + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{c(a-b) - (a^2 - b^2)}{ab} =$$

$$= 1 + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{(a-b)(c-(a+b))}{ab} =$$

$$= 1 + \frac{c}{ab}(c - (a+b)),$$

а так как $c = -(a+b)$, то получим окончательно для этого произведения $1 + \frac{2c^2}{ab}$. Точно так произведение первого множителя на второе слагаемое второго множителя будет $1 + \frac{2a^2}{bc}$ и на третье слагаемое $1 + \frac{2b^2}{ca}$.

Складывая полученные выражения, получим

$$1 + \frac{2c^2}{ab} + 1 + \frac{2a^2}{bc} + 1 + \frac{2b^2}{ca} = 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} =$$

$$= 3 + \frac{2 \cdot 3\, abc}{abc} = 3 + 6 = 9.$$

Задача 42.

Доказать, что из равенств $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, где a, b, c отличны от нуля, следует равенство

$$\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} + \frac{z^3}{c^2} = \frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

Доказательство.

Пусть $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$, откуда $x = ak$, $y = bk$, $z = ck$.

Сложив почленно последние три равенства, получим

$$x + y + z = k(a + b + c) = \frac{x}{a} \cdot (a + b + c).$$

Отсюда

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a}, \text{ или } \frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2} = \frac{x^2}{a^2}.$$

Умножив обе части последнего равенства на $x+y+z$, получим

$$\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2} = \frac{x(x+y+z)}{a^2} = \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2 y}{a^2} + \frac{x^2 z}{a^2}. \qquad (1)$$

Но из условия задачи следует, что $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}, \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$, поэтому равентсво (1) принимает вид

$$\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2} = \frac{x(x+y+z)}{a^2} = \frac{x^3}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} + \frac{z^3}{c^2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 43.

Упростить выражение

$$\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)-x^2} + \frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1} + \frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}.$$

Решение.

$$A = \frac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{(x^2-x+1)(x^2+1+x)} + \frac{(x-x^2+1)(x+x^2-1)}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)} +$$

$$+ \frac{(x^2-x-1)(x^2-x+1)}{(x^2-x-1)(x^2+1+x)} = \frac{x^2+x-1}{x^2+x+1} + \frac{x-x^2+1}{x^2+x+1} +$$

$$+ \frac{x^2-x-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x-1+x-x^2+1+x^2-x+1}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} = 1.$$

Задача 44.

Упростить выражение

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Решение.

Складываем данные дроби попарно — первые две и вторые две. Получим

$$A = \frac{(a-b)(b+c)+(b-c)(a+b)}{(a+b)(b+c)} +$$

$$+\frac{(c-a)(a+b)(b+c)+(a-b)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= \frac{ab-b^2+ac-bc+ab-ac+b^2-bc}{(a+b)(b+c)} +$$

$$+\frac{(c-a)(ab+b^2+ac+bc+ab-b^2-ac+bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= \frac{2ab-2bc}{(a+b)(b+c)} + \frac{(c-a)(2ab+2bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)} +$$

$$+\frac{2b(a+c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)} - \frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)} = 0.$$

Задача 45.

Упростить выражение

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Решение.

После приведения дробей к общему знаменателю получим

$$\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{N},$$

где $N = (a-b)(b-c)(a-c)$.

Разлагаем числитель на множители:

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = a^2(b-c) +$$

$$+(b^2c-c^2b)+(c^2x-b^2a) = a^2(b-c)+bc(b-c) -$$

$$- a(b^2 - c^2) = (b - c)(a^2 + bc - ab - ac) =$$

$$= (b - c)(a^2 - ab) + (bc - ac) = (b - c)a(a - b) -$$

$$- c(a - b) = (a - b)(b - c)(a - c) = N.$$

Ответ: $\frac{N}{N} = 1.$

Задача 46.

Доказать, что если

$$\frac{a - b}{1 + ab} + \frac{b - c}{1 + bc} + \frac{c - a}{1 + ca} = 0,$$

где $ab \neq -1$, $bc \neq -1$, $ca \neq -1$, то числа a, b, c не могут быть все различными.

Доказательство.

Условие задачи можно привести к такому виду:

$$\frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{(1 + ab)(1 + bc)(1 + ca)} = 0.$$

Отсюда следует, что или $a = b$, или $b = c$, или $c = a$, т.е. из чисел a, b, c хотя бы два равны между собой.

Задача 47.

Доказать, что если $\frac{1}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$, то число $\frac{c + a - b}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{b + c - a}{a}$ и $\frac{a + b - c}{c}$.

Доказательство.

Из условия следует, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, следовательно, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{2}{b} = 0$, или $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{2}{b}\right) = 0$, или

$$\frac{a + b + c}{a} + \frac{a + b + c}{c} - \frac{2(a + b + c)}{b} = 0.$$

Значит, число $\dfrac{a+b+c}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\dfrac{a+b+c}{a}$ и $\dfrac{a+b+c}{c}$, а потому число $\dfrac{a+b+c}{b}-2$, т.е. число $\dfrac{a+c-b}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\dfrac{b+c-a}{a}$ и $\dfrac{a+b-c}{c}$; что и требовалось доказать.

Задача 48.

Доказать, что если $b=\dfrac{2ac}{a+c}$, то число $\dfrac{a+c}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\dfrac{b+c}{a}$ и $\dfrac{a+b}{c}$.

Доказательство.

Перепишем условие задачи в таком виде:

$$\frac{1}{b}=\frac{a+c}{2ac}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\dfrac{1}{a}$ и $\dfrac{1}{c}$. Так как, если члены арифметической прогрессии умножить на одно и то же число, то полученные числа также составляют арифметическую прогрессию, а потому $\dfrac{a+b+c}{b}$ есть среднее арифметическое чисел $\dfrac{a+b+c}{a}$ и $\dfrac{a+b+c}{c}$. Если к членам арифметической прогрессии прибавить или отнять одно и то же число, то получается опять арифметическая прогрессия; поэтому число $\dfrac{a+b+c}{b}-1$ есть среднее арифметическое чисел $\dfrac{a+b+c}{a}-1$ и $\dfrac{a+b+c}{c}-1$, т.е. число $\dfrac{a+c}{b}$ является средним арифметическим чисел $\dfrac{b+c}{a}$ и $\dfrac{a+b}{c}$, что и требовалось доказать.

Задача 49.

Доказать, что если $\frac{1}{b}$ есь среднее арифметическое чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$, то число $\frac{1}{a-c}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a-b}$, а также число $\frac{1}{c-a}$ есть среднее арифметическое чисел $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{c-b}$.

Доказательство.

Из условия задачи следует, что $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, или $\frac{b-a}{ab}=\frac{c-b}{bc}$, или $c(a-b)=a(b-c)$. Поделив обе части последнего равенствана произведение $-a(a-c)(a-b)$, получим $\frac{-c}{a(a-c)}=\frac{c-b}{(a-c)(a-b)}$, или $\frac{(a-c)-a}{a(a-c)}=$ $=\frac{(a-b)-(a-c)}{(a-b)(a-c)}$. Отсюда $\frac{1}{a}-\frac{1}{a-c}=\frac{1}{a-c}-\frac{1}{a-b}$, т.е. $\frac{1}{a-c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a-b}\right)$. Таким образом, число $\frac{1}{a-c}$ является средним арифметическим чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a-b}$.

Теперь докажем вторую часть задачи. Из условия имеем $a(b-c)=c(a-b)$. Поделив обе части этого равенства на произведение $-c(c-a)(b-c)$, получим $\frac{-a}{c(c-a)}=\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$, или $\frac{(c-a)-c}{c(c-a)}=\frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)}$, т.е. $\frac{1}{c}-\frac{1}{c-a}=\frac{1}{c-a}-$ $-\frac{1}{c-b}$, откуда $\frac{1}{c-a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c-b}\right)$. Таким образом, число $\frac{1}{c-a}$ является средним арифметическим чисел $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{c-b}$.

Задача 50.

Доказать, что из равенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

следует равенство

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n},$$

если n нечетное.

Доказательство.

Преобразуем данное равенство:

$$(ab+ac+bc)(a+b+c)=abc;$$

$$(a+b)\,bc+(a+b)\,ac+(a+b)\,ab+(a+b)\,c^2=0;$$

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0.$$

Отсюда следует, что имеет место по крайней мере один из трех возможных случаев:

1) $a+b=0$ и $a=-b$;

2) $a+c=0$ и $a=-c$;

3) $b+c=0$ и $b=-c$.

Значит, данное равенство верно, если хотя бы два из трех чисел a, b и c равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Но в этом случае то же будет иметь место и для чисел a^n, b^n и c^n не нарушая данного равенства. Полученное при этой замене равенство и есть то, которое требовалось доказать.

Задача 51.

Упростить выражение

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(19^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(20^4+\frac{1}{4}\right)}.$$

Решение.

Умножая каждый множитель в числителе и знаменателе на 16 и пользуясь равенством

$$n^4+4=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=((n-1)^2+1)((n+1)^2+1),$$

получим, что данное выражение равно

$$\frac{(2^4+4)(6^4+4)\cdots(38^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)\cdots(40^4+4)} =$$

$$= \frac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)\cdots(37^2+1)(39^2+1)}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)\cdots(39^2+1)(41^2+1)} = \frac{1}{841}.$$

Задача 52.

Дано: $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$

Доказать, что две из этих дробей равны + 1, а одна из них − 1.

Доказательство.

Рассмотрим выражение:

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1\right)=$$

$$=\frac{(a-b+c)(a-c+b)(b+c-a)}{2abc};$$

$$\frac{(a-b+c)(a-c+b)(b+c-a)}{2abc} = 0,$$

так как мы к левой части данного выражения прибавим $-1-1+1=-1$; эта дробь равна нулю в том случае, если либо: $a-b+c=0$; либо $a-c+b=0$; либо $b+c-a=0$. Отсюда имеем $a-b=-c$; $a-c=-b$; $b+c=a$. Если $b+c=a$, то

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}=\frac{a^2-a^2-2bc}{2bc}=-1;$$

аналогично

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=1 \text{ при } a-c=-b;$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1 \text{ при } a-b=-c.$$

Задача 53.

Показать, что для того, чтобы дробь $\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$ имела значение, не зависящее от x, необходимо и достаточно соблюдение условия $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{c}{c_1}$.

Доказательство.

Пусть данная дробь имеет одно и то же постоянное численное значение при любых численных значениях x, которое обозначим через m, т.е. $\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}=m$, откуда

$$(a-a_1m)\,x^2+(b-b_1m)\,x+(c-c_1m)=0. \qquad (1)$$

Равенство (1) тождественно равно нулю по условию при любом значении x; это возможно только тогда, когда коэффициенты при x^2, x и свободный член одновременно равны нулю, т.е.

$$a-a_1m=0,\;\; b-b_1m=0,\;\; c-c_1m=0,$$

откуда

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}. \qquad (2)$$

Но если соотношение (2) выполнено, то данная дробь не зависит от x, следовательно, соотношение (2) является условием не только необходимым, но и достаточным.

Задача 54.

Доказать, что если $a^m+a^n=a^p+a^q$ $(a\neq 0,\; a\neq \pm 1)$ и $a^{3m}+a^{3n}=a^{3p}+a^{3q}$ $(a\neq 0,\; a\neq \pm 1)$, то $m\cdot n=p\cdot q$.

Доказательство.

Имеем $(a^m+a^n)^3=(a^p+a^q)^3$, или

$$a^{3m}+a^{3n}+3a^{m+n}(a^m+a^n)=$$

$$= a^{3p} + a^{3q} + 3a^{p+q}(a^p + a^q).$$

Но так как $a^m + a^n = a^p + a^q$ и $a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q}$ то $a^{m+n} = a^{p+q}$, откуда $m + n = p + q$, т.е.

$$m - p = q - n. \qquad (1)$$

Так как по условию

$$a^m - a^p = a^q - a^n, \text{ то}$$

$$a^p(a^{m-p} - 1) = a^n(a^{q-n} - 1). \qquad (2)$$

Возможны только два случая:

1) $m - p = 0$; тогда на основании (1) $q - n = 0$ и равенство (2) приводится к виду $0 = 0$. В этом случае $m = p$ и $n = q$, а следовательно, $mp = pq$.

2) $m - p \neq 0$. Тогда $q - n \neq 0$ (так как $m - p = q - n$). Равенство (2) приводится к виду $a^p = a^n$, а потому $p = n$. Но тогда из (1) следует равенсто $q = m$, и, значит $mn = pq$.

Задача 55.

Доказать, что если

$$a^3 + pa + q = 0, \quad b^3 + pb + q = 0 \text{ и}$$

$$c^3 + pc + q = 0 \quad (a \neq b, \; a \neq c, \; b \neq c),$$

то $a + b + c = 0$.

Доказательство.

Первый способ.

Вычтем почленно второе из данных в условии равенств из первого, получим

$$a^3 - b^3 + p(a - b) = 0,$$

Так как $a \neq b$, то, поделив обе части этого равенства на $(a - b)$, получим

$$a^2 + ab + b^2 + p = 0.$$

Таким же образом, вычитая почленно третье равенство из первого, получаем

$$a^2 + ac + c^2 + p = 0.$$

И, наконец, вычитая почленно одно из другого последние два равенства, имеем

$$a(b-c)+b^2-c^2=0,$$

или, сокращая на $(b-c)$, не равное 0, получаем

$$a+b+c=0.$$

Второй способ.

Из заданных трех равенств усматриваем, что многочлен x^3+px+q обращается в нуль при $x=a$, при $x=b$ и при $x=c$. Следовательно, этот многочлен делится на произведение $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Имеем тождество

$$x^3+px+q=(x-a)(x-b)(x-c),$$

так как коэффициент x^3 равен 1.

Значит,

$$x^3+px+q=x^3-(a+b+c)\,x^2+(bc+ac+ab)\,x-abc.$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x и свободные члены, получаем соответственно

$$a+b+c=0,\ ab+ac+bc=p \text{ и } abc=-q.$$

Третий способ.

Из данных трех равенств следует, что a, b, c — корни уравнения

$$x^3+0x^2+px+q=0 \ (\text{т.е. } x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=c),$$

следовательно, $x_1+x_2+x_3=0$ или $a+b+c=0$.

Задача 56.

Доказать, что если $a^m+a^n=a^p+a^q$ $(a\neq 0,\ a\neq\pm 1)$ и

$$a^{3m}+a^{3n}=a^{3p}+a^{3q}\ (a\neq 0,\ a\neq\pm 1),$$

то $m\cdot n=p\cdot q$.

Доказательство.

Имеем $(a^m+a^n)^3=(a^p+a^q)^3$, или

$$a^{3m} + a^{3n} + 3a^{m+n}(a^m + a^n) = a^{3p} + a^{3q} + 3a^{p-q}(a^p + a^q).$$

Но так как $a^m + a^n = a^p + a^q$ и $a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q}$, то $a^{m+n} = a^{p+q}$, откуда $m + n = p + q$, т.е.

$$m - p = q - n. \qquad (1)$$

Так как согласно условию

$$a^m - a^p = a^q - a^n,$$

то

$$a^p(a^{m-p} - 1) = a^n(a^{q-n} - 1). \qquad (2)$$

Возможны только два случая:

1) $m - p = 0$; тогда на основании (1) $q - n = 0$ и равенство (2) приводится к виду $0 = 0$. В этом случае $m = p$ и $n = q$, а следовательно, $mn = pq$.

2) $m - p \neq 0$, тогда $q - p \neq 0$ (так как $m - p = q - n$). Равенство (2) приводится к виду $a^p = a^n$, а поэтому $p = n$. Но тогда из (1) следует равенство $q = m$ и, значит, $mn = pq$.

7. ПАРАМЕТР В ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ

Задача 1.

Упростить $A = (a-b)\sqrt{\dfrac{y}{a^2 - 2ab + b^2}}$

Решение.

$$A = (a-b)\sqrt{\frac{y}{a^2-2ab+b^2}} = \frac{(a-b)\sqrt{y}}{|a-b|} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{если } a > b, \\ \text{не имеет смысла, если } a = b, \\ -\sqrt{y}, & \text{если } a < b. \end{cases}$$

Задача 2.

Упростить: $\sqrt{a^2 + a\sqrt{8} + 2} + \sqrt{a^2 - a\sqrt{8} + 2}$.

Решение.

Имеем

$$\sqrt{a^2 + a\sqrt{8} + 2} + \sqrt{a^2 - a\sqrt{8} + 2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{2} + 2} + \sqrt{a^2 - 2a\sqrt{2} + 2} =$$

$$= |a + \sqrt{2}| + |a - \sqrt{2}| = \begin{cases} 2a, & \text{если } a \geqslant \sqrt{2}, \\ 2\sqrt{2}, & \text{если } -\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}, \\ -2a, & \text{если } a < -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Задача 3.

Упростить $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2 + 1}}$.

Решение.

$$\frac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}} = \frac{a^2+1}{a\sqrt{\dfrac{a^4-2a^2+1+4a^2}{4a^2}}} =$$

$$= \frac{(a^2+1)\,2\cdot|a|}{a\sqrt{(a^2+1)^2}} = \frac{2\,|a|}{a} = \begin{cases} 2, \text{ если } a>0, \\ \text{не имеет смысла, если } a=0, \\ -2, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

Задача 4.

Упростить $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

Решение.

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}} =$$

$$= \sqrt{a+2\sqrt{a-1}+1-1}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}+1-1} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2} =$$

$$= \sqrt{a-1}+1+|\sqrt{a-1}-1| =$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{a-1}, \text{ если } a>2, \\ 2, \text{ если } 1\leqslant a\leqslant 2, \\ \text{не имеет решений, если } a<1. \end{cases}$$

Задача 5.

Упростить $\dfrac{\sqrt{a-2\sqrt{a}+1}}{\sqrt{a+2\sqrt[4]{a}+1}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1}+1.$

Решение.

$$\frac{\sqrt{a-2\sqrt{a}+1}}{\sqrt{a+2\sqrt[4]{a}+1}}\cdot\frac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1}+1 =$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-1)^2}}{(\sqrt[4]{a}+1)^2}\cdot\frac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1}+1 =$$

$$= \frac{|\sqrt{a}-1|}{\sqrt[4]{a}+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}+1 = \frac{|\sqrt{a}-1|}{\sqrt{a}-1}+1 =$$

$$= \begin{cases} 2, \text{ если } a>1, \\ \text{не имеет смысла, если } a=1, \\ 0, \text{ если } 0\leqslant a<0. \end{cases}$$

Задача 6.

Упростить $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$, если $x = \dfrac{a^2 + b^2}{2ab}$, $a > 0$, $b > 0$.

$$\textbf{Ответ: } A = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{(a+b) + |a-b|}{(a+b) - |a-b|} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a}{b}, & \text{если } a > b, \\ \text{не имеет смысла, если } a = b \text{ (тогда } x = 1), \\ \dfrac{b}{a}, & \text{если } a < b. \end{cases}$$

Задача 7.

Упростить $A = \dfrac{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x}}$, если $x = \dfrac{2mn}{1+n^2}$, $m > 0$, $n > 0$.

$$\textbf{Ответ: } \begin{cases} n, & \text{если } n \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } 0 < n < 1. \end{cases}$$

Задача 8.

Упростить $A = x\sqrt{a - x^2} + 0{,}5$, если

$$x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{8a-16}}{2a}}, \quad a \geqslant 2.$$

$$\textbf{Ответ: } A = \frac{|a-4| + a}{2a} = \begin{cases} \dfrac{a-2}{a}, & \text{если } a \geqslant 4, \\ \dfrac{2}{a}, & \text{если } 2 \leqslant a < 4. \end{cases}$$

Задача 9.

Упростить $A = \dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}$, если

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$\textbf{Ответ: } A = \begin{cases} a - b, & \text{если } a \geqslant b, \\ \dfrac{b(b-a)}{a}, & \text{если } a < b. \end{cases}$$

8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЯМИ

Задача 1.

Упростить $A = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}$.

Решение.

$$4 = \sqrt{4}+\sqrt{4}, \text{ тогда}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$

Задача 2.

Упростить выражение

$$\frac{(m+x)^{1/2}+(m-x)^{1/2}}{(m+x)^{1/2}-(m-x)^{1/2}}, \text{ если } x = \frac{2mn}{n^2+1} \text{ и } m>0,\ 0<n<1.$$

Решение.

$$A = \frac{(\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x})^2}{(\sqrt{m+x})^2-(\sqrt{m-x})} = \frac{2m+2\sqrt{m^2-x^2}}{2x} =$$

$$= \frac{m}{x}+\sqrt{\left(\frac{m}{x}\right)^2-1}.$$

Подводя множитель x под знак радикала, мы считали $\sqrt{x^2}=x$, потому что $x>0$, как это следует из условия. Т.к. $\dfrac{m}{x}=\dfrac{n^2+1}{2n}$, то $A=\dfrac{n^2+1}{2n}+\sqrt{\left(\dfrac{n^2-1}{2n}\right)^2-1} = \dfrac{n^2+1}{2n}+$ $+\sqrt{\left(\dfrac{n^2-1}{2n}\right)^2}$. Но $0<n<1$, и поэтому $\sqrt{\left(\dfrac{n^2-1}{2n}\right)^2}=\dfrac{1-n^2}{2n}$, Таким образом,

$$A = \frac{n^2+1}{2n} + \frac{1-n^2}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Задача 3.

Уничтожить иррациональность в знаменателе

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}.$$

Решение.

Имеем $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)} =$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}{2}.$$

Итак, $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}{2}.$

Задача 3.

Упростить выражение

$$\sqrt{\frac{(1+a)^3\sqrt{1+a}}{3a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}\ .$$

Решение.

$$\sqrt{\frac{(1+a)^3\sqrt{1+a}}{3a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+a)^3\sqrt{1+a}}{3a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt{3}}{9+(1+a)^2}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{(1+a)^3(1+a)}{27a^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{3a^4}{81(1+a)^4}} =$$

$$\sqrt{\frac{(1+a)^4\cdot 3a^4}{27a^3\cdot 81\,(1+a)^4}}=\sqrt[6]{\frac{a}{9\cdot 81}}=\frac{1}{3}\sqrt[6]{a}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\sqrt[6]{a}.$

Задача 4.

Упростить выражение $\left(\dfrac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$, если $x=a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $n>m>0$.

Решение.

$$A=\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}\right)^2=\left[\frac{(\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2}}{(x^2-a^2)-(x^2+a^2)}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{2x^2-2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}}{-2a^2}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left[x^2-\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}\right]^2.$$

Но $x^2=a^2\cdot\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$, $(x^2+a^2)(x^2-a^2)=$

$$=a^4\,\frac{(m+n)^2\,(m-n)^2}{4m^2n^2}=a^4\,\frac{(m^2-n^2)^2}{4m^2n^2},$$

$$\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=a^2\cdot\frac{n^2-m^2}{2mn},$$

так как $n>m>0$ и, следовательно, $\sqrt{(m^2-n^2)^2}=n^2-m^2$, а $\sqrt{m^2n^2}=mn$.

Теперь можем написать, что

$$A=\frac{1}{a}\left(a^2\cdot\frac{m^2+n^2}{2mn}-a^2\cdot\frac{n^2-m^2}{2mn}\right)^2=\frac{2m^2}{2mn}=\frac{m^2}{n^2}.$$

Задача 5.

Доказать, что если $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$, то

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n} =$$
$$= \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}$$
$$(a_k > 0,\ \ b_k > 0;\ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Решение.

Пользуясь свойством равных отношений, получим

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots = b_n} = \frac{a_1}{b_1},$$

или, извлекая квадратный корень

$$\frac{\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}}{\sqrt{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}} = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}}.$$

С другой стороны, из данной пропорци находим

$$\frac{a_1 b_1}{b_1^2} = \frac{a_2 b_2}{b_2^2} = \cdots = \frac{a_n b_n}{b_n^2}$$

или

$$\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{b_1} = \frac{\sqrt{a_2 b_2}}{b_2} = \cdots = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{b_n}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n}}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{\sqrt{a_1 b_1}}{b_1} = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}}.$$

Сравнивая левую часть этого равенства с такою же, полученной ранее, легко получить равенство, которое нужно доказать.

Задача 6.

Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a + x}} - \frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}\right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{a + x}} - \frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}\right)^{-2}.$$

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2-a-x}{\sqrt{a+x}\,(\sqrt{a}+\sqrt{x})}\right)^{-2}-\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2-a-x}{\sqrt{a+x}\,(\sqrt{a}-\sqrt{x})}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{a+2\sqrt{ax}+x-a-x}{\sqrt{a+x}\,(\sqrt{a}+\sqrt{x})}\right)^{-2}-\left(\frac{a-2\sqrt{ax}+x-a-x}{\sqrt{a+x}\,(\sqrt{a}-\sqrt{x})}\right)^{-2}=$$

$$=\frac{(a+x)(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{4ax}-\frac{(a+x)(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{4ax}=$$

$$=\frac{(a+x)(a+2\sqrt{ax}+x-a+2\sqrt{ax}-x)}{4ax}=\frac{a+x}{\sqrt{ax}}.$$

Ответ: $\frac{a+x}{\sqrt{ax}}$.

Задача 7.

Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}\right),\quad x>0.$$

Решение.

Из данного выражения и из условия $x>0$ видно, что допустимыми значениями для x являются те числа, которые удовлетворяют неравенствам $0<x<1$. Отсюда следует, что $\sqrt{x^2}=+x$, а $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$. Имея это ввиду, преобразуем выражение так:

$$A=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x})^2}\right)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-(\sqrt{1-x})}\right)\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(1+x)-(1-x)} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} =$$

$$= \frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1-x^2})^2-1}{x^2} =$$

$$= \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

Задача 8.

Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}} - \sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}})}{2\sqrt{a^3b}} : \left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right).$$

Решение.

$$\frac{(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}} - \sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}})^2}{2\sqrt{a^3b}} : \left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right) =$$

$$= \frac{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}-2\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}+a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}{2\sqrt{a^3b}} :$$

$$: \left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}-2\right) = \frac{a^2-\sqrt{(a^2-a\sqrt{a^2-b^2})\cdot(a^2+a\sqrt{a^2-b^2})}}{\sqrt{a^3b}} :$$

$$: \left(\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\right) = \frac{a^2-\sqrt{a^4-a^2(a^2-b^2)}}{\sqrt{a^3b}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} =$$

$$= \frac{a^2-ab}{a\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{a-b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}.$$

Ответ: $\dfrac{a-b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$.

Задача 9.

Упростить выражение

$$\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} - 4\sqrt[n]{x^2-1} + 1,$$

если $x = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n + 1}{(2+\sqrt{3})^n - 1}$.

Решение.

Так как $\dfrac{x+1}{x-1} = (2+\sqrt{3})^n$, то

$$A = \sqrt[n]{(x-1)^2}\left(\left(\frac{\sqrt[n]{x+1}}{x-1}\right)^2 + 1 - 4\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right) + 1 =$$

$$= \sqrt[n]{(x-1)^2}\,[(2+\sqrt{3})^2 + 1 - 4\,(2+\sqrt{3})] + 1 =$$

$$= \sqrt[n]{(x-1)^n}\,(4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1 - 8 - 4\sqrt{3}) + 1 = 1.$$

Задача 10.

Докажите, что если $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$, то $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Доказательство.

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{x^4}\,(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})} + \sqrt{\sqrt[3]{y^4}\,(\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2})} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}\,(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}) = (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^{3/2} = a.$$

Отсюда следует $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Задача 11.

Доказать равенство

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\; x \times$$

$$\times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 1.$$

Доказательство.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{4-2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{3}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{4-3}=1.$$

Задача 12.

Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}\right)$$

Решение.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{a-a+b}\right):\left(\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a-b}}{b}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$.

Задача 13.

Упростить выражение $\sqrt[n]{a^k x^{n-k}}+\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}-2\sqrt{bx}+b^2$,

если $x=\dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{b-a}\right)^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{2k}{n-2k}}}$.

Решение.

$$A=\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}\left(\sqrt[n]{\frac{a^k n^{n-k}}{a^{n-k}x^k}}+1-2\sqrt{b}\cdot\sqrt[2n]{\frac{x^n}{a^{2n-2k}x^{2k}}}\right)+b^2=$$

$$\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{n}}-2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}}+1\right]+b^2.$$

Но $\dfrac{x}{a}=\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{n}{n-2k}}}$; $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}}=$

$$=\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-1}.$$

Поэтому $A=\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}\left[\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}-1}\right)^2-\right.$

$$\left.-2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-1}\right)+1\right]+b^2=$$

$$=\left(\frac{b}{a}-2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}-1}+\frac{b}{a}-1-2\cdot\frac{b}{a}+\right.$$

$$\left.+2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}-1}+1\right)+b^2=b^2.$$

Задача 14.

Упростить выражение

$$(x^{-2}+a^{-2/3}x^{-4/3})^{-1/2}+(a^{-2}+a^{-4/3}x^{-2/3})^{-1/2},$$

если $x=(b^{2/3}-a^{2/3})^{3/2}$.

Решение.

$$A=[x^{-4/3}(x^{-2/3}+a^{-2/3})]^{-1/2}+[a^{-4/3}(a^{-2/3}+x^{-2/3})]^{-1/2}=$$

$$=x^{2/3}(x^{-2/3}+a^{-2/3})^{-1/2}+a^{2/3}(x^{-2/3}+a^{-2/3})^{-1/2}=$$

$$=(x^{-2/3}+a^{-2/3})^{-1/2}(x^{2/3}+a^{2/3})=(x^{2/3}+a^{2/3})^{1/2}x^{1/3}a^{1/3}.$$

Но $x^{1/3}=(b^{2/3}-a^{2/3})^{1/2}$,

$$x^{2/3}=b^{2/3}-a^{2/3},\quad x^{2/3}+a^{2/3}=b^{2/3}.$$

Поэтому $A=(b^{2/3})^{1/2}(b^{2/3}-a^{2/3})^{1/2}a^{1/3}=a^{1/3}b^{1/3}(b^{2/3}-a^{2/3})^{1/2}$.

Задача 15.

Упростить выражение

$$2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\frac{x^2}{x^2-1}\right)-\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение.

$$2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\frac{x^2}{x^2-1}\right)-\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=2x+\sqrt{x^2-1}\left(\frac{x^2-1+x^2}{x^2-1}\right)-\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=2x+\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}\,(x+\sqrt{x^2-1})}=$$

$$=\frac{2x\sqrt{x^2-1}+2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}==$$

$$\frac{2x\sqrt{x^2-1}+2x^2-1-1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot 2=$$

$$=2\,(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Ответ: $2\,(x+\sqrt{x^2-1})$.

Задача 16.

Упростить выражение $(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}})^2-4a^2\,x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$, если $x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}$.

Решение.

После вынесения $x^{\frac{2}{m}}$ за скобку, получим

$$x^{\frac{2}{m}}\,[(1+x^{\frac{m-n}{mn}})^2-4a^2\,x^{\frac{m-n}{mn}}=x^{\frac{2}{m}}\cdot M.$$

Но $x^{\frac{m-n}{mn}}=(a+\sqrt{a^2-1})^2$ и

$$1+x^{\frac{m-n}{mn}}=1+(a+\sqrt{a^2-1})^2=$$
$$=2a^2+2a\sqrt{a^2-1}=2a(a+\sqrt{a^2-1}).$$

Поэтому

$$[2a(a+\sqrt{a^2-1})]^2-4a^2(a+\sqrt{a^2-1})^2=$$
$$=4a^2(a+\sqrt{a^2-1})^2-4a^2(a+\sqrt{a^2-1})=0 \text{ и } x^{\frac{2}{m}}\cdot M=0.$$

Задача 17.

Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=$$
$$=\frac{\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^2(3+2\sqrt{2})}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}-\sqrt[4]{(\sqrt{2}+1)^2(3-2\sqrt{2})}}=$$
$$=\frac{\sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}+\sqrt[3]{x\sqrt{x}+12\sqrt{x}-6x-8}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}=$$
$$=\frac{\sqrt[4]{9-8}+\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)^3}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{9-8}}=\frac{1+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}=1.$$

Ответ: 1.

Задача 18.

Упростить выражение

$$\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

если $x=2R^{1/2}(1+R)^{-1}$ и $R>1$.

Решение.

Так как $R > 1$, то

$$(1-x^2)^{-1/2} = \left[1 - \frac{4R}{(1+R)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{(1+R)^2}{(1-R)^2}} = \frac{R+1}{R-1}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\left[(1-x^2)^{-1/2}+1\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{R+1}{R-1}+1\right) = \frac{R}{R-1}, \text{ а}$$

$$\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} - 1 = \frac{1}{R-1}.$$

Отсюда

$$A = \left(\frac{R}{R-1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{R-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{R-1}}{\sqrt{R}} +$$

$$+ \sqrt{R-1} = \sqrt{R-1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

Задача 19.

Упростить выражение

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right) + \frac{a}{2} \cdot \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x + \sqrt{x^2+a}}.$$

Решение.

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right) + \frac{a}{2} \cdot \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x + \sqrt{x^2+a}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2+a}\cdot\sqrt{x^2+a} + x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right) + \frac{a}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}}{x + \sqrt{x^2+a}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}\right) + \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}\cdot(x+\sqrt{x^2+a})} =$$

$$= \frac{2x^2 + a}{2\sqrt{x^2 + a}} + \frac{a(\sqrt{x^2 + a} + x)}{2\sqrt{x^2 + a}\,(x + \sqrt{x^2 + a})} =$$

$$= \frac{2x^2 + a}{2\sqrt{x^2 + a}} + \frac{a}{2\sqrt{x^2 + a}} = \frac{2x^2 + 2a}{2\sqrt{x^2 + a}} =$$

$$= \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} = \sqrt{x^2 + a}.$$

Ответ: $\sqrt{x^2 + a}.$

Задача 20.

Упростить $\dfrac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt[4]{25} - \sqrt[4]{125}}}$.

Решение.

Обозначим $\sqrt[4]{5}$ через a и пользуясь равенством $a^4 = 5$, будем иметь

$$\frac{1}{a^3 - 2a^2 + 3a - 4} = \frac{1}{(a^3 + 3a) - (2a^2 + 4)} =$$

$$= \frac{(a^3 + 3a) + (2a^2 + 4)}{a^6 + 6a^4 + 9a^2 - 4a^4 - 16a^2 - 16} = \frac{a^3 + 3a + 2a^2 + 4}{-2a^2 - 6} =$$

$$= -\frac{(a^3 + 2a^2 + 3a + 4)(a^2 - 3)}{2(a^4 - 9)} = \frac{a^5 + 2a^4 - 2a^2 - 9a - 12}{8} =$$

$$= -\frac{a^2 + 2a + 1}{4} = -\left(\frac{a + 1}{2}\right)^2,$$

поэтому данное выражение равно $1 + \sqrt[4]{5}$.

$$a^6 + 6a^4 + 9a^2 - 4a^4 - 16a^2 - 16 =$$

$$= a^6 + 2a^4 - 7a^2 - 16 =$$

$$= (a^6 + 2a^4 - 5a^2 - 10) - 2a^2 - 6 =$$

так как $a = \sqrt[4]{5}$

$$= ((\sqrt{5})^3 + 2(\sqrt{5})^2 - 5\sqrt{5} - 10) - 2a^2 - 6 =$$

$$= (5\sqrt{5} + 10 - 5\sqrt{5} - 10) - 2a^2 - 6 =$$

$$= -2a^2 - 6.$$

Задача 21.

Доказать, что если $ax^3 = by^3 = cz^3$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, то

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Решение.

Имеем $\sqrt[3]{ax^3 + by^3 + cz^3} = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}}$.

Но так как по условию $ax^3 = by^3 = cz^3$, то

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{ax^3}{y} + \frac{ax^3}{z}} =$$

$$= x\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

Поскольку $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, то

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = x\sqrt[3]{a}. \qquad (1)$$

Аналогично находим

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = y\sqrt[3]{b} \qquad (2)$$

и

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = z\sqrt[3]{c}. \qquad (3)$$

Из равенств (1), (2), (3) получаем

$$\frac{\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}}{x} = \sqrt[3]{a},$$

$$\frac{\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}}{y} = \sqrt[3]{b},$$

$$\frac{\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}}{z} = \sqrt[3]{c}$$

Сложив последние три равенства, получим

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c},$$

учитывая, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, получим

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

2 способ.

Пусть $ax^3 = by^3 = cz^3 = R^3$, тогда $a = \frac{R^3}{x^3}$; $b = \frac{R^3}{y^3}$; $c = \frac{R^3}{z^3}$.

Поэтому

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{R^3}{x} + \frac{R^3}{y} + \frac{R^3}{z}} = R = R\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) =$$

$$= \frac{R}{x} + \frac{R}{y} + \frac{R}{z} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Задача 22.

Упростить выражение:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}} : \frac{\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} - x}{\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} + x} : \sqrt{\frac{1-nx}{1+nx}},$$

если $x = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}} - 1$ и $0 < m < n < 2m$.

Решение.

Так как

$$\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} = \sqrt[6]{(2+\sqrt{5})^3(-38+17\sqrt{5})} =$$

$$\sqrt[6]{(38+17\sqrt{5})(-38+17\sqrt{5})} = \sqrt[6]{(17\sqrt{5})^2 - 38^2} = 1,$$

то данное выражение $A = \frac{1-mx}{1+mx} \cdot \sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}$.

Преобразуем теперь каждый множитель отдельно:

$$\frac{1-mx}{1+mx}=\frac{1-\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{1+\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}=\frac{\left(1-\sqrt{\frac{2m}{n}-1}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{2m}{n}-1\right)\right)}=$$

$$=\frac{\frac{2m}{n}-2\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{2=\frac{2m}{n}}=\frac{m-n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}:\frac{1+nx}{1-nx}=$$

$$=\frac{1+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{1-\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}=\frac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{m-n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}=$$

$$=\frac{\left(m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}\right)^2}{m^2-n^2\left(\frac{2m}{n}-1\right)}=\frac{\left(m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}\right)^2}{(m-n)^2};$$

$$\frac{\sqrt{1+nx}}{\sqrt{1-nx}}=\frac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m},$$

так как из условия $n>m$ следует, что

$$\sqrt{(m-n)^2}=n-m.$$

Итак, $A=\dfrac{m-n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}\cdot\dfrac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}=$

$$=\frac{m^2-n^2\left(\frac{2m}{n}-1\right)}{(-m+n)^2}=\frac{(m-n)^2}{(m-n)^2}=1.$$

Задача 23.

Упростить выражение

$$(a+x^{1/2})^{-1/2}+(a-x^{1/2})^{-1/2}, \text{ если } x=4(a-1) \text{ и}$$
$$1)\ 1<a<2;\ 2)\ a>2.$$

Решение.

$$(a+x^{1/2})^{-1/2}=(a+\sqrt{x})^{-1/2} = (a+2\sqrt{a-1})^{-1/2}=$$
$$=[(a-1)+2\sqrt{a-1}+1]^{-1/2}=((\sqrt{a-1}+1)^2)^{-1/2}=$$
$$=(\sqrt{a-1}+1)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1}.$$

Аналогично получим

$$(a-x^{1/2})^{-1/2}=(a-\sqrt{x})^{-1/2}=((\sqrt{a-1}-1)^2)^{-1/2}.$$

Если 1) $1<a<2$, то $\sqrt{a-1}<1$,

$$\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}=1-\sqrt{a-1},\quad (a-x^{1/2})^{-1/2}=$$
$$=(1-\sqrt{a-1})^{-1}=\frac{1}{1-\sqrt{a-1}}.$$

Поэтому данное выражение

$$A=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{a-1}}=\frac{2}{2-a}.$$

Если 2) $a>2$, то $\sqrt{a-1}>1$, $\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}=$

$$=\sqrt{a-1}-1,\quad (a-x^{1/2})^{-1/2}=(\sqrt{a-1}-1)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{a-1}-1};$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{a-1}-1}=\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}.$$

Задача 24.

Упростить выражение

$$\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}.$$

Решение.

$$\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}=$$

$$=\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a-b)(a+b)^2\cdot\frac{1}{(a+b)^2}}\cdot(a^3-b^3)=$$

$$=b\,(a^3-b^3).$$

Ответ: $b\,(a^3-b^3)$.

Задача 25.

Упростить выражение

$$\sqrt[6]{4x\,(14+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{3x}-2\sqrt{2x}}.$$

Решение

$$\sqrt[6]{4x\,(14+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{3x}-2\sqrt{2x}}=$$

$$\sqrt[6]{56x+16x\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{3x}-2\sqrt{2x}}=$$

$$=\sqrt[6]{56x+16x\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{16\cdot3x-24\sqrt{3x}\,2\sqrt{2x}+4\cdot2x}=$$

$$=\sqrt[6]{(56x+16x\sqrt{6})\,(56x-16x\sqrt{6})}=$$

$$=\sqrt[6]{56^2\cdot x^2-16^2\cdot6\cdot x^2}=\sqrt[3]{20x}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{20x}$.

Задача 26.

Упростить $\dfrac{1-ab+\sqrt{1+a^2}-a\sqrt{1+b^2}}{1-ab+\sqrt{1+b^2}-b\sqrt{1+a^2}}$.

Решение.

Числитель равен

$$1-a+\sqrt{1+a^2}+a\,(1-b-\sqrt{1+b^2})=$$

$$=1-a+\sqrt{1+a^2}-\frac{1}{2}(1-a+\sqrt{1+a^2})(1-a-\sqrt{1+b^2})\times$$

$$\times (1 - b - \sqrt{1 + b^2} = (1 - a + \sqrt{1 + a^2}\,) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{2}(1 - a - \sqrt{1 + a^2})(1 - b - \sqrt{1 + b^2}\,)\right).$$

Знаменатель равен числителю, если в нем переменим a на b и b на a, а потому знаменатель равен

$$(1-b + \sqrt{1 + b^2}\,)\times \left(1-\frac{1}{2}(1-a - \sqrt{1 + a^2})(1 - b - \sqrt{1 + b^2}\,)\right),$$

а потому, сократив дробь на общий множитель, найдем:

$$\frac{1 - a + \sqrt{1 + a^2}}{1 - b + \sqrt{1 + b^2}}.$$

Задача 27.

Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,)^2 - 4b}{(a - b) : \left(\sqrt{\frac{1}{b}} + 3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)} : \frac{a + 9b + 6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}}.$$

Решение.

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,)^2 - 4b}{(a - b) : \left(\sqrt{\frac{1}{b}} + 3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)} : \frac{a + 9b + 6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}} =$$

$$= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - 4b}{(a - b) : \left(\frac{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\right)} : \frac{(\sqrt{a} + 3\sqrt{b}\,)^2}{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}} =$$

$$= \frac{a + 2\sqrt{ab} - 3b}{(a - b)\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + 3\sqrt{b}\,)^2\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{(a + 2\sqrt{ab} - 3b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,)}{(a - b)\,ab\,(\sqrt{a} + 3\sqrt{b}\,)} = \frac{a + 2\sqrt{ab} - 3b}{ab\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})} =$$

$$= \frac{a + 2\sqrt{ab} - 3b}{ab\,(a - \sqrt{ab} + 3\sqrt{ab} - 3b)} = \frac{1}{ab}.$$

Ответ: $\frac{1}{ab}$.

Задача 28.

Вычислить

$$\sqrt[n]{x^n + \sqrt[n-1]{a^n x^n}} + \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n+1]{x^n a^n}} - 1,$$

если $x = \left(b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$.

Решение.

$$A = \sqrt[n]{x^{\frac{n^2}{n+1}}\left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right)} + \sqrt[n]{a^{\frac{n^2}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}} + x^{\frac{n}{n+1}}\right)} - 1 =$$

$$\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}}\left(\sqrt[n]{x^{\frac{n^2}{n+1}}} + \sqrt[n]{a^{\frac{n^2}{n+1}}}\right) - 1 =$$

$$= \left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right) - 1 =$$

$$= \left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1.$$

Но $x^{\frac{n}{n+1}} = b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}$, а $x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}} = b^{\frac{n}{n+1}}$.

Поэтому $A = \left(b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 = b - 1$.

Задача 29.

$$\frac{(1 - ax)\sqrt{1 + bx}}{(1 + ax)\sqrt{1 - bx}} \text{ при } x = \frac{\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}}{a}, \quad a < b < 2a.$$

Решение.

Из условия $x = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$ следует $a^2 x^2 = \frac{2a}{b} - 1$, или $b = \frac{2a}{1 + a^2 x^2}$, поэтому

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}=\frac{(1-ax)\sqrt{1+\dfrac{2ax}{1+a^2x^2}}}{(1+ax)\sqrt{1-\dfrac{2ax}{1+a^2x^2}}}=$$

$$=\frac{(1-ax)\sqrt{(1+ax)^2}}{(1+ax)\sqrt{(1-ax)^2}}=1.$$

Задача 30.

Вычислить $(x^{1/m}+x^{1/n})^2-4a^2x^{1/m+1/n}$, если

$$x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{mn}}$$

Решение.

Вынесем $x^{2/m}$ за скобку. Получим:

$$x^{2/m}((1+x^{\frac{m-n}{mn}})^2-4a^2x^{\frac{m-n}{mn}})=x^{2/m}\cdot M.$$

Но $x^{\frac{m-n}{mn}}=(a+\sqrt{a^2-1})^2$ и

$$1+x^{\frac{m-n}{mn}}=1+(a+\sqrt{a^2-1})^2=2a^2+2a\sqrt{a^2-1}=$$

$$=2a(a+\sqrt{a^2-1}).\text{ Поэтому}$$

$$M=(2a(a+\sqrt{a^2-1}))^2-4a^2(a+\sqrt{a^2-1})^2=$$

$$=4a^2(a+\sqrt{a^2-1})^2-4a^2(a+\sqrt{a^2-1})^2=0\text{ и}$$

$$x^{2/m}\cdot M=0.$$

Задача 31.

Доказать, что если $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$, то

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}.$$

Доказательство.

Пусть $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}=p$. Тогда $A=ap$, $B=bp$, $C=cp$, $D=dp$.

Таким образом, имеем

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{p}\,(a + b + c + d). \qquad (1)$$

Далее из условия следует, что

$$\frac{A + B + C + D}{a + b + c + d} = \frac{A}{a} = p. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = (a + b + c + d) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{A + B + C + D}{a + b + c + d}} = \sqrt{(a + b + c + d)(A + B + C + D)},$$

что и требовалось доказать.

Задача 32.

Упростить выражение

$$\sqrt{\left(\frac{p^2 + q^2}{p^3 - pq^2} + \frac{2q}{p^2 - q^2}\right)(p^2 + pq)} -$$

$$- \sqrt{\left(\frac{p}{p - q} - \frac{q}{p + q} - \frac{2pq}{p^2 - q^2}\right)(p + q)}\ ; \quad p > q > 0.$$

Решение.

$$A = \sqrt{\frac{(p + q)^2}{p\,(p^2 - q^2)}\,p\,(p + q)} - \sqrt{\frac{(p - q)^2}{p^2 - q^2}\,(p + q} =$$

$$= \sqrt{\frac{(p + q)^2}{p - q}} - \sqrt{\frac{(p - q)^2}{p - q}}.$$

Так как $p > q > 0$, то

$$\sqrt{(p + q)^2} = p + q; \ \sqrt{(p - q)^2} = p - q.$$

Отсюда $A = \dfrac{p + q}{\sqrt{p - q}} - \dfrac{p - q}{\sqrt{p - q}} = \dfrac{2q}{\sqrt{p - q}}.$

Задача 33.

Доказать, что

$$\sqrt{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2}} = a + b$$

при $a > b\sqrt{2} > 0$.

Решение.

$$\sqrt{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2}} =$$

$$= \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2} + a^2} - \sqrt{a^2 - b^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2} + b^2} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{a^2 - b^2} + a)^2} - \sqrt{(\sqrt{a^2 - b^2} - b)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 - b^2} + a - \sqrt{a^2 - b^2} + b = a + b,$$

так как по условию $a > b\sqrt{2}$ и, следовательно,

$$\sqrt{a^2 - b^2} > \sqrt{2b^2 - b^2} = b > 0,$$

поэтому $\sqrt{a^2 - b^2} - b > 0$.

Задача 34.

Доказать, что выражение

$$y = (x + 2\sqrt{x - 1})^{-1/2} + (x - 2\sqrt{x - 1})^{-1/2}$$

равно $\dfrac{2}{2 - x}$ при $1 \leqslant x < 2$ и $\dfrac{2\sqrt{x - 1}}{x - 2}$ при $x > 2$.

Доказательство.

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$y^2 = (x + 2\sqrt{x - 1})^{-1} + 2(x + 2\sqrt{x - 1})^{-1/2}((x - 2\sqrt{x - 1})^{-1/2} +$$

$$+ (x - 2\sqrt{x - 1})^{-1} = \frac{1}{x + 2\sqrt{x - 1}} + \frac{1}{x - 2\sqrt{x - 1}} +$$

$$+ 2(x^2 - 4(x - 1))^{-1/2} = \frac{2x}{x^2 - 4(x - 1)} + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} =$$

$$= \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} + \frac{2}{x - 2}.$$

1) Если $1 \leqslant x < 2$, то $(x-2) = -(x-2)$ и поэтому

$$y^2 = \frac{2x}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} = \frac{2x}{(x-2)^2} - \frac{2(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{4}{(x-2)^2},$$

а так как $y > 0$, то y есть арифметическое значение корня квадратного из этого выражения. Следовательно,

$$y = \sqrt{\frac{4}{(x-2)^2}} = \frac{2}{x-2} = \frac{2}{-(x-2)} = \frac{2}{2-x}.$$

2) Если $x > 2$, то $x - 2 > 0$, значит, $x - 2 = x - 2$, а поэтому

$$y^2 = \frac{2x}{x^2-4x+4} + \frac{2}{x-2} = \frac{2x}{(x-2)^2} + \frac{2(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{4(x-1)}{(x-2)^2}$$

и, следовательно, $y = \sqrt{\dfrac{4(x-1)}{(x-2)^2}} = \dfrac{2\sqrt{x-1}}{x-2} = \dfrac{2\sqrt{x-1}}{x-2}.$

$$\text{Итак, } y = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x} & \text{при } 1 \leqslant x < 2, \\ \dfrac{2\sqrt{x-1}}{x-2} & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

При $x = 2$ данное выражение не имеет смысла.

Задача 35.

Доказать, что $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ — рациональное число.

Доказательство.

Обозначим $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = x.$

Тогда $x^3 = 14 - 3x$. Отсюда: $x^3 + 3x - 14 = 0$.

$$(x^3 - 8) + (3x - 6) = (x-2)(x^2+2x+4) + 3(x-2) =$$

$$= (x-2)(x^2+2x+7) = 0.$$

$x_1 = 2x_{2,3}$ — комплексные числа. Значит, $x = 2$.

Ответ: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2.$

Задача 36.

Упростите выражение

$$((x+a)^{1/3}\cdot(x-a)^{-1/3}+(x+a)^{-1/3}\cdot(x-a)^{1/3}-2)^{-1/2}$$

при $x = a\cdot\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3}$, где $mn>0$.

Решение.

$$(((x+a)^{1/6}\cdot(x-a)^{-1/6}-(x+a)^{-1/6}\cdot(x-a)^{1/6})^2)^{-1/2} =$$

$$=\left(\frac{(x+a)^{1/6}}{(x-a)^{1/6}}-\frac{(x-a)^{1/6}}{(x+a)^{1/6}}\right)^{-1}=\frac{(x^2-a^2)^{1/6}}{(x+a)^{1/3}-(x-a)^{1/3}}.$$

При $x = a\cdot\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3}$ имеем:

$$\frac{\left(a^2\cdot\left(\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3}\right)^2-a^2\right)^{1/6}}{\left(a\cdot\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3}+a\right)^{1/3}-\left(a\cdot\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3}-a\right)^{1/3}}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{4m^3n^3}{(m^3-n^3)^2}\right)^{1/6}}{\left(\dfrac{2m^3}{m^3-n^3}\right)^{1/3}-\left(\dfrac{2n^3}{m^3-n^3}\right)^{1/3}}=\frac{2^{1/3}m^{1/2}n^{1/2}}{2^{1/3}m-2^{1/3}n}=\frac{m^{1/2}n^{1/2}}{m-n}=$$

$$=\frac{\sqrt{mn}}{m-n},\ \text{где } m\neq n,\quad x\neq a.$$

Задача 37.

Найти численное значение выражения

$$A=\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}\ \text{при } x=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Решение.

Заменяя x его значением, находим

$$A = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right).$$

Имеем

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}};$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}\right) =$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 1.$$

Задача 38.

Дано: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$

Доказать, что $(x+y+z)^3 = 27\,xyz$

Доказательство.

Имеем $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -\sqrt[3]{z}$. Возведя в куб обе части равенства, получим $x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = -z$; отсюда

$$x + y + z = -3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = (-3\sqrt[3]{xy})(-\sqrt[3]{z});$$

$$(x+y+z)^3 = 27\,xyz.$$

Задача 39.

Если

$$(y-z)^3\sqrt{1-x^3} + (z-x)^3\sqrt{1-y^3} + (x-y)^3\sqrt{1-z^3} = 0,$$

то $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$. Доказать.

Доказательство.

Имеем

$$((1-x^3)(y-z)^3+(1-y^3)(z-x)^3+(1-z^3)(x-y)^3)^3=$$
$$=27(y-z)^3(z-x)^3(x-y)^3(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3).$$

Имеем далее

$$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3-((x(y-z))^3+$$
$$+((y(z-x))^3+((z(x-y))^3)^3=$$
$$=3(y-z)(z-x)(x-y)-3x(y-z)y(z-x)z(x-y)=$$
$$=3(y-z)(z-x)(x-y)(1-xyz).$$

Подставив в предыдущее равенство, получим

$$27(y-z)^3(z-x)^3(x-y)^3(1-xyz)^3=$$
$$27(y-z)^3(z-x)^3(x-y)^3(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3),$$

откуда $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$.

Задача 40.

Найти значение выражения $z=x^3-3x-2\dfrac{A^2+B}{A^2-B}$

при $x=\sqrt[3]{\dfrac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}}+\sqrt[3]{\dfrac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}$.

Решение.

Обозначим $\sqrt[3]{\dfrac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}}$ через p, а $\sqrt[3]{\dfrac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}$ через q.

Тогда

$$x^3-3x-2\frac{A^2+B}{A^2-B}=(p+q)^3-3(p+q)-2\frac{A^2+B}{A^2-B}=$$
$$=p^3+q^3+3pq(p+q)-3(p+q)-2\frac{A^2+B}{A^2-B}.$$

Но $p^3 + q^3 = 2 \cdot \dfrac{A^2 + B}{A^2 - B}$, а $pq = 1$.

Следовательно,

$$z = 2 \cdot \frac{A^2 + B}{A^2 - B} + 3(p + q) - 3(p + q) - 2 \cdot \frac{A^2 + B}{A^2 - B} = 0.$$

Ответ: 0.

Задача 41.

Упростить $\dfrac{x^4 + x^2 + x\sqrt{2} + 2}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} - x\sqrt{2}$.

Решение.

Сгруппируем в числителе слагаемые, прибавив и отняв $x\sqrt{2}$:

$$\frac{x^4 + 2x\sqrt{2} + (x^2 - x\sqrt{2} + 2)}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} = \frac{x(x^3 + 2\sqrt{2})}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} + 1.$$

Раскладывая сумму кубов и сокращая, получим

$$\frac{x(x + \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 2)}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} + 1 = x^2 - x\sqrt{2} + 1.$$

Окончательно имеем $x^2 + x\sqrt{2} + 1 - x\sqrt{2} = x^2 + 1$.

Ответ: $x^2 + 1$.

Задача 42.

Доказать равенство $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

Доказательство.

Обозначим $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = a$.

Возведя обе части этого равенства в третью степень, получим

$$2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}\,(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}) =$$

$$= a^3, \text{ или}$$

$$4 - 3a = a^3, \text{ т.е. } (a - 1)(a^2 + a + 4) = 0. \qquad (1)$$

Поскольку $a^2 + a + 4 = 0$ не имеет действительных корней, то уравнение (1) имеет единственный действительный корень, равный 1. Следовательно, утверждение задачи верно.

Задача 43.

Доказать равенство $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

Доказательство.

Первый способ.

Пусть $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = x$. Возведя обе части этого равенства в третью степень, получим

$$20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{20^2 - (14\sqrt{2})^2} \cdot x = x^3, \text{ или}$$

$$40 + 6x = x^3, \quad x^3 - 6x - 40 = 0,$$

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 10) = 0.$$

Так как уравнение $x^2 + 4x + 10 = 0$ не имеет действительных корней, то уравнение $x^3 - 6x - 40 = 0$ имеет лишь один действительный корень, равный 4. Таким образом, утверждение задачи верно.

Второй способ.

Так как $20 + 14\sqrt{2} = 8 + 12\sqrt{2} + 12 + \sqrt{8} = (2 + \sqrt{2})^3$, а $20 - 14\sqrt{2} = 8 - 12\sqrt{2} + 12 - \sqrt{8} = (2 - \sqrt{2})^3$, то левую часть доказываемого равенства можно переписать в виде

$$\sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4,$$

что и требовалось доказать.

Задача 44.

Вычислить $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$.

Решение.

Пусть $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = x$,

$$x^3 = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 + 3x\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = 2\sqrt{5} + 3x,$$

$$x^3 - 3x - 2\sqrt{5} = 0, \quad x = \sqrt{5},$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} = t, \text{ тогда } \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \frac{1}{t},$$

$$t + \frac{1}{t} = \sqrt{5}, \quad t = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}.$$

Поскольку $t > 0$, имеем: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

9. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Задача 1.

Разложить на множители $x^3(x^2-7)^2-36x$.

Решение.

$$A = x(x^2(x^2-7)^2-36) = x(x(x^2-7)-6)(x(x^2-7)+6) =$$

$$= x(x^3-7x-6)(x^3-7x+6) =$$

$$= x((x^3+1)-7(x+1))((x^3-1)-7(x-1)) =$$

$$= x(x+1)(x-1)(x^2-x-6)(x^2+x-6) =$$

$$= x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2).$$

Задача 2.

Разложить на множители $x^3+9x^2+11x-21$.

Решение.

$$A = (x^3-1)+9(x^2-1)+11(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2+x+1+9x+9+11) =$$

$$= (x-1)(x^2+10x+21) =$$

$$= (x-1)(x+3)(x+7).$$

Задача 3.

Разложить на множители x^3+5x^2+3x-9.

Решение.

$$A = (x^3-1)+(5x^2-5)+(3x-3) =$$

$$= (x-1)(x^2+x+1)+5(x-1)(x+1)+3(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2+x+1+5x+5+3) =$$

$$= (x-1)(x^2+6x+9) =$$

$$= (x-1)(x+3)^2.$$

Задача 4.

Разложить на множители

$$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz.$$

Решение.

$$A = (x^2y + xy^2 + xyz) + (x^2z + xz^2 + xyz) + (y^2 + yz^2 + xyz) =$$

$$= xy\,(x+y+z) + xz\,(x+y+z) + yz\,(x+y+z) =$$

$$= (x+y+z)\,(xy+xz+yz).$$

Задача 5.

Разложить на множители

$$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz.$$

Решение.

$$A = (x^2y + xy^2) + (xz^2 + yz^2) + (x^2z + y^2z + 2xyz) =$$

$$= xy\,(x+y) + z^2\,(x+y) + z\,(x+y)^2 =$$

$$= (x+y)(xy + z^2 + zx + zy) =$$

$$= (x+y)(x\,(y+z) + z\,(y+z)) =$$

$$= (x+y)(x+z)(y+z).$$

Замечание. Исходное выражение симметрично относительно букв x, y, z, т.е. такое, что от замены x, y, z соответственно буквами y, z, x не меняет своего вида. Следовательно, если оно имеет множитель $(x+y)$, то оно имеет также множители $(y+z)$ и $(z+x)$. Таким образом, после выделения множителя $(x+y)$ можно было предвидеть наличие множителей $(x+z)$ и $(y+z)$ в окончательном результате.

Задача 6.

Разложить на множители

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2.$$

Решение.

$$A = (x^4 + y^4 - 2x^2y^2) - 2(x^2 - y^2)z^2 + z^4 - 4y^2z^2 =$$

$$= (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)z^2 + z^4 - 4y^2z^2 =$$

$$= ((x^2 - y^2) - z^2)^2 - (2yz)^2 =$$

$$= (x^2 - y^2 - z^2 - 2yz)(x^2 - y^2 + 2yz - z^2) =$$

$$= (x^2 - (y + z)^2)(x^2 - (y - z)^2) =$$

$$= (x + y + z)(x - y - z)(x + y - z)(x - y + z).$$

Задача 7.

Разложить на множители

$$8x^3(y + z) - y^3(z + 2x) - z^3(2x - y).$$

Решение.

$$A = 8x^3(y + z) - y^3z - 2y^3x - 2xz^3 + z^3y =$$

$$= 8x^3(y + z) - yz(y^2 - z^2) - 2x(y^3 + z^3) =$$

$$= (y + z)(8x^3 - yz(y - z) - 2x(y^2 - yz + z^2)) =$$

$$= (y + z)(8x^3 - y^2z + yz^2 - 2xy^2 + 2xyz - 2xz^2) =$$

$$= (y + z)((8x^3 - 2xy^2) + (2xyz - y^2z) - (2xz^2 - yz^2)) =$$

$$= (y + z)(2x(4x^2 - y^2) + yz(2x - y) - z^2(2x - y)) =$$

$$= (y + z)(2x - y)(4x^2 + 2xy + yz - z^2) =$$

$$= (y + z)(2x - y)((2x + z)(2x - z) + y(2x + z)) =$$

$$= (y + z)(2x - y)(2x + z)(2x + y - z).$$

Задача 8.

Разложить на множители $(y + z)(z + x)(x + 4) + xyz$.

Решение.

$$xyz + xz^2 + x^2y + x^2z + y^2z + yz^2 + xy^2 + xyz + xyz =$$

$$= (x^2y + xyz + x^2z) + (xy^2 + y^2z + xyz) + (xyz + yz^2 + xz^2) =$$

$$= x\,(xy + yz + zx) + y\,(xy + yz + zx) + z\,(xy + yz + zx) =$$

$$= (xy + yz + zx)(x + y + z).$$

Задача 9.

Разложить на множители

$$2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc.$$

Решение.

$$A = 2a^2b + 4ab^2 - a^2c - 2abc + ac^2 + 2bc^2 - 4b^2c - 2abc =$$

$$= 2ab\,(a + 2b) - ac\,(a + 2b) + c^2\,(a + 2b) - 2bc\,(a + 2b) =$$

$$= (a + 2b)\,(2ab - ac + c^2 - 2bc) =$$

$$= (a + 2b)\,(a\,(2b - c) - c\,(2b - c)) =$$

$$= (a + 2b)\,(2b - c)\,(a - c).$$

Задача 10.

Разложить на множители

$$((x^2 + y^2)(a^2 + b^2) + 4abxy)^2 - 4\,(xy\,(a^2 + b^2) + ab\,(x^2 + y^2))^2.$$

Решение.

Выражение, стоящее в первых скобках

$$((x^2 + y^2)(a^2 + b^2) + 4abxy),$$

легко приводится к следующему:

$$(ax + by)^2 + (ay + bx)^2,$$

а второе — к такому: $4\,(ay + bx)^2\,(ax + by)^2$.

Имея это ввиду и воспользовавшись формулой разности квадратов двух чисел для данного выражения A, получаем

$$A = ((ax + by)^2 + (ay + bx)^2)^2 - 4\,(ay + bx)^2\,(ax + by)^2 =$$

$$= ((ax + by)^2 + (ay + bx)^2 - 2\,(ay + bx)(ax + by)) \times$$

$$\times\,((ax + by)^2 + (ay + bx)^2 + 2\,(ay + bx)\,(ax + by)) =$$

$$= ((ax + by) - (ax + by))^2 \cdot ((ax + by) + (ay + bx))^2 =$$

$$= ((a - b)(x - y))^2 \cdot ((a + b)\,(x + y))^2 =$$

$$= (a - b)^2\,(a + b)^2\,(x - y)^2\,(x + y)^2.$$

Задача 11.

Разложить на множители

$$a^2b^2(b - a) + b^2c^2(c - b) + c^2a^2(a - c).$$

Решение.

$$A = b^2\,(a^2b - a^3 + c^3 - c^2b) + c^2a^2\,(a - c) =$$

$$= b^2\,((a^2b - c^2b) - (a^3 - c^3)) + a^2c^2\,(a - c) =$$

$$= b^3\,(a^2 - c^2) - b^2\,(a^3 - c^3) + a^2c^2\,(a - c) =$$

$$= (a - c)\,(b^3a + b^3c - b^2a^2 - b^2ac - b^2c^2 + a^2c^2) =$$

$$= (a - c)(b^2a\,(b - c) + b^2c\,(b - c) - a^2(b^2 - c^2)) =$$

$$= (a - c)(b - c)(ab\,(b - a) + c\,(b^2 - a^2)) =$$

$$= (a - c)(b - c)(b - a)(ab + bc + ca).$$

Задача 12.

Разложить на множители

$$bc\,(b + c) + ca\,(c - a) - ab\,(a + b).$$

Решение.

$$A = c\,(b^2 + bc + ac - a^2) - ab\,(a + b) =$$

$$= c\,(b^2 - a^2) + c^2\,(b + a) - ab\,(a + b) =$$

$$= (a + b)\,(bc - ac + c^2 - ab) =$$

$$= (a + b)\,((bc - ab) + (c^2 - ac)) =$$

$$= (a + b)(b\,(c - a) + c\,(c - a)) =$$

$$= (a + b)(b + c)(c - a).$$

Задача 13.

Разложить на множители $y^3(a - x) - x^3(a - y) + a^3(x - y)$.

Решение.

$$ay^3 - xy^3 - ax^3 + x^3y + a^3\,(x - y) =$$

$$= xy\,(x^2 - y^2) - a\,(x^3 - y^3) + a^3\,(x - y) =$$

$$= (x - y)\,[x^2\,(y - a) + xy\,(y - a) - a\,(y^2 - a^2)] =$$

$$= (x - y)\,(y - a)\,(x^2 + xy - ay - a^2) =$$

$$= (x - y)\,(x - a)\,(y - a)\,(a + x + y).$$

Задача 14.

Разложить на множители $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Решение.

$$P = x\,(x^4 + x^2 + 1) + (x^4 + x^2 + 1) =$$

$$= (x + 1)\,(x^4 + x^2 + 1) =$$

$$= (x + 1)\,(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) =$$

$$= (x + 1)\,[(x^2 + 1)^2 - x^2] =$$

$$= (x + 1)\,(x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1).$$

Задача 15.

Разложить на множители $y^3(a-x) - x^3(a-y) + a^3(x-y)$.

Решение.

$$A = ay^3 - xy^3 - ax^3 + x^3y + a^3(x-y) =$$

$$= xy(x^2 - y^2) - a(x^3 - y^3) + a^3(x-y) =$$

$$= (x-y)(x^2(y-a) + xy(y-a) - a(y^2 - a^2)) =$$

$$= (x-y)(y-a)(x^2 + xy - ay - a^2) =$$

$$= (x-y)(x-a)(y-a)(a+x+y).$$

Задача 16.

Разложить на множители $x^{10} + x^5 + 1$.

Решение.

$$P = (x^{10} + x^9 + x^8) - (x^9 + x^8 + x^7) + (x^7 + x^6 + x^5) -$$

$$-(x^6 + x^5 + x^4) + (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1).$$

Ответ: $P = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

Задача 17.

Разложить на множители

$$\sqrt[3]{a^2b^4} + \sqrt[3]{b^2c^4} + \sqrt[3]{c^2a^4} = (\sqrt[3]{b^4c^2} + \sqrt[3]{c^4a^2} + \sqrt[3]{a^4b^2}).$$

Решение.

$$P = (\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a^2})\sqrt[3]{a^2b^2} + (\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{b^4})\sqrt[3]{c^2} + (\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2})\sqrt[3]{c^4} =$$

$$= (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})\,[(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})\sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{a^2b^2} - \sqrt[3]{c^4}\,] =$$

$$= (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})\,[(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{c^2})\sqrt[3]{c^2} - (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{c^2})\sqrt[3]{b^2}\,] =$$

$$= (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{c^2})(\sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{b^2}).$$

Ответ:

$$P = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{b}).$$

Задача 18.

Разложить на множители

$$A = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2).$$

Решение.

Данное выражение обращается в нуль при $y = z$, а потому $y - z$ его множитель, также $z - x$ и $x - y$ — его множители. Так как A — третьего измерения, то

$$A = k *y - z)(z - x)(x - y).$$

Сравнив коэффициенты при xy^2, найдем $1 = k$, или $k = 1$, итак,

$$A = (y - z)(z - x)(x - y).$$

Таким же методом

1) $(b - c)(b + c)^2 + (c - a)(c + a)^2 + (a - b)(a + b)^2$.

2) $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$.

3) $x(y + z)(y^2 - z^2) + y(z + x)(z^2 - x^2) + z(x + y)(x^2 - y^2)$.

4) $(b - c)(b + c)^3 + (c - a)(c + a)^3 + (a - b)(a + b)^3$.

Задача 19.

Разложить на множители $a^{5n} + a^n + 1$.

Решение.

$$A = a^{5n} - a^{2n} + a^{2n} + a^n + 1 =$$

$$= a^{2n}(a^{3n} - 1) + (a^{2n} + a^n + 1) =$$

$$= a^{2n}(a^n - 1)(a^{2n} + a^n + 1) + (a^{2n} + a^n + 1) =$$

$$= (a^{2n} + a^n + 1)(a^{3n} - a^{2n} + 1).$$

Задача 20.

Разложить на множители $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

Решение.

Воспользуемся формулой

$$(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$$

для преобразования первого слагаемого данного выражения. Получим

$$A=((b-a)+(a-c))^3+(c-a)^3+(a-b)^3=$$

$$=(b-a)^3+3\,(b-a)(a-c)((b-a)+(a-c))+(a-c)^3-$$

$$-(a-c)^3-(b-a)^3=3\,(a-b)(b-c)(c-a).$$

Задача 21.

Разложить на множители $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

Решение.

$$A=((x+y+z)^3-x^3)-(y^3+z^3)=$$

$$=((x+y+z)-x)((x+y+z)^2+(x+y+z)\,x+x^2)-$$

$$-(y+z)\cdot(y^2-yz+z^2)=(y+z)((x+y+z)^2+$$

$$+(x+y+z)\,x+x^2-y^2+yz-z^2).$$

Так как данное выражение симметрично относительно x, y, z, то наряду с множителем $(y+z)$ оно имеет множители $(z+x)$ и $(x+y)$. Поэтому можно написать

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=(x+y)(y+z)(x+z)\,B,$$

где B — частное от деления данного выражения на произведение трех выделенных множителей. Рассматривая левую и правую части последнего равенства как многочлены относительно x и замечая, что в равных многочленах коэффициенты при одинаковых степенях буквы x равны, найдем сравнением коэффициентов при x^2, что $B=3$. Следовательно,

$$A=3\,(x+y)(y+z)(z+x).$$

Задача 22.

Выражение $x^8 + x^4 + 1$ разложить на четыре множителя.

Решение.

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Задача 23.

Разложить на множители $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Решение.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 =$$
$$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab\,(c + a + b) =$$
$$= (a + b + c)\,[(a + b)^2 - (a + b)\,c + c^2] - 3ab\,(a + b + c) =$$
$$= (a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Ответ: $(a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

Тождество

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

часто используется при решении других примеров.

Задача 24.

Доказать, что двухчлен $3x^4 + 1$ есть сумма трех квадратов.

Доказательство.

Прибавим и вычтем одно и то же выражение:

$$(2x^3 + 2x^2).$$

$$3x^4 + (2x^3 + 2x^2) - (2x^3 + 2x^2) + 1 =$$
$$= (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^2 + 1) =$$
$$= (x^2 + x)^2 + (x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2.$$

Задача 24.

Разложить на множители $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

Решение.

$$P = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 - (a^3+b^3) - c^3 =$$

$$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3ac + 3bc + 3c^2 - a^2 + ab - b^2) =$$

$$= (a+b)(3ab + 3ac + 3bc + 3c^2) =$$

$$= 3(a+b)[a(b+c) + c(b+c)] =$$

$$= 3(a+b)(b+c)(a+c).$$

Ответ: $P = 3(a+b)(b+c)(a+c)$.

Задача 25.

Найти значение дроби $\dfrac{a+b}{a-b}$, если $2a^2 + 2b^2 = 5ab$, $b > a > 0$.

Решение.

По условию, $2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$. Но

$$2a^2 - 5ab + 2b^2 = (2a^2 - 4ab) - (ab - 2b^2) = (2a-b)(a-2b),$$

тогда $a - 2b = 0$ или $2a - b = 0$.

Но $b > a > 0$, так что $b = 2a$. (Но не $a = 2b$). Следовательно,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+2a}{a-2a} = -3.$$

Глава III. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

10. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ПАРАМЕТРОМ

Задача 1.

Найти все целые кратные трем корни уравнения

$$ax = a + 5x,$$

где a — любое действительное число, не равно 5.

Решение.

$$x(a-5) = a, \quad a \neq 5, \quad x = \frac{a}{a-5}.$$

По условию $\frac{a}{a-5} = 3k$, где $k \in Z$, откуда $a = \frac{15k}{3k-1}$.

Задача 2.

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{a}{2a-1} - \frac{1}{2a-1} = \frac{2}{x-1}$$

имеет целые корни?

Решение.

При $a \neq \frac{1}{2}$ $x+1 = \frac{2(2a-1)}{a-1}$, $x = \frac{3a-1}{a-1}$. По условию

$$\frac{3a-1}{a-1} = k, \text{ где } k \in Z;$$

$$a(k-3) = k-1, \text{ значит, } a = \frac{k-1}{k-3}.$$

Итак, $x = \frac{3a-1}{a-1}$, если $a = \frac{k-1}{k-3}$, $k \in Z$, $k \neq 3$.

Задача 3.

Решить уравнение: $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$.

Решение.

Очевидно, что $a \neq 0$; $b \neq 0$. $x(a+b) = abc$.

1) $a = -b$; $c = 0$. Тогда $0x = 0$, $x \in R$;

2) $a = -b$; $c \neq 0$. $0x = abc$, $x \in \varnothing$;

3) $a \neq -b$. $x = \dfrac{abc}{a+b}$.

Задача 4.

Решить уравнение: $a^2x = a(x+2) - 2$.

Решение.

Имеем $a(a-1)x = 2(a-1)$.

Если $a(a-1) \neq 0$, т.е. $a \neq 0$; $a \neq 1$, то $x = \dfrac{2}{a}$.

Если $a = 0$, то $0x = -2$. Решений нет.

Если $a = 1$, то $x \in R$.

Задача 5.

Решить уравнение $\dfrac{x}{a} - 0{,}2 = \dfrac{1}{5a}$, где $-0{,}4 < x < 0{,}4$.

Решение.

Очевидно, что $a \neq 0$, а $x = \dfrac{1+a}{5}$. По условию:

$$-0{,}4 < \frac{1+a}{5} < 0{,}4.$$

Учитывая, что $a \neq 0$, имеем $a \in (-3; 0) \cup (0; 1)$.

Задача 6.

При каких натуральных значениях a уравнение

$$ax = a + x + 1$$

имеет четные корни?

Решение.

Имеем $x = 1 + \dfrac{2}{a-1}$, значит, x — четное, если дробь $\dfrac{2}{a-1}$ — нечетное число. Это может быть при $a = 3$.

Задача 7.

При каких значениях a уравнение $\frac{1}{a}+\frac{1}{ax}=1$ имеет решение, большее, чем 2?

Решение.

Очевидно, что $a\neq 0$, $x\neq 0$, $x=\frac{1}{a-1}$.

По условию $\frac{1}{a-1}>2$, откуда $1<a<1{,}5$.

Задача 8.

Определить, при каких значениях a уравнение

$$(x-1)(a-2)=1$$

будет иметь решение, заключенное в промежутке от 1 до 2.

Решение.

Имеем при $a\neq 2$ $x-1=\frac{1}{a-2}$, $x=\frac{a-1}{a-2}$.

По условию $1<\frac{a-1}{a-2}<2$, откуда $a>3$.

Задача 9.

Исследовать уравнение $\frac{a}{1-bx}=\frac{b}{1-ax}$.

Решение.

$$a-a^2x=b-b^2x.$$

Очевидно, что $x\neq\frac{1}{b}$ и $x\neq\frac{1}{a}$, $x(a^2-b^2)=a-b$.

1. Если $a=b=0$, то $x\in R$.
2. Если $a=0$, $b\neq 0$ или $a\neq 0$, $b=0$, то $x\in\varnothing$.
3. Если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то при $a^2\neq b^2$ $x=\frac{1}{a+b}$;

$$\text{при } a=b\ \ \frac{1}{b}<x<\infty,\ -\infty<x<\frac{1}{b};$$

$$\text{при } a=-b\ \ x\in\varnothing.$$

Задача 10.

При каких целых значениях параметра a уравнение

$$a^2 x + 2ax + x = 1 - a$$

имеет целые корни?

Решение.

Имеем $x(a+1)^2 = 1 - a$ или $x = \frac{1-a}{(a+1)^2}$. Итак,

если $a = 0$, то $x = 1$;
если $a = -2$, то $x = -3$;
если $a = -3$, то $x = 1$;
если $a < -3$, то x — дробное число (или $a > 1$).

Ответ: $a = -3;\ -2;\ 0;\ 1.$

Задача 11.

При каких натуральных значениях a уравнение

$$ax = a + x + 1$$

имеет четные корни?

Решение.

Имеем $x = 1 + \frac{2}{a-1}$, значит, x — четное, если дробь $\frac{2}{a-1}$ — нечетное число. Это может быть при $a = 3$.

Задача 12.

При каких значениях a уравнение $\frac{1}{a} + \frac{1}{ax} = 1$ имеет решение, большее, чем 2?

Решение.

Очевидно, что $a \neq 0$, $x \neq 0$, $x = \frac{1}{a-1}$.

По условию $\frac{1}{a-1} > 2$, откуда $1 < a < 1{,}5$.

Задача 13.

Определить, при каких значениях a уравнение

$$(x-1)(a-2)=1$$

будет иметь решение, заключенное в промежутке от 1 до 2.

Решение.

Имеем при $a \neq 2$ $\quad x-1=\dfrac{1}{a-2},\quad x=\dfrac{a-1}{a-2}.$

По условию $1<\dfrac{a-1}{a-2}<2$, откуда $a>3$.

Задача 14.

Решить уравнение $\dfrac{2}{5x-a}=\dfrac{3}{ax-1}.$

Решение.

Имеем $2(ax-1)=3\,(5x-a)$. Очевидно, что $x \neq \dfrac{a}{5};\ x \neq \dfrac{1}{a}.$

Если $a=\dfrac{15}{2}$, то $0\cdot x=\dfrac{41}{2}$. Уравнение не имеет решений.

Если $a \neq \dfrac{15}{2}$, то уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{2-3a}{2a-15}.$

Определим, при каких a найденный корень удовлетворяет уравнению. Должно быть: $5x-a \neq 0$ и $ax-1 \neq 0$.

При $x=\dfrac{2-3a}{2a-15}$ получим

$$\frac{10-15a}{2a-15}-a \neq 0 \text{ и } \frac{2a-3a^2}{2a-15}-1 \neq 0$$

и отсюда: $10-15a-2a^2+15a \neq 0$. Следовательно,

$$a \neq \pm\sqrt{5},\ 2a-3a^2-2a+15 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm\sqrt{5}.$$

Ответ: если $a \neq \dfrac{15}{2}$ и $a \neq \pm\sqrt{5}$, то $x=\dfrac{2-3a}{2a-15};$

если $a=\dfrac{15}{2}$, то уравнение корней не имеет.

Задача 15.

Решить уравнение $\frac{1-bx}{1+bx}=a$.

Решение.

$$b(1+a)x=1-a.$$

Если $b=0,\ \ a=1$, то $x\in R$.
Если $b=0,\ \ a\neq 1$, то $x\in\varnothing$.
Если $a=-1$, то $x\in\varnothing$.
Если $b\neq 0,\ \ a=1$, то $x\in\varnothing$.
Если $b\neq 0,\ \ a\neq -1,\ x=\frac{1-a}{b(1+a)}$.

Задача 16.

Решить уравнение $\frac{a-1}{2ax+3}=1$.

Решение.

Очевидно, что при $a=0$ и $a=1$ уравнение решений не имеет.

О.Д.З. уравнения $2ax+3\neq 0$.

Если $2ax{+}3\neq 0,\ a\neq 0,\ a\neq 1$, то $2ax=a-4,\ x=\frac{a-4}{2a}$.

Проверим, попадает ли найденный корень в О.Д.З. уравнения:

$$2\frac{a-4}{2}+3\neq 0,\quad a=1,$$

значит, $x=\frac{a-4}{2a}$ — корень уравнения.

Ответ: при $a\neq 0,\ \ a=1$ единственный корень $\frac{a-4}{2a}$.

Задача 17.

Решить уравнение $b^2x+1=2+b+x$.

Решение.

$$(b^2-1)x=b+1.$$

Если $b^2 \neq 1$, т.е. $b \neq 1$ и $b \neq -1$, то исходное уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{b+1}{b^2-1} = \frac{1}{b-1}.$$

Если $b = 1$, то уравнение не имеет решений, так как $0x \neq 2$. Если $b = -1$; $x \in R$.

Задача 18.

Решить уравнение $(a^2 - 4)\,x = a^2 + a - 6$.

Решение.

При $a^2 - 4 \neq 0$, т.е. $a \neq \pm 2$,

$$x = \frac{a^2 + a - 6}{a^2 - 4}, \quad x = \frac{a+3}{a-2}.$$

При $a = -2$ уравнение примет вид $0 \cdot x = -4$, т.е. решений уравнение не имеет.

При $a = 2$ исходное уравнение примет вид:

$$0 \cdot x = 0, \text{ т.е. } x \in R, \text{ при } a = -3, \ x = 0.$$

Задача 19.

Исследовать уравнение: $\dfrac{a+x}{a-1} = \dfrac{a+1}{a-x}$.

Решение.

Из уравнения видно, что $a \neq 1$ и $x \neq a$.

Далее, $a^2 - x^2 = a^2 - 1$, откуда $x = 1$ при $a = -1$ и $x = \pm 1$ при $a \neq -1$.

Задача 20.

Решить уравнение $ax + b = cx + d$.

Решение.

Имеем $(a - c)\,x = d - b$, значит,

1) если $a - c \neq 0$, то $x = \dfrac{d-b}{a-c}$;

2) если $a - c = 0$, а $d - b \neq 0$, то $x \in \varnothing$;

3) если $a - c = d - b = 0$, то корнями уравнений будут все действительные числа.

Задача 21.

Решить уравнение $cx + 2 = 2x - 1$.

Решение.

Имеем $(c - 2)\,x = -3$.

Если $c \neq 2$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{3}{c-2}$.

Если $c = 2$, то уравнение корней не имеет.

Задача 22.

Решить уравнение: $\dfrac{x-a}{bc} + \dfrac{x-b}{ac} + \dfrac{x-c}{ab} = 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде:

$$\left(\frac{x-a}{bc} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{x-b}{ac} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{x-c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0,$$

или

$$\frac{x-a-c-b}{bc} + \frac{x-b-c-a}{ac} + \frac{x-c-b-a}{ab} = 0,$$

или

$$(x - a - b - c)\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}\right) = 0. \qquad (1)$$

Принимая во внимание, что ни одна из величин a, b, c не равна 0, а значит, $abc \neq 0$, обе части уравнения (1) можно умножить на abc. Получим

$$(x - a - b - c)(a + b + c) = 0.$$

Если $a + b + c = 0$, то решением исходного уравнения являются все действительные числа.

Если $a + b + c \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = a + b + c$.

Задача 23.

Решить уравнение $\frac{5}{3x-k}=\frac{3}{kx-4}$.

Решение.

Имеем

$$(5k-9)\,x=20-3k. \tag{1}$$

Если $k=\frac{9}{5}$, то уравнение (1) не имеет решений.

Если $k\neq\frac{9}{5}$, то уравнение (1) имеет единственное решение.

$$x=\frac{20-3k}{5k-9}. \tag{2}$$

Чтобы $x=\frac{20-3k}{5k-9}$ был корнем исходного уравнения, необходимо выполнение условий $3x-k\neq 0$ и $kx-4\neq 0$. Выясним, при каких значениях k будет $3x-k=0$ и $kx-4=0$. Вместо x подставляя выражение (2), имеем

$$3x-k=\frac{-3\,(k^2-12)}{5k-9}.$$

Как видим, $3x-k=0$ и $kx-4=0$, если $k^2-12=0$, т.е. при $k=\pm\sqrt{12}$.

Ответ: если $k\neq\frac{9}{5}$; $k\neq\pm\sqrt{12}$, то $x=\frac{20-3k}{5k-9}$;
если $k=\frac{9}{5}$ или $k=\pm\sqrt{12}$, то корней нет.

Задача 24.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $10x-15a=13-5ax+2a$ имеет корень, больший 2.

Решение.

При любом значении параметра a исходное уравнение равносильно уравнению

$$x\,(a+2)=\frac{17a+13}{5}.$$

При $a = -2$ это уравнение запишется в виде $0x = -\frac{21}{5}$, значит, при $a = -2$ $x \in \varnothing$.

При любом $a \neq -2$ $x = \frac{17a + 13}{5(a + 2)}$.

По условию: $\frac{17a + 13}{5(a + 2)} > 2$, откуда $a < -2$ и $a > 1$.

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

Задача 25.

При каких целых значениях параметра a уравнение

$$a^2 x + 2ax = 1 - 2a$$

имеет целые корни?

Решение.

Исходное уравнение запишем в виде:

$$x(a + 2) = 1 - 2a, \text{ или } x = \frac{1 - 2a}{a + 2} = -2 + \frac{5}{a + 2}.$$

Значит, $a = -1$; $a = 3$.

Ответ: -1; 3.

Задача 26.

Решить уравнение $cx + 2 = 2x - 1$.

Решение.

Имеем $(c - 2)x = -3$;

если $c \neq 2$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{3}{c - 2}$;

если $c = 2$, то $x \in \varnothing$.

Задача 27.

При каких значениях параметра a корни уравнения $ax = 7x - 1$ кратны 3?

Решение.

Ясно, что $a = 7 - \frac{1}{x}$. Поскольку по условию $x = 3m$ $(m = 1; 2; 3; ...)$, то $a = 7 - \frac{1}{3m}$; $m = \pm 1; \pm 2; \pm 3, \ldots$

Уравнения с модулем

Задача 28.

Решить уравнение $|x - 2a| = 2x$.

Решение.

Очевидно, что $x > 0$.

1) Пусть $x \geqslant 2a$. Тогда $x - 2a = 2x$, $x = -2a$. Имеем

$$\begin{cases} -2a \geqslant 0, \\ -2a \geqslant 2a, \end{cases} \text{ откуда } a \leqslant 0.$$

2) Пусть $x < 2a$. Тогда $x = \frac{2a}{3}$.

Должно быть: $0 < \frac{2a}{3} < 2a$, $a > 0$, значит, $x = \frac{2a}{3}$ — корень заданного уравнения (при $a > 0$).

Ответ: При $a \leqslant 0$, $x = -2a$; при $a > 0$, $x = \frac{2a}{3}$.

Задача 29.

При каких значениях параметра a уравнение

$$|a| \cdot x - x = a$$

имеет корни $x < 1$?

Решение.

1) Пусть $a \geqslant 0$. Тогда $ax - x = a$, $x(a - 1) = a$.

При $a \neq 1$, $x = \frac{a}{a-1}$. По условию $\frac{a}{a-1} < 1$, откуда $a < 1$. Итак $x < 1$ при $0 \leqslant a < 1$.

2) Пусть $a < 0$. Тогда $-ax - x = a$, $x(-a - 1) = a$.

При $a \neq -1$, $x = \frac{a}{a+1}$.

По условию $-\dfrac{a}{a-1}<1$, откуда $a<1$, $a>-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $x<1$ при $-\dfrac{1}{2}<a<1$; $a<-1$.

Задача 30.

Решить уравнение $|x-a|=x-2$.

Решение.

Очевидно, что

$$x\geqslant 2. \qquad (1)$$

1) Пусть $x\geqslant a$. Тогда $|x-a|=x-a$; $x-a=x-2$, $a=2$. Значит, при $a=2$ $x\geqslant 2$.

2) $x<a$. Тогда $|x-a|=a-x$, $2x=a+2$, $x=\dfrac{a+2}{2}$.

Учитывая неравенство (1), $\dfrac{a+2}{2}\geqslant 2$, $a\geqslant 2$. Кроме того, $\dfrac{a+2}{2}<a$, $a>2$. Значит, при $a>2$ $x=\dfrac{a+2}{2}$.

Ответ: Если $a>2$, то $x=\dfrac{a+2}{2}$; если $a=2$, то $x\geqslant 2$; если $a<2$, то $x\in\varnothing$.

Задача 31.

При каких значениях параметра a уравнение

$$|a|\cdot x-|x|=|a|$$

имеет корни меньше, чем (-1)?

Решение.

Поскольку $x<0$ (по условию $x<-1$), то заданное уравнение можно записать так:

$$|a|\cdot x+x=|a|, \text{ или } x(|a|+1)=|a|.$$

Очевидно, что правая часть уравнения положительна, а левая отрицательна. Значит, ни при каких a уравнение корней, меньших чем (-1), не имеет.

Задача 32.

Решить уравнение $|a| \cdot |x| = x$.

Решение.

Очевидно, что $x \geqslant 0$.

1) Если $a > 0$, то $x(a-1) = 0$. При $a = 1$ $x \in R$ $(x \geqslant 0)$. При $a \neq 1$ $x = 0$.

2) Если $a < 0$, то $x(-a-1) = 0$. При $a = -1$ $x \in R$ $(x \geqslant 0)$. При $a \neq -1$ $x = 0$.

Ответ: При $a \neq \pm 1$ $x = 0$; при $a = \pm 1$ $x \geqslant 0$

Задача 33.

Решить уравнение $x - |x| = a$.

Ответ: Если $a > 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x \geqslant 0$; если $a < 0$, то $x = -\frac{a}{2}$.

Задача 34.

Решить уравнение $\frac{|x|}{x} = a$.

Решение.

Если $x > 0$, то $\frac{|x|}{x} = 1$; если $x < 0$, то $\frac{|x|}{x} = -1$.

Ответ: Если $a = 1$, то $x > 0$; если $a = -1$, то $x < 0$; если $a \neq \pm 1$, то $x = 0$.

Задача 35.

Определить, при каких значениях параметров a и b следующие уравнения имеют:

1) единственное решение;
2) положительное решение;
3) отрицательное решение;
4) бесконечное множество решений;
5) совсем не имеют решений.

1) $\frac{a}{3a + x} = \frac{2}{b + x}$;

2) $ab + x = b(x + 2)$.

Решение

1) Очевидно, что

$$x \neq -3a, \quad x \neq -b. \tag{1}$$

Заданное уравнение перепишем в виде:

$$ab + ax = 6a + 2x; \quad x(a - 2) = 6a - ab.$$

Если $a \neq 2$, $x = \dfrac{a(6-b)}{a-2}$. Учитывая (1), имеем:

$$\frac{a(6-b)}{a-2} \neq -3a, \text{ или } b \neq 3a, \quad a \neq 0.$$

Также $\dfrac{a(6-b)}{a-2} \neq -b$, или $a \neq \dfrac{1}{3}b$. Итак,

если $a \neq 2$, $a \neq \dfrac{1}{3}b$, $a \neq 0$, то $x = \dfrac{a(6-b)}{a-2}$.

2) Должно быть по условию

$$\begin{cases} \dfrac{a(6-b)}{a-2} > 0, \\ a \neq \dfrac{1}{3}b; \quad a \neq 2; \quad a \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство $\dfrac{a(6-b)}{a-2} > 0$. Имеем

$$\begin{cases} a(6-b) > 0, \\ a - 2 > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a(6-b) < 0, \\ a - 2 < 0. \end{cases}$$

В первой системе $a > 2$, значит, $b < 6$.

Во второй системе $0 < a < 2$, $b > 6$ и $a < 0$, $b < 6$, $b \neq 3a$.

3) Уравнение имеет отрицательное решение при

$$a < 0,\ b > 6; \quad 0 < a < 2,\ b < 6; \quad a > 2,\ b > 6, \quad (b \neq 3a).$$

4) Бесконечное множество решений при $a = 2$, $b = 6$.

5) Уравнение не имеет решений при $a = 2$, $b \neq 6$.

Приведем ответы второго уравнения:

1) При $b \neq 1$ $x = \dfrac{b(2-a)}{1-b}$.

11. ПАРАМЕТР В КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Задача 1.

Решить уравнение $\dfrac{4(x^2-b)}{2bx-b-2x+1}=\dfrac{2x}{b-1}-\dfrac{2x}{2x-1}$.

Решение.

Имеем $\dfrac{2x^2-2b}{(b-1)(2x-1)}=\dfrac{x}{b-1}-\dfrac{x}{2x-1}$;

$$2x^2-2b=2x^2-x-bx+x.$$

Если $b\neq 0$, $b\neq 1$, то $x=2$.

Если $b=0$, то $\frac{1}{2}<x<\infty$, $-\infty<x<\frac{1}{2}$.

Если $b=1$, то уравнение не имеет смысла.

Задача 2.

Решить уравнение $\dfrac{a}{x-2}=\dfrac{x+1}{x^2-4}$.

Решение.

Очевидно, что $x\neq -2$, $x\neq 2$,

$$\frac{a}{x-2}=\frac{x+1}{(x-2)(x+2)};$$

$$ax+2a=x+1;\quad (a-1)\,x=1-2a,$$

при $a\neq 1$ $x=\dfrac{1-2a}{a-1}$.

Если $x=2$, $a=\frac{3}{4}$. При $a=1$ $x\in\varnothing$.

Ответ: если $a\neq 1$, $a\neq\frac{3}{4}$, то $x=\dfrac{1-2a}{a-1}$;

если $a=1$, $a=\frac{3}{4}$, то $x\in\varnothing$.

Задача 3.

Решить уравнение $ax^2=1$.

Решение.

Если $a \leqslant 0$, — уравнение не имеет решения.

Если $a > 0$, то $x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}$.

Задача 4.

Решить уравнение относительно x: $ax^2 = b$.

Решение.

Если $a = 0$, $b \neq 0$; $a > 0$, $b < 0$; $a < 0$, $b > 0$ — нет решений; если $a = 0$, $b = 0$ x — любое число.

Если $a \neq 0$, $b = 0$, $x = 0$.

Если $a > 0$, $b > 0$; $a < 0$, $b < 0$ $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Задача 5.

Решить уравнение $ax^2 = 0$.

Решение.

Если $a \neq 0$, $x = 0$. Если $a = 0$, x — любое число.

Задача 6.

Решить уравнение $\frac{x-a}{x+a} + \frac{x+a}{x-a} = 2$.

Решение.

Очевидно, что $x \neq \pm a$. Преобразуя заданное уравнение, имеем $x^2 + a^2 = x^2 - a^2$, $a = 0$.

Итак, если $a = 0$, то решениями исходного уравнения будут все числа, кроме нуля, если $a \neq 0$, то решений нет.

Задача 7.

Решить уравнение $\frac{x-a}{a} = \frac{2a}{x-a}$.

Решение.

Очевидно, что $a \neq 0$, $x \neq a$; $x^2 - 2ax - a^2 = 0$. Имеем $(x-a)^2 = 2a^2$. Итак, если $a \neq 0$, то $x = a(1 \pm \sqrt{2})$.

Задача 8.

Решить уравнение $\frac{a}{x} + \frac{a-1}{x-1} = 2.$

Решение.

Очевидно, что $x \neq 0$, $x \neq 1$. Имеем

$$ax - a + ax - x = 2x^2 - 2x, \text{ или } 2x^2 - x(2a+1) + a = 0.$$

Итак, если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = a$;

если $a = 0$ или $a = 1$, то $x = \frac{1}{2}$.

Задача 9.

Решить уравнение $n^2(1+x)^2 = (n^2+x)^2$.

Решение.

Имеем $n^2 + 2n^2x + n^2x^2 = n^4 + 2n^2x + x^2$, откуда

$$x^2(n^2-1) = n^4 - n^2, \text{ или } x^2(n^2-1) = n^2(n^2-1).$$

Ответ: Если $|n| = 1$, x — любое число;
Если $|n| \neq 1$, то $x = \pm n$.

Задача 10.

Решить уравнение $\frac{x}{a} + \frac{a-1}{x-1} = 2.$

Решение.

Очевидно, что $a \neq 0$, $x \neq 1$. Имеем

$$x^2 - x + a^2 - a = 2ax - 2a, \text{ или } x^2 - x(2a+1) + a^2 + a = 0.$$

Итак, если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то $x_1 = a$ и $x_2 = a + 1$;
если $a = 1$, то $x = 2$.

Задача 11.

Решить уравнение $\frac{x+1}{x^2+1} = a$

Решение.

Данное уравнение равносильно уравнению

$$ax^2 - x + a - 1 = 0. \qquad (1)$$

Если $a = 0$, то уравнение (1) становится линейным: $-x - 1 = 0$ и имеет единственный корень $x = -1$.

При $a \neq 0$ уравнение (1) есть квадратное уравнение, при этом если $D = 1 + 4a - 4a^2 < 0$, уравнение (1) решений не имеет. При этом $-\infty < a < \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{1+\sqrt{2}}{2} < a < \infty$. Для $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ и $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ $D = 0$ и уравнение (1) имеет единственный корень $\frac{1}{2a}$. Для каждого значения a из промежутков $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < a < 0$ и $0 < a < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ справедливо неравенство $D > 0$ и уравнение (1) имеет два корня $x_1 = \frac{1+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{D}}{2a}$.

Ответ:

1) Для $-\infty < a < \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{1+\sqrt{2}}{2} < a < \infty$ корней нет.

2) Для $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ или $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ единственный корень $\frac{1}{2a}$.

3) Для $a = 0$ — единственный корень -1.

4) Для $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < a < 0$ или $0 < a < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ два корня $\frac{1+\sqrt{D}}{2a}$ и $\frac{1-\sqrt{D}}{2a}$, где $D = 1 + 4a - 4a^2$

Задача 12.

Решить уравнение $(a^2 + a - 2)x^2 + 2(a^2 - 1)x + a^2 = 0$.

Решение.

Так как $a^2 + a - 2 = 0$ при $a = 1$ и при $a = -2$, то рассмотрим такие случаи:

1. Пусть $a = -2$. Тогда уравнение примет вид $6x + 4 = 0$, откуда $x = -\frac{2}{3}$.

2. Пусть $a = 1$. Уравнение примет вид $0 \cdot x + 1 = 0$. Уравнение не имеет решений.

3. Пусть $a \neq 1$ и $a \neq -2$. Тогда $a^2 + a - 2 \neq 0$ и

$$x = \frac{-(a^2 - 1) \pm \sqrt{(a^2 - 1)^2 - a^2(a^2 + a - 2)}}{a^2 + a - 2} =$$

$$= \frac{1 - a^2 \pm \sqrt{1 - a^3}}{a^2 + a - 2}.$$

Ясно, что $1 - a^3 > 0$, если $a < 1$; $1 - a^3 = 0$, если $a = 1$; $1 - a^3 < 0$, если $a > 1$.

Ответ:

Если $a \geqslant 1$, решений нет.

Если $a = -2$, то $x = -\frac{2}{3}$.

Если $a < 1$, $a \neq -2$, то $x = \dfrac{1 - a^2 \pm \sqrt{1 - a^3}}{a^2 + a - 2}$.

Задача 13.

Решить уравнение $a(a + 2)x^2 + 2x - a^2 + 1 = 0$.

Решение.

1. Если $a = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

2. Если $a = -2$, то $x = \frac{3}{2}$.

3. Если $a \neq 0$ и $a \neq -2$, тогда $(a + 2)a \neq 0$.
Тогда

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4a(a^2 - 1)(a + 2)}}{2(a + 2)a} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + a(a + 2)(a^2 - 1)}}{a(a + 2}.$$

Ответ: Если $a = 0$, то $x = -\frac{1}{2}$.

Если $a = -2$, то $x = \frac{3}{2}$.

Если $a \neq 0$, $a \neq -2$, то $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + a(a + 2)(a^2 - 1)}}{a(a + 2)}$

Задача 14.

Решить уравнение

$$\frac{2ax+x+1}{(a+1)(x+3)}=\frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)}-\frac{a}{a+1}.$$

Решение.

Преобразуем заданное уравнение

$$\frac{2ax+x+1}{(a+1)(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}-\frac{a}{a+1}.$$

После преобразований получаем уравнение $2ax=1-a$, которое при $a=0$ не имеет корней, а при $a\neq 0$ $x=\frac{1-a}{2a}$.

Теперь проверим, нет ли таких значений параметра a, при которых найденное значение x было бы равно -3 или 2. Для этого относительно a решим уравнения $-3=\frac{1-a}{2a}$ и $2=\frac{1-a}{2a}$. Корень первого уравнения $-0{,}2$; корень второго уравнения 0,2 не входит в область определения исходного уравнения.

Ответ: при $a=0;\ \pm 0{,}2$ корней нет
при $a\neq -1;\ 0;\ \pm 0{,}2$ $x=\frac{1-a}{2a}$;
при $a=-1$ уравнение не имеет смысла.

Задача 15.

Решить уравнение $x^2+|x|+a=0$.

Решение.

Поскольку $x^2+|x|=-a$, то $a\leqslant 0$. При $a=0$, $x=0$. Если $a<0$, то $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4a})$.

Ответ:
При $a>0$ нет решений;
при $a=0$ $x=0$;
при $a<0$ $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4a})$.

Задача 16.

Решить уравнение $\dfrac{a+x}{ax^2} = \dfrac{1}{x(a-1)} + \dfrac{1}{a(a-1)}$.

Решение.

Очевидно, что $a \neq 0$, $a \neq 1$, $x \neq 0$.

Имеем $ax(a+x)(a-1) = (a+x)\,ax^2$.

Поскольку $a \neq 0$ и $x \neq 0$, то $(a+x)(a-1) = x(a+x)$.

Если $a + x = 0$, то $x = -a$.

Если $a + x \neq 0$, то $x = a - 1$.

Оба эти значения x при $a \neq 0$, $a \neq 1$ не равны 0.

Ответ:

Если $a = 0$ или $a = 1$ — уравнение не имеет смысла.

Если $a = \frac{1}{2}$, то $x = -\frac{1}{2}$.

Если $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq \frac{1}{2}$, то $x_1 = -a$, $x_2 = a - 1$.

Задача 17.

Решить уравнение $\dfrac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1$.

Решение.

Очевидно, что $x \neq 1$. Имеем $ax^2 = (x-1)(a+1)^2$;

$$ax^2 - x(a+1)^2 + (a+1)^2 = 0.$$

Если $a \neq 0$,

$$x = \frac{(a+1)^2 \pm \sqrt{(a+1)^4 - 4a(a+1)^2}}{2a} =$$

$$= \frac{(a^2+2a+1) \pm (a^2-1)}{2a}.$$

$$x_1 = a + 1; \quad x_2 = \frac{a+1}{a}.$$

Проверкой убеждаемся, что при $a \neq 0$ эти значения удовлетворяют исходному уравнению и ни x_1, ни x_2 не равны 1.

При $a \neq 1$ $x_1 \neq x_2$. При $a = 1$ $x_1 = x_2 = 2$. При $a = 0$ — корней нет.

Ответ:
Если $a = 0$, — решений нет.
Если $a = 1$, $x = 2$
Если $a \neq 0; 1$, то $x_1 = a + 1$, $x_2 = \dfrac{a+1}{a}$.

Задача 18.

Решить уравнение $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{x+a+b}$.

Решение.

Очевидно, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq -a - b$.
Имеем $\dfrac{ab + x(a+b)}{abx} = \dfrac{1}{x+a+b}$.

$$abx + x^2(a+b) + ab(a+b) + x(a+b)^2 = abx;$$

$$(a+b)(x^2 + (a+b)x + ab) = 0.$$

Если $a = -b$, то x — любое число, не равное 0.
Если $a \neq -b$, то $x^2 + (a+b)x + ab = 0$;

$$x_1 = -a, \quad x_2 = -b.$$

Ответ:
Если $a > 0$, $b = 0$ — уравнение смысла не имеет.
Если $a = -b \neq 0$, то x — любое число, кроме 0.
Если $a \neq -b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x_1 = -a$, $x_2 = -b$.
Если $a = b$, $a \neq -b$, $a \neq 0$, то $x = -a$.

Задача 19.

Решить уравнение $\dfrac{a}{a+x} + \dfrac{b}{b+x} = \dfrac{(a+b)^2}{ab}$.

Решение.

Считаем $ab \neq 0$ (иначе уравнение теряет смысл).
Имеем

$$ab(a(b+x) + b(a+x)) = (a+b)^2(a+x)(b+x) \qquad (1)$$

$$(x \neq a,\ x \neq -b).$$

Подставляя $x = -a$ в уравнение (1), получим, что $x = -a$ может быть его корнем лишь при условии $a = b$. Аналогично найдем, что $x = -b$ может быть корнем лишь при условии $a = b$. После приведения подобных членов в уравнении (1) получим, что заданное уравнение при условии $a \neq b$ эквивалентно уравнению

$$(a + b)^2 x^2 + (a + b)(a^2 + b^2 + ab)\, x + ab\,(a^2 + b^2) = 0. \qquad (2)$$

Если $a = -b$, то из уравнения (2) получаем $ab(a^2 + b^2) = 0$ при любом x, что невозможно, так как $ab \neq 0$. Следовательно, при $a \neq -b$ уравнение корней не имеет.

Если $a \neq -b$, то уравнение (2) является квадратным. Решив его, найдем $x_1 = \dfrac{-ab}{a+b}$ и $x_2 = -\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$. Теперь исследуем случай $a = b$. Тогда заданное уравнение принимает вид $\dfrac{2a}{a+x} = 4$, откуда $x = -\dfrac{a}{2}$.

Ответ:

Если $a = -b$, $a \neq 0$ — уравнение не имеет решений.

Если $a = b$, $a \neq 0$ — уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{a}{2}$. В случае $a^2 \neq b^2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ уравнение имеет корни $x_1 = \dfrac{-ab}{a+b}$ и $x_2 = -\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

Если $ab = 0$, — уравнение не имеет смысла.

Задача 20.

Решить уравнение $(a^2 - b^2)\, x^2 - 2ax + 1 = 0$.

Решение.

1) Пусть $a = \pm b \neq 0$, тогда $2ax = 1$, $x = \dfrac{1}{2a}$.

2) Пусть $a = \pm b = 0$, тогда $1 = 0$ — решений нет.

3) Пусть $a^2 - b^2 \neq 0$, тогда

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2} = \frac{a \pm b}{a^2 - b^2}.$$

Поскольку $a \pm b \neq 0$ (см. 2), то $x = \dfrac{1}{a \pm b}$.

Ответ:

Если $a = \pm\, b \neq 0$, то $x = \dfrac{1}{2a}$.

Если $a = \pm\, b = 0$, то решений нет.

Если $a \neq \pm\, b$, то $x = \dfrac{1}{a \pm b}$.

Задача 21.

Решить уравнение $\dfrac{x-a}{x-b} - \dfrac{x-b}{x-a} + \dfrac{4ab}{a^2 - b^2} = 0.$

Решение.

Обозначим $\dfrac{x-a}{x-b} = y$; $\dfrac{a+b}{a-b} = z$.

По условию $a \neq \pm\, b$, значит, $z \neq 0$.

$$\frac{y^2 - 1}{y} + \frac{z^2 - 1}{z} = 0, \text{ или } zy^2 + (z^2 - 1)\, y - z = 0;$$

$$y = \frac{(-z^2 + 1) \pm (z^2 + 1)}{2z}.$$

1) $y = \dfrac{1}{z}$; 2) $y = -\, z$.

Первое уравнение $\dfrac{x-a}{x-b} = \dfrac{a-b}{a+b}$; $a^2 + b^2 = 2bx$.

Второе уравнение $\dfrac{x-a}{x-b} = \dfrac{a+b}{b-a}$.

Пусть $a = 0$. Так как $b \neq \pm\, a$, то $b \neq 0$. Из первого уравнения $x = \dfrac{b}{2}$. Второе уравнение не имеет решений. Пусть $b = 0$. Так как $a \neq \pm\, b$, то $a \neq 0$. Из второго уравнения $x = \dfrac{a}{2}$, первое не имеет решений.

Если $a \neq 0,\ b \neq 0$, то $x_1 = \dfrac{a^2 + b^2}{2b},\ x_2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$.

Ответ:

Если $a \neq 0,\ b \neq 0$, то $x = \dfrac{b}{2}$.

Если $a \neq 0,\ b = 0$, то $x = \dfrac{a}{2}$.

Если $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq \pm b$, то $x_1 = \dfrac{a^2 + b^2}{2b},\ x_2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$.

$a = b$ — условие не имеет смысла.

Задача 22.

Решить уравнение $x\,|x - 4| + a = 0$.

Решение.

1) $x - 4 \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ x \geqslant 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{4 - a}, \\ 4 - a \geqslant 0,\ a \leqslant 4, \\ x \geqslant 4. \end{cases}$$

Корень $x_1 = 2 - \sqrt{4 - a}$ не является решением (если даны $4 - a \geqslant 0$, то $x_1 \leqslant 2 \leqslant 4$).

Значит, $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{4 - a}, \\ x \geqslant 4, \\ a \leqslant 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{4 - a} \geqslant 4, \\ a \leqslant 4, \end{cases}$ значит,

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{4 - a}, \\ a \leqslant 0, \\ a \leqslant 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 2 + \sqrt{4 - a}, \\ a \leqslant 0. \end{cases}$$

2) $x - 4 < 0$. Тогда

$$\begin{cases} x^2 - 4x - a = 0, \\ x < 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{4 + a}, \\ 4 + a \geqslant 0,\ a \leqslant 4, \text{ значит,} \\ x < 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{4 + a}, \\ a \geqslant -4, \\ x < 4. \end{cases}$$

Если $4 + a \geqslant 0$, то $2 - \sqrt{4+a} < 4$; $2 + \sqrt{4+a} < 4$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a \geqslant 4, \\ a < 0. \end{cases}$

Если $a = -4$, то $2 + \sqrt{4+a} = 2 - \sqrt{4+a} = 2 < 4$.

Ответ:

Если $a < -4$, $x = 2 + \sqrt{4-a}$.

Если $a = -4$, $x = 2$.

Если $-4 \leqslant a \leqslant 0$, $x_1 = 2 + \sqrt{4+a}$, $x_2 = 2 - \sqrt{4+a}$, $x_3 = 2 + \sqrt{4-a}$.

Если $a = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$.

Если $a > 0$, $x = 2 - \sqrt{4+a}$.

Задача 23.

Доказать, что каждое из уравнений имеет действительные корни:

а) $x^2 - 4kx + k^2 - m^2 = 0$. $D = 3k^2 + m^2 \geqslant 0$.

б) $(x-k)(x-m) = n^2$.

Имеем $x^2 - mx - kx + mk - n^2 = 0$;

$$x^2 - x(m+k) + mk - n^2 = 0.$$

$$D = (m+k)^2 - 4(mk - n^2) = m^2 + 2mk + k^2 - 4mk + 4n^2 =$$

$$= m^2 - 2mk + k^2 + 4n^2 = (m - K)^2 + 4n^2 \geqslant 0.$$

в) $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$.

$$\frac{1}{4}D = (a+b+c)^2 - 3(ab + bc + ac) =$$

$$= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geqslant 0.$$

г) $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} = \dfrac{1}{c^2}$. $D = (a-b)^2 + 4c^2 \geqslant 0$.

Задача 24.

При каких значениях a уравнение

$$(a-1)^2x^2 - 2(a+1)x + a - 2 = 0$$

имеет один корень?

Решение.

Уравнение будет иметь один корень, если $(a - 1) = 0$ или $D = 0$.

$$\frac{D}{4} = (a + 1)^2 - (a - 1)(a - 2) = 0;$$

$$a^2 + 2a + 1 - a^2 + 2a + a - 2 = 0, \text{ отсюда } a = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $a = \frac{1}{5}$, $a = 1$.

Задача 25.

Найти зависимость между a, b и c, чтобы трехчлен $ax^2 + bx + c$ был точным квадратом.

Решение.

Чтобы трехчлен $ax^2 + bx + c$ был точным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы $b^2 - 4ac = 0$ или $|b| = 2\sqrt{ac}$, $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

Задача 26.

Определить коэффициент c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если один из его корней равен $-\frac{b}{a}$.

Решение.

Имеем $a\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + \left(-\frac{b}{a}\right) = -c$, откуда $c = 0$.

Задача 27.

При каких значениях a уравнение $a(3x - a) = 6x - 4$ имеет одно положительное решение?

Решение.

$$3ax - a^2 = 6x - 4;$$

$$x(3a - 6) = a^2 - 4;$$

$$3x(a - 2) = (a - 2)(a + 2).$$

При $a \neq 2$ $x = \dfrac{a+2}{3}$; $x > 0$, если $a > -2$.

Если $a = 2$, $x \in R$.

Ответ: $a > -2$, $a \neq 2$.

Задача 28.

При каком значении параметра p корнем квадратного трехчлена $f(x) = -3x^2 + px - 2p - 12$ является число 6?

Решение.

$$-3 \cdot 36 + 6p - 2p - 12 = 0; \quad p = 30.$$

Задача 29.

Не решая уравнения $x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0$ найти, при каком a один из корней в два раза больше другого.

Решение.

По условию $x_1 = 2x_2$. По теореме Виета имеем

$$x_2 + 2x_2 = 2a + 1.$$

$$x_2 = \frac{2a+1}{3}; \tag{1}$$

$$2x_2^2 = a^2 + 2; \quad x_2^2 = \frac{a^2+2}{2}. \tag{2}$$

Значит, $\dfrac{a^2+2}{2} = \dfrac{4a^2+4a+1}{9}$; $a^2 - 8a + 16 = 0$, $a = 4$.

Задача 30.

При каких значениях параметра a разность корней уравнения $2x^2 - (a+2)x + (2a-1) = 0$ равна их произведению?

Решение.

Имеем $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$;

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(\frac{a+2}{2}\right)^2 - 4\,\frac{2a-1}{2};$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{a^2 - 12a + 12}{4}, \quad x_1 x_2 = \frac{2a-1}{2}.$$

По условию $\frac{a^2 - 12a + 12}{4} = \left(\frac{2a-1}{2}\right)^2.$

$$a^2 - 12a + 12 = (2a-1)^2;$$

$$3a^2 + 8a - 11 = 0;$$

$$a_1 = 1, \ a_2 = -3\frac{2}{3}$$

Ответ: $1; \ -3\frac{2}{3}.$

Задача 31.

При каких a уравнение $\frac{x^2 - ax + 1}{x+3} = 0$ имеет единственное решение?

Решение.

Рассматривается квадратное уравнение при $D = 0$, видим, что $a = \pm 2$.

Возможен вариант, когда $x^2 - ax + 1 = (x+3)(x-1)$. Тогда 1 тоже будет единственным корнем. Такой случай возможен, если $a = -\frac{10}{3}$.

Ответ: $a = \pm 2, \ a = -\frac{10}{3}.$

Задача 32.

Найти все значения a, для которых разность корней уравнения $2x^2 - (a+1)x + a + 3 = 0$ равна 1.

Решение.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{a+1}{2}$; $x_1 x_2 = \frac{a+3}{2}.$

Следовательно,

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 4\,\frac{a+3}{2} = \frac{a^2 - 6a - 23}{4}.$$

По условию $\dfrac{a^2 - 6a - 23}{4} = 1$. Значит, $a_1 = 9$, $a_2 = -3$.

Задача 33.

В уравнении $x^2 + kx + 7 = 0$ найти k, если разность корней этого уравнения равна 1.

Решение.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2;$$

$$1 = k^2 - 4, \quad k = \pm\sqrt{29}.$$

Задача 34.

При каком значении параметра a сумма обратных величин действительных корней уравнения $2x^2 - 2ax + a^2 - 2 = 0$ равна $\dfrac{2}{3}$?

Решение.

Пусть x_1, x_2 — корни данного уравнения. Согласно теореме Виета $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = \dfrac{a^2 - 2}{2}$.

По условию $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{2}{3}$, откуда $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{2a}{a^2 - 2} = \dfrac{2}{3}$; $a_2 - 3a - 2 = 0$. Кроме того, $D \geqslant 0$, или $4a^2 - 8\,(a^2 - 2) = 16 - 4a^2 \geqslant 0$. Итак,

$$\begin{cases} a^2 - 3a - 2 = 0, \\ 16 - 4a^2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}, \\ a_2 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}, \\ -2 \leqslant a \leqslant 2. \end{cases}$$

Ответ: при $a = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}$.

Задача 35.

При каких целых k корни квадратного уравнения

$$kx^2 + (2k - 1)x + k - 2 = 0$$

рациональны?

Решение.

Корни этого уравнения будут рациональными, когда дискриминант представляет собой квадрат целого числа. Получаем $(2k-1)^2 - 4k(k-2) = m^2$, $k \in Z$, $m \in Z$.

Далее $4k + 1 = m^2$, $k = \frac{m^2 - 1}{4}$. Следовательно,

$$m = 2n + 1, \quad n \in Z.$$

Таким образом, имеем $k = \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 + n$, $n \in Z$.

Задача 36.

В уравнении $(a^2 - 5a + 3)x^2 + (3a - 1)x + 2 = 0$ определить a так, чтобы отношение корней равнялось 2.

Решение.

Пусть x — корень уравнения. Тогда второй корень $2x$.

$$x + 2x = \frac{1 - 3a}{a^2 + 3 - 5a}; \quad 3x = \frac{1 - 3a}{a^2 - 5a + 3};$$

$$x \cdot 2x = \frac{2}{a^2 - 5a + 3}; \quad 2x^2 = \frac{2}{a^2 - 5a + 3}.$$

Отсюда $x = \frac{1 - 3a}{(a^2 - 5a + 3)\,3}$;

$$\frac{(1 - 3a)^2}{9(a^2 - 5a + 3)^2} = \frac{1}{a^2 - 5a + 3}; \quad a = \frac{2}{3}.$$

Задача 37.

В уравнении $x^2 + 2x + c = 0$ определить то значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию

$$7x_2 - 4x_1 = 47.$$

Решение.

По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = c. \end{cases} \tag{1}$$

Из первого уравнения системы (1) имеем $x_2 = 2 - x_1$. Подставим значение x_2 во второе из данных уравнений, получим $7(2 - x_1) - 4x_1 = 47$, откуда $x_1 = -3$. Тогда $x_2 = 5$. Подставляя найденные значения x_1 и x_2 во второе уравнение системы (1), находим $c = (-3) \cdot 5 = -15$.

Задача 38.

В уравнении $4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$ найти m так, чтобы один корень был квадратом другого.

Решение.

По условию

$$x \cdot x^2 = m^2, \quad x^3 = m^2, \quad m - \pm\sqrt{x^3}, \quad x + x^2 = \frac{15}{4}.$$

Поскольку $x > 0$ (это следует из равенства $m = \pm\sqrt{x^3}$), то $m = \pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$; $m = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Задача 39.

При каких значениях a уравнение

$$(x^2 + 2x + a - 2)(x^2 - 2x - a) = 0$$

имеет ровно три корня?

Решение.

Дискриминанты каждого из уравнений равны $a + 3$ и $a + 1$, следовательно, $(D > 0)$ $a \geqslant -1$. При этом первое из двух уравнений уже имеет 2 различных корня, т.е. второе уравнение должно иметь один корень или два, но из двух корней один должен равняться корню первого уравнения. Значит,, $a = -1$ и $a = -\frac{3}{4}$.

Задача 40.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$$

имеет ровно три корня?

Решение.

Чтобы заданное уравнение имело три корня, надо, чтобы корни одного из сомножителей заданного уравнения совпадали. Итак, имеем $x^2 - 4x + (1 - a) = 0$. $x_1 = x_2$, если $D = 0$. Значит, $a = -3$. Но если $a = -3$, то при любом x, второй сомножитель отрицателен, что невозможно. Рассмотрим равенство нулю второго сомножителя: $a + 1 = |x - 2|$. Его корни совпадают, если $a + 1 = 0$, т.е. $a = -1$.

Ответ: $a = -1$.

Задача 41.

При каком значении a сумма квадратов корней квадратного трехчлена $x^2 - (a - 2)\,x - a - 1$ принимает наименьшее значение?

Решение.

Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2;$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (a - 2)^2 - 2\,(-a - 1) = a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5.$$

Так как $(a - 1)^2 \geqslant 0$, то $x_1^2 + x_2^2$ принимает наименьшее значение при $a = 1$.

Задача 42.

При каком значении a сумма кубов корней уравнения $(2a + 1)\,x^2 + (2a + 1)\,x + 2a^2 = 0$ равна 3?

Решение.

По условию $x_1^3 + x_2^3 = 3$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -1$.

Имеем $(x_1 + x_2)\,(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 3$;

$$(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) = 3;$$

$$-1\left(1 - \frac{6a^2}{2a+1}\right) = 3, \quad a = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Задача 43.

При каких значениях параметра уравнение

$$\frac{x+a}{x+1} + \frac{a-3x}{x-3} = 2$$

имеет одно решение?

Решение.

Область определения уравнения является множество действительных чисел, кроме 3 и -1. На этом множестве данное уравнение равносильно уравнению

$$2x^2 + x(1-a) + (a-3) = 0. \; x_1 = 1; \; x_2 = 0{,}5\,(a-3).$$

Чтобы заданное уравнение имело только один корень ($x = 1$), необходимо и достаточно, чтобы второй корень (x_2) совпадал либо с x_1, либо с числами 3 или -1. Отсюда

$$0{,}5\,(a-3) = 1, \quad a = 5;$$
$$0{,}5\,(a-3) = -1, \quad a = 1;$$
$$0{,}5\,(a-3) = 3, \quad a = 9.$$

Задача 44.

Найти все значения a, при которых корни уравнения $(a-1)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$ положительны.

Решение.

$D = 4a^2 - 4(a+3)(a-1) > 0$, откуда $a > 1$, $a < -3$,

откуда $a < \frac{3}{2}$; $\frac{a+3}{a-1} > 0$.

Ответ: $a < -3$; $1 < a < \frac{3}{2}$.

Задача 45.

При каком a уравнение $(a+5)x^2 + (2a-3)x + a - 10 = 0$ имеет два отрицательных корня?

Решение.

$$D = (2a - 3)^2 - 4\,(a + 5)(a - 10) = 8a + 209 > 0.$$

Корни будут иметь одинаковые знаки, если

$$x_1 x_2 = \frac{a - 10}{a + 5} > 0.$$

Оба корня будут отрицательны, если при этом

$$x_1 + x_2 = \frac{-2a + 3}{a + 5} < 0.$$

Таким образом задача свелась к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 8a + 209 > 0, \\ \dfrac{a - 10}{a + 5} > 0, \\ \dfrac{2a - 3}{a + 5} > 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left]-\frac{209}{8};\ -5\right[\cup [10;\ \infty[.$

Задача 46.

Даны два уравнения $x^2 - 5x + m = 0$ и $x^2 - 7x + 2m = 0$. Определить те значения m, при которых один из корней второго уравнения вдвое больше одного из корней первого уравнения.

Решение.

Обозначим корни первого уравнения через α и β, второго уравнения — через 2α и γ (так как $m \neq 0$, то каждый из этих корней отличен от нуля). В силу теоремы Виета имеем $\alpha + \beta = 5$, $2\alpha + \gamma = 7$, $\alpha\beta = m$. Решая совместно последние три уравнения, получаем $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $m = 6$. Таким образом, данные уравнения: $x^2 - 5x + m = 0$ и $x^2 - 7x + 2m = 0$; корни этих уравнений 2 и 3, 3 и 4.

Задача 47.

Между коэффициентами уравнений $x^2 + mx + n = 0$ и $x^2 + px + q = 0$ имеет место зависимость $mp = 2\,(n + q)$. Доказать, что по крайней мере одно из уравнений имеет действительные корни.

Доказательство.

Предположим, что оба уравнения не имеют действительных корней, т.е. $m^2 - 4n < 0$ и $p^2 - 49 < 0$. Сложив почленно эти неравенства, получим

$$m^2 + p^2 - 4n - 4m < 0. \qquad (1)$$

Но учитывая, что $mp = 2(n + q)$, неравенство (1) перепишем в виде $mm + p^2 - 2mp < 0$, или $(m - p)^2 < 0$, что невозможно. Таким образом, наше предположение, что корни обоих данных уравнений мнимые, неверно. Следовательно, хотя бы одно уравнение имеет действительные корни.

Задача 48.

Найти все значения параметра R, при которых уравнение $x^2 - 2\sqrt{2}x + R + 1 = 0$ имеет различные корни. Сколько корней этого уравнения находится в интервале $(0; \sqrt{2})$ в зависимости от параметра R?

Решение.

$\frac{D}{4} = (\sqrt{2})^2 - (R + 1) > 0$, откуда $R < 1$. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда из того, что $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}$ следует, что $x_1 < \sqrt{2} < x_2$. Следовательно, в интервале $(0; \sqrt{2})$ может быть только один корень x_1, причем он должен быть положительным; но поскольку $x_2 > \sqrt{2} > 0$, то $x_1 x_2 = R + 1 > 0$, откуда $R > -1$. Но по установленному $R < 1$, значит, в интервале $(0; \sqrt{2})$ находится только один корень при условии $-1 < R < 1$. Он равен $\sqrt{2} - \sqrt{1 - R}$.

Задача 49.

Доказать, что уравнение

$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2(a + b + c)x + 3 = 0$$

не может иметь действительных корней, если a, b и c не равны между собой.

Доказательство.

$$\frac{D}{4} = (a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2) =$$

$$= ((a-c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2) < 0, \text{ так как}$$

$$a \neq b; \quad a \neq c; \quad b \neq c.$$

Задача 50.

Корни уравнения $px^2 + nx + n = 0$ находятся в отношении $a:b$ $\left(\frac{a}{b} > 0\right)$. Найти зависимость между a, b, p, n.

Решение.

$$D \geqslant 0 \text{ или } n(n - p \cdot 4) \geqslant 0.$$

$$x_1^2 = \frac{na}{pb}; \quad x_2^2 = \frac{nb}{pa} \text{ и } x_1 < 0, \; x_2 < 0, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{\frac{na}{pb}} = -x; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{nb}{pa}}.$$

Имеем $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{n}{p}}$.

Задача 51.

Уравнения $x^2 + px + 9 = 0$ и $px + q^2 = 0$ имеют общий корень. Найти зависимость между p и q.

Решение.

Если $q = 0$, то при любом p данные уравнения имеют общий корень 0. Пусть $q \neq 0$. Уравнение $px + q^2 = 0$ имеет один корень $x_1 = \frac{-q^2}{p}$ $(p \neq 0)$, который по условию должен быть одним из корней уравнения $x^2 + px + a = 0$. Обозначив второй корень квадратного уравнения x_2, будем иметь:

$$\frac{-q^2}{p} + x_2 = -p; \quad \frac{-q^2 x^2}{p} = 9.$$

Исключив x_2 из обоих уравнений, найдем искомую зависимость: $q(p^2 + q^2) = p^2$.

Задача 52.

Найти зависимость между коэффициентами уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если сумма корней вдвое больше их разности.

Решение.

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. По условию задачи $x_1 + x_2 = 2x \cdot (x_1 - x_2)$, откуда $x_1 = 2x_2$. Если $x_1 = 3x_2$, то $x_1 + x_2 = 4x_2 = \frac{-b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = 3x_2^2 = \frac{c}{a}$, откуда $\frac{3b^2}{16a^2} = \frac{c}{a}$ или $3b^2 = 16ac$ — искомое условие.

Задача 53.

Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$. Найти уравнение, корни которого отличались бы от корней данного только знаками.

Решение.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$. Если корни искомого уравнения будут $(-x_1)$ и $(-x_2)$, то $(-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2) = p$. $(-x_1) \cdot (-x_2) = x_1 \cdot x_2 = q$.

Значит, искомое уравнение: $x^2 - px + q = 0$.

Задача 54.

Доказать, что квадратное уравнение

$$a^2x^2 + (b^2 + a^2 - c^2)\,x + b^2 = 0$$

не может иметь действительных корней, если $a + b > c$ и $|a - b| < c$.

Доказательство.

$$D = (b^2 + a^2 - c^2) - 4a^2 b^2 = (b^2 + a^2 - c^2 - 2ab) \times$$
$$\times (b^2 + a^2 c^2 + 2ab) = ((a - b)^2 - c^2)\,((a + b)^2 - c^2).$$

Так как $a + b > c$ и $|a - b| < c$, то $a^2 + b^2 + 2ab > c^2$ и $(a - b)^2 < c^2$, следовательно, $D < 0$.

Задача 55.

Найти все действительные значения параметра p, при которых корни уравнения $(p-3)\,x^2 - 2px + 6p = 0$ положительны.

Решение.

Если $p = 3$, то уравнение имеет единственный корень

$$x = 3 > 0. \qquad (1)$$

Пусть $p \neq 3$. $D = 4p^2 - 24p\,(p-3) = 4p\,(18 - 5p)$. $D \geqslant 0$ при $0 \leqslant p \leqslant 3{,}6$, $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2p}{p-3}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{6p}{p-3}, \end{cases}$ откуда $3 < p \leqslant 3{,}6$. Учитывая соотношение (1), имеем $3 \leqslant p \leqslant 3{,}6$.

Задача 56.

Определить коэффициенты квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

так, чтобы корни его были равны p и q.

Решение.

По теореме Виета $\begin{cases} p + q = -p, \\ pq = q. \end{cases}$ Эта система имеет два решения:

1) $p = 0$, $q = 0$;
2) $p = 1$, $q = -2$.

В первом случае имеем уравнение $x^2 = 0$, во втором — $x^2 + x + 2 = 0$.

Задача 57.

При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - 2ax\sqrt{a^2 - 3} + 4 = 0$$

имеет равные между собой корни?

Решение.

$$\frac{D}{4} = (a\sqrt{a^2 - 3}\,)^2 - 4 = 0, \text{ или } a^4 - 3a^2 - 4 = 0.$$

Это биквадратное уравнение имеет два действительных корня ($a = 2$ и $a = -2$).

Ответ: $a = 2$, $a = -2$.

Задача 58.

При каких значениях a уравнение

$$(a + 2)x^2 + 2(a + 2)x + 2 = 0$$

имеет один корень?

Решение.

Заданное уравнение может иметь один корень, если $a + 2 = 0$. Но тогда $2 = 0$. Итак, $a \neq -2$. Уравнение может иметь один корень, если $D = 0$. Имеем

$$D = 4(a + 2)(a + 2 - 2) = 0, \ a_1 = -2; \ a_2 = 0.$$

Но $a \neq -2$.

Ответ: $a = 0$.

Задача 59.

При каком значении a квадрат разности корней уравнения $x^2 - ax + a - 6 = 0$ будет наименьшим? Чему равен квадрат этой разности?

Решение.

Пусть x_1, x_2 — корни данного уравнения.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = a$; $x_1 x_2 = a - 6$, значит,

$$(x_1 - x_2)^2 = (a - 2)^2 + 20.$$

Отсюда видно, что $(x_1 - x_2)^2 \geqslant 20$, причем равенство достигается при $a = 2$.

Ответ: $a = 2$, квадрат разности корней равен 20.

Задача 60.

При каких целых k корни квадратного уравнения $kx^2 + (2k - 1)x + k - 2 = 0$ рациональны?

Решение.

Корни этого уравнения будут рациональны, когда дискриминант представляет собой квадрат целого числа. Получаем уравнение $(2k-1)^2 - 4k(k-2) = m^2$, где $k \in Z$, $m \in Z$. Далее имеем $4k + 1 = m^2$, откуда $k = \frac{m^2-1}{4}$. Это уравнение имеет решение только при нечетном m, т.е. при $m = 2n + 1$, где $n \in Z$. Таким образом, имеем $k = \frac{(2n+1)^2-1}{4} = n^2 + n$.

Задача 61.

Найти все значения a из промежутка $[1; \alpha)$, при каждом из которых больший из корней уравнения

$$x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$$

принимает наибольшее значение.

Полагая в данном уравнении $a = 1$, получим квадратное уравнение $x^2 - 4x - 12 = 0$, которое имеет два корня, наибольший из которых 6. Покажем, что для любого значения a, принадлежащего промежутку $[1; \alpha)$, исходного уравнение не имеет корней в области $x \geqslant 6$. Поскольку

$$x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = (a-1)(2x+1) + (x-6)(x+2),$$

то очевидно, что для любого $a > 1$ и $x \geqslant 6$:

$$x^2 - 6x + 2ax + a - 13 > 0.$$

Следовательно, при $a > 1$ в области $x \geqslant 6$ нет корней исходного уравнения. Так, $a = 1$ — единственное решение задачи.

Задача 62.

Найти зависимость между коэффициентами a, b, c уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если оно имеет разные корни, равные по модулю.

Решение.

Если в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ корни равны по модулю и различны, т.е. $x_1 = -x_2 \neq 0$, то по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0, \text{ т.е. } b - 0.$$

Поскольку $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, а $x_1 = x_2(-1)$, то c и a должны быть разных знаков. Заметим, что при $b = 0$ и $ac < 0$ $D = -4ac > 0$. Итак, искомая зависимость может быть записана так:

$$\begin{cases} b = 0, \\ \frac{c}{a} < 0. \end{cases}$$

Задача 63.

Даны два утверждения:

1) Уравнение $x^2 + (R + 2)x + 1 = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

2) Уравнение $x^2 + (1 - R)x + 4 = 0$ имеет два различных положительных корня.

При каком значении параметра оба утверждения истинны, оба ложны, одно истинно, а другое ложно?

Решение.

Уравнение $x^2 + (R + 2)x + 1 = 0$ имеет два различных отрицательных корня тогда и только тогда, когда $D > 0$, $\frac{2 - R}{2} > 0$, откуда $R > 0$. Уравнение $x^2 + (1 - R)x + 4 = 0$ имеет два различных положительных корня когда $D > 0$, $\frac{-1 - R}{2} > 0$, откуда $R > 5$.

Ответ: при $R > 5$ оба утверждения истинны, при $R \leqslant 0$ оба утверждения ложны. При $0 < R \leqslant 5$ первое истинное, второе ложно.

Задача 64.

При каких значениях c вершина параболы $y = x^2 + 6x + c$ находится на расстоянии 5 см от начала координат?

Решение.

Вершина A параболы $y = x^2 + 6x + c$ имеет координаты: $A\left(-3; \frac{36 - 4c}{4}\right)$, начало координат $O(0; 0)$. По формуле

$AO^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$ имеем $25 = 9 + \left(\frac{36 - 4c}{4}\right)^2$, откуда $c = 5$, $c = 13$.

Задача 65.

При каких значениях b графики функций

$$y = 2bx^2 + 2x + 1 \text{ и } y = 5x^2 + 2bx - 2$$

пересекаются в одной точке?

Решение.

Имеем

$2bx^2 + 2x + 1 = 5x^2 + 2bx - 2$, $x^2(2b - 5) + x(2 - 2b) + 3 = 0$.

Пусть $2b - 5 = 0$, $b = 2{,}5$, $x = 1$. Пусть $2b - 5 \neq 0$, тогда $x_1 = \frac{2(2b - 5)}{2(2b - 5)} = 1$, $x_2 = \frac{3}{2b - 5}$.

Как видим, значение $x = 1$ не зависит от b. Положим $1 = \frac{3}{2b - 5}$, $b = 4$.

Ответ: $b = 1$; $b = 4$.

Задача 66.

Парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает прямую $y = 2x - 3$ в точке C с абсциссой $x_0 = 1$. При каком значении p и q расстояние от вершины параболы до оси OX минимально?

Решение.

По условию $x_0 = 1$ — корень уравнения $x^2 + px + q = 2x - 3$, $q = -p - 2$. Заданную функцию $y = x^2 + px + q$ теперь запишем в виде: $y = x^2 + px + p - 2$.

$x_1 = -\frac{p}{2}$ — абсцисса вершины параболы, $y_1 = \frac{R^2}{4} - p - 2$ — ордината вершины, α — расстояние от вершины параболы до оси OX, тогда $\alpha = |y_1| = \left|\frac{p^2}{4} + p + 2\right| = \frac{p^2}{4} + p + 2 =$

$$= \left(\frac{p}{2} + 1\right)^2 + 1.$$

Наименьшее значение α равно 1 и достигается при $p = -2$. В этом случае $q = 0$.

Параметр и парабола

Задача 67.

Найти все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y = 9x^2 + 6(a-1)x + 1$ и $y = 9ax^2 + 4x + a$ лежат по разные стороны от прямой $y = \frac{5}{9}$.

Решение.

Найти координаты вершин A_1 и A_2 двух парабол.

$$A_1 \neq \left(\frac{1}{3}(1-a);\ 2a - a^2\right),\ A_2 \neq \left(-\frac{2}{9a};\ -\frac{4}{9a} + a\right).$$

Требование задачи о положении точек A_1 и A_2 относительно прямой $y = \frac{5}{9}$ можно записать в виде двух систем неравенств.

Решаем системы

$$\begin{cases} -a^2 + 2a > \frac{5}{9}, \\ -\frac{4}{9a} + a < \frac{5}{9}, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} -a^2 + 2a < \frac{5}{9}, \\ -\frac{4}{9a} + a > \frac{5}{9} \end{cases} \qquad (2)$$

при $a > 0$ и $a < 0$.

При $a > 0$ система (1) имеет решение $\left]\frac{1}{3};\ 1\right[$. При $a < 0$ система (1) решений не имеет. Решаем систему (2). При $a > 0$ решение системы (2) $\left]\frac{5}{3};\ \infty\right[$. При $a < 0$ решение системы (2) $\left]-\frac{4}{9};\ 0\right[$.

Ответ: $a \in \left]-\frac{4}{9};\ 0\right[\cup \left]\frac{1}{3};\ 1\right[\cup \left]\frac{5}{3};\ \infty\right[$

Задача 68.

При каких значениях параметра k вершина параболы $y = kx^2 - 7x + 4k$ лежит во второй четверти?

Решение.

Вершина A заданной параболы имеет координаты $A\left(\frac{7}{2k};\ -\frac{49-16k^2}{4k}\right)$. Во второй четверти абсцисса отрицательна, ордината — положительна:

$$\begin{cases} \frac{7}{2k} < 0, \\ -\frac{49-16k^2}{4k} > 0, \end{cases} \text{ откуда } -1{,}75 < k < 0.$$

Задача 69.

Найти p и q если точка $A\,(1; 2)$ является вершиной параболы $y = x^2 + px + q$.

Решение.

Поскольку $A\left(-\frac{p}{2};\ -\frac{D}{4}\right)$, где $D = \frac{p^2}{4} - q$, значит,

$$\begin{cases} -\frac{p}{2} = 1, \\ -\frac{p^2}{4} + q = 2, \end{cases}$$

откуда $p = -2$, $q = 3$.

Задача 70.

Найти a, b и c, если точка $M\,(-1;\ 7)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$, пересекающей ось ординат в точке $N\,(0; 4)$.

Решение.

Поскольку точка M имеет координаты $M\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{D}{4a}\right)$ и при $N\,(0; 4)$ имеем

$$\begin{cases} -\frac{b}{2} \cdot a = -1, \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 7, \\ c = 4, \end{cases} \quad a = -3;\ b = -6,\ c = 4.$$

Задача 71.

При каких значениях a уравнение

$$(a^2 - 6a + 8) \cdot x^2 + (a^2 - 4) \cdot x + (10 - 3a - a^2) = 0$$

имеет более двух корней?

Решение.

Исходное уравнение запишем в виде

$$(a - 4)(a - 2) \cdot x^2 + (a - 2)(a + 2)\, x - (a - 5)(a - 2) = 0,$$

$$(a - 2)\,((a - 4) \cdot x^2 + (a + 2)\, x + (a + 5)) = 0.$$

Ответ: При $a = 2$, $x \in R$.

Задача 72.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a - 1 - |x - 1|)\,(a + x^2 - 2x - 4) = 0$$

имеет ровно три решения? Найти их.

Решение.

Рассмотрим случай, когда уравнение $x^2 - 2x - 4 + a = 0$ имеет одно решение $\frac{D}{4} = 1 + 4 - a = 0$, $a = 5$. При $a = 5$ $x = 1$. Первый сомножитель при $a = 5$ имеет корни $x = -3$; $x = 5$. Рассмотрим теперь случай, когда первый сомножитель имеет один корень. Это будет, если $a - 1 = 0$, $x = 1$, $a = 1$. Тогда уравнение $x^2 - 2x - 4 + 1 = 0$ имеет корни 3; -1. Корни второго сомножителя $x_1 = 1 + \sqrt{5 - a}$, $x_2 = 1 - \sqrt{5 - a}$. Заметим, что $|x_1 - 1| = |x_2 - 1| = \sqrt{5 - a}$. Следовательно, x_1 и x_2 одновременно являются корнями уравнения

$$a - 1 - |x - 1| = 0,$$

т.е. исходное уравнение имеет 2 решения.

Ответ: При $a = 5$ $x = 1,$ $x = -3,$ $x = 5;$
при $a = 1$ $x = 1,$ $x = -1,$ $x = 3.$

Задача 73.

Сколько решений имеет уравнение

$$(x+2)^2(x^2-4x+5) = a(a-1)?$$

Решение.

Заданное уравнение запишем в виде

$$(x+2)^4 + (x+2)^2 - a(a-1) = 0.$$

Получим квадратное уравнение относительно выражения $(x+2)^2$. Решая его, получим $\left[\begin{array}{l}(x+2)^2 = a-1,\\ (x+2)^2 = -a.\end{array}\right.$

Итак, при $0 < a < 1$ — нет решений;
при $a = 0,$ $a = 1$ — одно решение
при $a < 0,$ $a > 1$ — два решения7

Задача 74.

При каких a уравнение $|x^2 - 2ax| = 1$ имеет три различных корня.

Решение.

Исходное уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l}x^2 - 2ax = 1,\\ x^2 - 2ax = -1.\end{array}\right.$$

Первое уравнение имеет два различных корня при любом $a \in R;$ $\left(\frac{D}{4} = a^2 + 1 > 0\right)$. Чтобы заданное уравнение имело ровно три корня, необходимо, чтобы дискриминант второго уравнения был равен нулю, т.е. $4a^2 - 4 = 0$. Решив уравнение $a^2 - 1 = 0$, получим $a = \pm 1$.

12. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача 1.

Решить уравнение $x = (\sqrt{x} + 2)(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}})^2$.

Решение

Положим $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$. Тогда $y^2 = 1 - \sqrt{x}$, $x = (1 - y^2)^2$, и уравнение принимает вид $(1 - y^2)^2 = (3 - y^2)(1 - y)^2$, откуда $y = 1$ или $y^2 + y - 1 = 0$.

В первом случае получаем $x = 0$, во втором случае

$$x = (1 - y^2)^2 = y^2 - y - 1.$$

Так как $y \geqslant 0$ и уравнение $y^2 + y - 1 = 0$ имеет единственный положительный корень $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, то $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Таким образом, уравнение имеет два найденных выше корня.

Задача 2.

Решить уравнение

$$4\sqrt{x^2 - 24} + 3\sqrt{x^2 - 21} + 2\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9} = \frac{20}{x - 4}.$$

Решение.

Левая часть уравнения неотрицательна. Поэтому и правая положительна, т.е. $x > 4$. Когда увеличивается x, левая часть уравнения увеличивается, а правая уменьшается. Поэтому данное уравнение не может иметь более одного действительного корня. Непосредственная проверка показывает, что при $x = 5$ обе части равны между собой.

Задача 3.

Решить уравнение $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{1 - 2x} = \dfrac{4x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

Решение

Замечаем, что $(\sqrt{2x + 1} + \sqrt{1 - 2x})(\sqrt{2x + 1} - \sqrt{1 - 2x}) = 4x$.

Значит, $1 - \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-4x^2}} = 0$ или

$$\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{2x+1} - \sqrt{1-2x} \Rightarrow$$

$$1 - 4x^2 + 2\sqrt{1-4x^2} - 2 = 0.$$

Обозначим $\sqrt{1-4x^2} = y$, тогда $y^2 + 2y - 2 = 0$.

Окончить самостоятельно.

Задача 4.

Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2+66^2} - x^2} = 5.$$

Решение.

Пусть $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}} = A$, $\sqrt{x\sqrt{x^2+66^2} - x^2} = B$.

Тогда $\begin{cases} A - B = 5, \\ A \cdot B = 66, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B + 5, \\ A \cdot B = 66, \end{cases}$ $B^2 + 5B - 66 = 0$,

$$B = \frac{-5 + \sqrt{289}}{2} = 6; \quad A = \frac{5 + \sqrt{289}}{2} = 11.$$

Окончить самостоятельно.

Решить уравнения.

Задача 5.

1) $(2x-1)\sqrt{x-2} = 7\sqrt{2}$.

Попробуем предположить, что множители, содержащие радикалы, равны. Если это верно, то имеет место система

$$\begin{cases} 2x - 1 = 7, \\ \sqrt{x-2} = \sqrt{2}, \end{cases} \Rightarrow x = 4.$$

Покажем, что других корней уравнение не имеет. Пусть $x > 4$. Тогда

$$\begin{cases} 2x - 1 > 7, \\ \sqrt{x-2} > \sqrt{2}. \end{cases} \text{Тогда } (2x-1)\sqrt{x-2} > 7\sqrt{2}.$$

Если же $2 \leqslant x < 4$, то имеет место система

$\begin{cases} 2x - 1 < 7, \\ \sqrt{x-2} < \sqrt{2}, \end{cases}$ т.е. $(2x-1)\sqrt{x-2} < 7\sqrt{2}$. Итак, $x = 4$.

2) $(4x+1)\sqrt{x+1} = \sqrt{5}$. Способ подбора, рассмотренный в предыдущем примере, в данному случае не подходит, так как система

$$\begin{cases} 4x + 1 = 1, \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{5} \end{cases}$$

не имеет решений.

Постараемся использовать ту же идею. Запишем исходное уравнение в виде:

$$(4x+1)\sqrt{4x+4} = 2\sqrt{5}$$

и обозначим $4x$ через t. Тогда предыдущее уравнение примет вид: $(t+1)\sqrt{t+4} = 2\sqrt{5}$.

Предположим, что множители равны.

$$\begin{cases} \sqrt{t+4} = \sqrt{5}, \\ t + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow t = 1; \ x = \frac{1}{4}.$$

Докажем, что других корней нет.

При $x > \frac{1}{4}$ $t > 1$, тогда $\begin{cases} t+1 > 2, \\ \sqrt{t+4} > \sqrt{5}. \end{cases}$ При $-1 \leqslant x < \frac{1}{4}$

$(t+1)\sqrt{t+4} > 2\sqrt{5}$, $(t+1)\sqrt{t+4} < 2\sqrt{5}$, итак, $x = \frac{1}{4}$.

Задача 6.

Решить уравнения (самостоятельно)

1) $(4x-1)\sqrt{x-1} = 4\sqrt{5}$.
2) $(12x-5)\sqrt{3x-5} = 11\sqrt{7}$.
3) $(2x-1)\sqrt{x-3} = 7$.

Задача 7.

Решить уравнение $\sqrt{x + \sqrt{6x-9}} + \sqrt{x - \sqrt{6x-9}} = \sqrt{6}$

Решение.

Используя формулу сложного радикала, получаем

$$\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 6x + 9}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 6x + 9}}{2}} +$$

$$+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-6x+9}}{2}}-\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-6x+9}}{2}}=\sqrt{6}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6x-9\geqslant 0, \\ x-\sqrt{6x-9}\geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x\geqslant \frac{3}{2}, \\ (x-3)^2\geqslant 0. \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x\geqslant \frac{3}{2}.$$

$$\frac{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-6x+9}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}, \quad \sqrt{x+\sqrt{x^2-6x+9}}=\sqrt{3},$$

$$\sqrt{x^2-6x+9}=3-x, \quad x\leqslant 3.$$

$$\sqrt{(x-3)^2}=3-x, \quad \sqrt{(3-x)^2}=3-x,$$

$$|3-x|=3-x$$

а) $|3-x|=3-x$, $3-x=3-x$, $x\in R$.

б) $|3-x|=x-3$, $3-x=x-3$, $2x=6$, $x=3$.

Ответ: $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3$.

Задача 8.

Решить уравнение $\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}x$.

Решение.

Пусть $\sqrt{1-x^2}=y\geqslant 0$. Заметим, что $-1<x<1$, откуда $+\,y^2=1$.

Итак, имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{y}=\frac{35}{12}x, \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{или } \begin{cases} x+y=\frac{35}{12}xy, \\ (x+y)^2-2xy=1. \end{cases}$$

Подставляя из первого уравнения $x+y$ во второе, получим: $\left(\frac{35}{12}xy\right)^2 - 2xy - 1 = 0$;

$$1225\,(xy)^2 - 288\,xy - 144 = 0.$$

Отсюда находим xy.

Решая каждое из этих уравнений совместно с первым уравнением системы (1), найдем четыре решения. Из них по условию $y \geqslant 0$ удовлетворяют лишь три.

Ответ: $x_1 = 0{,}6,\ \ x_2 = 0{,}8,\ \ x_3 = -\frac{1}{14}(5+\sqrt{75})$.

Задача 9.

Решить уравнение

$$2\sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{2\,(x^2+2x)} = x-2. \qquad (1)$$

Решение.

Так как выражение $y = 2\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{2\,(x^2+2x)}$ не обращается в 0 и имеет смысл во всей области определения данного уравнения, то после умножения обеих его частей на исходное выражение, получим равносильное уравнение

$$4\,(x^2-x+2) - 2\,(x^2+2x) = (x-2)\,y, \text{ или}$$

$$2\,(x-2)^2 = (x-2)\,y,$$

откуда $x=2$ или $y=2x-4$.

Вычитая из последнего уравнения исходное, получим следствие исходного уравнения $2\sqrt{2\,(x^2+2x)} = x-2$, откуда $7x^2+20x-4=0$.

Однако корни этого квадратного уравнения, как легко проверить, меньше 2, так что оно не имеет корней, удовлетворяющих исходному уравнению. Т.е. единственный корень $x=2$.

Задача 10.

Решить уравнение

$$2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{27-14x} = 1.$$

Решение.

Положим $y = \sqrt[3]{x-1}$, тогда $x = y^3 + 1$ и уравнение примет вид: $\sqrt[3]{27 - 14(y^3+1)} = 1 - 2y$,

$$13 - 14y^3 = 1 - 6y + 12y^2 - 8y^3,$$

$$y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0,$$

$$(y+2)(y^2-1) = 0,$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = -2;$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -7.$$

Задача 11.

$$x^4 + \frac{1}{4} = x\sqrt{2}\sqrt{x^4 - \frac{1}{4}}\,.$$

Решение.

Возведем в квадрат

$$16x^8 - 32x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 1 = 0,$$

$$16(x^4 - x^2)^2 - 8(x^4 - x^2) + 1 = 0$$

$$\text{или} \quad (4(x^4 - x^2) - 1)^2 = 0.$$

Следовательно, $4(x^4 - x^2) - 1 = 0$. Далее очевидно.

Задача 12.

Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}\,.$$

Решение.

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} = \sqrt{(x-1)(2x-1)}. \quad (1)$$

Пусть $x \geqslant 1$; тогда $x_1 = 1$; $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{2x-1}$;

$$x = 3; \quad 3 > 1.$$

Пусть теперь $x < 1$, тогда $1 - x > 0$; делим уравнение (1) на $\sqrt{1-x}$, получим: $\sqrt{-x-2} + \sqrt{3-x} = \sqrt{1-2x}$; $x = -2$, $-2 < 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$.

Задача 13.

Решить уравнение.

1) $\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\dfrac{64}{3}\sqrt[7]{x}.$

Решение.

$$\sqrt[7]{12+x}\left(\frac{12+x}{12x}\right)=\frac{64}{3}\sqrt[7]{x};$$

$$\sqrt[7]{12+x}\,(12+x)=256\,x\sqrt[7]{x};$$

$$\sqrt[7]{(12+x)^8}=2^8\sqrt[7]{x^8}.$$

Возведем в седьмую степень:

$$(12+x)^8=2^{56}\cdot x^8,\quad \left(\frac{12+x}{x}\right)^8=2^{56},$$

$$\text{отсюда }\frac{12+x}{x}=\pm\sqrt[8]{2^{56}};\quad \frac{12+x}{x}=\pm 2^7;$$

$$\frac{12}{x}+1=\pm 128;\quad x=\frac{12}{-1\pm 128}.$$

$$x_1=\frac{12}{127},\quad x_2=-\frac{4}{43}.$$

2) $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{(x^2-1)}.$ (*)

Так как $\sqrt[n]{(x-1)^2}\neq 0$, делим (*) на него:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+1=4\sqrt[n]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}};$$

$$1+\sqrt[n]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}=4\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Замена: $\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x-1}}=y.$

$$1+y^2=4y,\quad y^2-4y+1=0;$$

$$y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3};$$

$$\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = 2 \pm \sqrt{3}; \quad \frac{x+1}{x-1} = (2 \pm \sqrt{3})^n = \alpha;$$

$$x + 1 = \alpha x - \alpha; \quad 1 + \alpha = \alpha x - x; \quad 1 + \alpha = x(\alpha - 1);$$

$$x = \frac{1+\alpha}{\alpha - 1}; \quad x_{1,2} = \frac{(2 \pm \sqrt{3})^n + 1}{(2 \pm \sqrt{3})^n - 1}.$$

Задача 14.

Решить уравнение $2\sqrt{x+1} = x^2 + x - 1$.

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (\sqrt{x+1} + 1)^2 - (x+1)^2 = 0, \\ x > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0, \\ x > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \end{cases} \quad \text{или } x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Задача 15.

Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x + 4 \geqslant 0, \\ x - 4 \geqslant 0, \\ x^2 - 16 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 4.$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} - 2x - 2\sqrt{x^2-16} + 12 = 0;$$

$$(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}) - (\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4})^2 + 12 = 0;$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = y; \quad y - y^2 + 12 = 0;$$

$$y^2 - y - 12 = 0; \quad y_1 = 4, \quad y_2 = -3;$$

корень $y_2 = -3$ — не подходит, так как $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} > 0$;

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4;\ 2x+2\sqrt{x^2-16}=16;$$

$$2\sqrt{x^2-16}=16-2x;$$

$$4(x^2-16)=4(64+x^2-16x);$$

$$x^2-16-64-x^2+16x=0;$$

$$x-5=0;\ \ x=5.$$

Задача 16.

Решить уравнение

$$2x+\frac{x-1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}-3\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0.$$

Решение.

Обозначим $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$, $z=\sqrt{x+1}$. Тогда данное уравнение принимает вид $y^2-y-3yz+2z^2-2=0$.

Разложив левую часть, рассмотрев ее как квадратный трехчлен, получили: $(y-2z-2)(y-z+1)=0$.

Теперь решаем уравнения

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}=2\sqrt{x+1}+2; \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\sqrt{x+1}-1. \qquad (2)$$

Первое уравнение не имеет корней, так как левая часть меньше 1, а правая часть больше 1.

Второе уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{x^2+x}$ после возведения в квадрат $2\sqrt{x(x-1)}=x^2-x+1$,

$$(\sqrt{x^2-x}-1)^2=0,\ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 17.

Решить уравнение: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{13-x^2}}=\dfrac{5}{6}.$

Решение.

Имеем: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{13-x^2}+\frac{2}{x\sqrt{13-x^2}}=\frac{25}{36}$, или

$$\frac{13}{x^2(13-x^2)}+\frac{2}{x\sqrt{13-x^2}}-\frac{25}{36}=0.$$

Сделаем замену: $\frac{1}{x\sqrt{13-x^2}}=t.$

$$13t^2+2t-\frac{25}{36}=0,\quad t_1=\frac{1}{6};\ t_2=-\frac{25}{78},\text{ значит,}$$

$$x_1=3;\quad x_2=2;\quad x_{3,4}=-\frac{\sqrt{481}\pm 13}{10}.$$

Задача 18.

Решить уравнение

$$\frac{(x-1)\sqrt[3]{10-x}-(10-x)\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{10-x}}=6.$$

Решение.

$x\neq 1$. Числитель и знаменатель делим на $\sqrt[3]{x-1}$.

Получим $\dfrac{(x-1)\sqrt[3]{\dfrac{10-x}{x-1}}-(10-x)}{1-\sqrt[3]{\dfrac{10-x}{x-1}}}=6.$

Замена: $\sqrt[3]{\dfrac{10-x}{x-1}}=t$; тогда $\dfrac{10-x}{x-1}=t^3$, откуда

$$x=\frac{t^3+10}{t^3+1}.$$

Вычисляем $x-1$ и $10-x$:

$$x-1=\frac{t^3+10}{t^3+1}-1=\frac{9}{t^3+1};$$

$$10-x=10-\frac{t^3+10}{t^3+1}=\frac{9t^3}{t^3+1}.$$

Подставляем:

$$\underbrace{\frac{9}{t^3+1}\cdot t-\frac{9t^3}{t^3+1}}_{1-t}=6;\quad t=2;\frac{1}{2}.$$

Дальнейшее очевидно:

$$x_1=2;\quad x_2=9.$$

Задача 18.

Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}x\geqslant-1{,}5,\\ x\geqslant-1,\\ x\geqslant-1,\end{cases}\qquad x\geqslant1.$$

Пусть $y_1=\sqrt{2x+3}$, $y_2=\sqrt{x+1}$, тогда

$$y_1+y_2=y_1^2+y_2^2-20+2y_1y_2.$$

$$y_1+y_2=(y_1+y_2)^2-20.$$

Пусть $z=y_1+y_2$. Тогда $z^2-z-20=0$, $z_{1,2}=\dfrac{1\pm9}{2}$,

$$z_1=5,\quad z_2=-4 \text{ — посторонний корень.}$$

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5;\ \sqrt{2x+3}=5-\sqrt{x+1};$$

$$\sqrt{x+1}\leqslant5;\quad x\leqslant24\ \ (H).$$

$$2x+3=25+x+1-10\sqrt{x+1};\ x-23=-10\sqrt{x+1};$$

$$x^2-46x+23^2=100x+100;$$

$$x^2-46x+529=100x+100;$$

$$x^2-146x+429=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{146\pm140}{2},\quad x_1=3,\quad x_2=143\ \ (\notin H)$$

Ответ: $x=3$.

Задача 19.

Решить уравнение

$$\sqrt{2(1+x^2)} + 2(x-1) = 2a\sqrt{x}.$$

Решение.

Ясно, что $x > 0$. Положим $x - 1 = y\sqrt{x}$. Тогда

$$x^2 + 1 = x(y^2 + 2),$$

и данное уравнение принимает вид:

$$\sqrt{2(y^2+2)} = 2(a-y), \quad a \geqslant y.$$

После освобождения от иррациональности получаем:

$$y^2 - 4ay + 2(a^2 - 1) = 0.$$

Отсюда: $y_1 = 2a + \sqrt{2(a^2+1)}$, $y_2 = 2a - \sqrt{2(a^2+1)}$.

При $a \geqslant 0$ имеем $a - y_1 = -(a + \sqrt{2(a^2+1)}) < 0$.

При $a < 0$ $a - y_1 = -(a + \sqrt{2(a^2+1)}) < 0$. Значит, y_1 — посторонний корень. С другой стороны,

$$a - y_2 = \sqrt{2(a^2+1)} - a.$$

Разность $a - y_2 > 0$ при $a \leqslant 0$ и при $a > 0$, следовательно, остается решить уравнение $x - 1 = y_2\sqrt{x}$.

Отсюда $\sqrt{x} = \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{y_2^2 + 4})$,

$$x = \frac{1}{4}\left(2a - \sqrt{2(a^2+1)} + \sqrt{6a^2 + 6 - 4a\sqrt{2(a^2+1)}}\right).$$

Задача 20.

Решить уравнение $3(x^2 - x + 1) = (x + \sqrt{x-1})^2$.

Решение.

Поскольку в области определения данного уравнения

$$x^2 - x + 1 = x^2 - (\sqrt{x-1})^2 = (x + \sqrt{x-1})(x - \sqrt{x-1}),$$

то оно легко приводится к виду:

$$(x + \sqrt{x-1})(2x - 4\sqrt{x-1}) = 0,$$

откуда единственное решение $x = 2$.

Задача 21.

При каких a, b и c уравнение $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$ имеет бесконечное множество решений?

Решение.

Из условия $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}=c-\sqrt{x}$. Тогда

$$\begin{cases} x+a\sqrt{x}+b=c^2-2c\sqrt{x}+x, \\ c-\sqrt{x}\geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (a+2c)\sqrt{x}=c^2-b, \\ \sqrt{x}\leqslant c. \end{cases}$$

Отсюда следует, что данное уравнение имеет бесконечное множество решений, если

$$a+2c=c^2-b=0 \text{ и } c>0, \text{ т.е. при}$$

$$a=-2c \quad b=c^2 \text{ и } c>0.$$

Задача 22.

Решить уравнение:

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt{1-x}-1=0.$$

Решение.

Обозначим $\sqrt{1-x^2}=u$, $\sqrt[4]{x^2+x-1}=v$, $\sqrt{1-x}=w$, тогда

$$\begin{cases} u+v+w=1, \\ u^2+v^4+w^2=1. \end{cases}$$

Так как u, v, $w\geqslant 0$, то $u^2\leqslant u$, $v^4\leqslant v$, $w^2\leqslant w$, и поэтому $u^2+v^4+w^2=u+w+v=1$ только в случае $u^2=u$, $v^4=v$, $w^2=w$. Учитывая, что $u+v+w=1$, получаем следующие три случая:

1) $u=1$, $v=0$, $w=0$, т.е. $1-x^2=1$; $x^2+x-1=0$; $1-x=0$. Решений нет.

2) $u=0$, $v=1$, $w=0$, т.е. $1-x^2=0$; $x^2+x-1=0$; $1-x=0$. Решение $x=1$.

3) $u=0$, $v=0$, $w=1$, т.е. $1-x^2=0$; $x^2+x-1=0$; $1-x=1$. Решений нет.

Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ — корень исходного уравнения. Итак, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Задача 23.

$$4x^2 + 12x\sqrt{1+x} = 27(1+x).$$

Решение.

Первый способ

$$27(1+x) - 12x\sqrt{1+x} - 4x^2 = 0;$$

$$\sqrt{1+x} = \frac{6x \pm \sqrt{36x^2 + 4\cdot 27x^2}}{27} =$$

$$= \frac{6x \pm \sqrt{144x^2}}{27} = \frac{6x \pm 12x}{27}.$$

Следовательно, $\sqrt{1+x} = \frac{2x}{3}$ и $\sqrt{1+x} = -\frac{2x}{9}$;

$$x_1 = 3;\ \ x_2 = -\frac{3}{4};\ \ x_{3,4} = \frac{9}{8}(9 \pm \sqrt{97}).$$

Второй способ

Добавим к обеим частям уравнения по $9(1+x)$.

$$4x^2 + 12x\sqrt{1+x} = 27(1+x);$$

$$9(1+x) + 4x^2 + 12x\sqrt{1+x} = 9(1+x) + 27(1+x);$$

$$(2x + 3\sqrt{1+x})^2 = 36(1+x);$$

$$(2x + 3\sqrt{1+x} - 6\sqrt{1+x})(2x + 3\sqrt{1+x} + 6\sqrt{1+x}) = 0;$$

$$2x = 3\sqrt{1+x} \quad \text{или} \quad 2x = -9\sqrt{1+x}$$

тут $x > 0$;	тут $x < 0$;
$4x^2 = 9 + 9x$;	$4x^2 = 81 + 81x$
$x = \frac{9 \pm 15}{8}$;	$x = \frac{81 \pm 9\sqrt{97}}{8}$;
$x = 3$.	$x = \frac{81 - 9\sqrt{97}}{8}$.

Задача 24.

Решить уравнение $6\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-1)(x-2)}$.

Решение.

$$5\sqrt[6]{(x-1)(x-2)}=2\cdot\frac{5}{2}\sqrt[6]{(x-1)(x-2)};\qquad(1)$$

$$6\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\frac{25}{4}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x-1}.\qquad(2)$$

Сравним (1) и (2).

$$\frac{25}{4}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x-1}=2\cdot\frac{5}{2}\sqrt[6]{(x-1)(x-2)};$$

$$\frac{25}{4}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-2\cdot\frac{5}{2}\sqrt[6]{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{x-1};$$

$$\left(\frac{5}{2}\sqrt[6]{x-1}-\sqrt[6]{x-2}\right)^2=\frac{1}{4}\sqrt[3]{x-1};$$

$$\frac{5}{2}\sqrt[6]{x-1}-\sqrt[6]{x-2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt[6]{x-1}.$$

1) $\frac{5}{2}\sqrt[6]{x-1}-\sqrt[6]{x-2}=\frac{1}{2}\sqrt[6]{x-1}$.

$$2\sqrt[6]{x-1}=\sqrt[6]{x-2};\quad 2^6x-2^6=x-2;$$

$$x(2^6-1)=2^6-2;\quad x=\frac{2^6-2}{2^6-1}.$$

2) $\frac{5}{2}\sqrt[6]{x-1}-\sqrt[6]{x-2}=-\frac{1}{2}\sqrt[6]{x-1}$.

$$3\sqrt[6]{x-1}=\sqrt[6]{x-2};\quad 3^6x-3^6=x-2;$$

$$x=\frac{3^6-2}{3^6-1}.$$

Задача 25.

Решить уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

Решение.

Ясно, что $0 < \sqrt{1-x} < x < 1$. Составим сопряженное выражение $\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = y$.

Умножаем на данное уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$, получаем $y = \sqrt{1-x}$. Складывая сопряженное и данное, находим

$$2\sqrt{x} = \sqrt{1-x} + 1, \text{ или } 2\sqrt{x} - \sqrt{1-x} = 1.$$

Составляем уравнение, сопряженное полученному

$$2\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = z.$$

Перемножая сопряженное и полученное, находим

$$z = 5x - 1.$$

Складывая их, найдем $4\sqrt{x} = 5x$.

Так как $x \neq 0$, то, сокращая на $\sqrt{x}$, получим

$$4 = 5\sqrt{x}; \quad x = \frac{16}{25}.$$

Так как $x = \frac{16}{25} > \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$, то $x = \frac{16}{25}$ — решение уравнения.

Задача 26.

Решить уравнение

$$\sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x + 1 - \sqrt{x+7}} = 4.$$

Решение.

Умножаем на сопряженное

$$\sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x+7}} - \sqrt{x + 1 - \sqrt{x+7}},$$

получим $x + 8 + 2\sqrt{x+7} - x - 1 + \sqrt{x+7} = 16$, отсюда

$$3\sqrt{x+7} = 9 \Rightarrow \sqrt{x+7} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 7 = 9; \quad x = 2.$$

Задача 27.

Решить уравнение

$$\sqrt{2x - y^2 - z^2} - \sqrt{2z - y - 3} = \sqrt{x^2 + y}.$$

Решение.

Запишем в виде $u - v = w$. Заметим, что

$$u^2 - 2uv + v^2 = w^2,$$

$$2x - y^2 - z^2 + 2z - y - 3 - 2uv = x^2 + y;$$

$$-2uv = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2,$$

и поскольку $uv \geqslant 0$, то равенство возможно лишь при $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$. Непосредственно проверяется.

Задача 28.

Решить уравнение $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Решение.

Имеем $x^3 = 2\sqrt[3]{2x-1} - 1$, или $x = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1} - 1}$.

Обозначим

$$f(x) = \sqrt[3]{2x-1}. \tag{1}$$

Наше уравнение имеет вид:

$$x = f(f(x)). \tag{2}$$

Докажем, что оно равносильно уравнению $x = f(x)$. Ясно, что всякий корень второго (2) уравнения удовлетворяет исходному.

Если же x_0 — корень уравнения (2), но $f(x_0) \neq x_0$, то либо $f(x_0) > x_0$, либо $f(x_0) < x_0$. Поскольку f возрастает, в первом случае получаем $x_0 = f(f(x_0)) > f(x_0)$, во втором — $f(x_0) > f(f(x_0)) = x_0$ — противоречие.

Решая уравнение $x^3 = 2x - 1$, получим решение: 1; $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Задача 29.

Решить уравнение $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

Решение.

Положим: $\sqrt[3]{2-x} = y$; $\sqrt{x-1} = z \geqslant 0$. Имеем:

$$\begin{cases} 2 - x = y^3, \\ x - 1 = z^2, \\ y = 1 - z. \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения x ($x = 1 + z^2$), взяв из третьего y и подставляя в первое, получаем уравнения:

$$1 - z^2 = (1-z)^3, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 3;$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 10.$$

Задача 30.

Решить уравнение: $\dfrac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - x}} = \dfrac{3}{x}$.

Решение.

Уничтожив иррациональность в знаменателях выражений, стоящих в левой части уравнения и выполнив несложные преобразования, приведем уравнение к виду

$$4\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} = 5x + 3.$$

После возведения в квадрат и перегруппировки получаем уравнение: $8\sqrt{x^4 - x^2} + 8x^2 + 15x + 9 = 0$.

Однако левая часть этого уравнения всегда положительна (в своей области определения). Следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

Задача 31.

Решить уравнение

$$\frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}} = \sqrt{x}.$$

Решение.

Имеем

$$\frac{(x+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}})}{x-x-\sqrt{3}}+\frac{(x-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}})}{x-x+\sqrt{3}}=\sqrt{x};$$

$$\frac{(x-\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}})-(x+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}=\sqrt{x};$$

$$\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{x-\sqrt{3}}-\sqrt{3x}+\sqrt{3}\sqrt{x-\sqrt{3}}-x\sqrt{x}+x\sqrt{x-\sqrt{3}}-\sqrt{3x}+\sqrt{3}\sqrt{x-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{x};$$

$$\frac{x(\sqrt{x-\sqrt{3}}+\sqrt{x+\sqrt{3}})+\sqrt{3}(\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}})-2\sqrt{3x}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{x}.$$

$$\frac{x(\sqrt{x-\sqrt{3}}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}+\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}}-2\sqrt{x}=\sqrt{x}.$$

Далее,

$$\frac{x(\sqrt{x-\sqrt{3}}+\sqrt{x+\sqrt{3}}(\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}(\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}})}+$$

$$+\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}}=3\sqrt{x};$$

$$\frac{x(x+\sqrt{3}-x+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}})}+\sqrt{x+\sqrt{3}}-\sqrt{x-\sqrt{3}}=3\sqrt{x};$$

$$\frac{4x^2}{x+\sqrt{3}+x-\sqrt{3}-2\sqrt{x^2-3}}+x+\sqrt{3}+x-$$

$$-\sqrt{3}-2\sqrt{x^2-3}+2\cdot 2x=9x.$$

Значит,

$$\frac{4x^2}{2(x-\sqrt{x^2-3})}+2(x-\sqrt{x^2-3})=5x;$$

$$2x^2+2(x-\sqrt{x^2-3})^2=5x(x-\sqrt{x^2-3});$$

$$2x^2+2x^2+2x^2-6-4x\sqrt{x^2-3}=5x^2-5x\sqrt{x^2-3};$$

$$6x^2 - 6 - 4x\sqrt{x^2-3} = 5x^2 - 5x\sqrt{x^2-3};$$

$$x^2 - 6 = -x\sqrt{x^2-3};$$

$$x^4 - 12x^2 + 36 = x^2(x^2-3);$$

$$x^4 - 12x^2 + 36 = x^4 - 3x^2;$$

$$9x^2 = 36; \quad |x| = 2.$$

$$\begin{cases} x = \pm 2, \\ x \geqslant \sqrt{3}, \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2.$$

Задача 32.

Найти положительные корни уравнения

$$2x + \frac{x-1}{x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 3\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 0.$$

Решение.

Введем обозначение:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x}}, \quad z = \sqrt{x+1},$$

тогда данное уравнение примет вид

$$y^2 - y - 3yz + 2z^2 - 2 = 0.$$

Разложив левую часть получившегося уравнения на множители, получим

$$(y - 2z - 2)(y - z + 1) = 0$$

(это разложение на множители можно найти, рассматривая левую часть как квадратный трехчлен относительно y). Теперь остается решить уравнение:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\sqrt{x+1} + 2, \quad \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{x+1} - 1.$$

Первое из этих уравнений не имеет корней, так как при любом положительном (допустимом) значении x его левая часть не больше 1, а правая больше 1. Второе уравнение перепишем в виде:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \sqrt{x^2+x},$$

и после возведения обеих частей в квадрат получим равносильное ему (в области $x \geqslant 1$) уравнение

$$2\sqrt{x(x-1)} = x^2 - x + 1, \text{ или } (\sqrt{x^2 - x} - 1)^2 = 0.$$

Отсюда $x^2 - x = 1$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Корень $x_2 < 0$ не входит в ОДЗ рассматриваемого уравнения, а корень $x_1 > 1$ входит в ОДЗ и, как легко видеть, является его корнем и корнем исходного уравнения.

Задача 33.

Решить уравнение $\frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} + x^2 - 4 = 0.$

Решение.

Из уравнения следует, что

$$x^3 = (4 - x^2)\sqrt{4 - x^2} = (4 - x^2)^{3/2}.$$

Возведя обе части в квадрат и извлекая кубический корень, получаем $4 - x^2 = x^2$, откуда $x^2 = 2$ и $x = \pm\sqrt{2}$. Проверка показывает, что отрицательный корень — посторонний. Поэтому $x = \sqrt{2}$ — корень.

Задача 34.

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11.$$

Решение.

Первый способ.

$$x - 2 + 2\sqrt{(4-x)(x-2)} + 4 - x = (x^2 - 6x + 11)^2;$$

$$2 + 2\sqrt{(4-x)(-2+x)} = (x^2 - 6x + 11)^2.$$

Пусть $x^2 - 6x + 11 = a$.

$$2 + 2\sqrt{3-a} = a^2;\quad 12 - 4a = a^4 + 4 - 4a^2;$$

$$a^4 - 4a^2 - 4a - 8 = 0;$$

$$a^2(a-2)(a+2) + 4(a-2) = 0;$$

$$(a-2)(a^3 + 2a^2 + 4) = 0;\quad a = 2;$$

$$x^2 - 6x + 11 = 2;$$

$$(x-3)^2 = 0; \quad x = 3.$$

Второй способ.

Найдем экстремум правой и левой частей

$$(\sqrt{x-2})' + (\sqrt{4-x})' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{4-x}};$$

$$\sqrt{4-x} - \sqrt{x-2} = 0; \quad 4 - x = x - 2, \quad x = 3;$$

$$y = 2; \quad y \leqslant 2;$$

$$(x^2 - 6x + 11)' = 2x - 6 = 0;$$

$$x = 3; \quad y \geqslant 2.$$

Значит, $y = 2$ и $x = 3$.

Задача 35.

Решить уравнение $\sqrt[4]{x - 2x^2} + 2\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3}.$

Решение.

$$\sqrt[4]{x-2x^2} \geqslant 0; \ 2\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{(2x-1)^2 + 3} \geqslant \sqrt{3},$$

что возможно лишь при $x = \frac{1}{2}$.

Задача 36.

Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2} = \dfrac{1}{1-x}$.

Решение.

Левая часть данного уравнения определена на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ и неотрицательна на этом промежутке.

Правая часть неотрицательна на $]-\infty; 1[$, следовательно, уравнение может иметь решение на пересечении множеств

$$\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[\bigcap \,]-\infty; 1[\,= \left[\frac{2}{3}; 1\right[.$$

Перепишем данное уравнение в виде $\sqrt{3x-2}=\frac{x^2}{1-x}$.

Отметим, что на множестве $\left[\frac{2}{3};\ 1\right[$ обе части уравнения возрастают. При этом

$$\sqrt{3x-2}<\sqrt{3\cdot 1-2}=1,\quad \frac{x^2}{1-x}>\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}>1.$$

Итак, $\sqrt{3x-2}<1$, $\frac{x^2}{1-x}>1$. Корней нет.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Задача 37.

Решить уравнение $\sqrt[3]{25x\,(2x^2+9)}\ =\ 4x+\frac{3}{x}$.

Решение.

Так как обе части уравнения являются нечетными функциями, то достаточно найти сначала положительные корни. Тогда, записав его в виде $\sqrt[3]{25x^4\,(2x^2+9)}=4x^2+3$ по неравенству между средним арифметическим и геометрическим будем иметь:

$$3\sqrt[3]{25x^4\,(2x^2+9)}\ \leqslant\ 5x^2+5x^2+2x^2+9=12x^2+0.$$

Поэтому данное уравнение выполняется только при $5x^2=2x^2+9$, значит, его единственным положительным корнем является $x=\sqrt{3}$, а единственным отрицательным — $x=-\sqrt{3}$.

Задача 38.

Решить уравнение $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=3$.

Решение.

Сделаем несколько оценок с помощью неравенства Коши.

$$\sqrt[4]{1-x^2}\leqslant\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2};$$

$$\sqrt[4]{1+x} \leqslant \frac{1+\sqrt{1+x}}{2};$$

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{1+(1+x)}{2} + \frac{1+(1-x)}{2} = 3.$$

Так как равенство во всех случаях имеет место при $x = 0$, то это число — единственный корень.

Задача 39.

Решить уравнение $\sqrt[3]{2-x} = 2 - x^3$.

Решение.

Пусть $f(x) = 2 - x^3$. Найдем функцию $g(x)$, обратную $f(x) = 2 - x^3$,

$$x^3 = 2 - f(x); \quad x = \sqrt[3]{2 - f(x)},$$

значит, $g(x) = \sqrt[3]{2-x}$ и по условию $f(x) = g(x)$. Следовательно, $2 - x^3 = x$, $x = 1$.

Задача 40.

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}.$$

Решение.

Обозначим $f(x) = x^2 - x + 1$. Найдем функцию $g(x)$, обратную $f(x)$.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1 - f(x))}}{2};$$

$$2x = 1 + \sqrt{4f(x) - 3}; \quad x = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - \frac{3}{4}}.$$

Значит, $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$. По условию $f(x) = g(x)$;

$$x^2 - x + 1 = x; \quad x = 1.$$

Задача 41.

Решить уравнение $\sqrt{12+\sqrt{12+x}}=x$.

Решение.

Ясно, что $x>0$. Сделаем замену: $\sqrt{12+x}=y$. Тогда $12+x=y^2$, а из данного уравнения имеем $\sqrt{12+y}=x$, отсюда $12+y=x^2$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y^2-x=12, \\ x^2-y=12. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе. Получим

$$y^2-x^2+y-x=0.$$

Разложим на множители: $(y-x)(y+x+1)=0$. Так как $x>0$, $y>0$, то $x+y+1>0$. Значит, $y-x=0$, т.е. $y=x$ и $x^2-x-12=0$, $x=4$ или $x=-3<0$.

Ответ: $x=4$.

Задача **42.**

Решить уравнение: $16x^2+2x-\sqrt{256x-15}+2=0$.

Решение.

$$x^2+\frac{1}{8}x+\frac{2}{16}-\sqrt{x-\frac{15}{256}}=0\ ;$$

$$x^2+2\cdot\frac{1}{16}x+\frac{1}{256}-\frac{1}{256}+\frac{1}{8}-\sqrt{x-\frac{15}{256}}=0;$$

$$\left(x+\frac{1}{16}\right)^2+\frac{31}{256}=\sqrt{x-\frac{15}{256}}.$$

Рассмотрим функции

(1) $y=\left(x+\frac{1}{16}\right)^2+\frac{31}{256}$ — парабола с вершиной $A\left(-\frac{1}{16};\ \frac{31}{256}\right)$;

(2) $y=\sqrt{x-\frac{15}{256}}$.

График (1) расположен в I и II квадрантах, график (2) — в I. Поэтому все возможные точки пересечения графиков — это точки пересечения правой ветки параболы с графиком (2). Заметим, что эти графики симметричны относительно прямой $y = x$.

Действительно, пусть $x + \frac{1}{16} = t$;

$$y_1 = t^2 + \frac{31}{256}; \quad y_2 = \sqrt{t - \frac{31}{256}}; \quad t = \sqrt{y_1 - \frac{31}{256}};$$

$$y_1 = \sqrt{t - \frac{31}{256}} = \sqrt{x + \frac{1}{16} - \frac{31}{256}} = \sqrt{x - \frac{15}{256}} = y_2,$$

т.е. $y_1 = t^2 + \frac{31}{256}$ и $y_2 = \sqrt{t - \frac{31}{256}}$ — обратные и все их общие точки лежат на прямой $y = t$, т.е. $y = x + \frac{1}{16}$.

Следовательно, все решения данного уравнения являются решениями уравнения $\left(x + \frac{1}{16}\right)^2 + \frac{31}{256} = x + \frac{1}{16}$;

$$t^2 - t + \frac{31}{256} = 0; \quad D = 1 - \frac{124}{256} = \frac{33}{64};$$

$$t = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{33}}{8}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{33}}{16};$$

$$x + \frac{1}{16} = \frac{8 \pm \sqrt{33}}{16}; \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{16}.$$

Ответ: $x = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{16}$.

Задача 43.

Решить уравнение $\sqrt{x^3 + 24} = 3x + 8 + \sqrt{x^3 + 12}$.

Решение.

Переписав данное уравнение в виде

$$\frac{12}{\sqrt{x^3 + 24} + \sqrt{x^3 + 12}} = 3x + 8,$$

заметим, что его левая часть является убывающей, а правая часть — возрастающей функцией и, следовательно, уравнение не может иметь более одного корня. С другой стороны, очевидно, что число -2 является его корнем, и, таким образом, уравнение имеет единственное решение $x = -2$.

Задача 44.

Решить уравнение $\sqrt[3]{25x(2x^2+9)} = 4x + \frac{3}{x}$.

Решение.

Так как обе части уравнения являются нечетными функциями, то достаточно найти сначала положительные корни. Тогда, записав его в виде $\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} = 4x^2 + 3$, по неравенству между средними арифметическим и геометрическим будем иметь:

$$3\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} \leqslant 5x^2 + 5x^2 + 2x^2 + 9 = 12x^2 + 9.$$

Поэтому данное уравнение выполняется только при $5x^2 = 2x^2 + 9$, т.е. при $x^2 = 9$, значит, его единственным положительным корнем является $x = \sqrt{3}$, а единственным отрицательным корнем $x = -\sqrt{3}$.

Задача 45.

Решите уравнение $\sqrt{x} = \dfrac{3}{6\sqrt{x} + \sqrt{6x-3}}$.

Решение.

Так как должно быть $x \geqslant 0$ и $6x - 3 \geqslant 0$, то имеем $x \geqslant \frac{1}{2}$. Поэтому данное уравнение равносильно уравнению

$$6x + \sqrt{6x-3}\,\sqrt{x} = 3. \qquad (*)$$

Отсюда $\sqrt{6x^2 - 3x} = 3 - 6x$, $6x^2 - 3x = 9 - 36x + 36x^2$. Решая это уравнение, получим $x = \frac{3}{5}$; $x = \frac{1}{2}$.

Проверкой убеждаемся, что $x = \frac{3}{5}$ не удовлетворяет уравнению. Следовательно, $x = \frac{1}{2}$.

Уравнение (*) можно решить иначе. Легко видеть, что $x = \frac{1}{2}$ — корень уравнения. При $x > \frac{1}{2}$ $6x > 3$ и второе слагаемое больше нуля, т.е. значения $x > \frac{1}{2}$ не могут быть решениями уравнения. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{2}$.

Задача 46.

Решить уравнение $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

Решение.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$a - \sqrt{a + x} = x^2; \quad a - x^2 = \sqrt{a + x};$$

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

Решим это уравнение относительно a:

$$a^2 - a\,(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0.$$

Разложив квадратный трехчлен на линейные множители, получим: $(1 + x^2 + x - a) \cdot (x^2 - x - a) = 0$.

Находим: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$; $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}$.

Задача 47.

Решить уравнение $\sqrt[4]{8 - x} + \sqrt[4]{89 + x} = 5$.

Решение.

Полагая $8 - x = a^4$ и $89 + x = b^4$, получим систему:

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ a^4 + b^4 = 97. \end{cases}$$

Пользуясь тем, что $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2) - 2a^2 b^2 =$

$$= ((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2 b^2,$$

и тем, что $a + b = 5$, получим уравнение

$$(25 - 2ab)^2 - 2a^2 b^2 = 97, \text{ или}$$

$$2a^2 b^2 - 100\, ab + 528 = 0, \text{ или}$$

$$a^2 b^2 - 50ab + 264 = 0.$$

Отсюда: 1) $ab = 6$ и 2) $ab = 44$.

Теперь остается решить две системы:

$$1)\ \begin{cases} a + b = 5, \\ ab = 6, \end{cases} \text{ и } 2)\ \begin{cases} a + b = 5, \\ ab = 44. \end{cases}$$

Первая система дает $a = 2$, $b = 3$ и $a = 3$, $b = 2$. Вторая система действительных решений не имеет. Пользуясь, например, уравнением $8 - x = a^4$ и полученными значениями неизвестного a, найдем действительные корни данного иррационального уравнения:

$$x_1 = -8 \text{ и } x_2 = -73.$$

Задача 48.

Решить уравнение $\dfrac{\sqrt[p]{b+x}}{x} = \dfrac{\sqrt[p]{x}}{a} + \dfrac{\sqrt[p]{x+b}}{b} = 0.$

Решение.

Так как p есть любое натуральное число, больше 1, то должно быть $b + x > 0$ и $x > 0$.

Имеем: $\sqrt[p]{b+x}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sqrt[p]{x}}{a}$. Отсюда:

$$\sqrt[p]{b+x} \cdot \frac{b+x}{bx} = \frac{\sqrt[p]{x}}{a}; \quad \left(\frac{b+x}{x}\right)^{1+\frac{1}{p}} = \frac{b}{a}.$$

Так как $\dfrac{b+x}{x} > 0$, то и $\dfrac{b}{a} > 0$. Отсюда $x = \dfrac{b}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}} - 1}$.

Для $x \geqslant 0$ должно быть $b > a$; если $a < 0$ и $b < 0$, то $|a| > |b|$.

Для существования решения нужно, чтобы a и b были одного знака, и чтобы $b > a$.

Задача 49.

Решить уравнение $x^2 + x + 6\sqrt{x+2} = 18$.

Решение.

При $-2 < x < 0$ левая часть уравнения меньше $4 + 6\sqrt{2}$, т.е. меньше 18. При $x \geqslant 0$ левая часть возрастает, и поэтому уравнение не может иметь более одного корня. Легко проверить, что число 2 является его единственным корнем.

Задача 50.

Решить уравнение $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

Решение.

Введем новые неизвестные $y = \sqrt[3]{2-x}$; $z = \sqrt{x-1}$; тогда получим систему

$$z^2 + 1 = x;\ \ y^3 + x = 2;\ \ y + z = 1,$$

откуда $y^3 + z^2 = 1$; $y + z = 1$.

Подставляя $z = 1 - y$ в первое уравнение, получим

$$y^3 + y^2 - 2y = 0.$$

Отсюда $y \in \{0,\ 1,\ -2\}$.

Следовательно, исходное уравнение имеет три корня: 1, 2, 10.

Задача 51.

Решить уравнение $x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = a$.

Решение.

Положив $y = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$, получим $x = y - \frac{1}{4}$, $y \geqslant 0$, и далее будем иметь:

$$y^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} + y} = a;$$

$$y^2 + y + \frac{1}{4} = a,\ \ \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = a.$$

Так как $y \geqslant 0$, то при $a < \frac{1}{4}$ это уравнение корней не имеет, а при $a \geqslant \frac{1}{4}$ имеет единственный корень $y = \sqrt{a} - \frac{1}{2}$, откуда получаем, что исходное уравнение при $a < \frac{1}{4}$ корней не имеет, а при $a \geqslant \frac{1}{4}$ имеет корень $x = a - \sqrt{a}$.

Задача 52.

Решить уравнение $\sqrt{10x^3 - 24x^2 + 5x + 7} = x^2 + 1$.

Решение.

$$\sqrt{10x^3 - 24x^2 + 5x + 7} = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$10x^3 - 24x^2 + 5x + 7 = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^4 - 10x^3 + 25x^2) + (x^2 - 5x) - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 (x - 5)^2 + x (x - 5) - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x (x - 5) = 2, \\ x (x - 5) = 3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}, \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Задача 53.

Решить уравнение $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x$.

Решение.

Имеем цепочку следствий:

$$\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} = x - \sqrt{x - \frac{7}{x^2}},$$

$$x^2 - \frac{7}{x^2} = x^2 + x - \frac{7}{x^2} - 2x\sqrt{x - \frac{7}{x^2}},$$

$$x = 2x\sqrt{x - \frac{7}{x^2}}, \quad 1 = 2\sqrt{x - \frac{7}{x^2}},$$

$$4x^3 - x^2 - 28 = 0, \quad (x - 2)(4x^2 + 7x + 14) = 0.$$

Отсюда $x = 2$ и проверка показывает, что это корень исходного уравнения.

13. ПАРАМЕТР В ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Задача 1.

Решить уравнение $\sqrt{x} = a$.

Решение.

Если $a \geqslant 0$, $x = a^2$.
Если $a < 0$, уравнение решений не имеет.

Задача 2.

Решить уравнение $(x-1)\sqrt{x-a} = 0$.

Решение.

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geqslant a, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = a. \end{array}\right. \end{cases}$$

Значит, $x = a$ — корень заданного уравнения при любом a; $x = 1$ — корень при $a \leqslant 1$.

Ответ: Если $a < 1$, то $x = a$ или $x = 1$,
если $a = 1$, то $x = 1$; если $a > 1$, $x = a$.

Задача 3.

Решить уравнение $x + \sqrt{x-1} = a$.

Решение.

Очевидно, что $x \geqslant 1$. Имеем $\sqrt{x-1} = a - x$, а значит, $a \geqslant x$. Далее, $x - 1 = a^2 - 2ax + x^2$,

$$x_{1,2} = \frac{2a + 1 \pm \sqrt{4a-3}}{2} \leqslant a \quad \left(a \geqslant \frac{3}{4}\right).$$

Значит, $2a + 1 \pm \sqrt{4a-3} \leqslant 2a$, откуда

$$1 \pm \sqrt{4a-3} \leqslant 0, \quad 4a - 3 = 1, \quad a = 1.$$

Ответ: Если $a < 1$ — решений нет;
если $a \geqslant 1$ — единственное решение $x = \frac{2a + 1 - \sqrt{4a-3}}{2}$.

Задача 4.

Решить уравнение $\sqrt{x-a} = \sqrt{2x-1+a}$.

Решение.

Уравнение имеет смысл, если $\begin{cases} x \geqslant a, \\ x \geqslant \dfrac{1-a}{2}. \end{cases}$

Имеем $x - a = 2x - 1 + a$, $x = 1 - 2a$. Должно быть

$$1 - 2a \geqslant a, \quad a \leqslant \frac{1}{3},$$

$$1 - 2a \geqslant \frac{1-a}{2}, \quad a \leqslant \frac{1}{3}.$$

Значит, $a \leqslant \frac{1}{3}$.

Ответ: При $a \leqslant \frac{1}{3}$ уравнение имеет единственное решение;

при $a > \frac{1}{3}$ — решений нет.

Задача 5.

Решить уравнение $x - \sqrt{x^2 + a^2 + 1} = a$.

Решение.

Имеем $\sqrt{x^2 + a^2 + 1} = x - a$, значит, $x \geqslant a$ и

$x^2 + a^2 + 1 \geqslant 0$ (второе условие выполнено всегда).

При $x \geqslant a$ данное уравнение эквивалентно уравнению

$$x^2 + a^2 + 1 = x^2 - 2ax + a^2, \; 2ax = -1,$$

$$\text{если } a \neq 0, \text{ то } x = -\frac{1}{2a} > a,$$

$$\frac{1 + 2a^2}{2a} < 0, \quad a < 0.$$

Значит, если $a < 0$, то $x = -\frac{1}{2a}$; если $a \geqslant 0$, то уравнение решений не имеет.

Задача 6.

При каких a уравнение $\sqrt{x+a} = x$ имеет два корня?

Решение.

Заданное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x + a = x^2. \end{cases}$$

Решая уравнение $x^2 - x - a = 0$, получаем два корня:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Поскольку $1 + 4a > 0$ и $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \geqslant 0$, то $-\dfrac{1}{4} < a \leqslant 0.$

Ответ: $-\dfrac{1}{4} < a \leqslant 0.$

Задача 7.

Решить уравнение $\sqrt{x-a} = \sqrt{x} - a.$

Решение.

Уравнение имеет смысл, если $x \geqslant a$, $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant a$. Имеем:

$$x - a = x + a^2 - 2a\sqrt{x}.$$

Если $a = 0$, то решением является $x \geqslant 0$. Если $a \neq 0$, имеем $\sqrt{x} = \dfrac{a+1}{2}$, $\sqrt{x} \geqslant a$, поэтому $\dfrac{a+1}{2} \geqslant a$, откуда $a \leqslant 1$, таким образом, при $a > 1$ — решений нет.

$$\sqrt{x} \geqslant 0, \quad \frac{a+1}{2} \geqslant 0, \quad a \geqslant -1,$$

таким образом, при $a \leqslant -1$ — решений нет.

При $-1 \leqslant a \leqslant 1$, $a \neq 0$ имеем: $x = \dfrac{(a+1)^2}{4}$. Проверкой устанавливаем выполнение условий.

Ответ: При $a^2 > 1$ решений нет; при $0 < a^2 < 1$ $x = \dfrac{(a+1)^2}{4}$; при $a = 0$ $x \in [0;\ \infty[$.

Задача 12.

Решить уравнение $\sqrt{2\,|x| - x^2} = a$.

Решение.

При $a < 0$ решений, очевидно, нет.

При $a = 0$ $2\,|x| - x^2 = 0$, $|x|\,(2 - |x|) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

При $a > 0$ имеем

$$\begin{cases} 2\,|x| - x^2 \geqslant 0, \\ 2\,|x| - x^2 = a^2 \end{cases} -$$

при удовлетворении уравнению система неравенств тоже удовлетворена.

$$|x|^2 - 2\,|x| + a^2 = 0,\ \frac{D}{4} = 1 - a^2.$$

Учитывая $a > 0$, получаем:
при $0 < a < 1$

$$|x|_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2}\,;\ x_{1,2} = \pm\,(1 + \sqrt{1 - a^2});$$

$$|x|_2 = 1 - \sqrt{1 - a^2};$$

поскольку $0 < 1 - a^2 < 1$, то

$$0 < \sqrt{1 - a^2} < 1 \text{ и } |x|_2 > 0,\ x_{3,4} = \pm\,(1 - \sqrt{1 - a^2})$$

(очевидно все 4 решения различны).

При $a = 1$ $|x| = 1$, $x_{1,2} = \pm\,1$; при $a > 1$ решений нет.

Ответ: при $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\,2$; при $0 < a < 1$ $x_{1,2,3,4} = \pm\,1 \pm \sqrt{1 - a^2}$; при $a = 1$ $x_{1,2} = \pm\,1$; при $a > 1$ решений нет.

Задача 13.

Решить уравнение $\sqrt{2x - 1} - x + a = 0$.

Решение.

Исходное уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} x \geqslant a, \\ x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 2ax + a^2 = 2x - 1, \ D = 8a. \end{cases}$$

При $a < 0$ — решений нет.

При $a \geqslant 0$ $x_1 = a + 1 + \sqrt{2a}$, $x_2 = a + 1 - \sqrt{2a}$.

Имеем $a + 1 + \sqrt{2a} \geqslant \frac{1}{2}$, откуда

$$a + \frac{1}{2} + \sqrt{2a} \geqslant 0 \ (a \geqslant 0), \ a + 1 + \sqrt{2a} \geqslant a, \text{ откуда}$$

$$1 + \sqrt{2a} \geqslant 0, \ \ a + 1 - \sqrt{2a} \geqslant \frac{1}{2}, \text{ откуда}$$

$$a - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a} + \frac{1}{2} \geqslant 0, \text{ откуда } \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geqslant 0.$$

$$a + 1 - \sqrt{2a} \geqslant a, \ \sqrt{2a} \leqslant 1, \ 2a \leqslant 1, \ a \leqslant \frac{1}{2}.$$

Итак, при $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ $x_2 = a + 1 - \sqrt{2a}$ — корень уравнения. При $a > \frac{1}{2}$ $x_2 = a + 1 - \sqrt{2a}$ — не корень уравнения.

Ответ: При $a < 0$ уравнение решений не имеет;

при $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ $x_{1,2} = a + 1 \pm \sqrt{2a}$;

при $a > \frac{1}{2}$ $x = a + 1 + \sqrt{2a}$.

Задача 14.

Решить уравнение $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$.

Решение.

Очевидно, что $x \geqslant -1$ и $x^2 + ax - 2a \geqslant 0$. Имеем

$$x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1,$$

$$x(a - 2) = 2a + 1.$$

Если $a \neq 2$, то $x = \dfrac{2a + 1}{a - 2}$.

Должно быть

$$\frac{2a+1}{a-2} \geqslant -1, \text{ или } \frac{3a-1}{a-2} \geqslant 0,$$

$$a > 2, \quad a \leqslant \frac{1}{3}.$$

Ответ: Если $a \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left]2; \infty\right[$, то $x = \frac{2a+1}{a-2}$; если $a \in \left]\frac{1}{3}; 2\right]$, уравнение решений не имеет.

Задача 15.

Решить уравнение $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$.

Решение.

Заданное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x + a \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ a - \sqrt{x} \geqslant 0, \\ x + a = a^2 - 2a\sqrt{x} + x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant a^2, \\ 2a\sqrt{x} = a^2 - a. \end{cases}$$

Если $a = 0$, то уравнение имеет корень $x = 0$. При $a \neq 0$ имеем $2a\sqrt{x} = a^2 - a$, или $2\sqrt{x} = a - 1$, значит, при $a \geqslant 1$ $x = \frac{(a-1)^2}{4}$. Поскольку $\frac{(a-1)^2}{4} \leqslant a^2$, то $a \geqslant \frac{1}{3}$ и $a \leqslant -1$.

Ответ: Если $a = 0$, $x = 0$; если $a \geqslant \frac{1}{3}$, $x = \frac{(a-1)^2}{4}$; при других a решений нет.

Задача 18.

Решить уравнение $\sqrt{3x-2} = x + a$.

Решение.

Обозначим $y = \sqrt{3x-2}$, тогда $x = \frac{1}{3}(y^2+2)$; $y \geqslant 0$.

Для y получаем уравнение $y^2 - 3y + 3a + 2 = 0$, $D \geqslant 0$, откуда $a \leqslant \frac{1}{12}$.

По теореме Виета

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 3, \\ y_1 y_2 = 3a + 2. \end{cases}$$

Следовательно, оба корня не могут быть отрицательными.

При $a = \frac{1}{12}$ получаем одно решение: $y = \frac{3}{2}$.

При $-\frac{2}{3} \leqslant a < \frac{1}{12}$ — два решения.

$$y_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{1 - 12a}); \; y_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 - 12a}).$$

При $a < -\frac{2}{3}$ одно решение: $y = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{1 - 12a})$.

Итак, если $a < -\frac{2}{3}$, то $x = \frac{1}{2}(3 - 2a + \sqrt{1 - 12a})$.

Если $-\frac{2}{3} \leqslant a < \frac{1}{12}$, то

$$x_1 = \frac{1}{2}(3 - 2a - \sqrt{1 - 12a}), \; x_2 = \frac{1}{2}(3 - 2a + \sqrt{1 - 12a});$$

если $a = \frac{1}{12}$, то $x = \frac{17}{12}$; если $a > \frac{1}{12}$, то решений нет.

Задача 19.

Решить уравнение

$$\sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}} = a - x. \qquad (1)$$

Решение.

Очевидно, что $x \leqslant a$. Возведем обе части уравнения (1) в квадрат. Получим совокупность систем, равносильную исходному уравнению

$$\begin{cases} x = 0, \\ a - x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} = 2a - x, \\ a - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Первая система совместна при $a \geqslant 0$, Вторая — равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = (2a - x)^2, \\ 2a - x \geqslant 0, \\ a - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: При $a = 0$ $x \in \,]-\infty;\ 0[$;

при $a \in \,]0;\ \infty[$ $x = 0$; $x = \dfrac{3a}{4}$;

при $a \in \,]-\infty;\ 0[$ решений нет.

14. ПАРАМЕТРЫ. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

Задача 1.

При каких значениях k неравенство

$$(k-1)\,x + 2k + 1 > 0$$

верно при всех x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 3$?

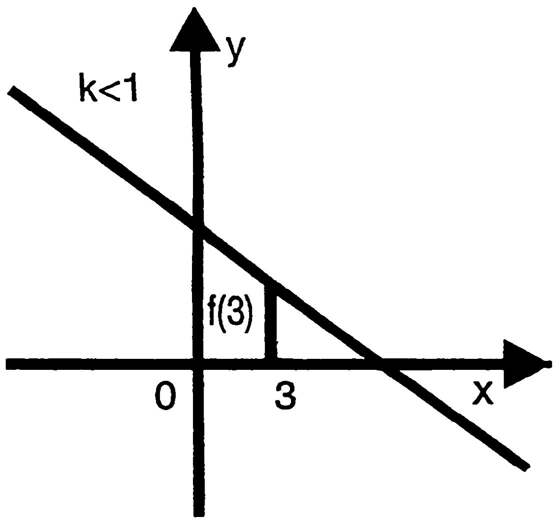


Рис. 14.1 (*а*)

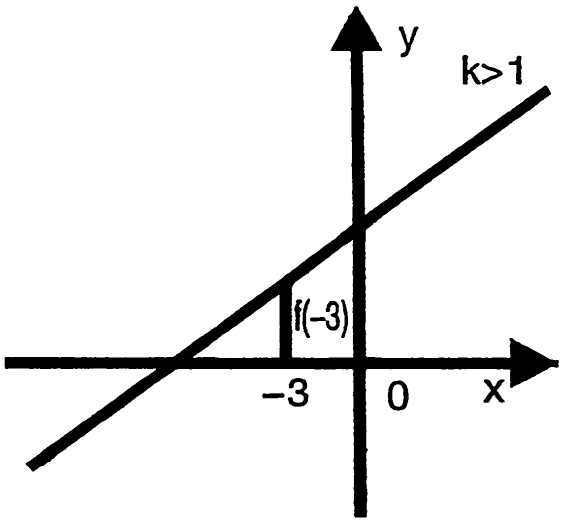


Рис. 14.1 (*б*)

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = (k-1)\,x + 2k + 1$.

Эта функция линейная, графиком ее при любом k будет прямая (рис. 14.1 (*а*)) и рис. 14.1 (*б*)).

Очевидно, при $k = 1$ неравенство выполнено.

Из рисунка видно, что имеет место совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k > 1, \\ f(-3) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} k < 1, \\ f(3) > 0, \end{cases} \\ k = 1, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k > 1, \\ 4 - k > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} k < 1, \\ 5k - 2 > 0, \end{cases} \\ k = 1, \end{array}\right. \text{, откуда}$$

Ответ: $0{,}4 < k < 4$.

Задача 2.

При каких значениях параметра k корни уравнения $x^2 + (2k+6)\,x + 4k + 12 = 0$ будут больше (-1)?

Решение.

Обозначим $f(x) = x^2 + (2k + 6)x + 4k + 12$.

Сделаем рисунок к задаче. С его помощью составим систему неравенств (рис. 14.2).

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(-1) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > -1. \end{cases}$$

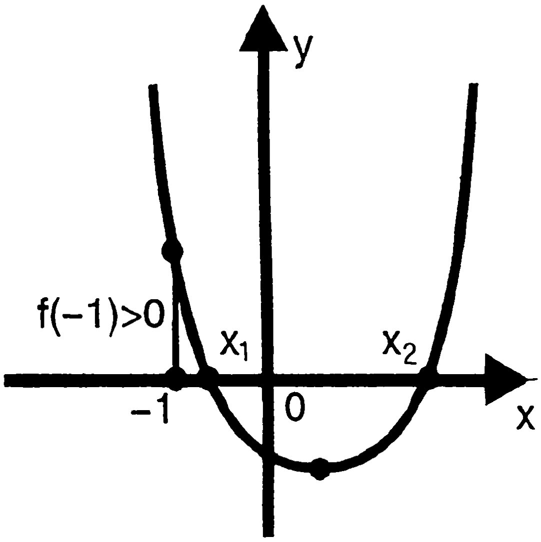


Рис. 14.2

Объясним составление системы. Первое неравенство ($D \geqslant 0$) очевидно. Второе неравенство иллюстрирует график: оно есть требование того, чтобы знак $f(-1)$ и знак $f(x)$ совпадали. Третье неравенство выражает положение абсциссы вершины параболы — графика заданного квадратного трехчлена.

Имеем:

$$\begin{cases} k^2 + 2k - 3 \geqslant 0, \\ 2k + 7 > 0, \\ -\dfrac{(2k+6)}{2} > -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k \leqslant -3, \\ k \geqslant +1, \end{array}\right. \\ k > -\dfrac{7}{2}, \\ k < -2, \end{cases}$$

откуда $-\dfrac{7}{2} < k \leqslant -3$.

Ответ: $-\dfrac{7}{2} < k \leqslant -3$.

Задача 3.

При каких значениях m трехчлен $x^2 - mx + m - 1$ отрицателен при всех значениях x, лежащих на промежутке $(3;\ 4)$?

Решение.

Обозначим $P(x) = x^2 - mx + m - 1$. Поскольку коэффициент при x^2 равен $1 > 0$, то задаче будет соответствовать парабола, изображенная на рис. 14.3.

Имеем систему

$$\begin{cases} D > 0, \\ P(3) \leqslant 0, \\ P(4) \leqslant 0, \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} (m-2)^2 > 0, \\ 9 - 3m + m - 1 \leqslant 0, \\ 16 - 4m + m - 1 \leqslant 0, \end{cases}$$

откуда $m \geqslant 5$.

Ответ: $m \geqslant 5$.

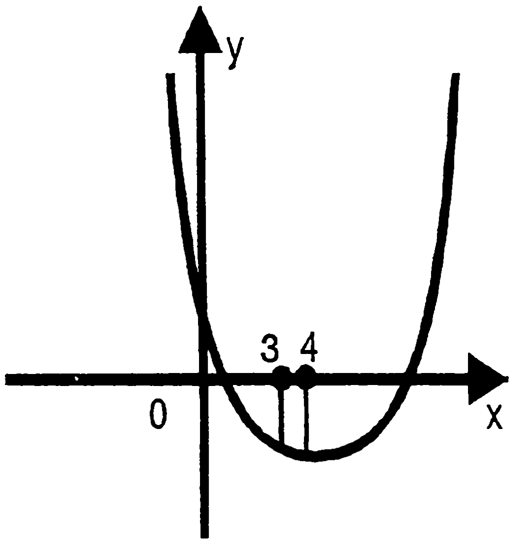


Рис. 14.3

Задача 4.

При каких значениях параметра a из неравенства $ax^2 - 2(a-1)x + a < 0$ следует неравенство $x < 4$?

Решение.

Обозначим $f(x) = ax^2 - 2(a-1)x + a$. В зависимости от знака a и D возможно три положения параболы $y = f(x)$.

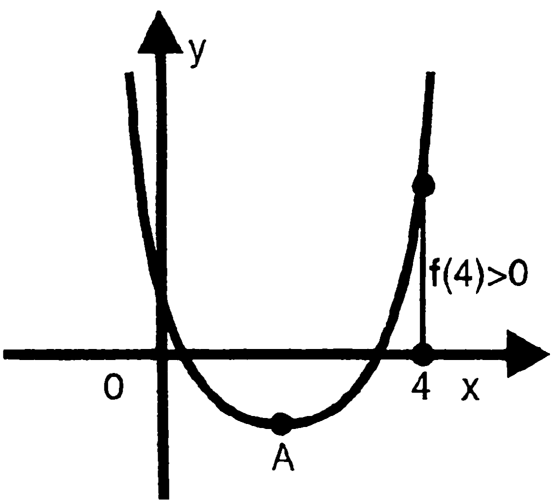


Рис. 14.4

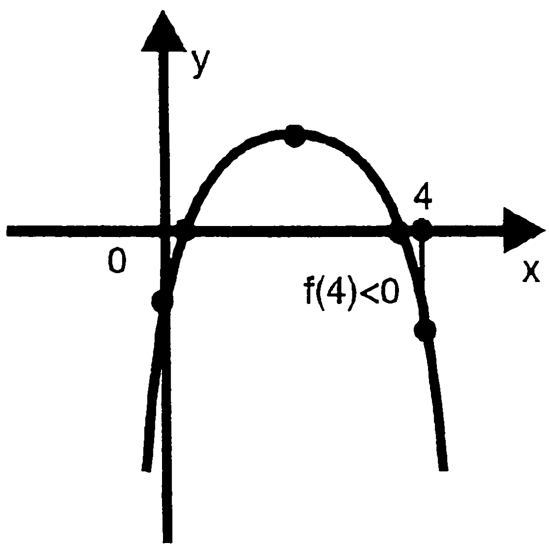


Рис. 14.5

Поскольку по условию из неравенства $f(x)<0$ следует неравенство $x<4$, то график функции $f(x)$ расположен так, как на рисунках 14.4 и 14.5, а значит, $a>0$.

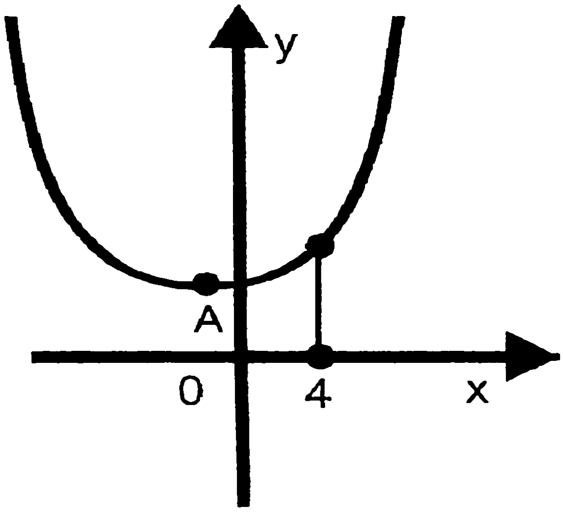


Рис. 14.5 (*a*)

Можно составить систему неравенств (при $D>0$ и $a>0$, $D<0$ и $a>0$). Имеем первую систему (рис. 14.5 (*a*)):

$$\begin{cases} a>0, \\ D>0, \\ f(4)>0, \\ x_0=\dfrac{-b}{2a}<4, \end{cases} \text{, или } \begin{cases} a>0, \\ 4(a-1)^2-4a^2>0, \\ 16a-8(a-1)+a>0, \\ \dfrac{a-1}{a}<4, \end{cases}$$

откуда $0<a<\frac{1}{2}$. (1)

При $a=0$ $f(x)<0$, $2x<0$, $x<0$.

Составим вторую систему:

$$\begin{cases} D\leqslant 0, \\ a>0, \end{cases} \quad a\geqslant\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Ответ: $a\in[0;\infty[$.

Задача 5.

При каком значении параметра a неравенство

$$(a-1)x^2-2x-a>0$$

справедливо при любом $x>3$?

Решение.

Дискриминант квадратного трехчлена $(a-1)x^2-2x-a$ положителен. Пусть $f(x)=(a-1)x^2-2x-a$. Если $f(x)>0$ при $x>3$, то график $f(x)$ должен быть расположен так и только так, как показано на рисунке 14.6.

$$\begin{cases} a - 1 > 0, \\ f(3) \geqslant 0, \\ x_0 \leqslant 3, \end{cases} \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} a > 1, \\ 9(a-1) - 6 - a \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{a-1} \leqslant 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 1, \\ a \geqslant \dfrac{15}{8}, \\ \left[\begin{array}{l} a \geqslant \dfrac{4}{3}, \\ a < 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a \geqslant \frac{15}{8}.$$

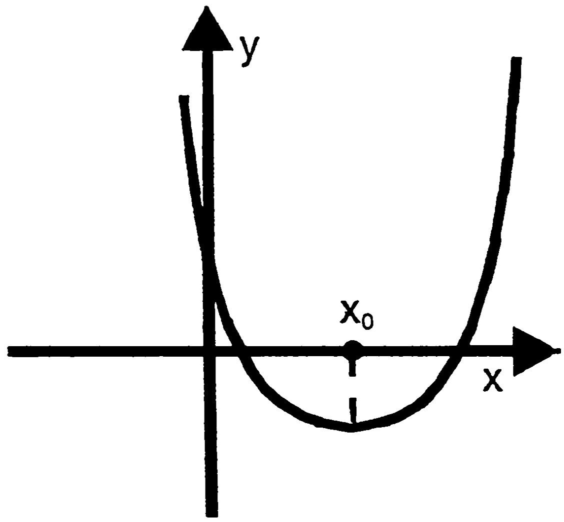


Рис. 14.6

Ответ: $a \geqslant \dfrac{15}{8}$.

Задача 6.

Найти количество решений уравнения $|x| = a$ в зависимости от параметра a.

Решение.

Строим графики $y = |x|$ и $y = a$ (рис. 14.7)

$y = a > 0$, $y = a = 0$, $y = a < 0$.

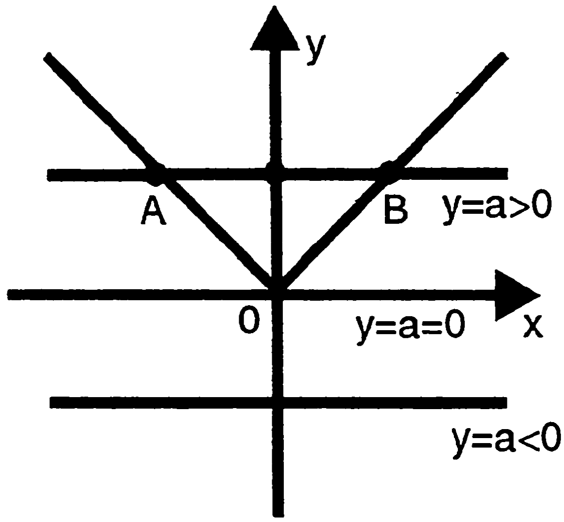


Рис. 14.7

Очевидно, что при $a > 0$ уравнение имеет два решения (точки A и B).

При $a = 0$ — одно решение (точка 0) и при $a < 0$ — нет решений.

Задача 7.

При каком значении параметра a уравнение

$$|x^2 - 2x - 3| = a$$

имеет три решения?

Решение.

Из графика (рис. 14.8) видно, что уравнение

$$|x^2 - 2x - 3| = a$$

имеет три решения при $x = 1$, $a = 4$.

Ответ: $a = 4$.

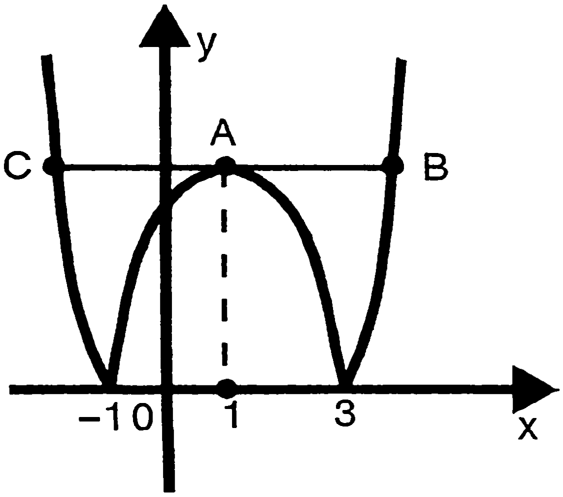


Рис. 14.8

Задача 8.

Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x + 1| = ax$?

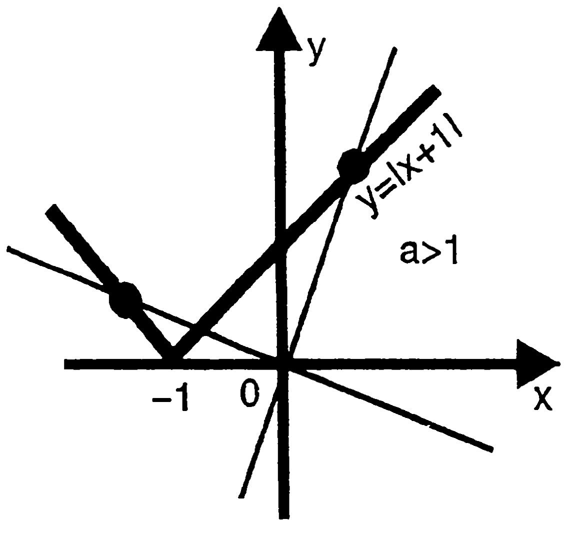


Рис. 14.9

Решение.

Начертим графики функций $y = |x + 1|$ и $y = ax$ при разных значениях a (рис. 14.9).

Ответ: 1) Уравнение имеет одно решение при $a = 0$; $a > 1$; $a \leqslant -1$.

2) Уравнение имеет два решения при $-1 < a < 0$.

3) Уравнение не имеет решений при $0 < a \leqslant 1$.

Задача 9.

При каких k число 3 заключено между корнями уравнения

$$kx^2 - 2(k - 1)x - 4 = 0?$$

Решение.

Возможны в зависимости от знака k расположение двух парабол (рис. 14.10 и 14.11). Обозначим

$$f(x) = kx^2 - 2(k - 1)x - 4.$$

Эти два случая можно объединить системой:

$$\begin{cases} D > 0, \\ k \cdot f(3) < 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} k^2 - 2k + 1 + 4k > 0, \\ k(k \cdot 3^2 - 2(k - 1)3 - 4) < 0, \end{cases}$$

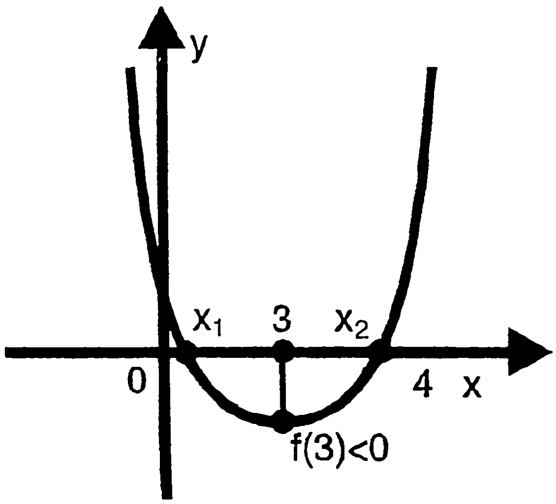


Рис. 14.10

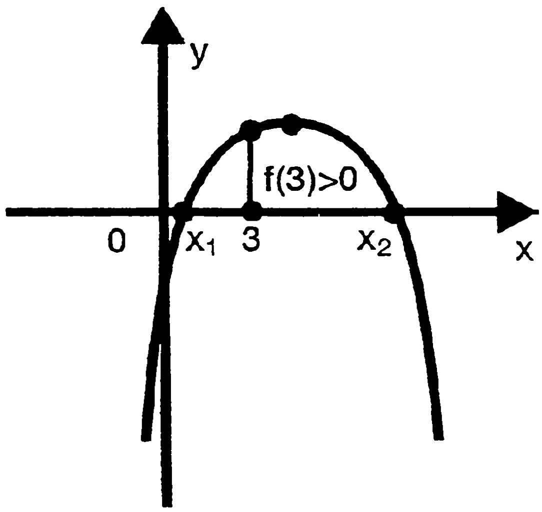


Рис. 14.11

откуда $0 < k < -\frac{2}{3}$.

Ответ: $0 < k < -\frac{2}{3}$.

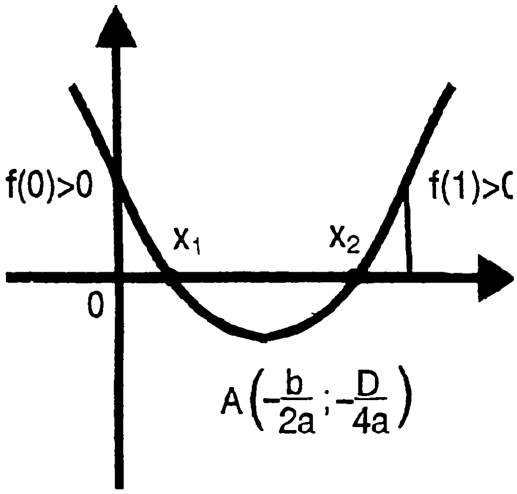


Рис. 14.12

Задача 10.

При каких a корни уравнения

$$2x^2 - (2a - 5)x + (a - 3) = 0$$

заключены между числами 0 и 1?

Решение.

График параболы

$$y = 2x^2 - (2a - 5)x + (a - 3)$$

схематично изображен на рис. 14.12. Обозначим

$$f(x) = 2x^2 - (2a - 5)x + (a - 3).$$

Имеет место система неравенств:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(0) > 0, \\ f(1) > 0, \\ 0 < \dfrac{-b}{2a} < 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4a^2 - 28a + 49 \geqslant 0, \\ (a - 3) > 0, \\ 2 - (2a - 5) + a - 3 > 0, \\ 0 < \dfrac{2a - 5}{2 \cdot 2} < 1. \end{cases}$$

Ответ: $3 < a < 4$.

Задача 11.

При каких значениях параметра a из неравенства $x^2 - 4ax + 3 < 0$ следует неравенство $1 \leqslant x \leqslant 2$?

Решение.

Условие задачи можно сформулировать следующим образом: при каких значениях параметра a любое решение неравенства $x^2 - 4ax + 3 \leqslant 0$ удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant x \leqslant 2$? Сделаем рисунок к задаче: (рис. 14.13). Обозначим $f(x) = x^2 - 4ax + 3$.

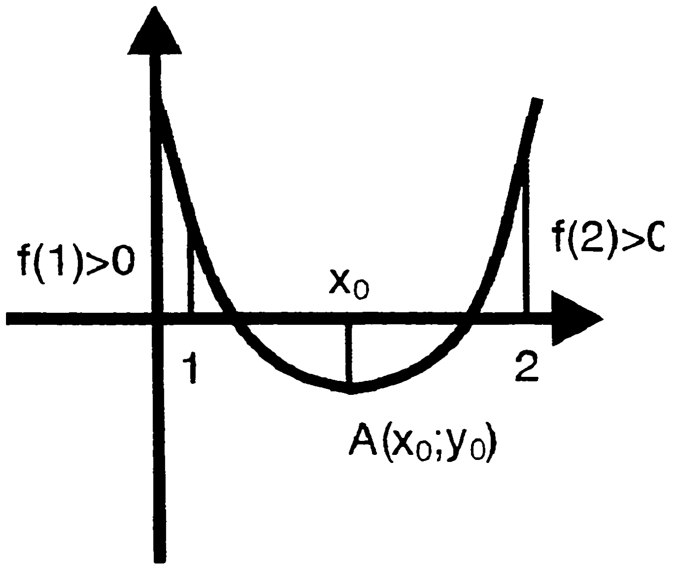


Рис. 14.13

Имеем систему

$$\begin{cases} f(1) \geqslant 0, \\ f(2) \geqslant 0, \\ 1 < 2a < 2, \\ D \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4 - 4a \geqslant 0, \\ 7 - 8a \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{2} < a < 1, \\ 16a^2 - 12 \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \leqslant 1, \\ a \leqslant \dfrac{7}{8}, \\ \dfrac{1}{2} < a < 1, \\ \left[\begin{array}{l} a \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{array} \right. \end{cases}$$

или $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{7}{8}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{7}{8}$.

Задача 12.

Найти все значения параметра a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству

$ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$,

по модулю не превосходит двух.

Решение.

Задача аналогична предыдущей. Обозначим

$$f(x) = ax^2 + (1 + a^2)\,x - a.$$

Сделаем рисунок к задаче (рис. 14.14). Условию задачи удовлетворяет трехчлен $f(x)$, если $a < 0$.

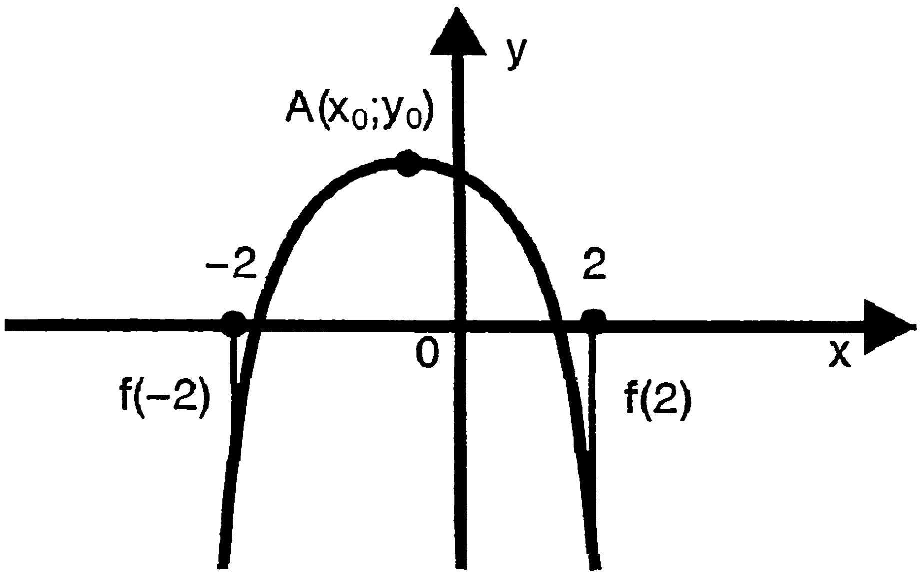


Рис. 14.14

Имеем систему

$$\begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ f(-2) < 0, \\ f(2) < 0, \\ -2 < -\dfrac{1 - a^2}{2a} < 2, \end{cases} \quad \text{откуда } -2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-2 \leqslant a \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

Задача 13.

При каких a корни уравнения $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$ лежат между корнями уравнения $x^2 - 2(a + 1)\,x + a(a - 1) = 0$?

Решение.

Обозначим x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-2x-a^2+1 = 0$; x_1' и x_2' — корни уравнения $x^2 - 2(a + 1)\,x + a(a - 1) = 0$.

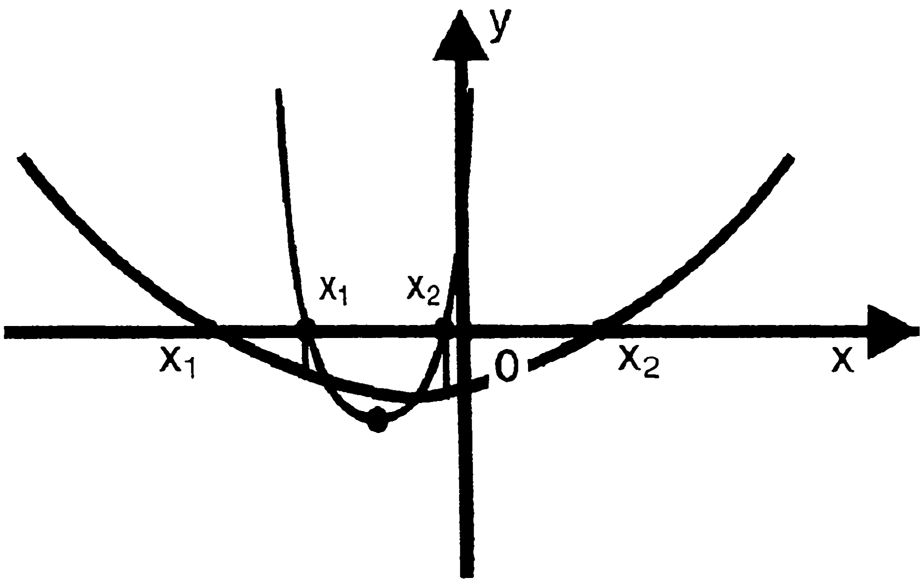


Рис. 14.15

Левую часть последнего уравнения обозначим $P(x)$. Имеет место ситуация, изображенная на рисунке (рис. 14.15). Обозначим D_1 и D_2 дискриминанты заданных квадратных уравнений. Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} D_1 \geqslant 0, \\ D_2 > 0, \\ P(x_1) < 0, \\ P(x_2) < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 \geqslant 0, \\ 3a + 1 > 0, \\ 3a > -1, \\ (a-1)(4a+1) < 0. \end{cases}$$

Имеем $-\frac{1}{4} < a < 1$.

Ответ: $a \in \left]-\frac{1}{4};\ 1\right[$.

Задача 14.

Решить неравенство $x^2 + 2x + a > 0$.

Решение.

Изобразим множество точек, удовлетворяющее неравенству $x^2 + 2x > -a$ в координатной плоскости (рис. 14.16).

1) при $a > 1$ $x \in R$;

2) при $a = 1$ $x \neq 1$;

3) при $a < 1$ $x < x_1$ и $x > x_2$, где x_1 и x_2 — соответственно меньший и больший корни уравнения $x^2 + 2x + a = 0$.

Итак,

Ответ: при $a > 1$ $x \in R$;
при $a = 1$ $x \neq 1$;
при $a < 1$ $x < -1 = \sqrt{1 - a}$ и $x > -1 + \sqrt{1 - a}$.

Задача 15.

Решить уравнение

$$\sqrt{4x - x^2} = a + 1. \quad (1)$$

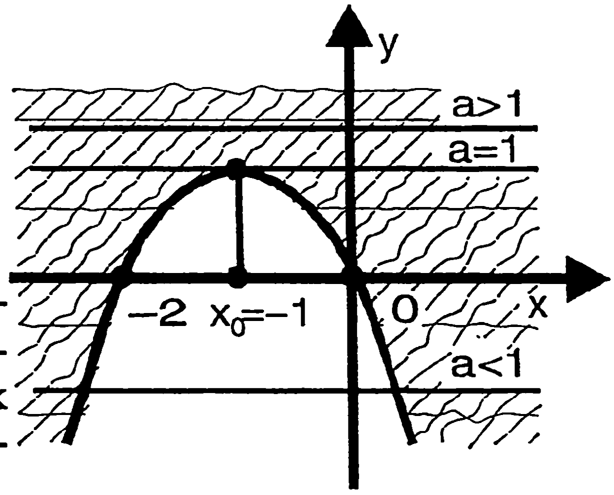


Рис. 14.16

Решение.

Ясно, что $x \in [0;\ 4]$, график этого уравнения расположен выше прямой $a = -1$, так как $a + 1 \geqslant 0$ и между прямыми $x = 0$, $x = 4$ (рис. 14.17). Преобразуем уравнение (1):

$$(x - 2)^2 + (a + 1)^2 = 4. \quad (2)$$

Уравнение (2) есть уравнение окружности с центром в точке $(+2;\ -1)$ и радиусом 2.

При $a \in\ ]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, \infty[$ — уравнение (1) решений не имеет. При $c \in [-1, 1[$ прямая $a = c$ пересекает график в двух точках:

$$x_1 = 2 + \sqrt{3 - a^2 - 2a}\ ; \quad x_2 = 2 - \sqrt{3 - a^2 - 2a}.$$

При $a = 1$ $x = 2$.

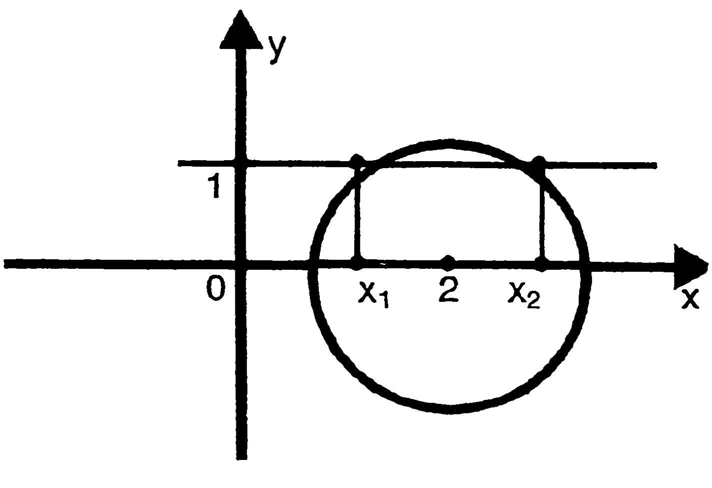


Рис. 14.17

Ответ: при
$a \in [-1, 1[$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3 - a^2 - 2a}$;
при $a = 1$ $x = 2$;
при других a решений нет.

15. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Задача 1.

Решить уравнение

$$\frac{x}{x^2+7x+a} = \frac{x^2+8x+a}{x^2+6x+a} \quad (a \in R).$$

Решение.

Обозначив $x^2 + 7x + a$ через y, будем иметь:

$$\frac{x}{y} = \frac{y+x}{y-x},$$

откуда $xy - x^2 = y^2 + xy$, т.е. $x = y = 0$.

Однако это равенство невозможно, так как в знаменателе стоит выражение $y - x$. Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Задача 2.

Решить уравнение $x^4 - 6ax^2 + 8a\sqrt{ax} - 3a^2 = 0$.

Решение.

$$x^4 - 6ax^2 + 8a\sqrt{a}\cdot x - 3a^2 = x^4 - \sqrt{a}\,x^3 + \sqrt{a}\,x^3 - ax^2 -$$

$$- 5ax^2 + 5a\sqrt{a}\,x + 3a\sqrt{a}\,x - 3a^2 =$$

$$= (x^3 + \sqrt{a}\,x^2 - 5ax + 3a\sqrt{a})\cdot(x - \sqrt{a});$$

$$x_1 = \sqrt{a}.$$

Из второго уравнения третьей степени легко получим:

$$x_2 = x_3 = \sqrt{a}, \quad x_4 = -3\sqrt{a}.$$

Задача 3.

$$\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1.$$

Решение.

Ясно, что $x \neq 0$. Имеем $\dfrac{2}{3x - 1 + \dfrac{2}{x}} - \dfrac{7}{3x + 5 + \dfrac{2}{x}} = 1.$

Делаем замену: $3x - 1 + \dfrac{2}{x} = t$. Тогда $\dfrac{2}{t} - \dfrac{7}{t+6} = 1$.

Далее находим t и x. Окончить самостоятельно.

Задача 4.

$$\frac{(x^2 - x + 1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{9}{5}.$$

Решение.

$$5(x^2 - x + 1)^2 = 9(x-1)^2(x^2+1), \text{ или}$$

$$5(x^2 - x + 1)^2 = 9(x^2 - 2x + 1)(x^2+1).$$

Обе части этого уравнения делим на $x \neq 0$. Получим:

$$5\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = 9\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Делаем замену: $x - 1 + \dfrac{1}{x} = t$. Тогда

$$5t^2 = 9(t-1)(t+1).$$

Дальнейшее очевидно. Окончить самостоятельно.

Задача 5.

$$a^4\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^4\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^4\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^4.$$

Решение.

Уравнению очевидно удовлетворяют $x = a$, $x = b$ и $x = c$. Коэффициент при x^4 равен 1, а при x^3 равен нулю; но сумма корней равна коэффициенту при x^3, т.е. 0, а потому четвертый корень будет $-a - b - c$. Следовательно, корни уравнения будут:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = -(a + b + c).$$

Задача 6.

$$x^7 + 7^7 = (x+7)^7.$$

Решение.

Раскладываем $(x+7)^7$ по биному Ньютона:

$$(x+7)^7 = x^7 + 7^1x^6 + 22\cdot 7^2x^5 + 41\cdot 7^3\cdot x^4 + 41\cdot 7^4\cdot x^3 + $$
$$+ 22\cdot 7^5\cdot x^2 + 7^6\, x + 7^7.$$

Очевидно, что $x_1 = 0$. Сокращая на $7^2\,x$, имеем

$$x^5 + 22x^4 + 41\cdot 7x^3 + 41\cdot 7^2x^2 + 22\cdot 7^3x + 7^5 = 0;$$

$$7^5 + x^5 + 22x\,(7^3 + x^3) + 41\cdot 7x^2\,(x+7) = 0.$$

Отсюда видно, что $x_2 = -7$. Получаем

$$x^4 + 15x^3 + 7\cdot 26x^2 + 7^2\cdot 15x + 7^4 = 0.$$

Делим на $x^2 \neq 0$.

$$x^2 + 15x + 7\cdot 26 + \frac{7^2\cdot 15}{x} + \frac{7^4}{x^2} = 0;$$

$$x^2 + \frac{7^4}{x^2} + 15\left(\frac{7^2}{x} + x\right) + 7\cdot 26 = 0;$$

$$\frac{7^2}{x} + x = a;\quad a^2 + 15a + 7\cdot 12 = 0.$$

Полученное уравнение решений в действительных числах не имеет.

Задача 7.

$$64\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 - \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^3 = 63.$$

Решение.

$$a = 4\,\frac{x+3}{x-1},\quad b = \frac{x+3}{x+2}.$$

Тогда уравнение имеет вид $a^3 - b^3 = 63$. Кроме того,

$$a - b = (x+3)\left(\frac{4}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) = \frac{3\,(x+3)^2}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{4}\,ab,$$

так что если $a - b = y$, то

$$63 = a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = y^3 + 4y^2.$$

Так как число 3 является корнем полученного уравнения, то оно может быть записано в виде:

$$(y - 3)(y^2 + 7y + 21) = 0,$$

и, следовательно, других корней не имеет. Теперь из уравнения $\frac{3(x+3)^2}{(x-1)(x+2)} = 3$ получаем единственный корень исходного уравнения $x = -\frac{11}{5}$.

Задача 8.

$$(x + 1)^2 + (x + 2)^3 + (x + 3)^4 = 2.$$

Решение.

Положим $x + 2 = y$, тогда

$(y - 1)^2 + y^3 + (y + 1)^4 = 2$, или $y^4 + 5y^3 + 7y^2 + 2y = 0$.

Отсюда $y_1 = 0$. Далее, группируя, получим:

$$y^3 + 5y^2 + 7y + 2 = (y^3 + 2y^2) + (3y^2 + 6y) +$$
$$+ (y + 2) = (y + 2)(y^2 + 3y + 1) = 0, \text{ откуда}$$

$$y_1 = -2;\quad y_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ итак,}$$

$$x_1 = -2;\quad x_2 = -4;\quad x_{3,4} = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Задача 9.

Решить уравнение

$$a(a + x)(a + 2x)(a + 3x) = b(b + x)(b + 2x)(b + 3x).$$

Решение.

Замена $y = a + 1{,}5x$, $z = b + 1{,}5x$.

$$(y - 1{,}5x)(y + 1{,}5x)(y - 0{,}5x)(y + 0{,}5x) =$$
$$= (z - 1{,}5x)(z + 1{,}5x)(z - 0{,}5x)(z + 0{,}5x) =$$

$$= \left(y^2 - \frac{9}{4}x^2\right)\left(y^2 - \frac{1}{4}x^2\right) = \left(z^2 - \frac{9}{4}x^2\right)\left(z^2 - \frac{1}{4}x^2\right).$$

Замена $y^2 - \frac{5}{4}x^2 = m,\ \ z^2 - \frac{5}{4}x^2 = n.$

$$(m - x^2)(m + x^2) = (n - x^2)(n + x^2);$$

$$m^2 - x^4 = n^2 - x^4;\quad m^2 = n^2;$$

$$(m - n)(m + n) = 0.$$

а) $m = n \Rightarrow a = b \Rightarrow x \in\ ]-\infty;\ +\infty[.$

б) $m = -n;\ y^2 - \frac{5}{4}x^2 = \frac{5}{4}x^2 - z^2;$

$$4x^2 + 6\,(a + b)\,x + 2\,(a^2 + b^2) = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-3\,(a + b) \pm \sqrt{18ab + a^2 + b^2}}{4},$$

при $18ab + a^2 + b^2 \geqslant 0.$

Ответ: $a = b,\ \ x \in\ ]-\infty;\ +\infty[;$

$$a \neq b,\ \ x = \frac{-3\,(a + b) \pm \sqrt{18ab + a^2 + b^2}}{4}.$$

Задача 10.

Решить уравнение $x^4 + 8x - 7 = 0.$

Решение.

Последовательно имеем

$$(x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^2 - 8x + 8) = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - 2\,(x - 2)^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1 - \sqrt{2}(x - 2))(x^2 + 1 + \sqrt{2}(x - 2)) = 0,$$

откуда

$$x^2 - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1 = 0 \text{ или } x^2 + \sqrt{2}x \cdot 2\sqrt{2} + 1 = 0.$$

Дискриминант первого уравнения отрицателен, и следовательно, заданное уравнение имеет два действительных корня: $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{2} \pm \sqrt{8\sqrt{2} - 2}\,).$

Задача 11.

$$x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} = 40.$$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде:

$$\frac{x^4 + 18x^3 + 162x^2}{(9+x)^2} = 40, \text{ или}$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2 + 18\left(\frac{x^2}{9+x}\right) - 40 = 0,$$

$$y^2 + 18y - 40 = 0; \ \frac{x^2}{9+x} = 2; \ \frac{x^2}{9+x} = -20.$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}.$$

Задача 12.

$$x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0.$$

Решение.

Обозначим $\sqrt{6}$ через a и представим данное уравнение в виде: $x^6 - (a^2 + 1)\,x^2 + a = 0$. Решим его относительно a как квадратное. Тогда

$$a_1 = x^2; \ \ a_2 = \frac{1 - x^4}{x^2}.$$

Другими словами, данное уравнение можно переписать в виде:

$$(a - x^2)\left(a - \frac{1 - x^4}{x^2}\right) = 0,$$

после чего задача сводится к решению уравнений

$$x^2 = a; \ \ x^4 + ax^2 - 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{6}; \ \ x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}}.$$

Задача 13.

Решить уравнение $(x^2 - 16)(x - 3)^2 + 9x^2 = 0$.

Решение.

Очевидно, что $x = 3$ не является корнем данного уравнения. Разделив обе части уравнения на $(x - 3)^2$, получим

$$x^2 + \frac{(3x)^2}{(x-3)^2} = 16.$$

Отсюда

$$\left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 = 16 + 6\frac{x^2}{x-3}, \text{ или } \frac{x^2}{x-3} = 16 + 6 \cdot \frac{x^2}{x-3}.$$

Выполнив подстановку $\dfrac{x^2}{x-3} = y$, придем к уравнению

$$y^2 - 6y - 16 = 0, \quad y_1 = 8, \quad y_2 = -2.$$

Теперь нетрудно доказать, что действительных корней уравнение не имеет.

Задача 14.

Решить уравнение $\dfrac{9\,(x^2+3)}{(x+3)^3} = \dfrac{234}{343}$.

Решение.

Умножим обе части уравнения на -2 и прибавим к обеим частям по единице. В результате получим уравнение:

$$\frac{(x+3)^3 - 18\,(x^2+3)}{(x+3)^3} = -\frac{125}{343}.$$

Это уравнение можно представить в таком виде:

$$\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^3 = \left(-\frac{5}{7}\right)^3.$$

Корни этого уравнения найдем, решив следующие два уравнения:

$$\frac{x-3}{x+3} = -\frac{5}{7} \text{ и } \frac{x-3}{x+3} = -\frac{5}{7}\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Это дает нам

$$x_1 = 0{,}5;\quad x_2 = \frac{24 + 35\,i\sqrt{3}}{13};\quad x_3 = \frac{24 - 35\,i\sqrt{3}}{13}.$$

Задача 15.

Решить уравнение $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$.

Решение.

Перепишем данное уравнение так: $x^4 - 4x^3 = 1$. Прибавим к обеим частям по $x^4 + 2x^2$, получим

$$2\,(x^4 - 2x^3 + x^2) = x^4 + 2x^2 + 1,\ \text{или}\ 2x^2\,(x-1)^2 = (x^2+1)^2.$$

Отсюда: $\pm\sqrt{2}\,x\,(x-1) = x^2 + 1$.

Получим два квадратных уравнения:

$$x^2 - \sqrt{2}\,x\,(x-1) + 1 = 0;$$

$$x^2 + \sqrt{2}\,x\,(x-1) + 1 = 0,\ \text{или:}$$

$$(\sqrt{2} - 1)\,x^2 - \sqrt{2}\,x - 1 = 0, \tag{1}$$

$$(\sqrt{2} + 1)\,x^2 - \sqrt{2}\,x + 1 = 0. \tag{2}$$

Решаем уравнение (1):

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2 - \sqrt{2}},\ \text{или:}\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2 - \sqrt{2}}.$$

Уравнение (2) дает:

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-4\sqrt{2} - 2}}{2\,(\sqrt{2} + 1)},\ \text{или:}\ x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{2\sqrt{2} + 1}}{2 + \sqrt{2}}.$$

Мы решим это уравнение независимо от уравнения

$$x^4 + 4x - 1 = 0.$$

Но, сравнивая оба эти уравнения, мы могли бы заметить, что каждое из них получается из другого путем замены x на $\frac{1}{y}$. В самом деле, возьмем уравнение $x^4 + 4x - 1 = 0$. Положим $x = \frac{1}{y}$ и сделаем подстановку. Получим:

$$\frac{1}{y^4} + \frac{4}{y} - 1 = 0, \text{ откуда}$$

$$1 + 4y^3 - y^4 = 0, \text{ или: } y^4 - 4y^3 - 1 = 0,$$

т.е. получили исходное уравнение.

Но из этого следует, что корни одного из них обратны корням другого. Следовательно, мы могли, не решая уравнения исходного, получить его корни, взяв величины, обратные корням уравнения $x^4 + 4x - 1 = 0$.

В этом легко убедиться непосредственно.

Задача 16.

Решить уравнение $x^3 + \dfrac{x^3}{(x-1)^3} + \dfrac{3x^2}{x-1} - 1 = 0.$

Решение.

Обозначив левую часть уравнения через $f(x)$, будем иметь

$$(x-1)^3 f(x) = (x^2 - x)^3 + x^3 + 3x^2 (x-1)^2 -$$

$$- (x-1)^3 = (x^2 - x)^3 + 3(x^2 - x)^2 + 3x^2 - 3x + 1 =$$

$$= (x^2 - x + 1)^3.$$

Поэтому $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$, так что данное уравнение не имеет действительных корней.

Задача 17.

$$x^3 + 6x - 36\sqrt{3} = 0.$$

Решение.

$$x^3 - 24\sqrt{3} + 6x - 12\sqrt{3} = 0;$$

$$x^3 - (2\sqrt{3})^3 + 6(x - 2\sqrt{3}) = 0.$$

Очевидно, что $x_1 = 2\sqrt{3}$. (Проверьте и дорешайте самостоятельно).

Задача 18.

$$x^4 + 4a^3 x - a^4 = 0.$$

Решение.

Имеем $x^4 + 4a^3 x = a^4$. Прибавим по $2a^2 x^2$, получим

$$x^4 + 2a^2 x^2 + 4a^3 x = a^4 + 2a^2 x^2.$$

Выделяем квадрат двучлена $x^2 + a^2$.

$$(x^4 + 2a^2 x^2 + a^4) - a^4 + 4a^3 x = a^4 + 2a^2 x^2, \text{ или}$$

$$(x^2 + a^2)^2 = 2a^4 + 2a^2 x^2 - 4a^3 x = 2a^2 (a^2 + x^2 - 2ax), \text{ или}$$

$$(x^2 + a^2)^2 = 2a^2 (x - a)^2.$$

Дальнейшее очевидно.

Задача 19.

Решить уравнение

$$(ax^2 + bx + c)^2 = x^2 (Ax^2 + Bx + c) \text{ при } a \neq A.$$

Решение.

Данное уравнение перепишем в виде

$$(ax^2 + bx + c)^2 - x^2 (ax^2 + bx + c) - (A - a) x^4 = 0,$$

или, обозначив $ax^2 + bx + c$ через y,

$$y^2 - x^2 y - (A - a) x^4 = 0,$$

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2\right)^2 - \left(A - a + \frac{1}{4}\right) x^4 = 0.$$

Поэтому при $p = A - a + \frac{1}{4} < 0$ уравнение корней не имеет, а при $p \geqslant 0$ оно принимает вид

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{p}\,x^2\right)\left(y - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{p}\,x^2\right) = 0, \text{ или}$$

$$\left(\left(a - \sqrt{p} - \frac{1}{2}\right) x^2 + bx + c\right)\left(\left(a + \sqrt{p} - \frac{1}{2}\right) x^2 + bx + c\right) = 0.$$

Дальнейшее решение не представляет труда, и мы его опускаем.

Задача 20.

$$x^4 - 12x + 323 = 0.$$

Решение.

$$x^4 - 12x + 323 = x^4 - 12x + 324 - 1 = 0;$$

$$x^4 + 18^2 - 12x - 1 = 0;$$

$$x^4 + 36x^2 + 18^2 - 36x^2 - 12x - 1 = 0;$$

$(x^2 + 18)^2 - (6x + 1) = 0$. Дальнейшее очевидно.

Задача 21.

Решить уравнение $(x + 2)^2 + (x + 3)^3 + (x + 4)^4 = 2$.

Решение.

Нетрудно заметить, что корнями данного уравнения являются числа -3 и -5. Для нахождения остальных его корней сделаем замену $y = x + 4$. Тогда уравнение примет вид:

$$(y - 2)^2 + (y - 1)^3 + y^4 = 2 \text{ или } y^4 + y^3 - 2y^2 - y' + 1 = 0.$$

Полученное уравнение имеет корни 1 и -1; это позволяет легко найти необходимую группировку.

$$y^4 + y^3 - 2y^2 - y + 1 = y^2(y^2 + y - 2) - (y - 1) =$$

$$= y^2(y - 1)(y + 2) - (y - 1) = (y - y)(y^3 + 2y^2 - 1) =$$

$$= (y - 1)((y^3 + y^2) + (y^2 - 1)) = (y - 1)(y + 1) \cdot (y^2 + y - 1).$$

Теперь легко получаем еще два корня исходного уравнения: $\pm\frac{9 + \sqrt{5}}{2}$, $-\frac{9 - \sqrt{5}}{2}$.

Задача 22.

Решите уравнение $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$.

Решение.

Преобразуем условие так, чтобы выделить «точный куб»:

$$3x^3 - 3x^2 - 3x = 1;$$

$$4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1;$$

$$4x^3 = (x+1)^3.$$

Отсюда следует, что $\sqrt[3]{4x^3} = x + 1$. $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$.

Задача 23.

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Решение.

Пусть $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ — биквадратное уравнение.

$$y = x^2;\ \ y_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{8};$$

$$y_1 = -1;\ \ y_2 = \frac{1}{4}.$$

Значит, $4x^4 + 3x^2 - 1 = 4\,(x^2+1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 4\,(x^2+1) \times$

$$\times \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right);$$

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 4\,(x^2+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) -$$

$$- 16x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1 - 4x) =$$

$$= 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - 4x + 1) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{2} = 0, \\ x + \frac{1}{2} = 0, \\ x^2 - 4x + 1 = 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Задача 24.

Решить уравнение $6x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 10x + 9 = 0$.

Решение.

Переписав данное уравнение в виде

$$5x^4 + (x^4 + 2x^3 + x^2) + (3x^2 + 10x + 9) = 0,$$

мы получим, что слагаемые в его левой части неотрицательны, причем последнее положительно. Следовательно, уравнение корней не имеет.

Задача 25.

Решить уравнение

$$k^4 - 6k^3 + (4 + 6\sqrt{5})\,k^2 - 18\sqrt{5}\,k + 45 = 0.$$

Решение.

Сгруппировав в левой части слагаемые, содержащие $\sqrt{5}$, приведем уравнение к виду

$$k^4 - 6k^3 + 4k^2 + 45 + 6\sqrt{5}\,k\,(k - 3) = 0,$$

после чего естественно проверить, не является ли число 3 корнем многочлена $k^4 - 6k^3 + 4k^2 + 45$. Оказывается, что это действительно так, и поэтому 3 — корень данного уравнения и $k^4 - 6k^3 + 4k^2 + 45 = (k - 3)(k^3 - 3k^2 - (5 - 6\sqrt{5})\,k - 15)$.

Остается решить уравнение

$$k^3 - 3k^2 - (5 - 6\sqrt{5})\,k - 15 = 0.$$

Это уравнение целых и даже рациональных корней не имеет, и следующего «кандидата в корни» будем искать в виде $k = n\sqrt{5}$.

После соответствующей подстановки уравнение приводится к виду

$$5\sqrt{5}\,n^3 - 15n^2 - (5\sqrt{5} - 30)\,n - 15 = 0;$$

$$5\sqrt{5}\,n\,(n^2 - 1) - 15n + 30n - 15 = 0;$$

$$\sqrt{5}\,n\,(n^2 - 1) = 3\,(n - 1)^2,$$

откуда $n = 1$ («остающееся» квадратное уравнение корней не имеет). Таким образом, данное уравнение имеет два корня: 3 и $\sqrt{5}$.

Задача 26.

Решить уравнение $(x^2 - a^2)^2 = 4ax + 1$.

Решение.

Прибавив к обеим частям уравнения $4a^2x^2$, получим

$$(x^2 - a^2)^2 + 4a^2 x^2 = 4a^2 x^2 + 4ax + 1, \text{ или}$$

$$(x^2 + a^2)^2 = (2ax + 1)^2. \text{ Отсюда:}$$

а) $x^2 + a^2 = 2ax + 1$, т.е. $(x - a)^2 = 1$ и, следовательно, $x_1 = a + 1$ и $x_2 = a - 1$;

б) $x^2 + a^2 = -2ax - 1$, т.е. $(x + a)^2 = -1$. В этом случа решений нет.

Итак, исходное уравнение имеет корни

$$x_1 = a + 1 \text{ и } x_2 = a - 1.$$

Задача 27.

Решить уравнение $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$.

Решение.

Запишем данное уравнение в таком виде:

$$x^3 - 3abx + (a + b)^3 - 3\,(a + b)\,ab = 0.$$

Очевидно, что $x_1 = -(a + b)$.

Далее уравнение $x^3 + (a + b)^3 - 3ab\,(x + a + b) = 0$ можно записать в виде

$$(x + a + b)\,(x^2 - x\,(a + b) + (a + b)^2) - 3ab\,(x + a + b) = 0,$$

и два оставшихся корня находим из квадратного уравнения

$$x^2 - x\,(a + b) + a^2 - ab + b^2 = 0.$$

Найти самостоятельно.

Задача 28.

Решить уравнение $x^2 + \dfrac{25x^2}{(5 + 2x)^2} = \dfrac{74}{49}$.

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения.

$$\frac{25x^2 + 20x^3 + 4x^4 + 25x^2}{(5 + 2x)^2} = \frac{74}{49};$$

$$\frac{4x^4}{(5+2x)^2}+\frac{10x^2(5+2x)}{(5+2x)^2}=\frac{74}{49}.$$

Так как $5+2x\neq 0$, то

$$\left(\frac{2x^2}{5+2x}\right)^2+5\cdot\frac{2x^2}{5+2x}-\frac{74}{49}=0.$$

Имеем

$$\frac{2x^2}{5+2x}=-\frac{37}{7};\ \frac{2x^2}{5+2x}=\frac{2}{7};$$

$$x_1=-\frac{5}{7},\ x_2=1.$$

Задача 29.

Решить уравнение $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{3x}{x^2-8x+15}.$

Решение.

Данное уравнение равносильно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases}(x^2-10x+15)(x^2-8x+15)=3x(x^2-6x+15);\\ x^2-6x+15\neq 0;\\ x^2-8x+15\neq 0.\end{cases}$$

После преобразований первого уравнения этой системы получим:

$$x^4-21x^3+128x^2-315x+225=0;$$

$$x^4-7x^3-14x^3+15x^2+98x^2+15x^2-210x-105x+225=0;$$

$$x^2(x^2-7x+15)-14x(x^2-7x+15)+15(x^2-7x+15)=0;$$

$$(x^2-7x+15)(x^2-14x+15)=0.$$

Ответ: $x_1=7+\sqrt{34};$
$x_2=7-\sqrt{34}.$

Задача 30.

Решить уравнение $x^8-10x^6+28x^4-15x^2-4=0.$

Решение.

$$x^8 - 10x^6 + 28x^4 - 15x^2 - 4 = (x^8 + 25x^4 + 1 - 10x^6 + 2x^4 + $$
$$+ 10x^2) + (x^4 - 5x^2 + 1) - 6 = 0.$$

Обозначив $x^4 - 5x^2 + 1 = z$, имеем $z^2 + z - 6 = 0$, откуда $z_1 = -3$, $z_2 = 2$. Решив уравнения

$$x^4 - 5x^2 + 1 = -3 \text{ и } x^4 - 5x^2 + 1 = 2, \text{ получим}$$

$$x_{1,2} = \pm 1, \quad x_{3,4} = \pm 2, \quad x_{5,6,7,8} = -\frac{\pm\sqrt{5 \pm \sqrt{21}}}{2}.$$

Задача 31.

Решите уравнения:

а) $\frac{x^2}{25} + \frac{36}{x^2} = \frac{16}{5}\left(\frac{x}{5} - \frac{6}{x}\right)$; *б*) $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{3}\right)$.

Решение.

а) Легко заметить, что квадрат выражения, стоящего в скобках в правой части, равен левой части с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому это выражение удобно принять за новую переменную. Найдя значение этой переменной, сведем решение данного уравнения к решению квадратного уравнения.

Итак, $\frac{x}{5} - \frac{6}{x} = y$. Тогда $y^2 = \frac{x^2}{25} - \frac{36}{x^2} - \frac{12}{5}$. Значит,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{36}{x^2} = y^2 + \frac{12}{5}$$

Данное уравнение примет вид:

$$y^2 + \frac{12}{5} = \frac{16}{5}y, \quad 5y^2 - 16y + 12 = 0;$$

$$y_1 = \frac{6}{5}, \quad y_2 = 2.$$

Следовательно, если $y = \frac{6}{5}$, то

$$\frac{x}{5}-\frac{6}{x}=\frac{6}{5},\quad x\neq 0,\quad x^2-6x-30=0,\text{ откуда}$$

$$x=3-\sqrt{39}\text{ или }x=3+\sqrt{39}.$$

Если $y=2$, то $\frac{x}{5}-\frac{6}{x}=2$, $x\neq 0$, $x^2-10x-30=0$, откуда $x=5-\sqrt{55}$ или $x=5+\sqrt{55}$.

б) Корни уравнения: -2, 6, $3-\sqrt{21}$, $3+\sqrt{21}$.

Задача 32.

Решить уравнение $x=1-1967\,(1-1967\,x^2)^2$.

Решение.

Положим $z=1-1967\,x^2$. Тогда исходное уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} x=1-1967\,z^2,\\ z=1-1967\,x^2.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$x-z=1967\,(x^2-z^2).$$

Отсюда либо $z=x$, либо $z=\frac{1}{1967}-x$. В первом случае $x=1-1967\,x^2$, а во втором $\frac{1}{1967}-x=1-1967x^2$.

Решая эти уравнения, мы найдем четыре корня. Легко видеть, что все они удовлетворяют данному уравнению.

Задача 33.

Решить уравнение $x\,(13-x)(13+x^2)=42\,(x+1)^2$.

Решение.

После раскрытия скобок и дальнейших очевидных преобразований получим уравнение

$$x^4-13x^3+55x^2-85x+42=0,$$

у которого нетрудно подобрать целые корни 1 и 6, после чего оно сводится к уравнению $x^2-6x+7=0$, корнями которого являются числа $3\pm\sqrt{2}$.

Задача 34.

Решить уравнение $x^4 + 7x^2 - 12x + 5 = 0$.

Решение.

Поскольку

$$x^4 + 7x^2 - 12x + 5 = (x^4 - 2x^2 + 1) + (9x^2 - 12x + 4) =$$
$$= (x^2 - 1)^2 + (3x - 2)^2$$

и выражение $x^2 - 1$ и $3x - 2$ не обращаются в нуль одновременно, то данное уравнение корней не имеет.

Задача 35.

Решить уравнение $\sqrt{10x^3 - 24x^2 + 5x + 7} = x^2 + 1$.

Решение.

$$\sqrt{10x^3 - 24x^2 + 5x + 7} = x^2 + 1;$$
$$10x^3 - 24x^2 + 5x + 7 = x^4 + 2x^2 + 1;$$
$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 5x - 6 = 0;$$
$$(x^4 - 10x^3 + 25x^2) + (x^2 - 5x) - 6 = 0;$$
$$x^2 (x - 5)^2 + x (x - 5) - 6 = 0;$$
$$\left[\begin{array}{l} x (x - 5) = 2, \\ x (x - 5) = 3, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}, \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Задача 36.

Решить уравнение $(ax - 1)^3 + (a + 1)^3 x^2 = 0$.

Решение.

Данное уравнение третьей степени и потому в элементарной форме может быть решено или путем разложения на множители левой части или при помощи теоремы Безу. Применим оба эти способа.

Первый способ. Раскрыв скобки, получим последовательно:

$$a^3 x^3 - 3a^2 x^2 + 3ax - 1 + a^3 x^2 + 3a^2 x^2 + 3ax^2 + x^2 =$$
$$= a^3 x^3 + a^3 x^2 + 3\,ax^2 + 3ax + x^2 - 1 = a^3 x^2 (x + 1) +$$
$$+ 3ax\,(x + 1) + x^2 - 1.$$

Выноса за скобки множитель $x + 1$, будем иметь:

$$(x + 1)\,(a^3 x^2 + 3ax + x - 1) = 0,$$

отсюда следует $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \dfrac{-3a - 1 \pm \sqrt{(3a + 1)^2 + 4a^3}}{2a^3}$.

Второй способ. После раскрытия скобок замечаем, что свободный член уравнения равен -1. Отсюда естественно проверить, не является ли корнем уравнения 1 или -1. Подстановка $x = -1$ дает 0, что показывает, что -1 является корнем уравнения. Следовательно, левая часть должна делиться на $x + 1$. Остальное ясно.

Задача 37.

Решить уравнение $2x^3 - 6x + 5 = 0$.

Решение.

Положим $x = t + \frac{1}{t}$. Тогда

$$2\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + 6\left(t + \frac{1}{t}\right) - 6\left(t + \frac{1}{t}\right) + 5 = 0 \text{ или}$$
$$2t^6 + 5x^3 + 2 = 0.$$

Отсюда находим $t^3 = -2$, $t^3 = -\frac{1}{2}$. Очевидно, что значение x не меняется, если t заменить на $\frac{1}{t}$. Корни уравнения $t^3 = -\frac{1}{2}$ обратны корням уравнения $t^3 = -2$. Следовательно, для нахождения x достаточно воспользоваться корнями уравнения $t^3 + 2 = 0$.

$$t_1 = -\sqrt[3]{2},\quad t_2 = -\sqrt[3]{2\varepsilon},\quad t_3 = -\sqrt[3]{2\varepsilon^2},$$

где $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Поэтому

$$x_1 = \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right),\quad x_2 = -\left(\sqrt[3]{2\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}\right),\quad x_3 = -\left(\sqrt[3]{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon^2}}\right).$$

Учитывая, что $\varepsilon^3 = 1$, находим:

$$x_2 = -\frac{\sqrt[3]{4\varepsilon^2} + 1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}} = \frac{\varepsilon^2 + \sqrt[3]{4\varepsilon}}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{2}(\varepsilon^2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2\varepsilon}),$$

$$x_3 = -\frac{\varepsilon^4 + \sqrt[3]{4\varepsilon^2}}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{\varepsilon + \sqrt[3]{4\varepsilon^2}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2\varepsilon^2}).$$

Задача 38.

Решить уравнение

$$(a^2 - a)^2(x^2 - x + 1)^3 = (a^2 - a + 1)^3(x^2 - x)^2.$$

Решение.

При $a = 0$ и $a = 1$ уравнение имеет два двукратных корня:

$$x_{1,2} = \pm 0,\quad x_{3,4} = 1.$$

Если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то ни 0 ни 1 не являются корнями данного уравнения. Непосредственной проверкой легко убедиться, что если x_1 — корень данного уравнения, то $\dfrac{1}{x_1}$, $1 - x_1$ тоже являются его корнями. Отсюда следует, что и $\dfrac{1}{1 - x_1}$, $1 - \dfrac{1}{x_1}$, и $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{x_1}}$ также являются корнями данного уравнения.

Так как уравнения при $a \neq 0$ и $a \neq 1$ — шестой степени, то оно имеет шесть корней, причем, зная один из них, легко получить остальные корни. Но, очевидно, что a — корень данного уравнения. Поэтому имеем:

$$x_1 = a, \quad x_2 = \frac{1}{a}, \quad x_3 = 1 - a;$$

$$x_4 = \frac{1}{1-a}, \quad x_5 = 1 - \frac{1}{a}; \quad x_6 = \frac{a}{a-1}.$$

Задача 39.

Решить уравнение

$$(x^2 + a^2)(x - 3a)^2 = 8a^4, \quad a \neq 0.$$

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$x^4 - 6x^3 a + 10x^2 a^2 - 6xa^3 + a^4 = 0.$$

Отсюда

$$x^4 - 4x^3 a + 6x^2 a^2 - 4xa^3 + a^4 - 2(x^3 a + 2x^2 a^2 + xa^3) = 0$$

или

$$(x - a)^4 - 2ax(x - a)^2 = 0;$$

$$(x - a)^2 (x^2 - 4ax + a^2) = 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = x_2 = a, \quad x_3 = a(2 + \sqrt{3}), \quad x_4 = a(2 - \sqrt{3}).$$

Глава IV. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

16. Системы уравнений с параметрами первой степени с двумя неизвестными

Задача 1.

Исследовать систему $\begin{cases} x + ay = a, \\ 2x + 2ay = a^2. \end{cases}$

Решение.

Умножим первое уравнение на -2 и прибавим ко второму. Получим равенство $a^2 - 2a = 0$. Оно справедливо при $a = 0$ и $a = 2$. Если $a = 0$, то

$$\begin{cases} x + 0y = 0, \\ 2x + 2 \cdot 0y = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 0$, $y = t$ — произвольное число.

Если $a = 2$, то данная система

$$\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

имеет множество решений вида $x = t$, $y = \frac{2 - t}{2}$.

Система не имеет решений, если $a \neq 0$ и $a \neq 2$.

Ответ: Если $a = 2$, то $x = t$, $y = \frac{2 - t}{2}$, где $t \in R$.
Если $a = 0$, то $x = 0$, $y = t$, где $t \in R$.
Если $a \neq 0$, $a \neq 2$, то решений нет.

Задача 2.

Исследовать систему $\begin{cases} ax - y = 2a, \\ 2x + y = a. \end{cases}$

Решение.

Сложим оба уравнения системы: $x\,(a + 2) = 3a$.

Если $a \neq -2$, то $x = \frac{3a}{a + 2}$.

Значит, $y = a - \frac{6a}{a+2} = \frac{a^2 - 4a}{a+2}$. Если $a \neq -2$, то система решений не имеет.

Ответ: Если $a \neq -2$, то $x = \frac{3a}{a+2}$; $y = \frac{a^2 - 4a}{a+2}$.

Если $a = -2$, то нет решений.

Задача 3.

Решить систему $\begin{cases} ax + 12y = 2, \\ 3x + ay = 1. \end{cases}$

Решение.

Умножим первое уравнение на 3, второе на a, получим

$$\begin{cases} 3ax + 36y = 6, \\ 3ax + a^2y = a. \end{cases}$$

Вычитая уравнения, имеем $(36 - a^2)\,y = 6 - a$. Аналогично $(36 - a^2)\,x = 2\,(6 - a)$.

Если $a = 6$, имеем $0 \cdot y = 0$, $0 \cdot x = 0$. Значит, при $a = 6$ имеем уравнение $3x + 6y = 1$, решением которого будет любая пара $\left(t, \frac{1-6t}{3}\right)$.

Если $a = -6$, имеем $0 \cdot y \neq 0$, $0 \cdot x \neq 0$, т.е. решений нет.

Если $a \neq \pm 6$, то $x = \frac{2}{a+6}$, $y = \frac{1}{a+6}$.

Ответ: Если $a \neq \pm 6$, то $x = \frac{2}{a+6}$, $y = \frac{1}{a+6}$.

Если $a = 6$, то $x = t$, $y = \frac{1-6t}{3}$, $t \in R$.

Если $a = -6$, то решений нет.

Задача 4.

При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)\,y = a + 3 \end{cases}$$

будет несовместна?

Решение.

Известно, что система

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

будет несовместна, если отношения коэффициентов при одинаковых неизвестных равны, но они не равны отношению свободных членов, т.е. если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Составим отношение коэффициентов данной системы. Имеем

$$\frac{a}{2} = \frac{-4}{a+6} \neq \frac{a+1}{a+3}.$$

Находим, что при $a = -4$ данная система не имеет решения.

Ответ: $a = -4$.

Задача 5.

Решить систему $\begin{cases} x + ay = a^2, \\ ax + ay = 1. \end{cases}$

Решение.

Имеем $x - ax = a^2 - 1$, или $x(1 - a) = (a - 1)(a + 1)$.

Система имеет единственное решение

$$x = -(a+1), \ y = \frac{a^2 + a + 1}{a},$$

если $a \neq 1$ и $a \neq 0$.

Если $a = 1$, система имеет бесконечное число решений вида $x = t$, $y = 1 - t$, $t \in R$.

Ответ: Если $a = 0$, то нет решений.

Если $a = 1$, то система имеет бесконечно много решений вида $x = t$, $y = 1 - t$, $t \in R$.

Если $a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x = -(a+1)$, $y = \frac{a^2 + a + 1}{a}$.

Задача 6.

Определить при каких значениях параметра a система имеет положительные решения:

$$\begin{cases} x + 3y = 6, \\ ax + 6y = 3. \end{cases}$$

Решение.

Умножим первое уравнение системы на −2 и сложим со вторым. Имеем $x(a-2) = -9$, откуда при $a = 2$ система не имеет решений, а при $a \neq 2$ $x = \frac{9}{2-a}$.

Итак, $x > 0$, если $a < 2$. Найдем теперь y: $y = \frac{1-2a}{2-a}$. Для того, чтобы $y > 0$, должно выполняться неравенство $1 - 2a > 0$. Значит: $a < \frac{1}{2}$

Ответ: $a < \frac{1}{2}$.

Задача 7.

При каких значениях k существует решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + ky = 3, \\ kx + 4y = 6, \end{cases}$$

удовлетворяющее неравенствам $x > 1$, $y > 0$.

Решение.

Рассматривая отношение $\frac{1}{k}$, $\frac{k}{4}$, $\frac{3}{6}$, видим, что данная система совместна при всех $k \neq -2$, причем при $k \neq 2$ она принимает единственное решение.

$$x = \frac{6}{k+2}, \quad y = \frac{3}{k+2}.$$

По условию $\frac{6}{k+2} > 1$ и $\frac{3}{k+2} > 0$, отсюда $k \in \,]-2; 2[\, \cup \,]2; 4[$. Покажем, что при $k = 2$ система также имеет решения $x > 1$, $y > 0$. Действительно, при $k = 2$ уравнения системы совпадают: $x = 3 - 2y$. Но система неравенств $3 - 2y > 1$ и $y > 0$ совместна: ее решение $0 < y < 1$.

Ответ: $k \in \,]-2; 4[$.

Задача 8.

При каких a все решения системы

$$\begin{cases}(a-1)\,x+y=2,\\ x+y=a\end{cases}$$

удовлетворяют условию $x<0,\ \ y\geqslant 0$?

Решение.

Вычитая второе условие из первого, имеем

$$(a-2)\,x=2-a.$$

При $a=2$ получаем $x+y=2$, решением которого будет любая пара $(t;\ 2t)$, где $t\in R$.

Поскольку возможно $t\geqslant 0$, то при $a=2$ не все решение системы удовлетворяет условию $x<0,\ \ y\geqslant 0$.

При $a\neq 2\ \ x=-1,\ \ y=a+1$. Очевидно, $x<0$ при всех a. Значит, $y\geqslant 0$, откуда $a+1\geqslant 0,\ \ a\geqslant -1$.

Ответ: $a\in[-1;\ 2)\bigcup(2;\ \infty)$.

Задача 9.

Решить систему: $\begin{cases}y-4x=a,\\ 8x-2y=1.\end{cases}$

Решение.

Домножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым уравнением. Имеем:

$$\begin{cases}8x-2y=1,\\ 0=2a+1.\end{cases}$$

При $a=-\dfrac{1}{2}$ система совместна, неопределена и имеет решение $\left(t;\ 4t-\dfrac{1}{2}\right),\ \ t\in R.$

При $a\neq-\dfrac{1}{2}$ — система решений не имеет.

Ответ: Если $a=-\dfrac{1}{2}$, то $x=t,\ y=4t-\dfrac{1}{2},\ \ t\in R.$

Если $a\neq-\dfrac{1}{2}$, то решений нет.

Задача 10.

При каких значениях n система уравнений

$$\begin{cases} 3x + ny = 3, \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$$

имеет решение

1) $x > 0;\ y > 0;$
2) $x < 0;\ y < 0;$
3) $x > 0;\ y < 0;$
4) $x < 0;\ y > 0?$

Решение.

Данная система эквивалентна такой системе:

$$\begin{cases} x(12 + 2n) = 12 + n, \\ y(2n + 12) = 6 - 3, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2\cdot(n+6)\,x = 12 + n, \\ 2\cdot(n+6)\,y = 3. \end{cases}$$

Если $n = -6$, то система не имеет решений.

Пусть $n \neq -6$. Тогда $\begin{cases} x = \dfrac{12+n}{2(n+6)}, \\ y = \dfrac{3}{2(n+6)}. \end{cases}$

1) $x > 0;\ y > 0$ при $\begin{cases} \dfrac{12+n}{2(n+6)} > 0, \\ \dfrac{3}{2(n+6)} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow n > -6.$

2) $x < 0;\ y < 0$ при $\begin{cases} \dfrac{12+n}{2(n+6)} < 0, \\ \dfrac{3}{2(n+6)} < 0. \end{cases} \Leftrightarrow -12 < n < -6.$

3) $x > 0;\ y < 0$ при $\begin{cases} \dfrac{12+n}{2(n+6)} > 0, \\ \dfrac{3}{2(n+6)} < 0. \end{cases} \Leftrightarrow n < -12.$

4) $x<0$; $y>0$ при $\begin{cases} \dfrac{12+n}{2(n+6)} < 0, \\ \dfrac{3}{2(n+6)} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow n \in \varnothing.$

Ответ: 1) $n>-6$; 2) $-12<n<-6$; 3) $n<-12$; 4) таких n не существует.

Задача 11.

Найти все значения параметра a, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x>y$.

Решение.

Решая данную систему уравнений, находим

$$x=\frac{a+3}{3}; \quad y=\frac{2a-3}{3}.$$

По условию $\dfrac{a+3}{3} > \dfrac{2a-3}{3}$, значит, $a<6$

Ответ: $a<6$.

Задача 12.

Решить систему: $\begin{cases} (p-5)x-2y=p-7, \\ (p+1)x+py=3p. \end{cases}$

Решение.

Домножим первое уравнение на p и сложим со вторым, умноженным на 2. Получим

$$x((p-5)p+2(p+1))=6p+p^2-7p;$$

$$x(p^2-3p+2)=p^2-p;$$

$$x(p-2)(p-1)=p(p-1).$$

При $p \neq 1$, $p \neq 2$ $x=\dfrac{p}{p-2}$. Отсюда

$$y = \frac{1}{2}((p-5)x - p + 7) = \frac{2p-7}{p-2}.$$

Если $p = 1$, то система имеет бесконечное множество решений вида $(x,\ 3-2x)$, $x \in R$.

Если $p = 2$, то система не имеет решений.

Ответ: Если $p \neq 1$, $p \neq 2$, то единственное решение $x = \frac{p}{p-2}$; $y = \frac{2p-7}{p-2}$.
Если $p = 1$, то бесконечное множество решений вида $(x,\ 3-2x)$, $x \in R$.

Если $p = 2$, то нет решений.

Задача 13.

Найдите все $b \in R$ такие, чтобы при любых $a \in R$ имела хотя бы одно решение система уравнений:

$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b. \end{cases}$$

Решение.

Сложим уравнения системы: $x(a+3) = a + b$.

Система будет иметь решение в двух случаях: если $a + 3 \neq 0$ и если $\begin{cases} a + 3 = 0, \\ a + b = 0. \end{cases}$

Так как по условию a — любое, то при $a = -3$ из второго соотношения получим $b = 3$.

Ответ: $b = 3$.

Задача 14.

При каких значениях параметра a прямые $2x + y = 1$ и $3ax - 2y = 4$ пересекаются?

Решение.

Условие задачи можно сформулировать так: при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3ax - 2y = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Т.к. данная система имеет единственное решение при $\frac{3a}{2} \neq \frac{-2}{1}$, то отсюда $a \neq -\frac{4}{3}$.

Ответ: $a \neq -\frac{4}{3}$.

Задача 15.

Найти все значения параметра a, при которых прямые $4x - 3y - a = 0$ и $5x - ay + 8 = 0$ пересекаются в точке с отрицательными координатами.

Решение.

Решим систему $\begin{cases} 4x - 3y = a, \\ 5x - ay = -8. \end{cases}$

Считаем, что прямые не параллельны $\left(a \neq \frac{15}{4}\right)$. Тогда $x = \frac{a^2 + 24}{4a - 15}$, $y = \frac{5a + 32}{4a - 15}$. Учитывая условие: $\frac{a^2 + 24}{4a - 15} < 0$, откуда $a < 3\frac{3}{4}$. Далее $\frac{5a + 32}{4a - 15} < 0$, откуда $a > -6\frac{2}{5}$.

Ответ: $a \in (6{,}4;\ 3{,}75)$.

Задача 16.

Найти все значения параметра a, при которых точка $M(x_0;\ y_0)$ пересечения прямых $5x + 4y = 6$ и $ax + 6y = 10$ удовлетворяет условию $x_0 > 0;\ y_0 < 1$.

Решение.

Решим систему $\begin{cases} 5x + 4y = 6, \\ ax + 6y = 10. \end{cases}$

Прямые не параллельны, т.е. $a \neq \frac{15}{2}$. Получим

$$x = \frac{2}{2a - 15};\quad y = \frac{3a - 25}{2a - 15}.$$

Поскольку $x_0 > 0;\ y_0 < 1$, имеем

$$\frac{2}{2a - 15} > 0, \text{ откуда } a > 7{,}5;$$

$$\frac{3a-25}{2a-15}<1, \text{ откуда } a<10.$$

Ответ: $a \in (7{,}5;\ 10)$.

Задача 17.

При каком значении m прямые $y = -4x + m$ и $y = 2x - 3$ пересекаются на оси ординат?

Решение.

Сформулируем условие задачи иначе: при каком значении m система

$$\begin{cases} y = -4x + m, \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

имеет решение с абсциссой, равной нулю. Подставляя $x = 0$ в каждое из уравнений, получим $m = -3$.

Ответ: $m = -3$.

Задача 18.

При каких a координаты x_0, y_0 — точки пересечения прямых $3x + y = -2$ и $x - (1 - a)\,y = 3$ удовлетворяют условию $x_0 \leqslant 2$, $y_0 > 0$?

Решение.

Найдем x_0 и y_0 как решение системы

$$\begin{cases} 3x_0 + y_0 = -2, \\ x_0 - (1 - a)\,y_0 = 3. \end{cases}$$

Прямые не параллельны при $a \neq \frac{4}{3}$. Имеем

$$x_0 = \frac{1+2a}{4-3a}; \quad y_0 = -\frac{11}{4-3a}.$$

Далее

$$\begin{cases} -\dfrac{11}{4-3a} > 0, \\ \dfrac{1+2a}{4-3a} \leqslant 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a > \dfrac{4}{3}, \\ a \geqslant \dfrac{7}{8}, \end{cases}$$

значит, $a > \frac{4}{3}$

Ответ: $a > \frac{4}{3}$.

Задача 19.

Найти значение параметра a, если известно, что прямые $y = 3x + 4$ и $y = ax - 0{,}5$ параллельны.

Решение.

Имеем систему $\begin{cases} y = 3x + 4, \\ y = ax - 0{,}5. \end{cases}$

Требуется найти значения a, при которых система не имеет решений. Поскольку $x(3 - a) = -4{,}5$, то при $a = 3$ система несовместна.

Ответ: $a = 3$.

Задача 20.

Найдите значения c и d, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (c + 1)^2 x - (d + 1) y = -c, \\ (d - 1) x + (5 - 2d) y = c + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$; $y = 1$.

Решение.

В исходную систему подставим $x = 1$; $y = 1$. Имеем

$$\begin{cases} (c + 1)^2 \cdot 1 - (d + 1) \cdot 1 = -c, \\ (d - 1) \cdot 1 + (5 - 2d) \cdot 1 = c + 4, \end{cases}$$

откуда $d = -c$, следовательно, $c^2 + 4c = 0$, отсюда

$$c_1 = 0; \quad c_2 = -4; \quad d_1 = 0; \quad d_2 = 4.$$

Проверим, что при найденных значениях c и d система действительно имеет единственное решение, т.е.

$$\frac{(c + 1)^2}{d - 1} \neq \frac{-(d + 1)}{5 - 2d}.$$

Ответ: $c = d = 0$ или $c = -4$, $d = 4$.

Задача 21.

При каких a и b прямые

$$3x - y + b = 0 \text{ и } ax - 2y - 10 = 0$$

1) пересекаются в точке (2; –1);
2) параллельны между собой;
3) сливаются в одну прямую?

Решение.

Рассмотрим систему $\begin{cases} 3x - y = -6, \\ ax - 2y = 10. \end{cases}$

1) Подставив (2; –1) в систему, получим:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 + 1 = -b, \\ a \cdot 2 + 2 = 10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -7, \\ a = 4. \end{cases}$$

Т.е. обе прямые проходят через точку (2; –1) при $a = 4$, $b = -7$. Заметим, что при этом они не сливаются в одну прямую, т.к. $3(-2) - (-1)a = -6 + a = -2 \neq 0$. Значит, при $a = 4$, $b = -7$ прямые пересекаются в точке (2; –1).

2) Прямые параллельны при $\frac{3}{a} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{b}{10}$, т.е. при $a = 6$ $b \neq -5$.

3) Прямые сливаются в одну прямую при $\frac{3}{a} = \frac{-1}{-2} = \frac{-b}{10}$, т.е. при $a = 6$, $b = -5$.

Ответ: 1) $a = 4$, $b = -7$; 2) $a = 6$, $b \neq -5$; 3) $a = 6$, $b = -5$.

Задача 22.

Определить, при каких значениях k система уравнений

$$\begin{cases} (k + 2)x + 6y = 30 - 5k, \\ 6x + (k + 7)y = 30 \end{cases}$$

а) имеет бесконечное множество решений;
б) не имеет решений.

Решение.

Система имеет бесконечное множество решений при

$$\frac{k + 2}{6} = \frac{6}{k + 7} = \frac{30 - 5k}{30},$$

не имеет решений при $\frac{k+2}{6} = \frac{6}{k+7} \neq \frac{30-5k}{30}$.

Решая уравнение $\frac{k+2}{6} = \frac{6}{k+7}$, получим

$$k_1 = 2,\ k_2 = -11.$$

При $k = 2$ $\frac{k+2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{20}{30} = \frac{30-5k}{30}$, т.е. система имеет бесконечное множество решений.

При $k = -11$ $\frac{k+2}{6} = \frac{-9}{6} \neq \frac{-25}{30} = \frac{30-5k}{30}$, т.е. система не имеет решений.

Ответ: *а*) $k = 2$; *б*) $k = -11$.

Задача 23.

При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 2, \\ (2m-1)\,x + (m+1)\,y = 2\,(m+1) \end{cases}$$

а) имеет бесконечное множество решений;

б) не имеет решений?

Решение.

Система имеет бесконечное множество решений при

$$\frac{m}{2m-1} = \frac{2}{m+1} = \frac{m+2}{2\,(m+1)},$$

не имеет решений при

$$\frac{m}{2m-1} = \frac{2}{m+1} \neq \frac{m+2}{2\,(m+1)}.$$

Решая уравнение $\frac{m}{2m-1} = \frac{2}{m+1}$, получим $m_1 = 2$, $m_2 = 1$. Проверкой убеждаемся, что при $m = 2$ система имеет бесконечное множество решений, при $m = 1$ — не имеет решений.

Ответ: *а*) $m = 2$; *б*) $m = 1$

Задача 24.

Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 5x - (a+1)\,y = 3b, \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

а) имеет бесконечное множество решений;
б) не имеет решений.

Решение.

Система имеет бесконечное множество решений при

$$\frac{5}{1} = \frac{-a(a+1)}{-2} = \frac{3b}{3},$$

т.е. при $a = 9$, $b = 5$.

Система не имеет решений при $\frac{5}{1} = \frac{-a(a+1)}{-2} \neq \frac{3b}{3}$, т.е. при $a = 9$, $b \neq 5$.

Ответ: *а*) $a = 9$, $b = 5$; *б*) $a = 9$, $b \neq 5$

Задача 25.

Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} x + 8y = b, \\ \dfrac{x}{a-1} + (a-3)\,y = a+1 \end{cases}$$

а) имеет бесконечное множество решений;
б) не имеет решений.

Решение.

Система имеет бесконечное множество решений при

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a-1}} = \frac{8}{a-3} = \frac{b}{a+1},$$

не имеет решений при $\frac{1}{\frac{1}{a-1}} = \frac{8}{a-3} \neq \frac{b}{a+1}$.

Решая уравнение $a - 1 = \frac{b}{a-3}$, получим $a_1 = 5$, $a_2 = 1$.

Учитывая, что $a-1 \neq 0$, т.е. $a \neq 1$, имеем $a = 5$. Тогда $a-1=4$, $a+1=6$, т.е. система имеет бесконечное множество решений при $b = 24$, не имеет решений при $b \neq 24$.

Ответ: *а)* $a = 5$, $b = 24$; *б)* $a = 5$, $b \neq 24$.

Задача 26.

Исследовать систему: $\begin{cases} x + (5a-1)\,y = a, \\ x + y = a - 1. \end{cases}$

Решение.

Система имеет единственное решение при $1 \neq 5a - 1$, т.е. при $a \neq \frac{2}{5}$. При $a = \frac{2}{5}$ $\frac{a}{a-1} = -\frac{3}{3} \neq 1$, т.е. система не имеет решений.

Ответ: Если $a \neq 0{,}4$, то система имеет единственное решение.
Если $a = 0{,}4$, то нет решений.

Задача 27.

При каких значениях параметра a система не имеет решений:

1) $\begin{cases} ax - 3y = b, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a+6)\,y = a + 3. \end{cases}$

Решение.

1) Система не имеет решений при $\frac{a}{1} = \frac{-3}{1} \neq \frac{b}{2}$, т.е. $a = -3$, $b \neq -6$.

2) Система не имеет решений при $\frac{a}{2} = \frac{-4}{a+6} \neq \frac{a+1}{a+3}$.

Имеем: $a^2 + 6a + 8 = 0$, откуда $a_1 = -2$, $a_2 = -4$. Но при $a = -2$ $\frac{a+1}{a+3} = -1 = \frac{a}{2}$, при $a = -4$ $\frac{a+1}{a+3} \neq \frac{a}{2}$, т.е. $a = -4$.

Ответ: $a = -4$.

Задача 28.

При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 1 - a, \\ x + y = 2a + 1 \end{cases}$$

имеет решение, удовлетворяющее условию $x \geqslant 1$, $y \leqslant 4$?

Решение.

Решая систему, находим $x = \dfrac{a+2}{4}$, $y = \dfrac{7a+2}{4}$. $x \geqslant 1$ при $a \geqslant 2$; $y \leqslant 4$ при $a \leqslant 2$. Отсюда $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

Задача 29.

При каких значениях a все решения системы

$$\begin{cases} (a-1)\,x + y = 2, \\ x + y = a \end{cases}$$

удовлетворяют условию $x < 0$, $y \geqslant 0$?

Решение.

Домножим второе уравнение системы на -1 и сложим с первым. Получим: $(a-2)\,x = 2 - a$.

При $a = 2$ система имеет множество решений вида $(x;\ a - x)$, $x \in R$, т.е. значение $a = 2$ не подходит. При $a \neq 2$ имеем $x = -1$, $y = a + 1$. Очевидно, что $-1 < 0$.

Неравенство $a + 1 \geqslant 0$ выполнено при всех $a \geqslant -1$.

Ответ: $a \geqslant -1$.

Задача 30.

Найдите все a и b, при которых равносильны системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + 2y = b + 1, \\ x + y = 3 \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$$

Решение.

Вторая система имеет единственное решение, значит и первая система должна иметь одно решение. Найдем его:

$x = 3$; $y = 0$. Подставив эти значения в уравнение систем, содержащие параметры a и b, получим:

$$\begin{cases} 3a = b + 1, \\ 6 = a^2 + 1, \end{cases}$$

откуда $a^2 = 4$, $a_1 = -2$, $a_2 = 2$.

Подстановка $a_1 = -2$, $x = 3$, $y = 0$ в уравнение (1) дает $b = -7$. Значение $a_2 = 2$ не подходит, так как в этом случае первая система неопределена.

Ответ: $a = -2$, $b = -7$.

Задача 31.

Определить, при каких значениях параметра a решение системы

$$\begin{cases} x + ay = 2, \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям $x > 1$, $y < 0$.

Решение.

Данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} (4 + 2a)\,x = 8 + a, \\ (-2a - 4)\,y = -4 + 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2\,(a + 2)\,x = 8 + a, \\ 2\,(a + 2)\,y = 3. \end{cases}$$

При $a = -2$ система не имеет решений. Если $a \neq -2$, то

$$\begin{cases} x = \dfrac{8 + a}{2\,(a + 2)}, \\ y = \dfrac{3}{2\,(a + 2)}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x > 1, \\ y < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8 + a}{2\,(a + 2)} > 1, \\ \dfrac{3}{2\,(a + 2)} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4, \\ a < -2, \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing.$$

Ответ: таких a не существует.

Задача 32.

При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} ax - y = 5, \\ x + y = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение.

Система имеет единственное решение при $a \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \neq 0$, т.е. при $a \neq -1$.

Ответ: $a \neq -1$.

Задача 33.

При каких $a \in R$ система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y + z = 5, \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

имеет решение?

Решение.

Имеем

$$x + y = 3 - z; \qquad (1)$$

$$x - y = 5 - z. \qquad (2)$$

Считая z известным, получим $x = 4 - z$, $y = -1$. Подставляя эти значения x и y в третье уравнение системы, получаем линейное уравнение $(a - 1)z = 1$, которое имеет решение (а вместе с ним и исходная система), если $a - 1 \neq 0$.

Ответ: $a \in \left]-\infty; 1\right[\cup [1; \infty[$.

Задача 34.

Найти необходимое и достаточное условие, чтобы система уравнений была совместна:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3, \\ ax - by = 2b. \end{cases}$$

Решение.

Вначале решим систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$ Получим $x = 2$, $y = 1$. Подставим эти значения в третье уравнение исходной системы:

$$2a - b = 2b, \text{ или } 2a = 3b.$$

Ответ: $2a = 3b$.

Задача 35.

Решить систему $\begin{cases} ax + ay = 2, \\ ax - ay = 4. \end{cases}$

Решение.

Если $a \neq 0$, то

$$\begin{cases} ax + ay = 2, \\ ax - ay = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{2}{a}, \\ x - y = \dfrac{4}{a}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{a}, \\ y = -\dfrac{1}{a} \end{cases}.$$

Если $a = 0$, то система не имеет решений.

Ответ: Если $a \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = \dfrac{3}{a}$, $y = -\dfrac{1}{a}$.
Если $a = 0$, то система не имеет решений.

Задача 36.

Решить систему: $\begin{cases} x + ay = a^2, \\ ax + ay = 1. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x + ay = a^2, \\ ax + ay = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a-1) = a^2 - 1, \\ y(a^2 - a) = a^3 - 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(a-1) = (a-1)(a+1), \\ y \cdot a(a-1) = (a-1)(a^2 + a + 1). \end{cases}$$

Отсюда при $a = 0$ система не имеет решений; при $a + 1$ решением является любая пара $(x, 1 - x)$, где $x \in R$; при $a \neq 0$, $a \neq 1$ система имеет единственное решение

$$x = a + 1,\ \ y = \frac{a^2 + a + 1}{a}.$$

Ответ: Если $a = 0$, то нет решений.
Если $a = 1$, то бесконечное множество решений вида $(x,\ 1 - x)$, $x \in R$
Если $a \neq 0$, $a \neq 1$, то единственное решение $x = a + 1$, $y = \dfrac{a^2 + a + 1}{a}$.

Задача 37.

Одним из решений системы уравнений

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c + 1)\,x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

является $x = 1$, $y = 3$. Определите численные значения параметров a, b и c.

Решение.

Данная система имеет множество решений тогда и только тогда, когда $\dfrac{a}{c + 1} = \dfrac{-b}{c} = \dfrac{2a - b}{10 - a + 3b}$.

Кроме того, $x = 1$, $y = 3$ является одним из решений. Т.е. для нахождения a, b, c имеем систему:

$$\begin{cases} a - 3b = 2a - b, \\ c + 1 + 3c = 10 - a + 3b, \\ \dfrac{a}{c + 1} = \dfrac{-b}{c}, \\ \dfrac{2a - b}{10 - a + 3b} = \dfrac{-b}{c}. \end{cases}$$

Из первых трех уравнений этой системы получаем $a = 0$, $b = 0$, $c = \dfrac{9}{4}$ или $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$. Обе эти тройки чисел удовлетворяют и четвертому уравнению системы.

Ответ: $a = 0$, $b = 0$, $c = \dfrac{9}{4}$ или
$a = 2$, $b = -1$, $c = 1$..

Задача 38.

Известно, что точки пересечения прямых $2x+y=9$ и $kx+5y=18$ принадлежат биссектрисе первого координатного угла. Найти число k.

Решение.

Уравнение биссектрисы первого координатного угла $y=x$. Имеем систему

$$\begin{cases} 2x+y=9, \\ kx+5y=18, \\ y=x, \end{cases}$$

из которой находим $k=1$.

Ответ: $k=1$.

17. РЕШЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Задача 1.

Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 336, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 112. \end{cases}$

Решение.

Пусть $x = ty$. Получим $\sqrt{t}\, y^2 (t\sqrt{t} + 1) = 336;$

$$y^2 (t\sqrt{t} + 1) = 112;$$

$$x = 18; \quad y = 2.$$

Задача 2.

Найти действительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2) - 2x^2 y^2 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2\, x^2 y^2 =$$

$$= (9 - 2xy)^2 - 2x^2 y^2; \; (9 - 2xy)^2 - 2x^2 y^2 = 17, \text{ откуда}$$

$$x^2 y^2 - 18xy + 32 = 0;$$

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 16, \end{cases} \quad xy = 2; \; xy = 16, \text{ значит,}$$

Ответ: (1; 2); (2; 1).

Задача 3.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y - \sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}} = \dfrac{12}{x - y}, \\ xy = 15, \end{cases}$

где x и y — действительные числа.

Решение.

$x \neq y$. Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби. При $x - y \neq 0$ получим:

$$a)\ \begin{cases} x + y - \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x - y} = \dfrac{12}{x - y}, \\ xy = 15; \end{cases}$$

при $x - y < 0$

$$б)\ \begin{cases} x + y + \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x - y} = \dfrac{12}{x - y}, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения системы (*a*) на $x - y \neq 0$, получим

$$a)\ \begin{cases} x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 - y^2} = 12, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x^2 - y^2} = t$. Тогда из первого уравнения системы получим квадратное уравнение относительно t:

$t^2 - t - 12 = 0$, откуда $t_1 = 4$ $(t_2 = -3)$ — не подходит.

Получим систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ xy = 15, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + (-y^2) = 16, \\ x \cdot (-y^2) = -225. \end{cases}$$

x^2 и $(-y^2)$ можно рассматривать как корни квадратного уравнения $z^2 - 16z - 225 = 0$, откуда $z_1 = 25$; $z_2 = -9$. Имеем:

$$\begin{cases} x^2 = 25, \\ -y^2 = -9, \end{cases} \quad x_{1,2} = \pm 5; \quad y_{1,2} = \pm 3.$$

Проверка убеждает: что решением системы являются значения $x = 5$, $y = 3$ при $x - y < 0$. Получим:

$$x = -\sqrt{\frac{3\sqrt{109} + 9}{2}}, \quad y = -\sqrt{\frac{3\sqrt{109} - 9}{2}}.$$

Ответ: $(5;\ 3)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{3\sqrt{109} + 9}{2}};\ -\sqrt{\dfrac{3\sqrt{109} - 9}{2}}\right)$.

Задача 4.

Решить систему:

$$7x - 11y = \sqrt[3]{x + y} = \sqrt[5]{x + 9y}.$$

Решение.

Пусть $7x - 11y = u$, т.е. $7(x + y) - 18y = u$, откуда

$$x + y = \frac{u + 18y}{7}, \text{ а } x + 9y = (x + y) + 8y = \frac{u + 74y}{7}.$$

Приходим к системе:

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{\dfrac{u + 18y}{7}}, \\ u = \sqrt[5]{\dfrac{u + 74y}{7}}, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 7u^3 - u = 18y, \\ 7u^5 - u = 74y. \end{cases}$$

Из последней системы исключим y:

$$\frac{7u^3 - u}{18} = \frac{7u^5 - u}{74}.$$

Если $u = 0$, то прийдем к очевидному решению: $x_1 = y_1 = 0$.

Если $u \neq 0$, то получаем уравнение $\dfrac{7u^2 - 1}{9} = \dfrac{7u^4 - 1}{37}$, т.е. $9u^4 - 37u^2 + 4 = 0$, откуда $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = -\dfrac{1}{3}$, $u_3 = 2$, $u_4 = -2$.

Для каждого значения u составляем систему

$$\begin{cases} 7x - 11 = u, \\ x + y = u^3. \end{cases}$$

Ответ: $(0;\ 0)$; $\left(\dfrac{10}{243}, -\dfrac{1}{243}\right)$; $\left(-\dfrac{10}{243}, \dfrac{1}{243}\right)$; $(5;\ 3)$; $(-5;\ -3)$.

Задача 5.

Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение и всякое ее решение удовлетворяет уравнению $x + y = 0$ (a, x, y — действительные числа).

Решение.

По условию $y = -x$. Данные уравнения примут вид

$$\begin{cases} x^3(1+a) = \frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3(2-a) = 1. \end{cases}$$

Если $a \neq -1$, то, найдя x^3 из первого и второго уравнений, приравняем полученные выражения

$$\frac{1}{2}(a+1) = \frac{1}{2-a}, \text{ т.е. } a^2 - a = 0,$$

откуда $a = 0$ или $a = 1$.

Условию задачи могут удовлетворять только три значения параметра a: -1; 0; 1, которые нужно проверить.

Если $a = -1$, то из первого уравнения найдем $y = -x$, а из второго уравнения найдем $x^3 = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, а следовательно, $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Найденные значения неизвестных удовлетворяют и условию $x + y = 0$.

Если $a = 0$, то из первого уравнения: $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, а из второго: $y = \pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Это значит, что при $a = 0$ система имеет два решения:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \end{cases}$$

По условию любое решение должно удовлетворять требованию $x + y = 0$, между тем первое решение этому требованию не удовлетворяет. Значение $a = 0$ мы должны отбросить.

Осталось рассмотреть случай, когда $a = 1$. В этом случае получаем систему

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2, \\ x^3 + x^2y + xy^2 = 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2, \\ x(x^2 + xy + y^2) = 1. \end{cases}$$

Так как правые части отличны от нуля, то разделим первое уравнение на второе, откуда $x + y = 0$. Поскольку условие $x + y = 0$ теперь автоматически выполняется для любого решения системы, то нужно убедиться, что у этой системы есть хотя бы одно решение. Таким решением является $x = 1$, $y = -1$. (Докажите!).

Задача 6.

Векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \overline{OA} + 4\,\overline{OB} + 2\,\overline{OC} = \overline{0}, \\ (\overline{OA} - \overline{OB})^2 = (\overline{OB} - \overline{OC})^2 = (\overline{OC} - \overline{OA})^2. \end{cases}$$

Вычислить $\overline{OA} \cdot \overline{OC}$.

Решение.

Из первого уравнения: $\overline{OB} = -\frac{1}{4}\overline{OA} - \frac{1}{2}\overline{OC}$ после подстановки значения для $\overline{OB}$ в равенства

$$(\overline{OA} - \overline{OB})^2 = (\overline{OC} - \overline{OA})^2 \text{ и } (\overline{OB} - \overline{OC})^2 = (\overline{OC} - \overline{OA})^2$$

получим систему

$$\begin{cases} 9\,\overline{OA}^2 + 52\,\overline{OA} \cdot \overline{OC} - 12\,\overline{OC}^2 = 0, \\ 15\,\overline{OA}^2 - 44\,\overline{OA} \cdot \overline{OC} - 20\,\overline{OC}^2 = 0. \end{cases}$$

Исключив из этой системы $\overline{OA}^2$ и $\overline{OC}^2$, получим $392\,\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, откуда $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$.

Задача 7.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Сгруппируем слагаемые в левой части первого уравнения, рассматривая его как квадратный трехчлен относительно x. Предварительно домножим это уравнение на 10. Будем иметь:

$$100x^2 - 20(y + 19)x + 50y^2 - 60y + 410 =$$

$$= (10x - y - 19)^2 + 49y^2 - 98y + 49 =$$

$$= (10x - y - 19)^2 + 49(y - 1)^2.$$

Отсюда видно, что первое уравнение исходной системы выполняется только в случае $10x - y - 19 = 0$, $y - 1 = 0$, т.е. при $x = 2$, $y = 1$. Остается убедиться, что это пара чисел является и решением второго уравнения, а следовательно, и исходной системы.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение (2; 1).

Задача 8.

Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - |xy| + 9 = 0, \\ 36 - y^2 = (2x - y)^2. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения в силу неравенства между средним арифметическим и геометрическим $|y| = \dfrac{(x^2 + 9)}{x} \geqslant 6$, а из второго — $|y| \leqslant 6$. Поэтому $|y| = 6$, $2x - y = 0$, и мы получаем два решения: (3; 6) и (–3; –6).

Задача 9.

Решить систему

$$\begin{cases} y(x + y)^2 = 9, \\ y(x^3 - y^3) = 7. \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения следует, что $y > 0$, из второго — $x > y > 0$. Выразим из первого уравнения x через y.

$$\sqrt{y}\,(x + y) = 3; \quad x = \frac{3}{\sqrt{y}} - y.$$

Тогда $y\left(\left(\frac{3}{\sqrt{y}} - y\right)^3 - y^3\right) = 7$. Положим $t = \sqrt{y}$, получим

$$t^2\left(\left(\frac{3}{t} - t^2\right) - t^6\right) = 7, \text{ или } (3 - t^3)^3 - t^9 - 7t = 0.$$

Пусть $f(t) = (3 - t^3)^3 - t^9 - 7t$. Тогда

$$f'(t) = -9t^2(3 - t^3)^2 - 9t^8 - 7.$$

Производная отрицательна при всех значениях t. Таким образом, функция f убывает. Поэтому уравнение $f(t) = 0$ имеет не более одного корня. Нетрудно заметить, что $t = 1$ — корень. Итак, $x = 2$; $y = 1$ — единственное решение системы.

Задача 10.

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Первое равенство запишем в виде: $y^2 = \frac{2x}{1 + x^2}$. Покажем, что $|y| \leqslant 1$. Это можно сделать двумя способами:

Первый способ.

Из неравенства $(1 - x)^2 \geqslant 0$ следует неравенство $\frac{2x}{1 + x^2} \leqslant 1$, а это значит, что $y^2 \leqslant 1$.

Второй способ.

Положим $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; тогда $y^2 = \sin\frac{x}{2}$, т.е. $|y| \leqslant 1$. Далее второе равенство системы запишем в виде:

$$2(x - 1)^2 + 1 + y^3 = 0. \qquad (1)$$

Так как $|y| \leqslant 1$, то $1 + y^3 \geqslant 1 - |y|^3 \geqslant 0$. Следовательно, равенство (1) может выполняться только в случае $(x-1)^2 = 0$ и $1 + y^3 = 0$, т.е. для $x = 1$; $y = -1$. Проверим, подставив в первое уравнение.

Итак, $x = 1$; $y = -1$.

Ответ: 1; –1.

Задача 11.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0. \end{cases}$$

Решение.

Разложим на множители $x^2 + 3xy + 2y^2$. Решая относительно x уравнение $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$, получим

$$x_1 = -2y; \quad x_2 = -y.$$

Второе уравнение системы можно записать так:

$$(x + 2y)(x + y + 2) = 0.$$

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x + 2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Решить самостоятельно.

Ответ: $(0;\ 0)$; $(2;\ -1)$; $\left(-\frac{10}{7};\ -\frac{4}{7}\right)$.

Задача 12.

$$\begin{cases} x^2 - 12y = 15, \\ \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}} - \frac{y}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Разделим обе части второго уравнения на y $(y \neq 0)$, получим эквивалентное уравнение:

$$\frac{x^2}{8y^2} + \frac{2x}{3y} - \frac{1}{y}\sqrt{x^2\left(\frac{x}{3y} + \frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{2} = 0. \qquad (1)$$

Преобразуем левую часть (1)

$$\frac{x^2}{4y^2} - \frac{1}{y}\sqrt{x^2\left(\frac{4x}{3y}+1\right)} + \frac{4x}{3y} + 1 = 0;$$

$$\frac{|x|^2}{(2y)^2} - \frac{|x|}{y}\sqrt{\frac{4x}{3y}+1} + \frac{4x}{3y} + 1 = 0;$$

$$\left(\frac{|x|}{2y}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4x}{3y}+1}\right)^2 - \frac{|x|}{y}\sqrt{\frac{4x}{3y}+1} = 0;$$

$$\left(\frac{|x|}{2y} - \sqrt{\frac{4x}{3y}+1}\right)^2 = 0; \quad \frac{|x|}{2y} - \sqrt{\frac{4x}{3y}+1} = 0.$$

Таким образом, заданная система эквивалентна такой:

$$x^2 - 12y = 15;$$

$$\frac{|x|}{2y} = \sqrt{\frac{4x}{3y}+1}\ . \qquad (2)$$

Система (2) равносильна такой смешанной системе

$$\begin{cases} x^2 - 12y = 15; \\ \dfrac{x^2}{4y^2} = \dfrac{4x}{3y} + 1; \\ y > 0; \quad \dfrac{4x}{3y} + 1 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Из второго уравнения системы (3) находим:

$$\frac{x}{y} = 6 \text{ или } \frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \text{ и т.д.}$$

Ответ: $x_1 = 5$; $x_2 = -(9 + 4\sqrt{6})$.

Задача 13.

Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 = y^2, \\ x + y + \sqrt[5]{xy} = 819. \end{cases}$

Решение.

Ясно, что x и y положительны. Положив $x = t^2$ $(t > 0)$, будем иметь $y = t^3$. Второе уравнение примет вид:

$$t^3 + t^2 + t = 819, \text{ или } (t-9)(t^2 + 10t + 91) = 0.$$

Отсюда $t = 9$, т.е. $x = 81$, $y = 729$.

Задача 14.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3 + 3xy + y^3 = a, \\ x + y = xy. \end{cases}$

Указать те значения a, при которых система уравнений имеет действительные решения.

Решение.

Будем искать только действительные решения. Обозначив $x + y$ через t и заметив, что $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$, запишем первое уравнение в виде

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = a - 1 \text{ или } (t-1)^3 = a - 1.$$

Отсюда $t = \sqrt[3]{a-1} + 1$ и числа x и y являются корнями квадратного уравнения $z^2 - (\sqrt[3]{a-1} + 1)z + (\sqrt[3]{a-1} + 1) = 0$.

Это уравнение имеет действительные корни при $a \leqslant 0$ и при $a \geqslant 28$; теперь легко выписать и действительные решения системы.

Решить самостоятельно.

Задача 15.

При каких a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), & (1) \\ (x + y)^2 = 14 & (2) \end{cases}$$

имеет в точности два решения?

Решение.

Вот предполагаемые решения системы:

$$(x_0, y_0);\ (-x_0, -y_0);\ (y_0, x_0);\ (-y_0, -x_0).$$

Исследуем вначале их на «различность».

1) Пара $(x_0;\ y_0)$ и $(-x_0;\ -y_0)$.

Они различны, так как в противном случае $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ уравнение (1) может удовлетворять, а (2) — нет.

2) Пара $(x_0;\ y_0)$ и $(-y_0;\ -x_0)$ тоже различны. Опять же возможно: $x_0 + y_0 = 0$, а $-y_0 - x_0 = 0$ для второго уравнения системы не имеет смысла.

Итак, различные $(x_0;\ y_0)$ и $(-x_0;\ -y_0)$;

$$(x_0;\ y_0) \text{ и } (-y_0;\ -x_0).$$

Значит, в третьей паре совпадение: $y_0 = x_0$.

Подставляем в (2): $4x_0^2 = 14 \Rightarrow x_0' = \sqrt{\frac{7}{2}}$; $x_0'' = -\sqrt{\frac{7}{2}}$.

При этом $a = \frac{5}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ (x+y)^2 = 14. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим ее **решение:**

$$\left(\sqrt{\frac{7}{2}};\ \sqrt{\frac{7}{2}}\right);\ \left(-\sqrt{\frac{7}{2}};\ -\sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

Значит, действительно $a = \frac{5}{2}$.

Ответ: $a = \frac{5}{2}$.

Задача 16.

Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{y + \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)\,y + (y^2 + 1)\,x = 4xy. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 + x + y = 4xy, \\ xy\,(x+y) + (x+y) - 4xy) = 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{xy+1}{y}} + \sqrt{\frac{xy+1}{x}} = 2\sqrt{2};$$

$$\sqrt{xy+1}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 2\sqrt{2xy};$$

$$(xy + 1)(x + y + 2\sqrt{xy}) = 8xy;$$

$$\begin{cases} xy = a, \\ x + y = b, \end{cases} \begin{cases} ab + b = 4a, \\ (a + 1)(b + 2\sqrt{a}) = 8a, \end{cases}$$

$$b = \frac{4a}{a+1}; \quad a + 1 = \frac{4a}{b};$$

$$a^2 + 2a + 1 = 4a;$$

$$a = 1; \quad b = 2; \quad x = y = 1.$$

Задача 17.

Решить систему:

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 56, \\ \sqrt{x} + y = 56. \end{cases}$$

Решение.

$$x + \sqrt{y} = \sqrt{x} + y; \quad x - y = \sqrt{x} - \sqrt{y};$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1) = 0.$$

Задача 18.

Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2, \\ x^2 + y^2 - 4x = 0. \end{cases}$$

Решение.

Ясно, что $\sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$; $\sqrt{(x+1)^2} = |x + 1|$. Заметим, что $|x - 1| + |x + 1| \geqslant 2$. А значит, $x = y = 0$.

$$S = |x - 1| + |x + 1| = \begin{cases} -2x, & x \in \,]-\infty; -1), \\ 2, & x \in [-1; 1], \\ 2x, & x \in [1, \infty[. \end{cases}$$

Задача 19.

Решить систему:

$$\begin{cases} 3\sqrt{4x + 2y} - 5\sqrt{2x - y} = 2, \\ 7\sqrt{4x + 2y} + 2\sqrt{2x - y} = 32. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $\sqrt{4x+2y}=u$; $\sqrt{2x-y}=v$. Имеем:

$$\begin{cases} 3u-5v=2, \\ 7u+2v=32, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=4, \ v=2, \\ x=3, \ y=2. \end{cases}$$

Задача 20.

Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2, \\ 4y^2-1=3y(x-1). \end{cases}$$

Решение.

Очевидно, что $x\neq 0$, $t_1+t_2=2$. Но $t_2=\dfrac{1}{t_1}$. Значит, $\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}=1$, откуда $x=2$. Подставим $2y^2-3y+1=0$.

$$y_1=1;\ y_2=\frac{1}{2}.$$

Задача 21.

Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^3}{y}}-\sqrt{\dfrac{y^3}{x}}=\dfrac{65}{6}, \\ x-y=5. \end{cases}$$

Решение.

Представим первое уравнение системы в виде

$$\frac{x^2-y^2}{\sqrt{xy}}=\frac{65}{6}.$$

Принимая во внимание, что $x-y=5$, получаем

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{13}{6},\ \text{или}\ 36(x+y)^2=169xy.$$

Подставив из второго уравнения $y=x-5$,

$x^2-5x-36=0$. Окончить самостоятельно.

Задача 22.

Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{y^3(1+x^6)}{x^3(1+y^6)} = \dfrac{351}{1168}. \end{cases}$$

Решение.

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{y^2(1-x^2+x^4)}{x^2(1-y^2+y^4)} = \frac{117}{292}.$$

Положим $1+x^2 = ux$ и $1+y^2 = vy$. Тогда

$$1+x^4 = (u^2-2)\,x^2 \text{ и } 1+y^4 = (v^2-2)\,y^2.$$

Подставив в первое данное уравнение и полученное, найдем $\dfrac{u}{v} = \dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{u^2-3}{v^2-3} = \dfrac{117}{292}$, откуда $u = \pm\dfrac{5}{2}$; $v = \pm\dfrac{10}{3}$, следовательно, $1+x^2 = \pm\dfrac{5}{2}x$; $1+y^2 = \pm\dfrac{10}{3}y$;

$$x = \pm 2;\quad x = \pm\frac{1}{2};\quad y = \pm 3;\quad y = \pm\frac{1}{3}.$$

Итак, $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $x_2 = 2$; $y_2 = \dfrac{1}{3}$;

$$x_3 = \frac{1}{2};\quad y_3 = 3;\quad x_4 = \frac{1}{2};\quad y_4 = \frac{1}{3};$$

$$x_5 = -2;\quad y_5 = -3;\quad x_6 = -2;\quad y_6 = -\frac{1}{3};$$

$$x_7 = -\frac{1}{2};\quad y_7 = -3;\quad x_8 = -\frac{1}{2};\quad y_8 = -\frac{1}{3}.$$

Задача 23.

Решить систему:

$$1)\ \begin{cases} y^3 = x^3 + 2x^2 + x, & (1) \\ x^3 = y^3 + 2y^2 + y, & (2) \end{cases}$$

Решение.

Решим систему 1)

1) Вычтем из первого уравнения второе.

$$y^3 - x^3 = x^3 + 2x^2 + x - 2y^2 - y;$$

$$2y^3 + 2y^2 + y = 2x^3 + 2x^2 + x \Leftrightarrow f(y) = f(x);$$

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x; \; f'(x) = 6x^2 + 4x + 1 > 0.$$

Функции возрастают и симметричны. Подставим вместо y x. Получим:

$$x^3 = x^3 + 2x^2 + x;$$

$$x_{1,2} = 0, \; x_3 = -\frac{1}{2}$$

Задача 24.

$$\frac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2+1} + y^2 = 3; \qquad (1)$$

$$x + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}+x} + y^2 = 0. \qquad (2)$$

Решение.

Умножим числитель и знаменатель дроби уравнения (2) на $\sqrt{x^2+1} - x$. Полученное уравнение разделим на y, который тоже отличен от нуля, если входит в решение системы. Получим $\frac{x}{y} + \sqrt{x^2+1} - x + y = 0$. Исключим $\sqrt{x^2+1}$ с помощью уравнения (1).

$$\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + y^2 + 2x - 2y = 3, \text{ или}$$

$$\frac{x^2}{y^2} + 2x + y^2 - 2\left(\frac{x}{y} + y\right) = 3.$$

Если $\frac{x}{y} + y = z$, то $z^2 - 2z - 3 = 0$, $z = -1$; $z_2 = 3$.

Уравнение (1) запишем в виде:

$$\left(\frac{x^2}{y^2} + 2x + y^2\right) - 2x + 2\sqrt{x^2+1} = 3;$$

$$z^2 - 2x + 2\sqrt{x^2+1} = 3.$$

Если $z = -1$, то $\sqrt{x^2+1} = 1 + x$, откуда $x = 0$. Тогда (2) дает $y_1 = 0$, $y_1 = -1$, где $y = 0$ (не удовл.) (1).

Задача 25.

Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{5}, & (1) \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4}{5}. & (2) \end{cases}$$

Решение.

Ясно, что если $x = 0$ или $y = 0$, то система решений не имеет. Поэтому мы можем считать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Домножим уравнение (1) на x, а (2) на y.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3x}{5}, & (3) \\ \dfrac{y^2(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4y}{5}. & (4) \end{cases}$$

Вычтем из уравнения (3) уравнение (4). Получим:

$$\frac{x^2y^2 + x^2 - y^2x^2 + y^2}{x^2+y^2} = \frac{3x-4y}{5};$$

$$3x - 4y = 5. \qquad (*)$$

Систему (1) можно переписать в виде:

$$\frac{y^2+1}{x^2+y^2} = \frac{3}{5x}; \qquad (1')$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+y^2} = \frac{4}{5y}. \qquad (2')$$

Сложим уравнения (1′) и (2′).

Получим

$$\frac{x^2+y^2+1-1}{x^2+y^2}=\frac{3}{5x}+\frac{4}{5y};$$

$$5xy=3y+4x. \qquad (**)$$

Теперь остается совместно решить систему уравнений (*) и (**).

$$\begin{cases}3x-4y=5, & (5)\\ 5xy=3y+4x. & (6)\end{cases}$$

Из (5) находим, что $x=\frac{5+4y}{3}$ и подставляем в уравнение (6):

$$\frac{5y(5+4y)}{3}=3y+\frac{4(5+4y)}{3};$$

$$25y+20y^2=9y+20+16y;$$

$$20y^2=20;\ \ y_1+1;\ \ y_2=-1.$$

Подставив значения y в уравнение (5) находим, что

$$x_1=3;\ \ x_2=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=1;\end{cases}\ \ \begin{cases}x_2=\frac{1}{3},\\ y_2=-1\end{cases}.$

Задача 26.

Решить систему

$$\begin{cases}x^3y=9,\\ 3x+y=6.\end{cases}$$

Решение.

Очевидно, что $x>0$, $y>0$. Применим неравенство Коши.

$$\sqrt[4]{x^3y}\leqslant\frac{3x+y}{4},$$

Значит, $\sqrt[4]{9}\leqslant\frac{3}{2}$ (из данной системы). Однако тогда, как легко проверить, это неравенство неверно. Следовательно, данная система не имеет действительных решений.

Задача 27.

Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt[3]{10x-y}+\sqrt{3x-y}=3,\\ 2x+y+\sqrt{3x-y}=5.\end{cases}$$

Решение.

Обозначим $\sqrt[3]{10x-y}$ через u, $\sqrt{3x-y}=v$. Получим

$$2x+y=2\frac{u^3-v^3}{7}+\frac{3u^3-10v^3}{7}=\frac{5u^3-12v^2}{7},$$

и исходная система примет вид:

$$u+v=3;\ \ 5u^3-12v^2+7v=35,\ \text{или:}$$

$$5u^3-12u^2+65u-122=0;$$

$$u=2;\ v=1;\quad x=2;\ y=1.$$

Задача 28.

При каких действительных значениях параметров a, b и c уравнения

$$xy-yz=1\ \text{ и}$$

$$axy+byz+c\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2+1}+2}$$

эквивалентны?

Решение.

Правую часть второго уравнения преобразуем к виду:

$$\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+1.$$

Рассматривая решение $(0;\ 1;\ -1)$; $(1;\ 1;\ 0)$; $(2;\ 1;\ 1)$ первого уравнения и подставляя их во второе уравнение, получаем необходимое условие:

$$\begin{cases}-b+c=2,\\ a+c\sqrt{2}=1+\sqrt{2},\\ 2a+b+c\sqrt{5}=1+\sqrt{5}\end{cases}$$

для параметров a, b и c, откуда $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$. Подставляя эти значения параметров во второе уравнение, убеждаемся, что оно будет равносильно первому уравнению:

Ответ: $a = 1$; $b = -1$; $c = 1$.

Задача 29.

Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{9}{5}x, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5 + 3x}{6(5 - y)}. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения системы получаем

$$30x - 6xy = 5y + 3xy \Leftrightarrow 9xy = 30x - 5y \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{5}x = 6\frac{x}{y} - 1 \quad (y \neq 0 \text{ из условия задачи}).$$

Найденное выражение подставляем в первое уравнение системы, записанное предварительно в виде

$$\frac{\dfrac{x}{y} + \sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 1}}{\dfrac{x}{y} - \sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 1}} = \frac{9}{5}x;$$

$$\frac{\dfrac{x}{y} + \sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 1}}{\dfrac{x}{y} - \sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 1}} = 6\frac{x}{y} - 1.$$

Отсюда $\dfrac{x}{y} = u$. Тогда $\dfrac{u + \sqrt{u^2 - 1}}{u - \sqrt{u^2 - 1}} = 6u - 1$;

$$\frac{(u + \sqrt{u^2 - 1})^2}{u^2 - (u^2 - 1)} = 6u - 1;$$

$$u^2 + u^2 - 1 + 2u\sqrt{u^2 - 1} = 6u - 1;$$

$$u^2 + u\sqrt{u^2-1} - 3u = 0;$$

$$u\left(u + \sqrt{u^2-1} - 3\right) = 0.$$

1) $u = 0$; $x = 0$ — не удовлетворяет

2) $u = \frac{5}{3}$, т.е. $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ $y = 3$, $x = 5$.

Ответ: (5; 3).

Задача 30.

Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} 6x - 5y + 2z = 0, \\ 16x - 17y + 6z = 0. \end{cases}$$

Решение.

Выражая x и y через z, получим $x = -\frac{2z}{11}$ и $y = \frac{2z}{11}$, поэтому $z = 11t$, $x = -2t$ и $y = 2t$, где t — любое целое число.

Задача 31.

Решить систему:

$$\begin{cases} x^3y + y^3x = \frac{10}{9}(x+y)^2, \\ x^4y + y^4x = \frac{2}{3}(x+y)^3. \end{cases}$$

Решение.

Имеем:

$$\begin{cases} xy\left(x^2 + y^2\right) = \frac{10}{9}(x+y)^2, \\ xy\left(x^3 + y^3\right) = \frac{2}{3}(x+y)^3, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} xy\left[(x+y)^2 - 2xy\right] = \frac{10}{9}(x+y)^2, \\ xy\left\{(x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right]\right\} = \frac{2}{3}(x+y)^3. \end{cases}$$

Сделаем замну: $x + y = z$; $xy = t$, тогда

$$\begin{cases} z^2 t - 2t^2 - \dfrac{10}{9} z^2 = 0, \\ z^3 t - 3zt^2 - \dfrac{2}{3} z^3 = 0, \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} t(z^2 - 2t) = \dfrac{10}{9} z^2, \\ tz(z^2 - 3t) = \dfrac{2}{3} z^3. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$a)\ \begin{cases} z = 0, \\ t(z^2 - 2t) = \dfrac{10}{9} z^2, \end{cases}$$

$$б)\ \begin{cases} t(z^2 - 3t) = \dfrac{2}{3} z^3, \\ t(z^2 - 2t) = \dfrac{10}{9} z^2. \end{cases}$$

$$a)\ z_1 = 0,\ \ t_1 = 0 \quad \text{и} \quad б)\ \frac{z^2 - 2t}{z^2 - 3t} = \frac{5}{3};\ t = \frac{2}{9} z^2.$$

Ответ: $(0;\ 0);\ (-2;\ -1);\ (-1;\ -2);\ (1;\ 2);\ (2;\ 1)$.

Задача 32.

Решить систему: $\begin{cases} x = y^3 - 3y, \\ y = 3x - x^3. \end{cases}$

Решение.

Имеем:

$$\begin{cases} y^3 = x + 3y, \\ x^3 = 3x - y. \end{cases}$$

1) $x = y = 0$;
2) Пусть $x \neq 0$; $y \neq 0$. Положим $y = tx$. Тогда

$$\frac{y^3}{x^3} = \frac{x + 3y}{3x - y} = \frac{1 + 3t}{3 - t} = t^3.$$

Отсюда

$$t^4 - 3t^3 + 3t + 1 = 0, \text{ или } (t^2 - 1)^2 - 3t(t^2 - 1) + 2t^2 = 0.$$

Следовательно, $t^2 - 1 = \dfrac{3t \pm t}{2}$,

$$t = 1 \pm \sqrt{2};\ t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Задача 33.

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Доказать: $x_1^{5n} + x_2^{5n} + x_3^{5n} + x_4^{5n} = 4$, где x — корень.

Решение.

Домножим на $x - 1$:

$$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0;\quad x^5 - 1 = 0.$$

Итак, $x = \sqrt[5]{1}$, или $x^5 = 1$. Окончить самостоятельно.

Задача 34.

Решить уравнение $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x^2}{b} + \dfrac{x^3}{c} = bc$,

где $ab^2 + 1 = 0$, $abc \neq 0$.

Решение.

Умножим на abc:

$$bcx + acx^2 + abx^3 = ab^2c^2.$$

Так как $ab^2 = -1$, то уравнение запишется:

$$bcx + acx^2 + abx^3 + c^2 = 0;\ \text{или}$$

$$c\,(bx + c) + ax^2\,(c + bx) = 0;$$

$$(bx + c)(ax^2 + c) = 0;$$

$$x_1 = -\frac{c}{b} = abc.$$

Ясно, что $a < 0$. Если $c > 0$, то получим еще два действительных корня:

$$x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_3 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Задача 35.

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330. \end{cases}$$

$$x_1 = 25; \ \ y_1 = 36; \qquad x_2 = 36; \ \ y^2 = 25.$$

Указание.

Второе уравнение умножим на 3 и сложим с первым, получим куб суммы чисел $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$, а левая часть первого уравнения — сумма кубов этих чисел. Окончить самостоятельно.

Задача 36.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/2} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/2} - 1 = \dfrac{61}{(xy)^{1/2}}, \\ x^{3/4}\,y^{1/4} + y^{3/4}\,x^{1/4} = 78. \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$x + y - (xy)^{1/2} = 61. \qquad (1)$$

Из второго $x^{1/4}\,y^{1/4}\,(x^{1/2} + y^{1/2}) = 78$, или

$$x^{1/2} + y^{1/2} = 78\,x^{-1/4}\,y^{-1/4}.$$

Возведя это уравнение в квадрат, найдем

$$x + y + 2x^{1/2}\,y^{1/2} = 78^2\,x^{-1/2}\,y^{-1/2}. \qquad (2)$$

Вычтя из уравнения (2) уравнение (1), получим

$$3\,(xy)^{1/2} = 78^2\,x^{-1/2}\,y^{-1/2} - 61, \text{ откуда}$$

$$(xy)^{1/2} = 36 \text{ или } (xy)^{1/2} = -\frac{169}{3} \in \varnothing;$$

$$x_1 = 81, \ \ y_1 = 16; \quad x_2 = 16, \ \ y_2 = 81.$$

Задача 37.

Решить систему:

$$\begin{cases} x^3 = 31x^2 - 4y^2, \\ y^3 = 31y^2 - 4x^2. \end{cases}$$

Решение.

$$\frac{x^3}{y^3} = \frac{31\frac{x^2}{y^2} - 4}{31 - 4\frac{x^2}{y^2}}.$$

Положив $\frac{x}{y} = t$, получим

$$t^3 = \frac{31t^2 - 4}{31 - 4t^2}, \text{ или } 31t^2(t-1) = 4(t^5 - 1), \text{ откуда}$$

$$t - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\text{или } 31t^2 - 4(t^4 + t^3 + t^2 + 1) = 0. \tag{2}$$

Из уравнения (1) $t = 1$; $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = y_2 = 27$.

Из уравнения (2) $4\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + 4\left(t + \frac{1}{t}\right) = 27$, откуда

$$t_1 = 2; \quad t_2 = \frac{1}{2}; \quad t_3 = (-7 \pm \sqrt{33});$$

$$x_3 = 31 - \frac{4}{t^2} = 30; \quad x_4 = 15; \quad x_{5,6} = \frac{7}{2}(3 \pm \sqrt{33});$$

$$y_3 = 31 - 4t^2 = 15; \quad y_4 = 30; \quad y_{5,6} = \frac{7}{2}(3 \pm \sqrt{33}).$$

Задача 38.

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = \dfrac{31}{7}, \\ \dfrac{1 + y + x^2}{1 + x + y^2} = \dfrac{23}{15}. \end{cases}$$

Решение.

Рассматривая каждое уравнение как пропорцию, составим производные пропорции. Получим

$$\frac{2 + x + y + x^2 + y^2}{(x - y)(x + y + 1)} = \frac{19}{12};$$

$$\frac{2 + x + y + x^2 + y^2}{(x - y)(x + y - 1)} = \frac{19}{4}.$$

Разделив одно из полученных уравнений на другое, получим $\dfrac{x+y-1}{x+y+1} = \dfrac{1}{3}$, откуда $x + y = 2$ или $y = 2 - x$.

Подставив $2 - x$ вместо y в первое данное уравнение, получим: $4x^2 - 27x + 35 = 0$, откуда

$$x_1 = 5 \text{ и } x_2 = \frac{7}{4}, \text{ тогда } y_1 = -3,\ y_2 = \frac{1}{4}.$$

Задача 39.

Решить систему: $\begin{cases} x^3 = 31x^2 - 4y^2, \\ y^3 = 31y^2 - 4x^2. \end{cases}$

Решение.

Очевидно, что $x_1 = y_1 = 0$. Разделим первое уравнение на второе при $x_1 \neq 0$; $y_1 \neq 0$. Получим:

$$\frac{x^3}{y^3} = \frac{31\dfrac{x^2}{y^2} - 4}{31 - 4\dfrac{x^2}{y^2}}; \quad \frac{x}{y} = t;$$

$$t^3 = \frac{31t^2 - 4}{31 - 4t^2}, \text{ или } 31t^2(t-1) = 4(t^5 - 1),$$

откуда $t - 1 = 0$;

$$31t^2 = 4(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1); \qquad (4)$$

$$x_1 = y_1 = 0, \quad y_2 = x_2 = 22.$$

$$(2):\quad 4\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + 4\left(t + \frac{1}{t}\right) = 2;$$

$$t_1 = 2; \quad t_2 = \frac{1}{2}; \quad t_{3,4} = \frac{1}{4}(-7 \pm \sqrt{33}).$$

Задача 40.

Решить систему:

$$\begin{cases} x = y^3 - 3y, \\ y = 3x - x^3. \end{cases}$$

Решение.

Имеем:

$$\begin{cases} y^3 = x + 3y, \\ x^3 = 3x - y. \end{cases}$$

1) $x = y = 0$;

2) $x \neq 0$; $y \neq 0$.

Положим $y = tx$. Тогда $t = \dfrac{y^3}{x^3} = \dfrac{x + 3y}{3x - y} = \dfrac{1 + 3t}{3 - t} = t^3$.

Отсюда $t^4 - 3t^3 + 3t + 1 = 0$;

$$(t^2 - 1)^2 - 3t\,(t^2 - 1) + 2t^2 = 0;$$

$t^2 = \dfrac{3t \pm t}{2}$; $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Окончить самостоятельно.

Задача 41.

Решить систему:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. \end{cases}$$

Решение.

Вычтем из первого уравнения второе:

$$y^2 - x^2 = x^3 - y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2x + 2y, \text{ или}$$

$$y^3 - 2y^2 + 2y = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Обозначим $f(y)$ и $f(x)$ соответственно левую и правую части уравнения. Получим $f(y) = f(x)$.

Покажем, что $f(x)$ (следовательно, и $f(y)$) — возрастающая функция. Действительно, $f'(x) > 0$. Имеем:

$$y = x \text{ и } x^3 - 4x^2 + 2x = 0.$$

$$x_2 = 0; \quad y_2 = 0;$$

$$x_3 = 2 + \sqrt{2}; \quad y_3 = 2 + \sqrt{2};$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{2}; \quad y_1 = 2 - \sqrt{2}.$$

Задача 42.

Решить систему:

$$\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = a, \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

Решение.

Очевидно, что $x \neq 0$, $y \neq 0$. Перемножим данные уравнения.

$$x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0, \text{ или } xy - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Сложим данные уравнения.

$$2xy - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = a + \frac{1}{a},$$

и, следовательно, $xy = a + \dfrac{1}{a}$. Тогда из данных уравнений найдем $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{a}$. Перемножим последние уравнения, найдем $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2+1}$, а разделив одно уравнение на другое,

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{a^2+1}.$$

Задача 43.

$$\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{(1-x)(1-y)} = a, \\ \sqrt{x(1-y)} + \sqrt{y(1-x)} = b. \end{cases}$$

Решение.

Замена: $u = \sqrt{xy}$, $v = \sqrt{(1-x)(1-y)}$, тогда

$$v^2 = 1 - (x+1) + xy, \text{ откуда } x + y = 1 + u^2 - v^2.$$

Возводя в квадрат второе уравнение системы, получим $(u-v)^2 = 1 - b^2$. Итак, задача сводится к решению системы уравнений: $u + v = a$, $(u - v)^2 = 1 - b^2$.

Задача 44.

Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{y^2(1+x^4)}{x^2(1+y^4)} = \dfrac{9}{41}. \end{cases}$$

Решение.

Очевидно, что $x \neq 0$; $y \neq 0$. Замена $xy = u$; $\dfrac{y}{x} = v$, тогда $x^2 = \dfrac{u}{v}$; $y^2 = uv$. Подставив эти значения в данное уравнение, получим:

$$\frac{u+v}{1+uv} = \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \frac{u^2+v^2}{1+u^2v^2} = \frac{9}{41},$$

откуда

$$u + v = \frac{3}{5}(1+uv), \tag{1}$$

$$u^2 + v^2 = \frac{9}{41}(1+u^2v^2). \tag{2}$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (1) и вычтем уравнение (2), получим

$$2uv = \frac{144}{1025} + \frac{18}{25}uv + \frac{144}{1025}u^2v^2, \text{ или}$$

$$9u^2v^2 - 82uv + 9 = 0;$$

$$uv = 9 \quad \text{и} \quad uv = \frac{1}{9};$$

$$u_1 = v_1 = 3, \quad u_2 = v_2 = \frac{1}{3};$$

$$x = \pm 1; \quad y = \pm 3 \quad \text{и} \quad x = 1; \ \pm 3.$$

Задача 45.

Решить систему:

$$\begin{cases} xy + 2y = \dfrac{x^3}{y}, \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}. \end{cases}$$

Решение.

Очевидно, что $x \neq 0$; $y \neq 0$. Сделаем подстановку $xy = z$; $\dfrac{x}{y} = t$. Выполняя почленное деление этих равенств, получим:

$$y^2 = \frac{z}{t} \text{ и } x^2 = zt.$$

Исходная система примет вид:

$$\begin{cases} z + 24 = t^2 z, \\ zt^2 - 6t^2 = z. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} t_1 = -2, \\ z_1 = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} t_2 = 2, \\ z_2 = 8. \end{cases}$$

t_1 и t_2 — вещественных решений не дают. Воспользовавшись $t_2 = 2$, $z_2 = 8$, получим

$$\begin{cases} xy = 8, \\ \dfrac{x}{y} = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -4, \\ y_1 = -2, \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad \begin{matrix} x_2 = 4, \\ y_2 = 2. \end{matrix}$$

Задача 46.

Решить систему:

$$\begin{cases} xy + \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} = a, \\ x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - b^2}. \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения: $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = a - xy$. Возведя в квадрат, найдем $x^2 + y^2 = 1 + 2axy - a^2$.

Возведя в квадрат второе уравнение, найдем

$$x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = 1 - b^2, \text{ или}$$

$$1 + 2axy - a^2 - 2x^2y^2 + 2xy(a - xy) = 1 - b^2, \text{ или}$$

$$4x^2y^2 - 4axy + a^2 = b^2, \text{ или } (2xy - a)^2 = b^2;$$

$$2xy - a = \pm b;\quad x^2 + y^2 = 1 \pm ab.$$

Из двух последних уравнений

$x + y = \pm\sqrt{(1+a)(1 \pm b)}$ и $x - y = \pm\sqrt{(1-a)(1 \pm b)}$.

Задача 47.

Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = a^2, \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = b^2. \end{cases}$$

Решение.

$$x \neq 0;\quad y \neq 0;\quad a - b \neq 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 + y^2) = a^2, \\ \dfrac{y}{x}(x^2 + y^2) = b^2, \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2};\quad \frac{x}{y} = \pm\frac{a}{b}.$$

Так как $\dfrac{x}{y} > 0$, получаем:

$$а)\ \begin{cases} ab > 0, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}, \\ x^2 + y^2 = ab, \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} ab < 0, \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{a}{b}, \\ x^2 + y^2 = -ab, \end{cases}$$

Ответ: *а)* $x_{1,2} = \pm a\sqrt{\dfrac{ab}{a^2+b^2}}$, $y_{1,2} = \pm b\sqrt{\dfrac{ab}{a^2+b^2}}$;

б) $x_{1,2} = \pm a\sqrt{\dfrac{-ab}{a^2+b^2}}$, $y_{1,2} = \pm b\sqrt{\dfrac{-ab}{a^2+b^2}}$.

Задача 48.

Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 420, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 280. \end{cases}$$

Решение.

$$\frac{x^2 + y\sqrt{xy}}{y^2 + x\sqrt{xy}} = \frac{420}{280} = \frac{3}{2}, \text{ или } \frac{\sqrt{x}\,(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})}{\sqrt{y}\,(y\sqrt{y} + x\sqrt{x})} = \frac{3}{2},$$

откуда $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{3}{2}$; $x = \dfrac{9y}{4}$; $x = 18$; $y = 8$.

Задача 49.

Решить систему:

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = x + 5y. \end{cases}$$

Решение.

Складывая и вычитая уравнения, получим:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6\,(x + y), \\ x^3 - y^3 = 4\,(x - y), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 6) = 0, \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 6 = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 6 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Из системы уравнений (1) получаем решения $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Чтобы решить систему уравнений (2), нужно найти из первого уравнения y, т.е. $y = -x$, подставляя его во второе уравнение, получим $x^2 - x^2 + x^2 - 4 = 0$, т.е. $x_2 = 2$; $y_2 = -2,...$ (9 решений).

Задача 50.

Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 - x\sqrt{xy} = 8, \\ y^2 - y\sqrt{xy} = -1. \end{cases}$$

Решение.

Очевидно, что решения данной системы должны удовлетворять условие $y \neq 0$. Замена $\frac{x}{y} = t$. Тогда $x = yt$. Это значение x подставляем в оба уравнения системы:

$$\begin{cases} y^2 t^2 - yt\sqrt{y^2 t} = 8, \\ y^2 - y\sqrt{y^2 t} = -1, \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} y^2 t^2 - y\,|y|\,t\sqrt{t} = 8, \\ y^2 - y\,|y|\,\sqrt{t} = -1. \end{cases} \qquad (1)$$

а) Найдем все решения, которые удовлетворяют условию $x - y > 0$. При таких значениях x и y имеем:

$$x + y - \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x - y} = 6, \text{ или } x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 - y^2} - 6 = 0,$$

откуда, поскольку $\sqrt{x^2 - y^2} \geqslant 0$, $\sqrt{x^2 - y^2} = 3$ и $x^2 - y^2 = 9$.

Потому при $x - y > 0$ данная система уравнений эквивалентна такой системе

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ xy = 20, \end{cases} \qquad x_1 = 5; \ y_1 = 4.$$

б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4, \\ xy = 20, \end{cases}$ при условии $x - y < 0$,

$$x_2 = -\sqrt{\sqrt{404} + 2}, \quad y_2 = -\sqrt{\sqrt{404}}.$$

Задача 51.

Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 = y^3 - 2y^2 + 2y, \\ x^4 + y^4 = 2. \end{cases}$$

Решение.

Имеем:

$$x^2 - 1 = (y-1)(y^2 - y + 1);$$

$$y > 1 \;\Rightarrow\; x^2 > 1 \;\Rightarrow\; x^4 + y^4 > 2;$$

$$0 \leqslant y < 1 \;\Rightarrow\; x^2 < 1 \;\Rightarrow\; x^4 + y^4 < 2;$$

$$y < 0 \;\Rightarrow\; x^2 = y^3 - 2y^2 + 2y < 0.$$

Задача 52.

Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = 2, \\ \dfrac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = \dfrac{7}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Возведем каждое уравнение в квадрат и вычтем одно из другого. Получим $x^2 - y^2 = \frac{15}{16}$. Теперь для нахождения x и y будем иметь систему:

$$\begin{cases} x - y\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{1}{2}, \\ y - x\dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{7}{16}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(8 + \frac{7}{4}\sqrt{15}\right)$; $(7 + 2\sqrt{15})$.

Задача 53.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $\dfrac{1}{2x-y}$ через u и $\dfrac{1}{x-2y}$ через v. В новых обозначениях данная система имеет вид

$$\begin{cases} 2u + 3v = \dfrac{1}{2}, \\ 2u - v = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных относительно u и v уравнений, находим $u = \dfrac{1}{12}$, $v = \dfrac{1}{9}$. Этим доказано, что все решения данной системы удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} 2x - y = 12, \\ x - 2y = 9. \end{cases}$$

Этим равенствам удовлетворяет единственная пара чисел: $x_1 = 5$ и $y_1 = -2$. Подставляя найденные числа в исходную систему, убеждаемся, что они дают решение.

Ответ: $x = 5$, $y = -2$.

Задача 54.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 3xy + y^3 = a, \\ x + y = xy. \end{cases}$$

Указать те значения a, при которых система уравнений имеет действительные решения.

Решение.

Обозначив $x+y$ через t и заметив, что $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, запишем первое уравнение в виде

$$t^3-3t^2+3t-1=a-1, \text{ или } (t-1)^3=a-1.$$

Отсюда $t=\sqrt[3]{a-1}+1$ и числа x и y являются корнями квадратного уравнения

$$z^2-(\sqrt[3]{a-1}+1)z+(\sqrt[3]{a-1}+1)=0.$$

Это уравнение имеет действительные корни при $a\leqslant 0$ и при $a\geqslant 28$. Теперь легко найти и действительные решения системы.

Задача 55.

Решить систему:

$$\begin{cases} nx_1=x_2x_3=x_4x_5=x_6x_7=mx_8, \\ x_1+x_2=x_3+x_4=x_5+x_6=x_7+x_8=m+n, \end{cases} \text{ где } m, n>0.$$

Решение.

Система имеет очевидное положительное решение

$$x_1=x_3=x_5=x_7=m,$$

$$x_2=x_4=x_6=x_8=n.$$

Покажем, что других положительных решений система не имеет. Действительно, пусть $x_1<m$, тогда $x_2>n$ $(x_1+x_2=m+n)$ и $x_3<m$ (так как $x_2\cdot x_3=nx_1<mn$). Аналогично, $x_4>n$, $x_5<m$, $x_6>n$, $x_7<m$, $x_8>n$, но $x_8=\frac{n}{m}<n$, что противоречит предыдущему неравенству. Точно так же приходим к противоречию, предположив, что $x_1>m$.

Применение систем для решения уравнений

Задача 1. Решить уравнение:

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1.$$

Решение.

Введем новые неизвестные

$$\begin{cases} u=\sqrt{x+2}\geqslant 0, \\ v=\sqrt{x-a+2}\geqslant 0, \end{cases} \text{ или } u^2-v^2=a,$$

и исходное уравнение принимает вид: $u-v=1$. Имеем, таким образом,

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^2-v^2=a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1, \\ u+v=a, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$u=(a+1)\cdot\frac{1}{2};\quad v=(a-1)\cdot\frac{1}{2}.$$

$$\text{Итак, } \begin{cases} \sqrt{x+2}=(a+1)\cdot\dfrac{1}{2}\geqslant 0, \\ \sqrt{x-a+2}=\dfrac{1}{2}(a-1)\geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $x=\dfrac{(a+1)^2}{4}-2$; при $a\geqslant 1$, при $a<1$, решений нет.

Задача 2. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$$

Решение.

$u=\sqrt[3]{2-x}$; $v=\sqrt{x-1}\geqslant 0$. Тогда

$$\begin{cases} u^3+v^3=1, \\ u+v=1. \end{cases} \tag{1}$$

Следовательно, $u^3+u^2-2u=0$, откуда $u\in\{0;1;-2\}$, так что система (1) имеет 3 решения: $(0; 1)$; $(1; 0)$; $(-2; 3)$, после чего находим.

Ответ: 2; 1; 10.

Задача 3. Решить уравнение:

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4.$$

Решение.

Замена: $\sqrt[4]{97-x}=u\geqslant 0$ и $\sqrt[4]{x-15}=v\geqslant 0$.

$$\begin{cases}u^4+v^4=82,\\ u+v=4,\end{cases}\quad u^4+v^4=(16-2uv)^2-2u^2v^2;$$

$$t=uv,\ (16-2t)^2-2t^2=82;$$

$$t=29 \text{ или } t=3, \text{ значит,}$$

$$\begin{cases}u+v=4,\\ uv=29,\end{cases}\quad \text{или}\quad 3;$$

$$\begin{cases}u+v=4,\\ uv=3,\end{cases}\quad (1;3);\ (3;1).$$

Ответ: 16; 96.

Задача 4. Решить уравнение:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=1.$$

Решение.

Замена: $\sqrt{x+1}=u\geqslant 0$, $\sqrt{\frac{x-1}{x}}=v\geqslant 0$, так что $u-v=1$, $x=u^2-1$; $x=\frac{1}{1-v^2}$. Значит,

$$(u^2-1)(v^2-1)=-1.$$

Итак, u и v удовлетворяют системе

$$\begin{cases}u-v=1,\\ u^2v^2-u^2-v^2+2=0.\end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$(u\cdot v)^2-(u-v)^2-2uv+2=0.$$

Так как $u-v=1$, приходим к уравнению

$$(u\cdot v)^2-2uv+1=0,$$

откуда $u \cdot v = 1$. Пришли к системе

$$u \cdot v = 1; \quad u - v = 1,$$

$$u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad v = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 5. Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x.$$

Решение.

Положим $\sqrt{x^2 - \dfrac{7}{x^2}} = u \geq 0$; $\sqrt{x - \dfrac{7}{x^2}} = v \geq 0$. Тогда

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = x^2 - x, \\ u + v = x, \end{cases} \quad \text{или} \quad x(u - v) = x(x - 1).$$

Так как $x \neq 0$, то u и v удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u - v = x - 1, \\ u + v = x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x - \dfrac{1}{2}, \\ v = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Любое из равенств последней системы приводит к уравнению $4x^3 - x^2 - 28 = 0$.

Заметим, что $x = 2$ является корнем этого уравнения:

$$4x^3 - x^2 - 28 = 4x^3 - 8x^2 + 7x^2 - 14x +$$

$$+ 14x - 28 = (x - 2)(4x^2 + 7x + 14).$$

Значит, $x = 2$ — решение данного уравнения, так как

$$4x^2 + 7x + 14 \neq 0.$$

Однородные уравнения и системы

Многочлен $f(u, v)$ от двух переменных называют однородным многочленом степени n, если все его одночлены имею степень n. Например, $f(u, v) = 2u^2 - 7uv + 9v^2$ — однородный многочлен второй степени, а $f(u, v) = u^3 - 15u^2 v + 5v^3$ — третьей.

Задача 6.

Дать геометрическую интерпретацию однородного уравнения с двумя неизвестными

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n = 0. \quad (1)$$

Будем считать, что $a_0 \neq 0$.

Решение.

В множество (1) входит начало координат $O(0; 0)$. Если $a_0 = 0$, то $y = 0$ — ось абсцисс.

Разделим обе части уравнения (1) на y^n, мы получим уравнение

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = 0. \quad (2)$$

Корни $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — уравнение (2) определяют прямые $x_1 = t_1 y$, $x_2 = t_2 y$, $x_3 = t_3 y, \ldots, x_k = t_k y$, проходящие через начало координат: $t_1 = -1$; $t_2 = -1$; $t_3 = 2$

Задача 7.

Решить уравнение

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\,\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$$

Решение.

Замена: $\dfrac{x-2}{x+1} = u$, $\dfrac{x+2}{x-1} = v$. Тогда

$$20u^2 - 5v^2 + 48uv = 0.$$

Замена: $\frac{u}{v} = t$ (с проверкой, что $u \neq u \neq 0$). Получаем $20t^2 + 48t - 5 = 0$; $t = -\frac{5}{2}$; $t_2 = \frac{1}{10}$.

Для $t_1 \to \varnothing$; $t_2 \to x_1 = 3$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

Задача 8.

Решить уравнение

$$2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1).$$

Решение.

Положим $u = x - 1$, $v = x^2 + x + 1$. Тогда уравнение примет вид $2v^2 - 7u^2 = 13uv$. В случае $v = u = 0$ — решений нет.

Разделим обе части уравнения на v^2 и введем новое неизвестное $t = \frac{u}{v}$, получим уравнение $7t^2 + 13t - 2 = 0$.

$$t_1 = \frac{1}{7}, \quad t_2 = -2;$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = -1; \quad x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Задача 9.

Решить уравнение $x^2 + 2x + 15 = 2x\sqrt{2x + 15}$.

Решение.

Введем неизвестное: $u = \sqrt{2x + 15}$. Получим однородное уравнение $x^2 + u^2 = 2xu$.

Ответ: $x = 5$.

Задача 10.

Решить уравнение $2\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[6]{x^2 - 1}$.

Решение.

Если положить $u = x + 1$, $v = x - 1$, то получится уравнение однородное, степени $\frac{1}{3}$. Поэтому *а*) $u = \sqrt[6]{x+1}$, $v = \sqrt[6]{x-1}$, если $x \geqslant 1$.

б) $u = \sqrt[6]{-x-1}$, $v = \sqrt[6]{-x+1}$, если $x \leqslant -1$

В первом случае приходим к уравнению

$$2u^2 - uv - v^2 = 0,$$

откуда $2t - 1 - 1 = 0$ на промежутке $x \geqslant 1 - \varnothing$.

Во втором случае (при $x \leqslant -1$)

$$-2u^2 - uv + v^2 = 0; \quad x = -\frac{65}{63}.$$

Задача 12.

Решить систему $\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 0, \\ x^2 + 5y = 6. \end{cases}$

Первое уравнение системы — однородное степени 2.

$$t = \frac{x}{y}, \quad 3t^2 - 2t - 1 = 0, \quad t_1 = 1; \quad t_2 = -\frac{1}{3}.$$

Т.о., либо $y = x$, $y = -3x$. Подставляя во второе уравнение, получим

$$x_1 = y_1 = 1, \quad x_2 = y_2 = -6;$$

$$x_{3,4} = \frac{15 \pm \sqrt{249}}{2}; \quad y_{3,4} = \frac{-45 \pm \sqrt{249}}{2}.$$

Задача 12.

Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - \dfrac{25}{12}xy + 3y^2 = 50, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

Решение.

Умножим второе уравнение системы на 2 и вычтем его из первого.

$$\begin{cases} x - \dfrac{25}{12}xy + y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Из первого уравнения: $t = \dfrac{x}{y}$. Имеем: $t_1 = \dfrac{3}{4}$; $t_2 = \dfrac{4}{3}$.

Подставляя $x = \frac{3}{4}y$ и $x = \frac{4}{3}y$, во втором уравнении находим $x_{1,2} = \pm 3$; $y_{1,2} = \pm 4$; $x_{3,4} = \pm 4$; $y_{3,4} = \pm 3$.

Задача 13.

Решить уравнение $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x$.

Решение.

$$2^x = u; \quad 7^x = v \quad (u > 0; \quad v > 0), \quad u^2 - 2uv - 3v^2 = 0.$$

а) $\frac{u}{v} = -1$ — не подходит;

б) $\frac{u}{v} = 3$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 3$, $x = \log_{\frac{2}{7}} 3$.

18. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Задача 1.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x + 2y + 3z = 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$$

Решение.

Вычитаем из второго уравнения первое. Получим $y + 2z = 1$. Отсюда $y = 1 - 2z$. Подставляем это значение y в первое уравнение, находим $x = z + 3$. Подставляем найденные значения x и y в третье уравнение, получим $3z^2 + z - 2 = 0$. Корни его $z_1 = \frac{2}{3}$ и $z_2 = -1$. Подставляя значение z в уравнения $x = z + 3$ и $y = 1 - 2z$, найдем по два значения x и y:

1) $x = \frac{11}{3}$; $y = -\frac{1}{3}$; $z = \frac{2}{3}$.

2) $x = 2$; $y = 3$; $z = -1$.

Задача 2.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{-x + y + z}{a} = \dfrac{x - y + z}{b} = \dfrac{x + y - z}{c}, \\ xyz = m^2. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $-x + y + z = at$, тогда

$$x - y + z = bt \text{ и } x + y - z = ct.$$

Из этих уравнений:

$$2z = (a + b)\,t; \quad 2y\,(a + c)\,t; \quad 2x = (b + c)\,t,$$

откуда $8yxz = (a + b)(a + c)(b + c)\,t^3$, или $(yxz = m)$

$$8m^3 = (a + b)(a + c)(b + c)\,t^3,$$

откуда $t = \dfrac{2m}{\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}}$. Тогда

$$x = \frac{b+c}{2}t = \frac{m(b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}};$$

$$y = \frac{m(a+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}} \text{ и } z = \frac{m(a+b)}{\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}}.$$

Задача 3.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = z^2, \\ x + y + z = 7, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21. \end{cases}$$

Решение.

Имеем $x + y = 7 - z$, откуда $x^2 + 2xy + y^2 = 49 - 14z + z^2$, но $x^2 + y^2 = 21 - z^2$, $xy = z^2$, а потому получим:

$$21 - z^2 + 2z^2 = 49 - 14z + z^2,$$

откуда $z = 2$. Следовательно, $x + y = 5$ и $xy = 4$, откуда

$$x_1 = 1;\ \ x_2 = 4;\ \ y_1 = 4;\ \ y_2 = 1.$$

Задача 4.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - z = y^2, \\ x^2 - z^2 = 3y^4, \\ y^3 + 3y + x + z = 26. \end{cases}$$

Решение.

Если $y_1 = 0$, то $x_1 = z_1 = 13$. Считая $y \neq 0$, разделим второе уравнение на первое: $x + z = 3y^2$.

Найденное значение $x + y$ подставим в третье уравнение:

$$y^3 + 3y^2 + 3y = 26.$$

Прибавим к левой и правой частям уравнения по 1:

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = 27; \quad (y+1)^3 = 27.$$

Таким образом, имеем $y + 1 = 3$; $y_2 = 2$.

Подставим в данные уравнения $y_2 = 2$, найдем

$$\begin{cases} x - z = 4, \\ x + z = 12, \end{cases}$$

откуда $x_2 = 8$; $z_2 = 4$.

Ответ: $y_1 = 0$; $x_2 = z_1 = 13$; $y_2 = 2$; $x_2 = 8$; $z_2 = 4$.

Задача 5.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61, \\ xy + xz = 2yz. \end{cases}$$

Решение.

Возводим первое уравнений в квадрат, вычитаем второе. Получаем $xy + xz + yz = 54$.

Учитывая третье уравнение, можно заменить первые два слагаемые на $2yz$. Получаем $3yz = 54$, т.е.

$$yz = 18. \qquad (1)$$

Теперь третье уравнение можно записать в виде

$$xy + xz = 2 \cdot 18, \text{ т.е.}$$

$$x(y + z) = 36. \qquad (2)$$

А так как первое уравнение имеет вид

$$x + (y + z) = 13,$$

то из уравнений (2) и (3) можно найти x и $y + z$. Получаем

$$\begin{cases} x = 9, \\ y + z = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 4, \\ y + z = 9. \end{cases}$$

Чтобы найти y и z, воспользуемся уравнением (1). Получим две системы:

$$\begin{cases} y + z = 4, \\ yz = 18, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y + z = 9, \\ yz = 18. \end{cases}$$

Итак, $x = 4,\ y = 6,\ z = 3;\qquad x = 4,\ y = 3,\ z = 6.$

Задача 6.

Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ xy + yz + zx = 47, \\ (z - x)(z - y) = 2. \end{cases}$$

Решение.

Третье уравнение представим в виде

$$z^2 - xz - yz + xy = 2.$$

Сложив его со вторым, получим $z^2 + 2xy = 49$. Отсюда $z^2 = 49 - 2xy$. Подставляем это выражение в первое уравнение. Получим $(x + y)^2 = 49$, а значит, $x + y = \pm 7$. Рассмотрим сначала $x + y = 7$.

Представим второе уравнение в виде

$$xy + z\,(x + y) = 47.$$

Подставим в это выражение $xy = \dfrac{49 - z^2}{2}$ и $x + y = 7$. Получаем $z^2 - 14z + 45 = 0$. Отсюда $z_1 = 5$ и $z_2 = 9$.

Если $z = 5$, то $xy = \dfrac{49 - z^2}{2} = 12$; если же $z = 9$, то $xy = \dfrac{49 - z^2}{2} = -16$. Имеем две системы:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = -16. \end{cases}$$

Всего получаем четыре решения:

1) $x = 3,\ y = 4,\ z = 5;$

2) $x = 4,\ y = 3,\ z = 5;$

3) $x = \dfrac{7 + \sqrt{113}}{2},\ y = \dfrac{7 - \sqrt{113}}{2},\ z = 9;$

4) $x = \dfrac{7 - \sqrt{113}}{2}$, $y = \dfrac{7 + \sqrt{113}}{2}$, $z = 9$.

Теперь положим $x + y = -7$ и тем же способом найдем еще четыре решения.

Ответ: 1) $x = 3$; $y = 4$, $z = 5$;

2) $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$;

3) $x = \dfrac{7 + \sqrt{113}}{2,}$ $y = \dfrac{7 - \sqrt{113}}{2}$, $z = 9$;

4) $x = \dfrac{7 - \sqrt{113}}{2,}$ $y = \dfrac{7 + \sqrt{113}}{2}$, $z = 9$;

5) $x = -3$, $y = -4$, $z = -5$;

6) $x = -4$, $y = -3$, $z = -5$;

7) $x = \dfrac{-7 + \sqrt{113}}{2,}$ $y = \dfrac{-7 - \sqrt{113}}{2}$, $z = -9$;

8) $x = \dfrac{-7 - \sqrt{113}}{2,}$ $y = \dfrac{-7 + \sqrt{113}}{2}$, $z = -9$.

Задача 7.

Решить систему:

$$\begin{cases} xy^4z + 6x^2y = 2z^2, & (1) \\ xz + y^3z^2 = 6x^2y^4, & (2) \\ y^3z - xy^6z^2 = 2x^2 & (3) \end{cases}$$

Решение.

Подставляем $6x^2y = 2z^2 - xy^4z$ во второе уравнение.

Получим $xz = y^3z^2 = 2z^2y^3 - xy^7z$, $xz - z^2y^3 + xy^7z = 0$, откуда $z\,(x - zy^3 + xy^7) = 0$.

При $z = 0$, $x = 0$, $y = \alpha$, где $\alpha \in R$.

При $x - zy^3 = xy^7 = 0$ имеем $zy^3 = x + xy^7$;

$$z = \frac{x + xy^7}{y^3}. \qquad (*)$$

Подставив это выражение во второе уравнение, получим:

$$\frac{x^2(x + xy^7)}{y^3} + \frac{y^3(x + xy^7)^2}{y^6} = 6x^2 y^4;$$

$$x^2 + x^2 y^7 + x^2 + 2x^2 y^7 + x^2 y^{14} - 6x^2 y^7 = 0;$$

$$1 + y^7 + 1 + 2y^7 + y^{14} - 6y^7 = 0;$$

$$2 - 3y^7 + y^{14} = 0.$$

Замена: $y^7 = t$, $t^2 - 3t + 2 = 0$,

$$t_1 = 2, \ \ y_1^7 = 2, \ \ y_1 = 2^{1/7};$$

$$t_2 = 1, \ \ y_2^7 = 1, \ \ y_2 = 1.$$

Подставим $y_1 = 2^{1/7}$ в выражение (*), получим

$$z = \frac{x + 2^{1/7} x}{2^{3/7}},$$

подставляем в уравнение (3):

$$z \cdot x^{3/7} \left(\frac{1 + 2^{1/7}}{2^{3/7}}\right) - x^{6/7} \cdot x^2 \left(\frac{1 + 2^{1/7}}{2^{3/7}}\right)^2 = 2x^2,$$

откуда $x^2 (1 + 2^{1/7})^2 + 2x - (1 + 2^{1/7}) = 0$, откуда

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + (1 + 2^{1/7})^3}}{(1 + 2^{1/7})^2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + (1 + 2^{1/7})^3}}{(1 + 2^{1/7})^2},$$

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + (1 + 2^{1/7})^3}}{(1 + 2^{1/7})^2} \cdot \frac{(1 + 2^{1/7})}{2^{3/7}} =$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{1 + (1 + 2^{1/7})^3}}{2^{3/7}(1 + 2^{1/7})},$$

$$z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + (1 + 2^{1/7})^3}}{2^{3/7}(1 + 2^{1/7})}.$$

Задача 9.

Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = \dfrac{8}{xy}, \\ y^2 - z^2 + x = \dfrac{8}{yz}, \\ z^2 - x^2 + y = \dfrac{8}{zx}. \end{cases}$$

Решение.

Ясно, что $xyz \neq 0$. (1)

Складывая все три уравнения системы, получим

$$x + y + z = \frac{8}{xy} + \frac{8}{yz} + \frac{8}{zx} = \frac{8\,(x + y + z)}{xyz},$$

откуда

1) $x + y + z = 0$; (2)

2) $xyz = 8$. (3)

Рассмотрим уравнение (2). Разделим первое уравнение исходной системы на z, второе на x и приравняем левые части полученных уравнений:

$$\frac{x^2 - y^2 + z}{z} = \frac{y^2 - z^2 + x}{x}, \text{ откуда}$$

$$\frac{(x - y)(x + y)}{z} = \frac{(y - z)(y + z)}{x},$$

и в силу (2)

$$\frac{(x - y)(- z)}{z} = \frac{(y - z)(- x)}{x},$$

т.е. $x - y = y - z$ или $x + y + z = 3y$, $y = 0$, что противоречит условию (1). Т.е. в случае (2) исходная система не имеет решений.

Пусть имеет место (3). Тогда из первых двух уравнений исходной системы получаем

$$x^2 = y^2, \quad y^2 = z^2. \qquad (4)$$

Решив систему (3)-(4), найдем четыре действительных решения.

Ответ: (2; 2; 2); (2; –; –2); (–2; 2; –2); (–2; –2; 2).

Задача 10.

Решить систему

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Если ввести обозначение $f(t) = t^2 - 3t + 3$, то систему можно переписать в виде:

$$y^3 = 9f(x), \quad z^3 = 9f(y), \quad z^3 = f(z).$$

Первое решение. Функция $y = f(t)$ принимает наименьшее значение, равное $\frac{3}{4}$, в точке $t = \frac{3}{2}$. Поэтому если (x_0, y_0, z_0) — решение данной системы, то

$$y_0^3 \geqslant \frac{27}{4}, \quad z_0^3 \geqslant \frac{27}{4}, \quad x_0^3 \geqslant \frac{27}{4}.$$

Поскольку $\frac{27}{4} > \left(\frac{3}{2}\right)^3$, то $x_0 > \frac{3}{2}$, $y_0 > \frac{3}{2}$, $z_0 > \frac{3}{2}$. В области $t > \frac{3}{2}$ функция $f(t)$ монотонно возрастает. Таким образом, если (x_0, y_0, z_0) — решение данной системы, то все три числа x_0, y_0, z_0 лежат в области монотонного возрастания функции $f(t)$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x_0 \geqslant y_0$. Так как $x_0 > \frac{3}{2}$ и $y_0 > \frac{3}{2}$, то $f(x_0) \geqslant f(y_0)$. Из первых двух уравнений системы получаем, что $y_0^3 \geqslant z_0^3$, т.е. $y_0 \geqslant z_0$. Так как $y_0 > \frac{3}{2}$ и $z_0 > \frac{3}{2}$, то отсюда следует, что $f(y_0) \geqslant f(z_0)$ или $z_0^3 \geqslant x_0^3$, т.е. $z_0 \geqslant x_0$.

Итак, получим цепочку неравенств $x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0 \geqslant x_0$, которая означает, что $x_0 = y_0 = z_0$.

2) Пусть $x_0 \leqslant y_0$. Так как $x_0 > \frac{3}{2}$ и $y_0 > \frac{3}{2}$, то $f(x_0) \leqslant f(y_0)$. Подобно первому случаю, находим, что $y_0^3 \leqslant z_0^3$

или $y_0 \leqslant z_0$. Отсюда следует, что $f(y_0) \leqslant f(z_0)$ или $z_0^3 \leqslant x_0^3$, $z_0 \leqslant x_0$. Опять получаем, что $x_0 = y_0 = z_0$.

Итак, показано, что любое решение системы (x_0, y_0, z_0) таково, что $x_0 = y_0 = z_0$. Поскольку любое решение системы (x_0, y_0, z_0) должно превращать все уравнения системы в верные числовые равенства, то, полагая $x_0 = y_0 = z_0 = t_0$, получаем, что все уравнения системы превратились в одно при и то же равенство $(t_0 - 3)^3 = 0$, которое справедливо только при одном значении t_0, а именно, при $t_0 = 3$. Значит, система имеет единственное решение (3; 3; 3).

Второе решение. Так как квадратный трехчлен $t^2 - 3t + 3$ положителен при всех t, то для любого решения (x_0, y_0, z_0) данной системы получаем, что $y_0^3 > 0$, $z_0^3 > 0$, $x_0^3 > 0$, или $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$. Складывая все три уравнения, находим, что

$$(x_0 - 3)^3 + (y_0 - 3)^3 + (z_0 - 3)^3 = 0. \qquad (1)$$

Возможны два случая: $x_0 \geqslant 3$ и $x_0 < 3$.

1) Если $x_0 \geqslant 3$, то из последнего уравнения системы находим, что $9z_0^2 - 27z_0 \geqslant 0$. Так как $z_0 > 0$, то отсюда получаем, что $z_0 \geqslant 3$. Из второго уравнения получаем теперь, что $9y_0 - 27y_0 \geqslant 0$, откуда $y_0 \geqslant 3$. Из (1) теперь следует, что $x_0 = y_0 = z_0 = 3$. Итак, если (x_0, y_0, z_0) решение системы, то $x_0 = y_0 = z_0 = 3$. Проверкой убеждаемся, что действительно (3; 3; 3) есть решение системы.

2) Если $x_0 < 3$, то подобно первому случаю, находим, что $z_0 < 3$. Затем из второго уравнения получаем, что $y_0 < 3$. Итак, в этом случае одновременно $x_0 < 3$, $y_0 < 3$, $z_0 < 3$, что противоречит равенству (1). Значит, доказано, что данная система имеет единственное решение $x_0 = y_0 = z_0 = 3$.

Ответ: (3; 3; 3).

Задача 11.

Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - x^2x - 2y^2 z^3 = 0, \\ x^2 + 2xy + 18yz^2 = 0, \\ 4y^2 + 6xy + 2x^2 z = 9xz^2. \end{cases}$$

Решение.

1) Ясно, что $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,$

$$x_1 = 0,\ \ y_1 = 0,\ \ z_1 = c \ \ (c \in R).$$

2) $x \neq 0,\ \ y \neq 0,\ \ z \neq 0.$

Домножим второе и третье уравнение: на x и $2y$ соответственно.

$$\begin{cases} 4x^2 y + 4x^2 y^2 z + 8y^3 z^3 = 0, \\ x^2 + 2x^2 y + 18xyz^2 = 0, \\ 8y^3 + 12xy^2 + 4x^2 yz - 18xyz^2 = 0. \end{cases}$$

Сложим:

$$(x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3) - 8y^3 z^3 = 0,$$

$$(x + 2y)^3 = (2yz)^3; \quad x + 2y = 2yz.$$

Далее

$$\begin{cases} 1 - z = \dfrac{2y^2 z^3}{x^2}, \\ x + 2y = -\dfrac{18yz^2}{x}, \\ x + 2y = 2yz; \quad \left(1 - z = -\dfrac{x}{2y}\right). \end{cases}$$

Теперь

$$\begin{cases} \dfrac{2y^2 z}{x^2} = -\dfrac{x}{2y}, \\ -\dfrac{18yz^2}{x} = 2yz, \\ x + 2y = 2yz, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y^3 z^3 = -x^3, \\ 6yz = x, \\ x + 2y = 2yz, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{4}\,yz, \\ x = -9z, \\ x + 2y = 2yz, \end{cases}$$

$$1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{9}y; \quad -9z + 9\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}\,z;$$

$$x = \frac{-9\sqrt[3]{2}}{\frac{3\sqrt[3]{2}}{9}+1}; \qquad y = \frac{9}{\sqrt[3]{4}}; \qquad z = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}.$$

Задача 12.

Решить систему

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0, \\ 16x^3 + y^3 + 2z^3 - 12 = 0, \\ 64x^4 + y^4 + 4z^4 - 24 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Домножим три уравнения соответственно на 4; –4; 1. Получим

$$+\begin{cases} 16x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 24 = 0, \\ -64x^3 - 4y^3 - 8z^3 + 48 = 0, \\ 64x^4 + y^4 + 4z^4 - 24 = 0, \end{cases}$$

$$64x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2(y-2)^2 + 4z^2(z-1)^2 = 0.$$

Полученное уравнение имеет восемь решений

$$(0; 0; 0); \quad \left(\frac{1}{2}; 0; 0\right); \quad (0; 2; 0);$$

$$(0; 0; 1); \quad \left(\frac{1}{2}; 2; 0\right); \quad \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right); \quad (0; 2; 1); \quad \left(\frac{1}{2}; 2; 1\right).$$

Проверкой устанавливаем, что данной системе удовлетворяет единственное решение $\left(\frac{1}{2}; 2; 1\right)$.

Задача 13.

Решить систему

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xz + yu = 7, \\ xz^2 + yu^2 = 11, \\ xz^3 + yu^3 = 19. \end{cases}$$

Решение.

Умножив второе и третье уравнение на $z + u$, получим после преобразований:

$$xz^2 + yu^2 + zu\,(x + y) = 7\,(z + u);$$

$$xz^3 + yu^3 + zu\,(xz + yu) = 11\,(z + u),$$

откуда, учитывая условие, имеем

$$7\,(z + u) - 5zu = 11;$$

$$11\,(z + u) + 7zu = 19;$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} z + u = 3, \\ zu = 2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 3;\ y_1 = 2;\ z_1 = 1;\ u_1 = 2;$
$x_2 = 2;\ y_2 = 3;\ z_2 = 2;\ u_2 = 1.$

Глава V. НЕРАВЕНСТВА

19. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Задача 1.

Решить неравенство

$$(x+2)(x^2-x)(3x+1)(x^2+x+1)(7-4x)<0.$$

Решение.

Поскольку $x^2+x+1>0$ при любых x, то данное неравенство эквивалентно неравенству

$$(x+2)\,x\,(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right)>0.$$

Применяя метод интервалов, получим

$$-2<x<-\frac{1}{3},\quad 0<x<1,\quad x>\frac{7}{4}.$$

Задача 2.

Решить неравенство $\dfrac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3}\leqslant\dfrac{1}{x+1}$.

Решение.

Перенеся все члены неравенства в левую часть, получим

$$\frac{x^2+4x-1}{(x+1)(x+3)}-\frac{1}{x+1}\leqslant 0, \text{ или}$$

$$\frac{x^2+3x-4}{(x+1)(x+3)}\leqslant 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{(x-1)(x+4)}{(x+1)(x+3)}\leqslant 0, \text{ или } (x-1)(x+4)(x+1)(x+3)\leqslant 0$$

Применяя метод интервалов заключаем, что решением неравенства является объединение полуинтервалов $[-4;-3)\cup(-1;1]$.

Задача 3.

Решить неравенство $(x-3x-2)(x^2-3x+1)<10$.

Решение.

Пусть $x^2 - 3x - 2 = y$. Тогда неравенство примет вид $y(y + 3) < 0$, или $y^2 - 3y - 10 < 0$, откуда $(y + 5)(y - 2) < 0$.

Решением этого неравенства служит интервал $-5 < y < 2$. Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 2 < 2, \\ x^2 - 3x - 2 > -5, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ x^2 - 3x + 3 > 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} (x - 4)(x + 1) < 0, \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0. \end{cases}$$

Поскольку второе неравенство выполняется при всех x, решением этой системы есть интервал $(-1;\ 4)$.

Задача 4.

Решить неравенство $|x - 3| > |x + 2|$.

Решение.

Неравенство эквивалентно неравенству

$$(x - 3)^2 > (x + 2)^2, \text{ или } x < \frac{1}{2}.$$

Задача 5.

Решить неравенство $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.

Решение.

Очевидно, что $3x - 3 > 0$, или $x > 1$. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - 3 < 3x - 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 < 3x - 3. \end{cases}$$

Решая каждое из четырех неравенств, придем к новой совокупности двух систем

$$\begin{cases} x \leqslant -1, \quad x \geqslant 3, \\ 0 < x < 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 < x < 3, \\ x < -3, \quad x > 2. \end{cases}$$

Итак, $3 \leqslant x < 5$, $2 < x < 3$.

Ответ: $2 < x < 5$.

Задача 6.

Решить неравенство $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x-4} < \frac{1}{30}$.

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-4}\right) + 4\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) =$$

$$= \frac{4}{x^2-5x+6} - \frac{3}{x^2-5x+4}.$$

Полагая теперь $x^2 - 5x + 5 = y$, после преобразований получаем неравенство

$$\frac{y^2 - 30y + 209}{(y-1)(y+1)} > 0, \text{ или}$$

$$(y+1)(y-1)(y-11)(y-19) > 0.$$

Решением последнего служит

$$]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup [9; \infty[.$$

Решив далее совокупность неравенств

$$x^2 - 5x + 5 < 1; \ 1 < x^2 - 5x + 5 < 11; \ x^2 - 5x + 5 > 19,$$

получим ответ: $]-\infty; 1[\cup \left]\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2}; 4\right[$.

Задача 7.

Решить неравенство

$$\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 + \frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2 < \frac{2x^2+72}{x^2-36}.$$

Решение.

Представим правую часть неравенства в виде суммы двух дробей

$$\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x+6}$$

и перенесем эту сумму в левую часть неравенства. Имеем

$$\frac{x+6}{x-6}\left(\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2-1\right)-\frac{x-6}{x+6}\left(\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2-1\right)<0.$$

Применяя формулу разности квадратов для выражений, стоящих в скобках, и произведя несложные преобразования, приводим неравенство к виду

$$4x\cdot\frac{3\left((x-6)(x+4)\right)^2-\left(2(x+6)(x-9)\right)^2}{(x-6)(x+6)(x+4)^2(x-9)^2}<0.$$

Разлагая числитель на множители, приходим к неравенству

$$\frac{x(x^2+36)\left(x-\frac{6+6\sqrt{26}}{5}\right)\left(x-\frac{6-6\sqrt{26}}{5}\right)}{(x-6)(x+6)(x-9)^2(x+4)^2}<0,$$

решив которое методом интервалов, получим ответ

$$]-\infty;\,-6[\;\cup\;\left]\frac{6-6\sqrt{26}}{5};\,-4\right[\;\cup\;]-4;\,0[\;\cup\;\left]6;\,\frac{6+6\sqrt{26}}{5}\right[.$$

Задача 8.

Найти пары целых чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0, \\ y+|x-1|<2. \end{cases}$$

Решение.

Запишем данную систему неравенств следующим образом

$$\begin{cases} y+\frac{1}{2}>|x^2-2x|, \\ y<2-|x-1|. \end{cases}$$

Так как всегда $|x^2-2x|\geqslant 0$ и $|x-1|\geqslant 0$, то

$$-\frac{1}{2}<y<2.$$

Единственными целыми числами y, удовлетворяющими этому неравенству, являются 0 и 1. Следовательно, данная система неравенств, рассматриваемая для целых x и y, может быть совместна лишь при значениях $y = 0$ и $y = 1$. Рассмотрим оба случая.

Случай 1. Если $y = 0$, то система неравенств принимает вид $|x^2 - 2x| < \frac{1}{2}$, $|x - 1| < 2$.

Второму из этих неравенств удовлетворяют лишь целые числа: 0, 1 и 2. Подстановкой нетрудно убедиться, что 0 и 2 удовлетворяют и первому неравенству, а 1 ему не удовлетворяет. Итак, для случая $y = 0$ найдены два решения:

$$x_1 = 0;\ \ y_1 = 0;\ \ x_2 = 2;\ \ y_2 = 0.$$

Случай 2. Если $y = 1$, то исходная система неравенств приводит к следующей:

$$|x^2 - 2x| < \frac{3}{2};\ \ |x - 1| < 1.$$

Второму из этих неравенств удовлетворяет единственное целое число $x = 1$, которое удовлетворяет и первому из неравенств. Итак, в этом случае имеем еще одно решение задачи: $x_3 = 1$, $y_3 = 1$. Таким образом, система неравенств удовлетворяется тремя парами целых чисел.

Задача 9.

Решить неравенство $x^2 + (x + 1)^2 < \dfrac{15}{x^2 + x + 1}$.

Решение.

Данное неравенство перепишем в следующем виде:

$$2x^2 + 2x + 1 - \frac{15}{x^2 + x + 1} < 0, \text{ или}$$

$$2(x^2 + x + 1) - 1 - \frac{15}{x^2 + x + 1} < 0.$$

Введем обозначение $x^2 + x + 1 = y > 0$, ($y > 0$, так как $x^2 + x + 1 \geqslant 0$ при любом действительном x).

Имеем $2y - 1 - \frac{15}{y} < 0$, или, так как $y > 0$, то его можно переписать так:

$$2y^2 - y - 15 < 0,$$

откуда $-\frac{5}{2} < y < 3$.

Значит, $-\frac{5}{2} \leqslant x^2 + x + 1 < 3$, или $-2 < x < 1$.

Задача 10.

Решить неравенство $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 \leqslant 0$.

Решение.

Перепишем данное неравенство так:

$$(x^4 + x^2) - (x^3 + x) - 2\,(x^2 + 1) \leqslant 0,$$

$$x^2\,(x^2 + 1) - x\,(x^2 + 1) - 2\,(x^2 + 1) \leqslant 0,$$

$$(x^2 + 1)(x^2 - x - 2) \leqslant 0,$$

откуда $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

Задача 11.

Решить неравенство $||x| - 2| \leqslant 1$.

Решение.

Данное неравенство можно переписать в виде:

$$-1 \leqslant |x| - 2 < 1.$$

Прибавив ко всем трем частям по 2, получим

$$1 \leqslant |x| \leqslant 3, \text{ следовательно,}$$

$$-3 \leqslant x \leqslant -1, \;\; 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

Задача 12.

Решить неравенство $\frac{5 - x}{2x} - x^2 > 1$.

Решение.

Имеем $\frac{5-x}{2x} - x^2 - 1 > 0$, или $\frac{2x^3+3x-5}{x} < 0$,

$$x(2x^3 + 3x - 5) < 0.$$

Значит, $0 < x < 1$.

Задача 13.

Решить неравенство $\frac{4x+7}{x+1} + \frac{1-3x}{x+2} > \frac{8-2x}{x-1} + 3$.

Решение.

Члены неравенства преобразуем так:

$\frac{4(x+1)+3}{x+1} + \frac{7-3(x+2)}{x+2} > \frac{6-2(x-1)}{x-1} + 3$, или

$$4 + \frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} - 3 > \frac{6}{x-1} - 2 + 3.$$

Поэтому $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} - \frac{6}{x-1} > 0$, откуда

$\frac{4x^2-15x-25}{(x+1)(x+2)(x-1)} > 0$ и $(4x^2 - 15x - 25)(x+1)(x-1) > 0$.

Дальнейший ход ясен.

Задача 14.

Решить неравенство $\frac{x^5+1}{(x+1)^5} - \frac{11}{81} > 0$.

Решение.

Имеем $\frac{x^5+1}{(x+1)^5} - \frac{11}{81} > 0$, откуда $\frac{81(x^5+1) - 11(x+1)^5}{(x+1)^5} > 0$.

Поскольку $x \neq -1$, то числитель и знаменатель делим на $x+1$:

$$\frac{81(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 11(x+1)^4}{(x+1)^4} > 0.$$

Учитывая, что $(x+1)^4>0$, заданное неравенство сводим к такому:

$$81\,(x^4-x^3+x^2-x+1)-11\,(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)>0,$$

откуда $14x^4-25x^3+3x^2-25x+14>0$.

Решая это неравенство, получим

$$-\infty<x<\frac{1}{2} \text{ и } 2<x<\infty.$$

Исключая $x=-1$, получим ответ:

$$-\infty<x<-1;\ \ -1<x<\frac{1}{2};\ \ 2<x<\infty.$$

Задача 15.

Решить неравенство $x^2+3\,|x|+2>6x\,|x|$.

Решение.

1) Пусть $x\geqslant 0$. Тогда имеем $x^2+3x+2>6x^2$, или

$$-\frac{2}{5}<x<1\ \ \Rightarrow\ \ 0\leqslant x<1.$$

2) Пусть $x<0$, тогда имеем

$$x^2-3x+2>-6x^2\ \ \Rightarrow\ \ 7x^2-3x+2.$$

Поскольку $D=9-8\cdot 7<0$, поэтому трехчлен больше нуля при любом x. Следовательно, $x<0$, т.е. $x\in\,]-\infty;\ 1[$.

Задача 16.

Решить неравенство $|x^2-1|+|x^2-9|<8$.

Решение.

Пусть $x^2=t$. Тогда исходное неравенство примет вид

$|t-1|+|t-9|<8$. Пусть теперь

1) $0\leqslant t\leqslant 1$. Имеем $1-t-t+9<8$,

$t>1$ — решений нет.

2) $1<t<9$. Имеем $t-1-t+9<8$,

$8<8$ — решений нет.

3) $t \geqslant 9$. Имеем $t - 1 + t - 9 < 8$, $2t < 18$, $t < 9$.

Ответ: решений нет.

Задача 17.

Решить неравенство $|2x-1| - 3 > 2$.

Решение.

Данное неравенство эквивалентно совокупности следующих двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l} |2x-1| - 3 > 2, \\ |2x-1| - 3 < -2, \end{array}\right. \text{ или}$$

$$|2x-1| > 5, \tag{1}$$

$$|2x-1| < 1. \tag{2}$$

Неравенство (1) эквивалентно двум неравенствам:

$$2x - 1 > 5,\ \ 2x - 1 < -5,\ \ x < 3,\ \ x < -2.$$

Неравенство (2) эквивалентно следующим двум неравенствам

$$-1 < 2x - 1 < 1 \text{ или } 0 < 2x < 2,$$

откуда $0 < x < 1$. Следовательно, решением исходного неравенства являются все x из промежутков

$$]-\infty; -2[;\ \ ]0; 1[;\ \ ]3; \infty[, \text{ или}$$

$$x \in\ ]-\infty; -2[\ \cup\ ]0; 1[\ \cup\ ]3; \infty[.$$

Задача 18.

Решить неравенство $(|x| - 1)^2 > 2$.

Решение.

$y = |x| - 1$ — функция четная. Рассмотрим случай $x \geqslant 0$, тогда $(x-1)^2 > 2$. Тогда $x^2 - 2x - 1 > 0$. Корни многочлена $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ и $x > 1 + \sqrt{2}$ удовлетворяют условию, а $x < 1 - \sqrt{2} < 0$ не удовлетворяют. В силу четности $x < -1 - \sqrt{2}$ также удовлетворяет неравенству.

Задача 19.

Решить неравенство $\dfrac{x - 2\sqrt{x} - 3}{x - \sqrt{x} - 2} < 0.$

Решение.

Перепишем данное неравенство так:

$$\frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} < 0, \text{ или}$$

$$(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3) < 0.$$

Но так как $\sqrt{x} > 0$, то $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 1) > 0$, а потому $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3) < 0$, откуда следует, что $1 < \sqrt{x} < 3$, или $1 < x < 9$.

Задача 20.

Решить неравенство $\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} > 1.$

Решение.

Левая часть данного неравенства определена, если $x - 1 \geqslant 0$, т.е. $x \geqslant 1$. Если выполнено соотношение (1), то данное неравенство равносильно такому:

$$(\sqrt[3]{2 - x})^3 > (1 - \sqrt{x - 1})^3, \text{ или } 2 - x > (1 - \sqrt{x - 1})^3,$$

$$1 - (x - 1) > (1 - \sqrt{x - 1})^3. \tag{2}$$

Обозначим $z = \sqrt{x - 1}$. Тогда неравенство (2) перепишется так: $1 - z^2 > (1 - z)^3$, или $(1 - z)(1 + z - 1 + 2z - z^2) > 0$,

$$z(z - 1)(z - 3) > 0,$$

отсюда $0 < z < 1$, $z > 0$, значит,

$$0 < \sqrt{x - 1} < 1, \text{ или } \sqrt{x - 1} > 3, \text{ откуда}$$

$$1 < x < 2, \quad 10 < x.$$

Задача 21.

Решить неравенство $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 2} \geqslant \sqrt{2 - x}.$

Решение.

Левая часть данного неравенства определена, когда $x + 1 \geqslant 0$, $x - 2 \geqslant 0$, а правая, когда $2 - x \geqslant 0$, значит, левая и правая части определены, если одновременно выполняется система неравенств $x \geqslant -1$, $x \geqslant 2$, $x \leqslant 2$. Но эта система имеет единственное решение $x = 2$. Таким образом, если данное неравенство имеет решение, то лишь $x = 2$. Следовательно, остается проверить, является ли число 2 решением. Подстановкой убеждаемся, что $x = 2$ действительно удовлетворяет данному неравенству.

Ответ: $x = 2$.

Задача 22.

Решить неравенство $x + 1 > \sqrt{x+3}$.

Решение.

Должно быть $x + 1 \geqslant 0$, $(x + 3) \geqslant 0$. На множестве $x \geqslant -1$ имеем $x^2 + x - 2 > 0$, значит, $x > 1$.

Задача 23.

Решить неравенство $\sqrt{14-x} > 2 - x$.

Решение.

Рассмотрим два случая:

1) Если $2 - x \geqslant 0$, то обе части неравенства можно возвести в квадрат. Тогда

$$14 - x > (2 - x)^2, \text{ или } x^2 - 3x - 10 < 0,$$

откуда $-2 < x < 5$. Учитывая условие $2 - x > 0$, получим, $-2 < x \leqslant 2$.

Если $x > 2$, то неравенство будет выполнено для всех x, удовлетворяющих также и неравенству $14 - x \geqslant 0$, т.е. $x \leqslant 14$. Отсюда $2 < x \leqslant 14$. Таким образом, объединяя оба случая, получим $-2 < x \leqslant 14$.

Ответ: $(-2;\ 14)$.

Задача 24.

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{24 + 2x - x^2}}{x} < 1$.

Решение.

Очевидно, что $24 + 2x - x^2 \geqslant 0$ и $x \neq 0$.

Отсюда получаем два промежутка: $[-4; 0[$ и $]0; 6[$. Очевидно, что $x \in [-4; 0[$ решения неравенства, так как при этих значениях x левая часть неравенства отрицательна, а правая — положительна. Для второго промежутка имеем

$$\sqrt{24 + 2x - x^2} < x$$

(после возведения обеих частей неравенства в квадрат)

$$x^2 - x - 12 > 0, \text{ откуда } x \in]-\infty; -3[\cup]4; \infty[.$$

Следовательно, $]-\infty; -3[\cup]0; 6] = \varnothing$.

$$[4; \infty[\cup]0; 6] =]4; 6].$$

Задача 25.

Решить методом интервалов: $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{x} < \dfrac{35}{12}$.

Решение.

Для функции $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{35}{12}$ находим область определения. Решаем систему

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому $-1 < x < 0$ и $0 < x < 1$. Определим корни $F(x)$. Решим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{x} = \frac{35}{12}.$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$\frac{1}{1 - x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1225}{144};$$

$$\frac{1}{x^2(1 - x^2)} - \frac{2}{x\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1225}{144} = 0.$$

Делаем замену $\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} = t$. Получим

$$t^2 - 2t - \frac{1225}{144} = 0, \text{ откуда}$$

$$t_1 = \frac{49}{12} \text{ и } t_2 = -\frac{25}{12}.$$

Далее решаем два уравнения:

$$\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{49}{12} \text{ и } \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{25}{12}.$$

Получаем такие корни:

$$\frac{\sqrt{73} \pm 5}{14}; \ -\frac{3}{5} \text{ и } -\frac{4}{5}.$$

Но $\frac{\sqrt{75}-5}{14}$ — посторонний корень, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Поэтому $F(x)$ имеет корни $x_1 = -\frac{4}{5}$; $x_2 = -\frac{3}{5}$; $x_3 = \frac{\sqrt{73}+5}{14}$. Эти корни разделяют область определения $F(x)$ на промежутки

$$-1 < x < -\frac{4}{5}; \ -\frac{4}{5} < x < -\frac{3}{5};$$

$$-\frac{3}{5} < x < 0; \ 0 < x < \frac{\sqrt{75}+5}{14}.$$

Определяя знаки $F(x)$ на каждом интервале, находим такие решения:

$$-\frac{4}{5} < x < -\frac{3}{5}; \ 0 < x < \frac{\sqrt{75}+5}{14}.$$

Задача 26.

Решить неравенство $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$.

Решение.

При $x > 0$ выполнено неравенство $\sqrt{x+3} > \sqrt{3}$, а при $x < 0$ выполнено неравенство $\sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$, значит,

Ответ: $-3 \leqslant x \leqslant 9$.

20. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

Задача 1.

Доказать неравенство $\frac{1}{2} < \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}} < 1.$

Возьмем очевидные неравенства

$$\frac{1}{2}<1;\ \frac{3}{4}<1;\ \frac{5}{6}<1;\ \frac{7}{8}<1; \ldots ; \frac{2n-1}{2n}<1.$$

Перемножая их, получим:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2n}<1, \text{ следовательно,}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}} < 1.$$

Доказали правую часть неравенства.

Докажем теперь левую часть неравенства. Так как

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}>\frac{1}{2};\ \frac{5}{6}>\frac{1}{2}; \ldots ; \frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2},$$

то, перемножая, найдем:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2n}>\frac{1}{2^n}, \text{ или}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}} > 2.$$

Задача 2.

Доказать, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство $h_a \leqslant \sqrt{bc}\cos\angle\frac{A}{2}$.

Доказательство.

Для ABC имеем:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle A,\quad a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\angle A}.$$

Отсюда $h_a = \dfrac{bc \cdot \sin \angle A}{a} = \dfrac{bc \cdot \sin \angle A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A}}$.

Поскольку $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, то

$$\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A} \geqslant \sqrt{2bc\,(1 - \cos \angle A)} =$$

$$= \sqrt{4bc \cdot \sin^2 \angle \frac{A}{2}} = 2\sqrt{bc} \cdot \sin \angle \frac{A}{2},$$

а значит,

$$h_a \leqslant \frac{bc \cdot \sin \angle A}{2\sqrt{bc} \cdot \sin \angle \dfrac{A}{2}} = \sqrt{bc} \cdot \cos \angle \frac{A}{2}.$$

Равенство достигается в случае $b = c$.

Задача 3.

Доказать неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Решение.

Докажем три вспомогательных неравенства:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geqslant \frac{2a}{a+b+c}; \quad \sqrt{\frac{b}{a+c}} \geqslant \frac{2b}{a+b+c};$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geqslant \frac{2c}{a+b+c}.$$

Возводим первое из них в квадрат:

$$\frac{a}{b+c} \geqslant \frac{4a^2}{(a+b+c)^2}; \quad (a+b+c)^2 \geqslant 4ab + 4ac;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geqslant 4ab + 4ac \text{ или}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2ab + 2bc \geqslant 0,$$

$$(a - b - c)^2 \geqslant 0, \text{ что очевидно.}$$

Аналогично доказываем два других неравенства.

Теперь складываем их:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geqslant \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Покажем, что равенства быть не может. Действительно, когда первое вспомогательное неравенство обращается в равенство, тогда два других не являются равенствами.

Задача 4.

Доказать, что при $n \geqslant 3$ (n — натуральное) выполняется неравенство $\sqrt[3]{n} > \sqrt[4]{n+1}$.

Решение.

Данное неравенство можно переписать в виде

$$n^4 > (n+1)^3,$$

и, поскольку $n^4 - (n+1)^3 = n^4 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1 =$

$$= n^3(n-1) + 2n^2(n-3) + 3n(n-3) + 6(n-3) + 17 > 0,$$

то это неравенство справедливо.

Задача 5.

Доказать: $2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{a+c} < 2^{a+b+c} + 1$.

Доказательство.

Обозначим 2^a; 2^b; 2^c соответственно x, y и z. Тогда заданное условие сводится к следующему:

Доказать, что при x, y, z, больших 1, выполняется неравенство $xy + yz + zx < 2xyz + 1$. Имеем:

$$2xyz - xy - yz - xz + 1 =$$

$$= (x-1)(y-1)(z-1) + (x-1)(yz-1) + (y-1)(z-1) > 0,$$

что очевидно.

Задача 6.

Доказать, что для всех x $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

Доказательство.

Учитывая неравентсво Коши, имеем: $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x}}{2}}$.

Применив то же неравенство к показателю степени, будем иметь: $\dfrac{\sqrt[12]{x}+\sqrt[4]{x}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt[12]{x}\cdot\sqrt[4]{x}} = \sqrt[6]{x}$, значит, предложенное неравенсто доказано.

Задача 7.

Доказать неравенство:

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1.$$

Доказательство.

Докажем правую часть неравенства. Запишем неравенство Коши для чисел: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n}$.

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}}{n} > \sqrt[n]{\frac{1}{n}}.$$

Перепишем это неравенство так:

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right) > \frac{n}{\sqrt[n]{n}}.$$

Отсюда получаем:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1$$

Чтобы доказать второе неравенство, запишем неравенство Коши для чисел $2;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \ldots\ \frac{n+1}{n}$:

$$\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}}{n} > \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \quad \text{или}$$

$$2+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right) > n\sqrt[n]{n+1}.$$

Задача 8.

Доказать неравенство:

$$\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt[3]{\frac{z}{x}} > \frac{3}{2} \quad (x,\ y,\ z > 0).$$

Доказательство.

По Коши

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}}\geqslant$$

$$\geqslant 6\sqrt[6]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{27}}=\sqrt[6]{2^4\cdot 3^3}>2.$$

Задача 9.

Дано $a\geqslant 0$; $b\geqslant 0$; $c\geqslant 0$ и $a+b+c\leqslant 3$.

Докажите неравенства:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\leqslant\frac{3}{2}\leqslant\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$$

Доказательство.

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (неравенство Коши) каждое из отношений $\frac{a}{1+a^2}$, $\frac{b}{1+b^2}$, $\frac{c}{1+c^2}$ не превосходит $\frac{1}{2}$. Отсюда следует левое неравенство.

Докажем правое неравенство. Пусть $x=1+a$, $y=1+b$, $z=1+c$. Тогда $x+y+z\leqslant 6$. Поделив это неравенство на x, y, z и сложив получающиеся при этом три неравенства, получим

$$\left(1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{y}+1+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right)\leqslant$$

$$\leqslant 6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Откуда и следует требуемое неравенство, так как

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\geqslant z;\quad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geqslant 2;\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geqslant 2.$$

Задача 10.

Доказать неравенство

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geqslant 64ab\,(a+b)^2,\quad a,\ b>0.$$

Доказательство.

Имеем $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, где $x, y > 0$. Положим $x = \frac{a+b}{2}$; $y = \sqrt{ab}$. Тогда

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}}, \text{ или}$$

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4} \geqslant \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}}, \text{ или}$$

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4} \geqslant \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}}.$$

Возведя обе части неравенства в четвертую степень, получим заданное неравенство.

Задача 11.

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^4.$$

Доказательство.

Воспользуемся неравенством $\sqrt{\frac{x^4+y^4}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2}$. Тогда

$$\frac{a^4+b^4}{2} = \left(\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\right)^2 \geqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^4 \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^4.$$

Задача 12.

Дано: $a+b+c=1$. Доказать: $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Доказательство.

Имеем: $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+ac+bc) =$

$$= 1 - (a^2+b^2+c^2), \text{ откуда}$$

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant 1.$$

Задача 13.

Доказать, что в непрямоугольном треугольнике ABC:

$$\operatorname{tg}^4 \hat{A} + \operatorname{tg}^4 \hat{B} + \operatorname{tg}^4 \hat{C} \geqslant (\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C})^2.$$

Доказательство.

Имеет место неравенство:

$$a^4 + b^4 + C^4 \geqslant abc\,(a + b + c).$$

Для данного случая

$$\operatorname{tg}^4 \hat{A} + \operatorname{tg}^4 \hat{B} + \operatorname{tg}^4 \hat{C} \geqslant \operatorname{tg} \hat{A} \operatorname{tg} \hat{B} \operatorname{tg} \hat{C}\,(\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C}). \qquad (1)$$

Но в ABC: $\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$, поэтому

$$\operatorname{tg}^4 \hat{A} + \operatorname{tg}^4 \hat{B} + \operatorname{tg}^4 \hat{C} \geqslant (\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C}) \times$$
$$\times\, (\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C}) = (\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C})^2$$

Задача 14.

Доказать: $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2n - 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}.$

Доказательство.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n};$$

$$A \leqslant \frac{1+1}{2+1} \cdot \frac{3+1}{4+1} \cdot \frac{5+1}{6+1} = \cdots = \frac{2n}{2n+1} =$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n}} = \frac{1}{a\,(2n+1)}, \text{ или}$$

$$A < \frac{1}{A\,(2n+1)}, \text{ или } A^2 < \frac{1}{2n+1}, \text{ или}$$

$$A^2 < \frac{1}{2n}, \text{ или } A^2 < \frac{1}{n}.$$

Задача 15.

Доказать неравенство:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (n \in N).$$

Решение.

Обозначив левую часть доказываемого неравенства через a заметим, что

$$a = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n} <$$

$$< \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

поскольку правильная дробь при увеличении числителя и знаменателя на 1 увеличивается. Отсюда видно, что

$$a < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}, \text{ или } a < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

что и требовалось доказать.

Задача 16.

Доказать, что наименьшее из чисел $(a-b)^2$; $(b-c)^2$; $(c-a)^2$ не больше $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

Доказательство.

Предположим, что доказываемое неравенство не имеет места:

$$a-b > \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+b^2+c^2}) \text{ и } b-c > \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+b^2+c^2}).$$

Сложив, получим $a-c > \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Отсюда:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 3(a^2+b^2+c^2).$$

Заметим, что $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$

$$= 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2.$$

Тогда получим $3(a^2+b^2+c^2) < 3(a^2+b^2+c^2) -$

$$-(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2) \text{ — противоречие.}$$

Задача 17.

Доказать, что при любых значениях переменных x, y из интервала (0; 1) выполняется неравенство

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

Доказательство.

Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — такие точки на сторонах BC, CA, AB, что $AC_1=x$, $CB_1=y$, $BA_1=z$. Тогда $BC_1=1-x$, $CA_1=1-z$, $AB_1=y$. Подставив в очевидное неравенство

$$S_{AB_1C_1}+S_{CA_1B_1}+S_{BA_1C_1}<S_{ABC}$$

выражение

$$S_{AB_1C_1}=\frac{1}{2}x(1-y)\frac{\sqrt{3}}{2},\ S_{CA_1B_1}=\frac{1}{2}y(1-z)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{BA_1C_1}=\frac{1}{2}z(1-x)\frac{\sqrt{3}}{2},\ S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

и сократив на $\frac{\sqrt{3}}{4}$, получим требуемое неравенство.

Задача 18.

Доказать неравенство

$$\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\leqslant 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим векторы

$$\vec{a}=(\sin x\sin y,\ \cos x\cos y),\quad \vec{b}=(\sin z,\ \cos z).$$

Тогда $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}|=\sin^2 x\cdot\sin^2 y+\cos^2 x\cdot\cos^2 y<$

$$<\sin^2 x+\cos^2 x=1 \text{ и } |\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\leqslant 1.$$

Таким образом,

$$|\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z+\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z|\leqslant 1.$$

Задача 19.

Доказать, что для любых действительных чисел:

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}.$$

Доказательство.

Лемма: если a и b — произвольные действительные числа, а m и n — натуральные числа одинаковой четности, то

$$\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2}\leqslant\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}. \qquad (1)$$

Запишем (1) в виде:

$$2\left(a^{m+n}+b^{m+n}\right)-\left(a^m+b^m\right)\left(a^n+b^n\right)\geqslant 0, \text{ или}$$

$$\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)\geqslant 0. \qquad (2)$$

Чтобы доказать (2) для чисел m и n одинаковой четности, необходимо рассмотреть в отдельности два случая.

1) Числа m и n — нечетны.

При нечетном показателе степени с увеличением основания степень возрастает. Следовательно, если $a\geqslant b$, то $a^m\geqslant b^m$ и $a^n\geqslant b^n$, а если $a<b$, то $a^m<b^m$ и $a^n<b^n$, то при нечетных m и n неравенство (2) выполняется.

Числа m и n — четны: $m=2k$, $n=2l$, где k и l — натуральные числа. Если $a^2\geqslant b^2$, то

$$(a^2)^k\geqslant(b^2)^k \text{ и } (a^2)^l\geqslant(b^2)^l, \text{ или}$$

$$a^m\geqslant b^m \text{ и } a^n\geqslant b^n.$$

Следовательно, (2) выполняется. Если $a^2<b^2$, то $(a^2)^k<(b^2)^k$ и $(a^2)^l<(b^2)^l$, откуда $a^m<b^m$ и $a^n<b^n$.

В силу (1) для произвольных a и b

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^4+b^4}{2};$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^4+b^4}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}.$$

Умножая левые и правые части, получим доказуемое.

Задача 20.

Решить уравнение $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$.

Решение.

Воспользуемся неравенством

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2}.$$

Геометрическая интерпретация этого неравенства, скалярное произведение двух векторов не превосходит произведения их длин. Равенство имеет место в случае коллинеарности векторов (a_1, b_1), (a_2, b_2).

Имеем $x\sqrt{1+x}+1\cdot\sqrt{3-x}\leqslant$

$$\leqslant \sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{(1+x)+(3-x)} = 2\sqrt{1+x^2}.$$

Значит, векторы $(x, 1)$ и $(\sqrt{1+x}, \sqrt{3-x})$ коллинеарны, т.е. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} \Rightarrow x^3-3x+x+1=0$,

$$x_1 = 1;\ x_2 = 1+\sqrt{2};\ x_3 = 1-\sqrt{2}.$$

Задача 21.

Доказать, что для всякого треугольника справедливо неравенство

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{4}{R^2},$$

где a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр, R — радиус описанной окружности.

Доказательство.

Воспользуемся формулой:

$$r = (p-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}.\ \text{Очевидно:}$$

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}-\frac{4}{R^2} =$$

$$=\frac{1}{r^2}\left(\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\right)-\frac{4}{R^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{r^2}-\frac{4}{R^2}=\frac{R^2-4r^2}{R^2r^2}\geqslant 0,$$

так как $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1$, $R\geqslant 2r$.

Задача 22.

Доказать, что если $(a+c)(a+b+c)<0$, то

$$(b-c)^2>4a\,(a+b+c).$$

Доказательство.

Требуемое неравенство означает, что дискриминант квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+(b-c)\,x+(a+b+c)$ положителен, т.е. $f(x)$ имеет различные корни. Но

$$f(0)\,f(-1)=2\,(a+b+c)\,(a+c)<0,$$

т.е. трехчлен принимает значения разных знаков и действительно имеет различные корни.

Задача 23.

Дано: a, b, c — стороны треугольника и

$$ax+by+cz=0.$$

Доказать: $ayz+bzx+cxy<0$.

Доказательство.

$x=-\dfrac{by+cz}{a}$. Поэтому $ayz+bzx+cxy=$

$$=\frac{1}{a}\,(a^2yz-(bz+cy)(by+cz))=$$

$$=-\frac{1}{a}\,(bcy^2+bcz^2+(b^2+c^2-a^2)\,yz)=$$

$$=-\frac{1}{4abc}\,(4b^2\cdot c^2\cdot y^2+4b^2\cdot c^2z^2+4bcyz\,(b^2+c^2-a^2)+$$

$$+z^2\,(b^2+c^2-a^2)^2-z^2\,(b^2+c^2-a^2)^2)=-\frac{1}{4abc}\,((2bcy+$$

$$+(b^2+c^2-a^2)\,z)^2+(4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2)\,z^2)=$$

$$=-\frac{1}{4abc}\,((2bcy+(b^2+c^2-a^2)\,z)^2+(4b^2c^2-$$

$-(b^2+c^2-a^2)^2)\,z^2)$, но так как

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (a + b + c)(b + c - a) \times$$

$\times (a - b + c)(a + b - c) > 0$, то неравенство доказано.

Задача 24.

Дано:

$$a_1 > 0;\ \ a_2 > 0;\ \ c_1 > 0;\ \ c_2 > 0;\ \ a_1c_1 - b_1^2 > 0;\ \ a_2c_2 - b_2^2 > 0.$$

Доказать, что $(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) - (b_1 + b_2)^2 > 0$.

Доказательство.

Воспользуемся неравенством Коши: среднее арифметическое положительных чисел не меньше их среднего геометрического. Имеем:

$$\frac{a_1c_2 + a_2c_1}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2c_1c_2}.$$

По условию задачи $a_1c_1 > b_1^2$; $a_2c_2 > b_2^2$. Тогда

$$a_1c_1a_2c_2 > (b_1b_2)^2 \text{ и } \sqrt{a_1a_2c_1c_2} > |b_1b_2| \geqslant b_1b_2;$$

$$a_1c_2 + a_2c_1 > 2b_1b_2;\ \ (a_1 + a_2)(c_1 + c_2) -$$

$$-(b_1 + b_2)^2 = (a_1c_1 - b_1^2) + (a_2c_2 - b_2^2) + (a_1c_2 + a_2c_1 - 2b_1b_2) > 0,$$

так как каждое слагаемое положительно. Искомое неравенство доказано.

Задача 25.

Доказать неравенство:

$$a^4 + b^4 + c^4 \leqslant 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2),$$

где a, b, c — стороны треугольника.

Доказательство.

По теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \text{ откуда } 2bc \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2.$$

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$4b^2c^2\cos^2\alpha = b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2b^2a^2 - 2c^2a^2.$$

При $\cos^2\alpha \leqslant 1$ $4b^2c^2 \geqslant b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2b^2a^2 - 2c^2a^2$, или $b^4 + a^4 + c^4 \leqslant 2\,(b^2c^2 + b^2a^2 + c^2a^2)$, что и требовалось доказать.

Задача 26.

Верно ли неравенство

$$\sin 3\sqrt[3]{\cos 2} - \sin 2\sqrt[3]{\cos 3} < \sqrt[3]{\cos 2\cos 3}.$$

Решение.

Так как $\cos 2\cos 3 > 0$, то, разделив обе части данного неравенства на правую часть, мы можем переписать его в виде

$$\frac{\sin 3}{\sqrt[3]{\cos 3}} - 3 < \frac{\sin 2}{\sqrt[3]{\cos 2}} - 2, \text{ или}$$

$$f(3) < f(2), \text{ где } f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x \quad \left(x \in \left]\frac{\pi}{2};\, \pi\right[\right).$$

Для удобства дифференцирования этой функции положим $t = x - \frac{\pi}{2}$;

$$f(t) = -\frac{\cos t}{\sqrt[3]{\sin t}} - t - \frac{\pi}{2} = -\cos t\,(\sin t)^{-1/3} - t - \frac{\pi}{2}$$

$$\left(t \in \left]0;\, \frac{\pi}{2}\right[\right),$$

тогда $f'(t) = \sin^{2/3} t + \frac{1}{3}\sin^{-4/3} t \cdot \cos^2 t - 1 =$

$$= \frac{2}{3}\sin^{2/3} t + \frac{1}{3}\sin^{-4/3} t - 1 \quad \left(t \in \left]0;\, \frac{\pi}{2}\right[\right),$$

$$f''(t) = \frac{4}{9}\sin^{-1/3} t \cdot \cos t - \frac{4}{9}\sin^{-7/3} t \cdot \cos t =$$

$$= \frac{4}{9}\cos t \cdot \sin^{-7/3} t\,(\sin^2 t - 1) < 0 \quad \left(t \in \left]0;\, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

Следовательно, $f'(t)$ — убывающая функция и на промежутке $\left]0;\, \frac{\pi}{2}\right[$ $f'(t) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, т.е. $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает на $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, а $f(x)$ возрастает на $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$. В частности, $f(3) > f(2)$, т.е. исходное неравенство неверно.

Задача 27.

Доказать неравенство

$$\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}} > \frac{3}{2} \quad (x,\ y,\ z > 0).$$

Доказательство.

Пользуясь неравенством Коши, будем иметь

$$\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{z}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{z}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{x}} \geqslant$$

$$\geqslant 6\sqrt[6]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{27}} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^3} > 2,$$

откуда следует заданное неравенство.

Задача 28.

Доказать, что если $A + B + C = 90°$, то

$$\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C \geqslant 1.$$

Доказательство.

Если $A + B + C = 90°$, то

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{ctg}(A + B) = \frac{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}.$$

Отсюда $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A = 1$. Следовательно, для нашей цели достаточно доказать, что

$$\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C \geqslant \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A.$$

Но по умножении на два и переносе всех членов в левую часть будем иметь

$$2\operatorname{tg} A + 2\operatorname{tg}^2 B + 2\operatorname{tg}^2 C - 2\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B - 2\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C -$$

$$- 2\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A \geqslant 0, \text{ или}$$

$$(\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B)^2 + (\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C)^2 = (\operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A)^2 \geqslant 0.$$

Но справедливость последнего очевидна. Отсюда следует и заданное неравенство. Знак равенства имеет место при $A = B = C = 30°$.

Задача 29.

Докажите неравенство $\dfrac{a^2}{b^2 + c^2} + \dfrac{b^2}{a^2 + c^2} + \dfrac{c^2}{a^2 + b^2} \geqslant \dfrac{3}{2}$ для любых отличных от нуля действительных чисел a, b, c.

Доказательство.

Введем новые переменные:

$$x = a^2 + b^2;\;\; y = b^2 + c^2;\;\; z = a^2 + c^2.$$

Выразим через них a^2, b^2, c^2.

$$a^2 = \frac{x + zy}{2};\;\; b^2 = \frac{x + y - z}{2};\;\; c^2 = \frac{y + z - x}{2}.$$

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x + z - y}{2y} + \frac{x + y - z}{2z} + \frac{y + z - x}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) - 3\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} 2 + 2 + 2 - 3) = \frac{3}{2}.$$

Задача 30.

Доказать, что

$$ab\,(a + b - 2c) + bc\,(b + c - 2a) + ac\,(a + c - 2b) \geqslant 0$$

при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Доказательство.

Известно, что $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} \geqslant 2$ $(m > 0,\; n > 0)$. Применим это соотношение. Имеем:

$$ab\,(a + b - 2c) + bc\,(b + c - 2a) + ac\,(a + c - 2b) =$$

$$= abc\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-2+\frac{b}{2}+\frac{c}{a}-2+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-2\right)=$$

$$= abc\left(\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)\right)\geqslant 0.$$

Так как $a>0$, $b>0$, $c>0$ и каждое из чисел, стоящих в круглых скобках, не меньше нуля.

Задача 31.

Верно ли неравенство

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{17}>1?$$

Решение.

Каждое из первых 6 слагаемых не меньше $\frac{1}{10}$, а каждое из остальных 7 слагаемых не меньше $\frac{1}{17}$, и поэтому сумма всех слагаемых не меньше, чем $\frac{3}{5}+\frac{7}{17}$, что больше 1.

Задача 32.

Доказать, что если $a>b>c$, $\sqrt{p}\leqslant\sqrt{q}+\sqrt{r}$, то
$q(a-b)(a-c)+p(b-a)(b-c)+r(c-a)(c-b)\leqslant 0.$

Доказательство.

Записав неравенство в виде $p\leqslant q\left(\frac{a-c}{b-c}\right)+r\left(\frac{a-c}{a-b}\right)$, положим $f(x)=q\left(\frac{a-c}{x-c}\right)+r\left(\frac{a-c}{a-x}\right)$. Тогда неравенство принимает вид $f(b)\geqslant p$. Так как

$$f'(x)=(a-c)\left(\frac{r}{(a-x)^2}-\frac{q}{(x-c)^2}\right),$$

$$f'(x)>0 \;\Leftrightarrow\; r(x-c)^2>q(a-x)^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \sqrt{r}(x-c)>\sqrt{q}(a-x) \;\Leftrightarrow\; x>\frac{a\sqrt{q}+c\sqrt{r}}{\sqrt{q}+\sqrt{r}}$$

(если $\sqrt{q}+\sqrt{r}=0$, то $r=q=p=0$ и утверждение задачи очевидно), то в точке $x_0=\dfrac{(a\sqrt{q}+c\sqrt{r})}{\sqrt{q}+\sqrt{r}}$ функция f принимает наименьшее значение. Так как

$$x_0-c=\frac{(a-c)\sqrt{r}}{\sqrt{q}+\sqrt{r}},\quad a-x_0=\frac{(a-c)\sqrt{r}}{\sqrt{q}+\sqrt{r}},\ \text{то}$$

$$f(x_0)=q\frac{\sqrt{q}+\sqrt{r}}{\sqrt{q}}+r\frac{\sqrt{q}+\sqrt{r}}{\sqrt{r}}=(\sqrt{q}+\sqrt{r})^2\geqslant p.$$

Следовательно, и $f(b)\geqslant f(x_0)\geqslant p$, что и требовалось доказать.

Задача 33.

Доказать, что если $a^2+b^2+c^2=1$, то

$$|a^3+b^3+c^3-3abc|\leqslant 1.$$

Доказательство.

Введем обозначения: $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$. Тогда $a^2+b^2+c^2=p^2-2q=1$, $2q=p^2-1$, а благодаря известному тождеству

$$a^3+b^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

доказываемое неравенство принимает вид

$$-1\leqslant p(p^2-3q)\leqslant 1,\quad -2\leqslant p(2p^2-6q)\leqslant 2,$$

$$-2\leqslant p(3-p^2)\leqslant 2,\quad -2\leqslant p^3-3p\leqslant 2.$$

Неравенство между средним арифметическим и квадратическим

$$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

показывает, что $-\sqrt{3}\leqslant p\leqslant\sqrt{3}$, и остается доказать, что функция $y=x^3-3x$ на отрезке $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 3$ по модулю не превосходит 2, что нетрудно сделать с помощью производной.

Задача 34.

Доказать, что $\left(a+\frac{b}{\sin\alpha}\right)\left(b+\frac{a}{\cos\alpha}\right) \geqslant a^2+b^2+3ab$, если α — острый угол, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Доказательство.

Раскроем скобки:

$$\left(a+\frac{b}{\sin\alpha}\right)\left(b+\frac{a}{\cos\alpha}\right) = ab+\frac{a^2}{\cos\alpha}+\frac{b^2}{\sin\alpha}+$$

$$+\frac{ab}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = ab+\frac{a^2}{\cos\alpha}+\frac{b^2}{\sin\alpha}+\frac{2ab}{\sin 2\alpha}.$$

Поскольку $0<\sin\alpha<1$, $0<\cos\alpha<1$, $0<\sin 2\alpha \leqslant 1$, то

$$\frac{1}{\sin\alpha}>1,\quad \frac{1}{\cos\alpha}>1,\quad \frac{1}{\sin 2\alpha}\geqslant 1,$$

откуда и получаем требуемое равенство.

Задача 35.

Докажите, что при любом значении x

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

Доказательство.

Рассмотрим в отдельности три случая:

1. $x \leqslant 0$. Каждый из одночленов, входящих в многочлен, неотрицателен, поэтому $x^{12}-x^9+x^4-x+1 \geqslant 1>0$.

2. $0<x<1$. В этом случае

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1 = 1-x+x^4(1-x^5)+x^{12}>0.$$

3. $x \geqslant 1$. Тогда

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1 = x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1 \geqslant 1>0.$$

Задача 36.

Доказать, что при любом целом n $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

Доказательство.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\times$$

$$\times\frac{1}{n^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{n^n} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 3.$$

Задача 37.

Доказать, что если сумма углов A и C выпуклого четырехугольника $ABCD$ больше 180°, то $\frac{e}{f} < \frac{ad+bc}{ab+cd}$, где

$$AB = a;\ \ BC = c;\ \ DA = d;\ \ BD = f;\ \ AC = e.$$

Доказательство.

Если $A + C > 180°$, то

$$\cos A + \cos C = 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} < 0. \text{ Далее}$$

$$\cos A = \frac{d^2 + a^2 - f^2}{2ad};\ \ \cos e = \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2bc}.$$

Следовательно,

$(a^2 + d^2)\,bc + (b^2 + c^2)\,ad - f^2\,(ad + bc) < 0$, откуда получаем

$$(ab + cd)(ac + bd) < (ad + bc)\,f^2. \qquad (1)$$

Кроме того, из теоремы Птолемея следует

$$ef < ac + bd. \qquad (2)$$

Перемножая неравенства (1) и (2), после преобразований получим:

$$\frac{e}{f} < \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Задача 38.

Углы треугольника удовлетворяют соотношению

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Доказать, что один из углов этого треугольника больше 120°.

Доказательство.

Вместо $\frac{1}{\sqrt{3}}$ запишем $\operatorname{tg} 30°$ и преобразуем данное уравнение:

$$\sin A \cos 30° - \cos A \sin 30° + \sin B \cos 30° - \cos B \sin 30° +$$
$$+ \sin C \cos 30° - \cos C \sin 30° = 0, \text{ или}$$
$$\sin (A - 30°) + \sin (B - 30°) + \sin (C - 30°) = 0.$$

Не нарушая общности доказательства, можно считать, например, что $C > 30°$. Тогда

$$2 \sin \left(60° - \frac{C}{2}\right) \cos \frac{A - B}{2} + \sin (C - 30°) = 0 \text{ и}$$
$$\sin \left(60° - \frac{C}{2}\right) < 0.$$

Отсюда $60° - \frac{C}{2} < 0$, или $C > 180°$.

Задача 39.

Доказать, что при $x,\ y,\ z \geqslant 0$

$$(x + y)^2 (x + y - z) + (y - z)^2 (y + z - x) +$$
$$+ (z - x)^2 (z + x - y) \geqslant 0.$$

Доказательство.

Легко проверить, что левая часть неравенства симметрична относительно x, y, z, и поэтому можно предполагать, что $x \leqslant y \leqslant z$, т.е. $y = x + p$, $z = y + q$, где p, $q \geqslant 0$. Тогда имеем неравенство:

$$p^2 (x - q) + q^2 (z + p) + (p + q)^2 (x + q) \geqslant 0;$$
$$(p^2 + (p + q)^2)\, x + q^2 (z + p) + (2pq + q^2)\, q \geqslant 0.$$

Каждое неравенство верно, поскольку все слагаемые в его левой части неотрицательны.

Задача 40.

Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$.

Доказательство.

Обозначим через S_n сумму $S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

Т.к. $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, то

$$\frac{1}{2^2}<1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3^2}<1-\frac{1}{3},\ldots\ \frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Складывая эти неравенства, получим: $S_n<1-\frac{1}{n}$, отсюда $S_n<1$.

Задача 41.

Определить целую часть числа

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

Решение.

Покажем, что $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$. В самом деле, $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Точно так же, $2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}=$

$$=\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Теперь имеем:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}>1+2\,[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$$
$$+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{1000001}-\sqrt{1000000})]=$$
$$=1+2\,(\sqrt{1000001}-\sqrt{2})>2000-2+1=1998.$$

В то же время $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}<$

$$<1+2\,((\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{1000000}-\sqrt{999999}))=$$
$$=1+2\,(\sqrt{1000000}-1)=2+2\cdot 999=1999.$$

Таким образом, целая часть указанной суммы равна **1998.**

Задача 42.

Доказать, что при всяком целом $n>1$

$$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2.$$

Доказательство.

Так как $\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$, то

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)<$$
$$<\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{2n\text{ раз}}=2.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)<$$
$$<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=2=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-1)}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}\right)>$$

$$>\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}\right)}_{2n+1 \text{ раз}}=$$

$$=\frac{1}{2}(2n+1)\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=1.$$

Задача 43.

Доказать неравенство $\cos\alpha+\alpha\cdot\sin\alpha>1$, где $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Доказательство.

Так как $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $\alpha>\sin\alpha$, или $\alpha\cdot\sin\alpha>\sin^2\alpha$.

Также имеем, что $\cos\alpha>\cos^2\alpha$. Сложив два этих неравенства получим, что $\cos\alpha+\alpha\cdot\sin\alpha>1$.

Задача 44.

Доказать, что $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{2}{3}$.

Доказательство.

Запишем очевидное неравенство:

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{3};\ \frac{1}{3^2}<\frac{1}{3\cdot 2};\ \frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot 2^2};\ldots\frac{1}{n^2}<\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}.$$

После почленного сложения получим:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}.$$

В правой части последнего неравенства имеем сумму S_{n-1} первых $n-1$ членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $\frac{1}{3}$, а знаменатель $\frac{1}{2}$. Значит,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<S_{n-1}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<\frac{2}{3}.$$

Задача 45.

Доказать, что в тупоугольном треугольнике сумма квадратов синусов внутренних углов меньше двух.

Доказательство.

Пусть α, β — острые, а γ — тупой угол треугольника. Так как $\sin^2\gamma < 1$, то для выполнения указанного в задаче неравенства достаточно показать, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < 1$, $\alpha + \beta < 90°$, значит, $\beta < 90° - \alpha$,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\alpha + \sin^2(90° - \alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Задача 46.

Доказать, что объем правильной пирамиды всегда меньше куба ее бокового ребра.

Доказательство.

Обозначим ребро правильной n-угольной пирамиды через угол между этим ребром и плоскостью основания через α. Объем пирамиды V_1 меньше объема V_2, описанного около нее конуса. Для конуса имеем:

$$\frac{l^3}{V_2} = \frac{l^3}{\frac{1}{3}\pi l^2 \cdot \cos\alpha \cdot l \cdot \sin\alpha} = \frac{6}{\pi \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha},$$

но так как $\cos\alpha \cdot \sin\alpha \leqslant 1$, то $\dfrac{6}{\pi \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha} > \dfrac{6}{\pi} > 1$. Следовательно, тем более $\dfrac{l^3}{V_1} > 1$.

Задача 47.

Существуют ли такие числа a, b, c, для которых

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} > \sqrt{c(ab+1)}?$$

Решение.

Применим неравенство Коши для векторов

$\bar{u} = (\sqrt{x-1},\ 1)$; $\bar{v} = (1,\ \sqrt{y-1})$. Тогда

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1};\quad |\bar{u}| = \sqrt{x};\quad |\bar{v}| = \sqrt{y},$$

так что $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leqslant \sqrt{xy}$. Поэтому

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{ab} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{(ab+1)\,c},$$

и, следовательно, требуемых чисел a, b, c не существует.

Задача 48.

Доказать, что измерения a, b, c и диагональ d прямоугольного параллелепипеда связаны неравенством

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geqslant abcd\sqrt{3}.$$

Доказательство.

Для прямоугольного параллелепипеда имеем $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Для произвольных чисел x, y, z имеют место неравенства: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(xy + yz + xz) \geqslant$

$$\geqslant 3\,(xy + yz + zx).$$

Приняв $x = (ab)^2$; $y = (bc)^2$; $z = (ac)^2$, получим

$$((ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2)^2 \geqslant 3\,a^2 b^2 c^2\,(a^2 + b^2 + c^2) = 3a^2 b^2 c^2 d^2,$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Равенство имеет место при $(ab)^2 = (ac)^2$; $(bc)^2 = (ab)^2$; $(ac)^2 = (bc)^2$, т.е. при $a = b = c$.

Задача 49.

Доказать неравенство

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} < \frac{1}{abc}\quad (a,\, b,\, c > 0).$$

Доказательство.

Нетрудно убедиться, что при $a > 0$, $b > 0$ выполняется неравенство $a^3 + b^3 \geqslant ab\,(a + b)$, так что первое слагаемое в левой части данного неравенства меньше или равно

$\frac{1}{ab(a+b+c)}$, поэтому вся левая часть не превосходит суммы $\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = \frac{1}{abc}$, что и требовалось доказать.

Задача 50.

Доказать неравенство

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab} \quad (a \geqslant 0;\ \ b \geqslant 0;\ \ c \geqslant 0).$$

Доказательство.

Рассмотрим очевидные неравенства

$$(a^2-ab+b^2) \geqslant ab;\ \ b^2-bc+c^2 \geqslant bc;\ \ c^2-ca+a^2 \geqslant ca.$$

Умножив эти неравенства почленно на $a+b$, $b+c$, $c+a$, получим

$$a^3+b^3 \geqslant ab(a+b),\ b^3+c^3 \geqslant bc(b+c),\ c^3+a^3 \geqslant ca(c+a),$$

и после их почленного сложения: $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant$

$$\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(a+c).$$

Отсюда $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ и $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$.

Задача 51.

Доказать неравенства:

$$k(1+a^{2k})-a^k > a^{2k-1}+a^{2k-2}+\ldots+a^2+a,$$

если $a>0$ и k — целое положительное число.

Доказательство.

Поделив данное неравенство на a^k и учитывая, что $a^k>0$, получим следующее неравенство:

$$k\left(a^k+\frac{1}{a^k}-1 \geqslant a^{k-1}+a^{k-2}+\ldots+a^{1-k}\right), \qquad (1)$$

эквивалентное данному. Группируя окаймляющие члены в правой части полученного неравенства, приведем эту часть к виду:

$$\left(a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}\right)+\left(a^{k-2}+\frac{1}{a^{k-2}}\right)+\ldots+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)+1. \quad (1)$$

Перенесем единицу из левой части неравенства (1) в правую часть и заметим, что $1 = a^0 = \frac{1}{a^0}$. Для доказательства исходного неравенства достаточно доказать следующие неравенства:

$$a^k + \frac{1}{a^k} \geqslant a^{k-i} + \frac{1}{a^{k-i}}, \qquad (2)$$

справедливое при $0 \leqslant i \leqslant k$.

Действительно, рассмотрим разность

$$a^k + \frac{1}{a^k} - a^{k-i} - \frac{1}{a^{k-i}} = a^{k-i}(a^i - 1) + \frac{1-a^i}{a^k} =$$

$$= \frac{(a^i - 1)(a^{2k-i} - 1)}{a^k}.$$

Очевидно, обе круглые скобки в числителе правой части имеют один и тот же знак, как при $a > 1$, так и при $a < 1$, следовательно, (2) доказано.

21. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК

Задача 1.

Докажите, что уравнение $x^2 + 2x + y^2 = 0$ задает на плоскости некоторую окружность.

Доказательство.

Действительно, $x^2 + 2xy + y^2 = (x^2 + 2xy + 1) + y^2 = 1$, или $(x + 1)^2 + y^2 = 1$, а это уравнение окружности.

Задача 2.

Какое множество точек задает соотношение

$$x^2 + y^2 \leqslant 4x + 4y?$$

Решение.

Перепишем заданное неравенство:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leqslant 8, \text{ или } (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 8.$$

Очевидно, что точки удовлетворяющие этому условию, заполняют круг и окружность радиуса $\sqrt{8}$ с центром (2; 2).

Задача 3.

Найти геометрический образ соотношения

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Ответ: Точка (0; 0).

Задача 4.

Найти геометрический образ соотношения

$$x^2 + y \leqslant 9;$$
$$(x - 1)^2 + y^2 \geqslant 1.$$

Ответ: рис. 21.1.

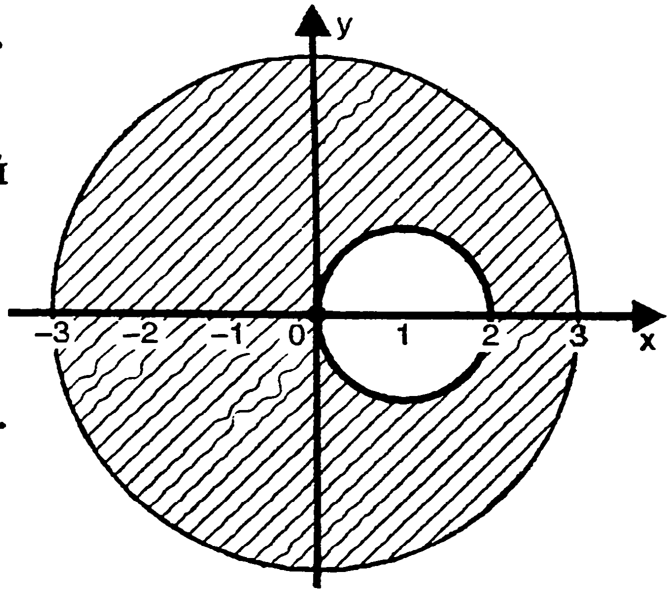


Рис. 21.1

Задача 5.

Найти геометрический образ соотношения

$$x^2 + y^2 = 2\,|y|.$$

Решение.

При $y \geqslant 0$ имеем

$$x^2 + y^2 = 2y, \text{ или } x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

При $y \leqslant 0$

$$x^2 + y^2 = -2y, \text{ или } x^2 + (y+1)^2 = 1.$$

Итак, имеем две симметричные относительно начала координат окружности с центрами 1 и −1.

Задача 6.

На координатной плоскости штриховкой отметить множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам:

$$3x + 2y + 1 \geqslant 0;$$

$$3x + 2y - 3 \leqslant 0.$$

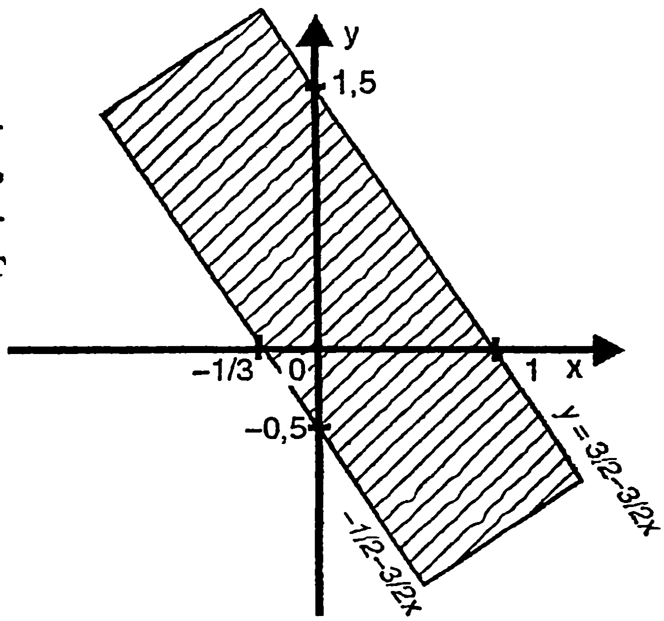


Рис. 21.2

Решение.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 \geqslant 0, \\ 3x + 2y - 3 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geqslant -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}x, \\ y \leqslant \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}x \end{cases} \quad (\text{рис. } 21.2).$$

Задача 7.

На координатной плоскости штриховкой отметить множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам: $xy \leqslant 1$, $x + y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 0$.

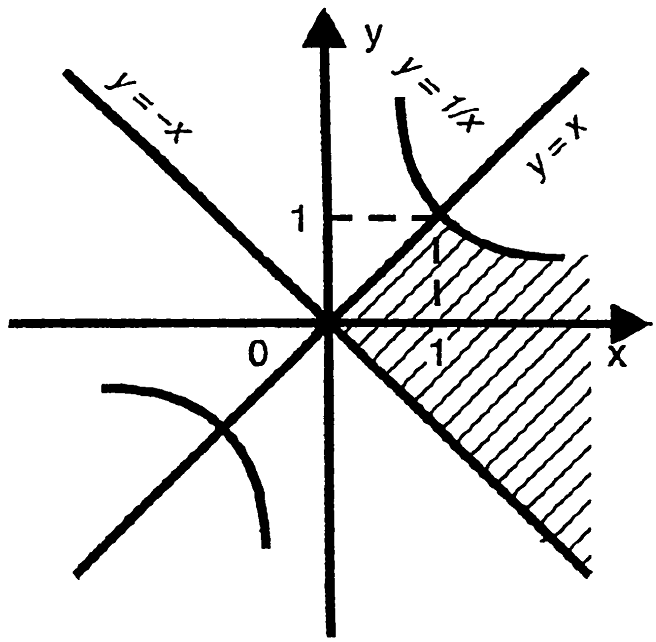


Рис. 21.3

Решение.

$$\begin{cases} xy \leqslant 1, \\ x + y \geqslant 0, \\ y - x \leqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \leqslant \dfrac{1}{x}, \\ x > 0, \\ y \geqslant -x, \\ y = x, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} y \geqslant \dfrac{1}{x}, \\ x < 0, \\ y \geqslant -x, \\ y \leqslant x \end{cases} \end{array} \right.$$

(рис. 21.3).

Задача 8.

На координатной плоскости штриховкой отметить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: $|y| + \frac{1}{2} \leqslant l^{-|x|}$.

Решение.

$$|y| + \frac{1}{2} \leqslant l^{-|x|};\ |y| \leqslant -\frac{1}{2} + l^{-|x|};$$

$$\frac{1}{2} - l^{-|x|} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{2} + l^{-|x|} \text{ (рис. 21.4).}$$

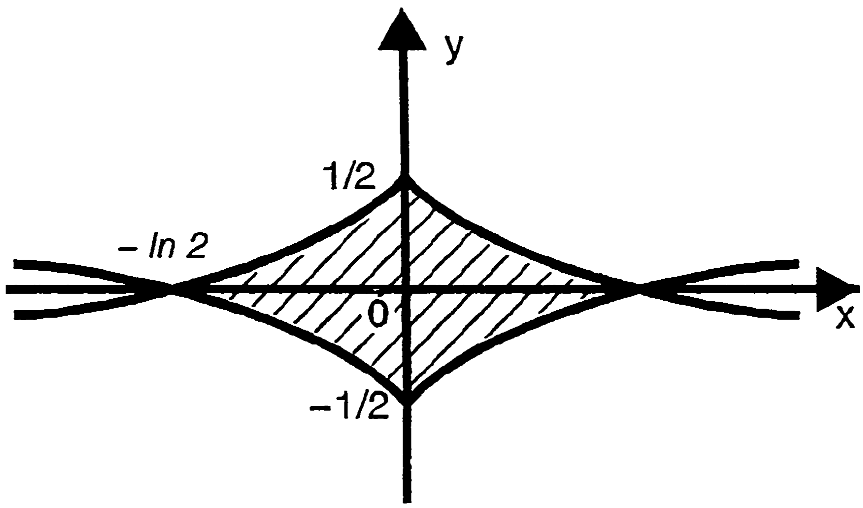


Рис. 21.4

Задача 9.

Найти геометрический образ соотношения

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leqslant \sqrt{2x - x^2 - y^2}.$$

Решение.

Обе части этого неравенства имеют смысл, если

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y \geqslant 0, \\ 2x - x^2 - y \geqslant 0. \end{cases}$$

Значит, заданное соотношение имеет смысл, если

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0, & (1) \\ 2x - x^2 - y \geqslant 0, & (2) \\ 1 - x^2 - y^2 \leqslant 2x - x^2 - y. & (3) \end{cases}$$

Неравенство (1) удовлетворяют точки круга, радиус которого равен 1, а центр находится в точке (1; 0). Неравенство

(3) эквивалентно неравенству $x \geqslant \frac{1}{2}$. Его удовлетворяют точки полуплоскости $x \geqslant \frac{1}{2}$. Пересечение этих множеств — сегмент (рис. 21.5).

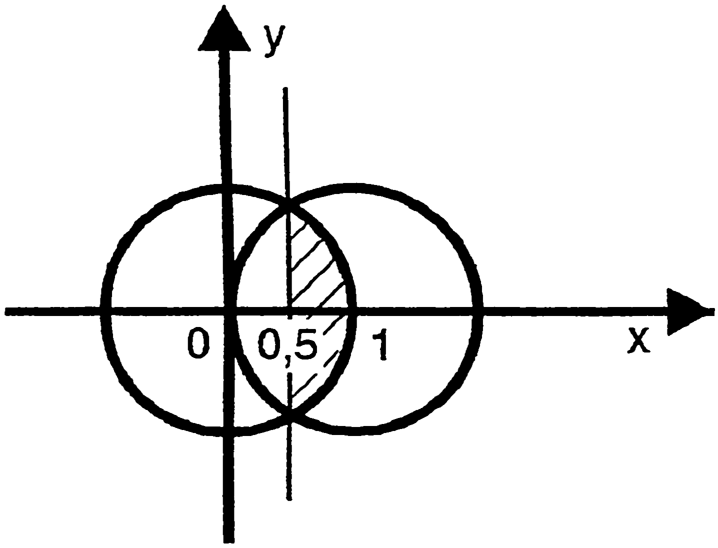


Рис. 21.5

Задача 10.

Найти геометрический образ соотношения

$$x^2 + y^2 + 7 \leqslant 4\,(|x| + |y|).$$

Решение.

Пусть $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Тогда

$$x^2 + y^2 + 7 \leqslant 4x + 4y, \text{ или } (x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 1.$$

Это соотношение удовлетворяют точки круга, радиус которого равен 1, а центр находится в точке (2; 2). Во втором квадрате $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$, поэтому

$$x^2 + y^2 + 7 \leqslant -4x + 4y, \text{ или } (x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 1.$$

Геометрический образ изображен на рис. 21.6.

Задача 11.

Найти геометрический образ соотношения

$$(|x| - 1)^2 + y^2 \leqslant 4.$$

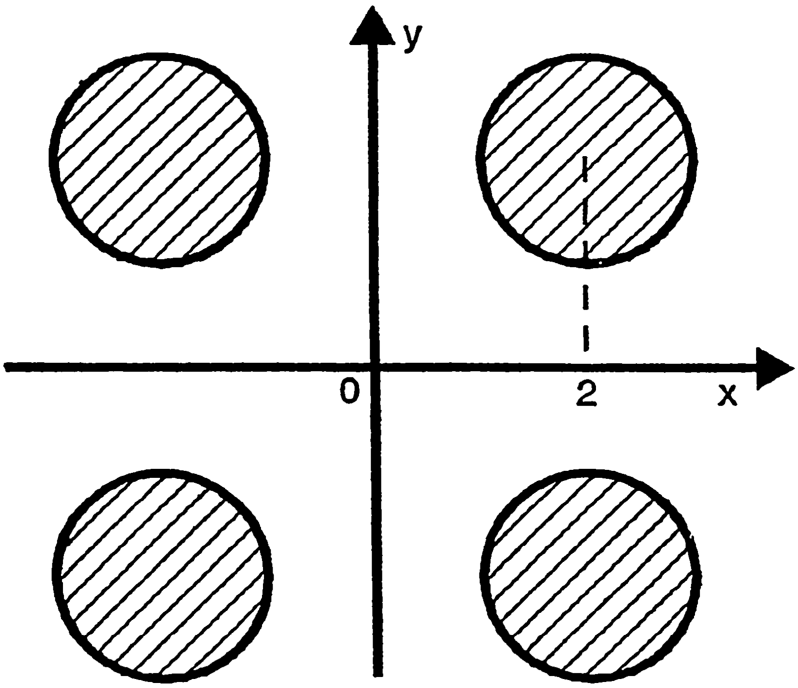


Рис. 21.6

Решение.

Для выражения $(|x| - 1)^2 + y^2 - 4$ имеет место равенство

$$(|x| - 1)^2 + y^2 - 4 = (|-x| - 1)^2 + y^2 - 4.$$

В полуплоскости, где $x \geqslant 0$, $|x| = z$, и заданное соотношение удовлетворяется точками круга, радиус которого равен 2, а центр находится в точке (1; 0). Учитывая симметрию, получим образ соотношения.

Задача 12.

Найти геометрический образ неравенства

$$\min\{\max(x, y),\ x + y\} \leqslant 1.$$

Решение.

Заметим, что $\min\{a, b, \ldots, t\}$ — обозначение для наименьшего из чисел $a, b, \ldots, t$, $\max\{a, b, \ldots, t\}$ — для обозначения для наибольшего из чисел $a, b, \ldots, t$.

Заданное неравенство удовлетворяется только в тех точках $(x; y)$ плоскости, в которых или $\max(x, y) \leqslant 1$, или $x + y \leqslant 1$. Поскольку $\max(x, y) = y$ при $y \geqslant x$ и $\max(x, y) = x$ при $y \leqslant x$, то приходим к выводу: геометрический образ заданного неравенства есть сумма геометрических образов систем:

1) $x \leqslant y, \quad y \leqslant 1$;

2) $y \leqslant x, \quad x \leqslant 1$;

3) $x + y \leqslant 1$.

Задача 13.

На координатной плоскости отметить штриховкой множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам: $y \geqslant x^2 - 2x - 3$; $y \leqslant x + 1$.

Решение. (рис. 21.7).

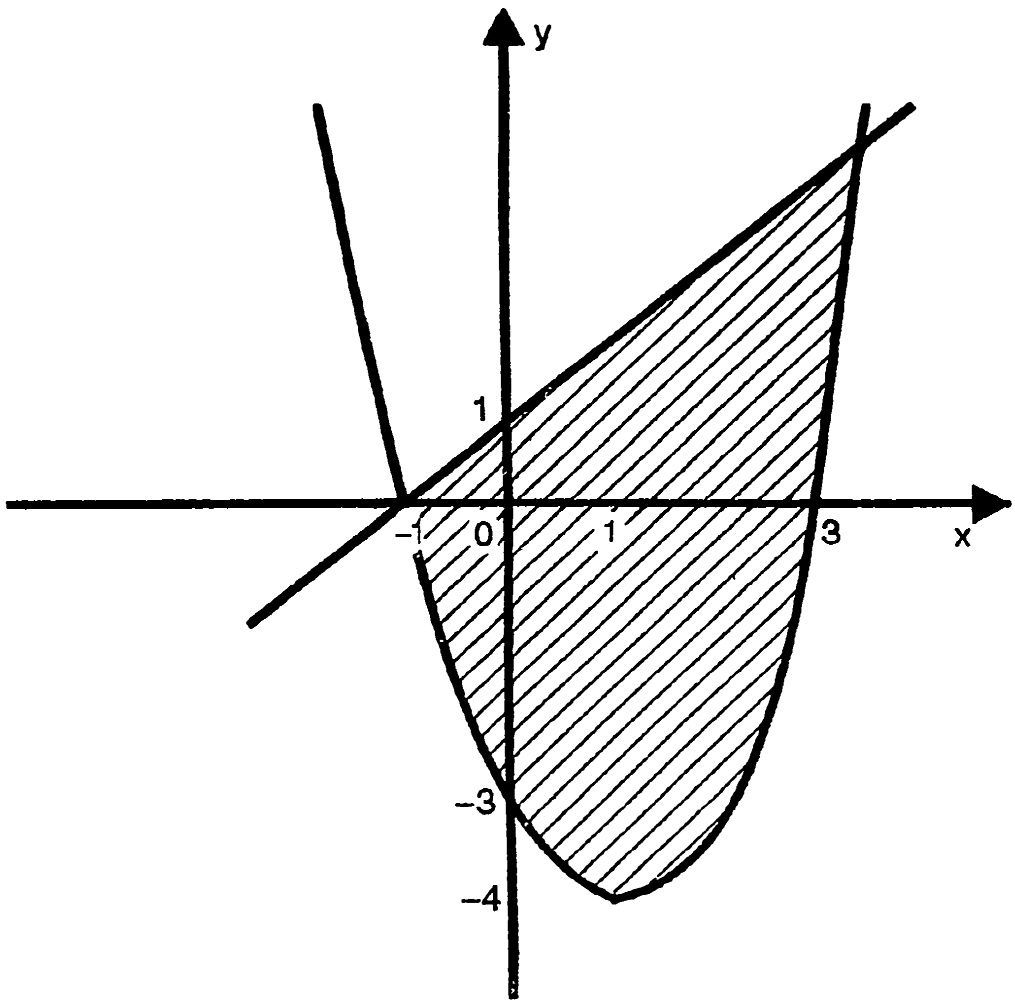


Рис. 21.7

Задача 14.

Найти геометрический образ соотношения

$$\frac{y - |x|}{xy^2} \geqslant 0.$$

Решение.

Заданное соотношение эквивалентно соотношению

$$\left[\begin{cases} y - |x| \geqslant 0, \\ x > 0, \end{cases} \atop \begin{cases} y - |x| \leqslant 0, \\ x \leqslant 0, \end{cases}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{cases} y \geqslant x, \\ x \geqslant 0, \end{cases} \atop \begin{cases} y \leqslant -x, \\ x < 0. \end{cases}\right.$$

Задача 15.

Найти геометрический образ соотношения

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0.$$

Решение.

Если $\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0$, то $\sin \pi x = 0$ и $\sin \pi y = 0$, отсюда $\pi x = \pi k$ $(k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots)$ и $\pi y = \pi r$ $(r = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots)$, т.е. $x = k$, $y = r$, где k и r — целые числа, значит, интерпретацией заданного соотношения будет множество всех точек, координаты которых — целые числа.

Задача 16.

Найти геометрический образ соотношения

$$x^2 - x < y - xy.$$

Решение.

$$x^2 - x < y - xy;\ y(1 - x) > x(x - 1), \text{ значит,}$$

при $x > 1$ $y < -x$; при $x < 1$ $y > -x$.

Задача 17.

Найти геометрический образ соотношения

$$\begin{cases} 2y - x \leqslant 6, \\ 9x + 4y \leqslant 56, \\ 3x + 5y \geqslant 4. \end{cases}$$

Решение.

Заданную систему неравенств запишем в виде:

$$\begin{cases} y \leqslant \dfrac{x}{2} + 3, \\ y \leqslant -\dfrac{9}{4}x + 14, \\ y \geqslant -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Задача 18.

Найти геометрический образ соотношения

$$|x| + |y| = 1.$$

Решение.

1) $x > 0;\ \ y > 0;\ \ y = 1 - x.$
2) $x < 0;\ \ y > 0;\ \ y = 1 + x.$
3) $x < 0;\ \ y < 0;\ \ y = -1 - x.$
4) $x > 0;\ \ y < 0;\ \ y = x - 1.$

Задача 19.

Найти геометрический образ уравнения

$$\max\{x,\ y\} = 1.$$

Решение.

Заданное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y \leqslant 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 1, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

Его геометрический образ состоит из двух лучей, имеющих общую точку $(1;\ 1)$: горизонтального, направленного влево, и вертикального, направленного вниз.

Задача 20.

Найти геометрический образ соотношения

$$\begin{cases} x + y \leqslant 1, \\ -x - y \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Геометрический образ этого соотношения — множество точек, расположенных между прямыми $y = 1 - x$ и $y = -1 - x$.

Глава VI. АЛГЕБРА ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

22. СУММИРОВАНИЕ

Задача 1.

Найти сумму $1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 27 + \ldots + (2n - 1) \cdot 3^n$.

Решение.

Представим слагаемые в виде:

$$1 \cdot 3 = 1 \cdot 3;$$

$$3 \cdot 9 = (1 + 2) \cdot 9 = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 9;$$

$$5 \cdot 27 = (1 + 4) \cdot 27 = 1 \cdot 27 + 4 \cdot 27;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(2n - 1) \cdot 3^n = (2n - 2 + 1) \cdot 3^n = 1 \cdot 3^n + 2\,(n - 1) \cdot 3^n.$$

Перепишем сумму:

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 27 + \ldots + (2n - 1) \cdot 3^n =$$

$$= (3 + 9 + 27 + \ldots + 3^n) + (2 \cdot 9 + 4 \cdot 27 + \ldots + 2\,(n - 1) \cdot 3^n).$$

Слагаемые во второй скобке представим в виде

$$2 \cdot 9 = 2 \cdot 9;$$

$$4 \cdot 27 = 2 \cdot 27 + 2 \cdot 27;$$

$$6 \cdot 81 = 2 \cdot 81 + 4 \cdot 81;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\,(n - 1) \cdot 3^n = 2 \cdot 3^n + 2\,(n - 2) \cdot 3^n \text{ и т.д.}$$

Получим:

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 27 + \ldots + (2n - 1) \cdot 3^n = (3 + 9 + 27 + \ldots + 3^n) +$$

$$+ 2\,(9 + 27 + \ldots + 3^n) + 2\,(27 + \ldots + 3^n) + \ldots$$

$$+ 2\,(3^{n-1} + 3^n) + 2 \cdot 3^n.$$

Мы получили сумму геометрических прогрессий со знаменателем, равным 3. Окончить самостоятельно.

Задача 2.

Найти сумму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2^n - 1)$.

Решение.

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2^n - 1) = 1 + 2(2^2 - 1) + 3(2^3 - 1) + \ldots$$

$$+ n(2^n - 1) = 1(2^1 - 1) + 2(2^2 - 1) + 3(2^3 - 1) + \ldots$$

$$+ n(2^n - 1) = 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n - (1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$$

$$= 2(1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot 2^{n-1}) - (1 + 2 + 3 + \ldots + n).$$

Пример сводится к нахождению суммы:

$$S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \ldots + na^{n-1}.$$

Умножив обе части на a, получим:

$a \cdot S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \ldots + na^n$, откуда следует

$(a - 1) S_n = -(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}) + n \cdot a^n$, или

$$(a - 1) S_n = na^n - \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Задача 3.

Найти сумму:

а) $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$;

б) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.

Решение.

Пусть $S_n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$. Тогда

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} = S_n'.$$

Задача 4.

Найти сумму n членов:

$$S = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \ldots + n(n - 1)^2 + (n + 1)n^2.$$

Решение.

$$S = (1 + 1) \cdot 1^2 + (2 + 1) \cdot 2^2 + (3 + 1) \cdot 3^2 + \ldots + (n + 1) \cdot n^2.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}.$$

Задача 5.

Найти сумму:

$$S_n = 1\cdot 3x + 3\cdot 5x^2 + \ldots + (2n-1)(2n+1)\,x^n.$$

Решение.

$$S_n = (4\cdot 1^2 - 1)\,x + (4\cdot 2^2 - 1)\,x^2 + \ldots + (4\cdot n^2 - 1)\,x^n, \text{ или}$$

$$S_n = 4\,(1^2\cdot x + 2^2\cdot x^2 + \ldots + n^2 x^n) - (x + x^2 + \ldots + x^n). \quad (1)$$

Пусть $y = x + 2^2\cdot x^2 + \ldots + n^2 x^2$. (2)

Умножим обе части последнего равенства на x.

$$xy = x^2 + 2^2\cdot x^3 + \ldots + n^2 x^{n+1}. \quad (3)$$

Вычтем из равенства (2) равенство (3).

$$y\,(1-x) = x + 3x^2 + 5x^3 + \ldots + (2n-1)\,x^n - n^2 x^{n+1}. \quad (4)$$

Умножим (4) на x.

$$xy\,(1-x) = x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)\,x^{n+1} - n^2 x^{n+2}. \quad (5)$$

Наконец, вычитая из равенства (4) равенство (5), получим

$$y\,(1-x)^2 = x + 2\,(x^2 + x^3 + \ldots + x^n) - (n^2 + 2n - 1)\,x^{n+1} + n^2 x^{n+2}, \text{ или}$$

$$y\,(1-x)^2 = x + \frac{2\,(x^2 - x^{n+1})}{1-x} - (n^2 + 2n - 1)\,x^{n+1} + n^2 x^{n+2}.$$

Воспользовавшись тем, что $x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$, получаем из (6):

$$y = \frac{x + x^2 - (n^2 - 2n + 1)\,x^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{(2n^2 + 2n - 1)\,x^{n+2} - n^2 x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

Подставляя значение y в (1), находим

$$S_n = \frac{3x^2 + 6x^2 - x^3 - (4n^2 + 8n + 3)\,x^{n+1}}{(1-x^3)} +$$

$$+\frac{(8n^2-8n-6)\,x^{n+2}-(4n^2-1)\,x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

Задача 6.

Доказать:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}2^3=(1+1)^3=1^3+3\cdot1^2\cdot1+3\cdot1\cdot1^2+1^3,\\ 3^3=(2+1)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot1+3\cdot2\cdot1^2+1^3,\\ 4^3=(3+1)^3=3^3+3\cdot3^2\cdot1+3\cdot3\cdot1^2+1^3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (n+1)^3=n^3+3\cdot n^2\cdot1+3\cdot n\cdot1^2+1^3\end{array}\right\}\qquad(1)$$

Сложив (1) и исключив из обеих частей полученного равенства одинаковые члены, находим

$$(n+1)^3=1+3\,(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+$$
$$+3\,(1+2+3+\ldots+n)+n.\qquad(2)$$

Но поскольку $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$, то из (2) следует:

$$3\,(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n\,(n+1)}{2}=$$
$$=(n+1)\left((n+1)^2-1-\frac{3n}{2}\right)=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}=$$
$$=\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{2},\ \text{откуда}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Задача 7.

Найти сумму $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$.

Решение.

Первый способ. Известно, что

$$1^3+2^3+\ldots+m^3=\left(\frac{m\,(m+1)}{2}\right)^2,\qquad(1)$$

следовательно,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 + (2n)^3 = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Сделаем перегруппировку в левой части (2):

$$(1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3) + (2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3) =$$
$$= \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Обозначим искомую сумму через S, тогда (3) запишется так:

$$S = 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2. \qquad (4)$$

Учитывая (1), перепишем (4) так:

$$S = n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = n^2(2n^2-1).$$

Второй способ. Имеем тождество

$$(2m-1)^3 = 8m^3 - 12m^2 + 6m - 1.$$

Придавая m значения 1, 2, 3, ... , n, получим

$$1^3 = 8\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 + 6\cdot 1 - 1;$$
$$3^3 = 8\cdot 2^3 - 12\cdot 2^2 + 6\cdot 2 - 1;$$
$$5^3 = 8\cdot 3^3 - 12\cdot 3^2 + 6\cdot 3 - 1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(2n-1)^3 = 8\cdot n^3 - 12\cdot n^2 + 6n - 1.$$

Складывая почленно все равенства (1), получим

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = 8(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) -$$
$$- 12(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 6(1 + 2 + \ldots + n) - n =$$
$$= 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 12\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} +$$
$$+ 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2(2n^2-1).$$

Задача 8.

Найти степенные суммы: $S_n^{(p)}$.

Решение.

Имеем: $S_n^{(p)} = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$, n и $p \in N$.

Если общий член можно представить в виде

$$a_n = f(n) = \varphi(n + 1) - \varphi(n). \tag{1}$$

то, подставляя 1, 2, 3, ..., получим

$$\begin{aligned} a_1 &= \varphi(2) - \varphi(1); \\ a_2 &= \varphi(3) - \varphi(2); \\ a_3 &= \varphi(4) - \varphi(3); \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{k-1} &= \varphi(k) - \varphi(k - 1); \\ a_k &= \varphi(k + 1) - \varphi(k). \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, найдем

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_k = \varphi(k + 1) - \varphi(1), \tag{1}$$

т.е. получим сумму k членов $\{a_n\}$ как разность $\varphi(k + 1) - \varphi(1)$ значений функции $\varphi(n)$ при $n = k + 1$ и $n = 1$. Примеры:

1. $S_n^{(1)} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

2. $S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n - 1)^2 + n^2$.

В формуле (1) в качестве функции $\varphi(n)$ возьмем функцию $\varphi(n) = n^3$. Тогда $\varphi(n+1) - \varphi(n) = (n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$, т.е. имеем тождество

$$3n^2 + 3n + 1 = (n + 1)^3 - n^3.$$

Подставляя в это тождество $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, получим

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 &= 2^3 - 1^3; \\ 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 + 1 &= 3^3 - 2^3; \\ 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 + 1 &= 4^3 - 3^3; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ 3n^2 + 3n + 1 &= (n + 1)^3 - n^3. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти тождества найдем

$$3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3\,(1 + 2 + \ldots + n) + n = (n + 1)^3 - 1^3,$$

$$\text{или } 3\,S_n^{(2)} + 3\,\frac{n\,(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1^3, \text{ откуда}$$

$$S_n^{(2)} = \frac{2n^3 + 3n + n}{6}.$$

Задача 9.

Найти сумму n членов ряда

$$\frac{1^2}{1} + \frac{1^2 + 2^2}{2} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3} + \ldots + \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}{k}.$$

Решение.

Замечаем, что $a_k = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2}{k}$.

Так как $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k\,(k+1)(2k+1)}{6}$, то

$$a_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{k\,(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k^2}{3} + \frac{k}{2} + \frac{1}{6}.$$

Придавая в этом равенстве k значения 1, 2, 3, ... , n, получим

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1^2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \\ a_2 &= \frac{2^2}{3} + \frac{2}{2} + \frac{1}{6}, \\ a_3 &= \frac{3^2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Складывая почленно все n равенств (1), получим

$$S_n = \frac{1}{3}\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^n) + \frac{1}{2}\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + \frac{n}{6}.$$

Но так как $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ и

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ то}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18} + \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{6} =$$

$$= \frac{n}{36}(4n^2 + 15n + 17).$$

Задача 10.

Найти сумму $\dfrac{2}{3+1} + \dfrac{2^2}{3^2+1} + \dfrac{2^3}{3^4+1} + \ldots + \dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}+1}$.

Решение.

Так как $\dfrac{1}{a+1} = \dfrac{a-1}{a^2-1} = -\dfrac{1}{a^2-1} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a-1}\right)$,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^2-1},$$

то $b_k = \dfrac{2^{k+1}}{3^{2k}+1} = \dfrac{2^{k+1}}{3^{2k}-1} - \dfrac{2^{k+2}}{3^{2k+1}-1} = C_k - C_{k+1}$, и поэтому заданная сумма $S = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$ равна

$$C_0 \cdot C_{n+1} = 1 - \frac{2^{n+2}}{3^{2n+1}-1}.$$

Задача 11.

Найти сумму $3 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5^8 + \ldots + 93 \cdot 5^{92}$.

Решение.

Поскольку $3 \cdot 5^2$ есть значение функции $y = 3x^2$ при $x = 5$, то можно записать

$$3 \cdot x^2 + 6 \cdot x^5 + 9 \cdot x^8 + \ldots + 93 \cdot x^{92} = A.$$

Но $3x^2$ есть производная от функции x^3. Тогда, поскольку сумма производных есть производная от суммы, можно записать $(x^3 + x^6 + x^9 + \ldots + x^{93})' = (B)' = A$.

Найдем $B = x^3 + x^6 + x^9 + \ldots + x^{93}$, т.е. сумму геометрической прогрессии, где $b_1 = x^3$, $q = x^3$, $n = 31$.

$$B = \frac{x^3(x^{93}-1)}{x^3-1};$$

$$A = \left(\frac{x^3(x^{93}-1)}{x^3-1}\right)' = \frac{(96(x^{95}) - 3x^2)\cdot(x^3-1) - 3x^2(x^{96}-x^3)}{(x^3-1)^2} =$$

$$= \frac{93x^{98} - 96x^{95} + 3x^2}{(x^3-1)^2}.$$

Отсюда $3\cdot 5^2 + 6\cdot 5^5 + 9\cdot 5^8 + \ldots + 93\cdot 5^{92} =$

$$= \frac{93\cdot 5^{98} - 96\cdot 5^{95} + 3\cdot 5^2}{(5^3-1)^2}.$$

Задача 12.

Найти сумму: $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2-1}$.

Решение.

Заметим, что $\frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$. Имеем

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Задача 13.

$$1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 7 + \ldots + n(2^n-1) = S.$$

$$1(2-1) + 2(4-1) + 3(8-1) + \ldots + n(2^n-1) =$$

$$= (2\cdot 1 - 1\cdot 1) + (2\cdot 4 - 2\cdot 1) + (3\cdot 8 - 3\cdot 1) + \ldots + (n\cdot 2^n - n\cdot 1) =$$

$$= (2^1\cdot 1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \ldots + n\cdot 2^n) - (1 + 2 + 3 + \ldots + n).$$

$$S_1 = 1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \ldots + n\cdot 2^n;$$

$$-2\,S_1 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + \ldots + (n-1)\,2^n + n\cdot 2^{n+1};$$

$$-\,S_1 = [1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^4 + \ldots + 1\cdot 2^n - n\cdot 2^{n+1}] +$$
$$+ (1 + 2 + 3 + \ldots + n).$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через A, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = B$. Тогда

$$A = \frac{2\,(1-2^n)}{1-2} = \frac{2-2^{n+1}}{1} = 2 - 2^{n+1};\quad B = \frac{(n+1)\,n}{2};$$

$$-\,S_1 = 2 - 2^{n+1} - n\cdot 2^{n+1} + \frac{(n+1)\,n}{2};$$

$$S = 2^{n+1}\,(n-1) + 2 - \frac{(n+1)\,n}{2}.$$

Задача 14.

Найти сумму

$$1 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 6\cdot 7 + \ldots + 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \times\ldots$$
$$\times\,(2\,(k-1)(2k-1) + \ldots).$$

Решение.

Замечая, что n-й член равен $2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2\,(n-1)(2n-1)$ и складывая тождества

$$1 = 1;$$
$$2\cdot 3 = 2\,(4-1) = 2\cdot 4 - 2;$$
$$2\cdot 4\cdot 5 = 2\cdot 4\,(6-1) = 2\cdot 4\cdot 6 - 2\cdot 4;$$
$$2\cdot 4\cdot 6\cdot 7 = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 - 4\cdot 6;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(2\,(n-1)(2n-1)) =$$
$$= 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n) - 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2\,(n-1)),$$

получим $S = (2\cdot 4\cdot 6\cdot\,\ldots\,\cdot 2n) - 1 = 2^n\cdot n! - 1.$

Задача 15.

Найти сумму $S = 8 + 2\cdot 89+3\cdot 899+4\cdot 8999 +\ldots+ n\cdot 8\underbrace{999\ldots 9}_{n\text{ раз}}$

Решение.

Так как $8 = 9 - 1$;

$$2\cdot 89 = 2\,(9\cdot 10 - 1) = 9\cdot 2\cdot 10 - 2;$$

$$3\cdot 899 = 3\,(9\cdot 10^2 - 1) = 9\cdot 3\cdot 10^2 - 3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n\cdot 8\underbrace{999\ldots 9}_{n\text{ раз}} = n\,(9\cdot 10^{n-1} - 1) = 9n\cdot 10^{n-1} - n,$$

то данная сумма

$$S = 9\,(1 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10^2 + \ldots + n\cdot 10^{n-1}) - \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Пусть $A = 1 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10^2+\ldots+(n+1)\cdot 10^{n-1} - 10^n$, тогда $10A = 10 + 2\cdot 10^2+\ldots+(n-1)\,10^{n-1} + n\cdot 10^n - 10^n$, откуда

$$-\,9A = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{n-1} - n\cdot 10^n \text{ и}$$

$$A = \frac{1}{9}\left(n = 10^n - \frac{10^n - 1}{9}\right).$$

следовательно, $S = \dfrac{1}{9}\,((9n-1)\,10^n + 1) - \dfrac{n\,(n+1)}{2}.$

Задача 16.

Найдите значение выражения:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + 999^2 - 1000^2.$$

Решение.

Первый способ.

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + 999^2 - 1000^2 =$$

$$= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + (5-6)(5+6) + \ldots +$$

$$+ (999 - 1000)(999 + 1000) = -\,3 - 7 - 11 \ldots - 1999 =$$

$$= -\,\frac{3 + 1999}{2}\cdot 500 = -\,500500.$$

Второй способ.

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + 999^2 - 1000^2 =$$

$$= -1\,(1 + 2) - 1\,(3 + 4) - \ldots - 1\,(999 + 1000) =$$

$$= -(3 + 7 + 11 + \ldots + 1999) = -\frac{3 + 1999}{2} \cdot 500 = -500500.$$

Задача 17.

Найдите сумму: $1 + 2b + 3b^2 + 4b^3 + 5b^4 + \ldots + nb^{n-1}$.

Решение.

$$1 + 2b + 3b^2 + 4b^3 + 5b^4 + \ldots + nb^{n-1} =$$

$$= (1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^{n-1}) + (b + b^2 + b^3 + b^4 + \ldots + b^{n-1}) +$$

$$+ (b^2 + b^3 + b^4 + \ldots + b^{n-1}) + \ldots + (b^{n-2} + b^{n-1}) + b^{n-1} =$$

$$= \frac{1 - b^n}{1 - b} + \frac{b - b^n}{1 - b} + \frac{b^2 - b^n}{1 - b} + \ldots + \frac{b^{n-2} - b^n}{1 - b} + \frac{b^{n-1} - b^n}{1 - b} =$$

$$= \frac{1}{1 - b}\left((1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}) - nb^n\right) =$$

$$= \frac{1}{1 - b}\left(\frac{1 - b^n}{1 - b} - nb^n\right) = \frac{1 - b^n - nb^n + n^{n+1}}{(1 - b)^2} =$$

$$= \frac{1 - (1 + n)\,b^n + nb^{n+1}}{(1 - b)^2}.$$

Задача 18.

Докажите, что $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n - 1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$, $n \geqslant 2$.

Решение.

При $n = 2$ имеем $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2}$, т.е. для $n = 2$ формула верна. Предположим, что она верна для некоторого натурального $n = k$, т.е.

$$S\,(k) = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k - 1}{k!} = 1 - \frac{1}{k!}.$$

Докажем, что тогда она верна и для $n = k + 1$:

$$S(k+1) = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} =$$

$$= S(k) + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{k!+}\frac{k}{(k+1)!} =$$

$$= 1 - \frac{k+1-k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Задача 19.

Докажите, что:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad n \geqslant 2.$$

Решение.

При $n = 2$ имеем $\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$, т.е. для $n = 2$ формула верна. Предположим, что формула верна для некоторого натурального $n = k$, т.е.

$$\prod(k) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}.$$

Докажем, что тогда она верна для $n = k + 1$:

$$\prod(k+1) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$= \prod(k) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k^2 + 2k + 1 - 1}{(k+1)^2} =$$

$$= \frac{k(k+2)}{2k(k-1)} = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)}.$$

Задача 20.

Найдите сумму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

Решение.

$$1 \cdot 1! = 1, \quad 1 + 2 \cdot 2! = 5, \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! +$$

$$+ 3 \cdot 3! = 23, \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119.$$

Замечаем, что $119 = 120-1 = 5! - 1$, $23 = 24 - 1 = 4! - 1$, $5 = 6 - 1 = 3! - 1$, $1 = 2 - 1 = 2! - 1$. Можно предположить, что $S(n) = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$. Докажем это. Для $n = 1$ формула верна. Предположим, что она верна и для некоторого натурального $n = k$, т.е.

$$S(k) = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Докажем, что тогда она будет верна и для $n = k + 1$:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 +$$
$$+ (k+1)(k+1)! = (k+1)!(1 + k + 1) - 1 =$$
$$= (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$$

Задача 21.

Выведите формулу суммы

$$S(n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение.

$$S(1) = \frac{1}{2},\ S(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{2}{3},$$

$$S(3) = S(2) + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

Сравнивая полученные выражения, делаем предположение, что $S(n) = \frac{n}{n+1}$. Докажем это. Для $n = 1$ формула верна. Предположим, что формула верна для некоторого $n = k$, т.е. $S(k) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$.

Исходя из этого предположения, докажем справедливость формулы для $n = k + 1$:

$$S(k+1) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= S(k) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Задача 22.

Доказать тождество:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Решение.

Прибавим и вычтем из левой части сумму

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Сделав группировку, получим:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+$$

$$+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right).$$

Задача 23.

Докажите, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{999}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

Решение.

Преобразуем правую часть данного равенства

$$\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{200}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{100}=$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{199}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{200}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{200}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\ldots-\frac{1}{200}.$$

Задача 24.

Найти сумму

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}.$$

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2};$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{3}-\sqrt{1}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1).$$

Задача 25.

Показать, что если $a > b > 0$, то разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел находится между $\frac{(a-b)^2}{8a}$ и $\frac{(a-b)^2}{8b}$.

Решение.

Рассмотрим неравенство:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b};$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 < \frac{(a-b)^2}{4b};$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} < \frac{a-b}{2\sqrt{b}}; \quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}} > 1. \qquad (1)$$

Рассмотрим неравенство:

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab};$$

$$\frac{(a-b)^2}{4a} < (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2;$$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} < 1. \qquad (2)$$

Неравенства (1) и (2) справедливы, так как $a > b > 0$.

Задача 26.

Вычислить сумму

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + 99^2 - 100^2 + 101^2.$$

Решение.

Имеем:

$$1^2 - 2^2 + \ldots + 101^2 = 1 + (101^2 - 100^2) + (99^2 - 98^2) + \ldots + 9 +$$
$$+ 5 + 1 = \frac{1}{2}(201 + 1) \cdot 51 = 101 \cdot 51 = 5151.$$

Задача 27.

Доказать, что сумма $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ при любом целом n есть квадрат целого числа.

Решение.

Докажем методом математической индукции

$$1^3 = 1^2;$$
$$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = (1 + 2)^2;$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2 \ldots$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{1+n}{2} \cdot n\right)^2;$$
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + (n+1)^3 =$$
$$= \left[\frac{(n+1)\,n}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + n + 1\right] =$$
$$= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Задача 28.

Даны десять чисел $S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_{10}$, которые являются попарно взятыми суммами пяти чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_5$. Выразить числа x через числа S.

Решение.

Очевидно, что $S_1 = x_1 + x_2$; $S_2 = x_1 + x_3$; $S_9 = x_3 + x_5$; $S_{10} = x_4 + x_5$. Каждое x_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ входит точно в четыре суммы S_i, следовательно, $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{10} = 4(x_1 + x_2 + \ldots + x_5)$. Из выражений для S_1, S_2, S_{10}, S легко находим

$$x_1 = S_1 + S_2 + S_{10} - \frac{S}{4}.$$

Аналогично из выражений для S_2, S_{10}, S находим

$$x_2 = \frac{S}{4} - S_2 - S_{10}.$$

Точно так же находятся:

$$x_3 = S_4 - S_1 - S_{10}; \; x_4 = \frac{S}{4} - S_1 - S_9;$$

$$x_5 = S_1 + S_9 + S_{10} - \frac{S}{4}.$$

23. ЛОГАРИФМЫ

Задача 1.

Доказать, что если $a>0$, $x>0$, $N>0$, то

1) $\log_a N = \dfrac{1}{\log_N a}$;

2) $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$ $(b>0;\ b\neq 1)$;

3) $\log_a N = \log_{a^n} N^n$;

4) $\dfrac{\log_a N}{\log_{ak} N} = 1 + \log_a k$;

5) $\dfrac{1}{\log_a N} + \dfrac{1}{\log_{a^2} N} + \dfrac{1}{\log_{a^3} N} + \dfrac{1}{\log_{a^4} N} + \dfrac{1}{\log_{a^5} N} = 15 \log_N a$;

6) $\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} x} + \dfrac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a_n} x}}$;

7) $\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N =$

$$= \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

Решение.

1) Имеем $a^{\log_a N} = N$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию N:

$$\log_a N \cdot \log_N a = \log_N N, \text{ значит, } \log_a N = \frac{1}{\log_N a}.$$

2) Имеем $a^{\log_a N} = N$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию b $(b>0,\ b\neq 1)$. Имеем

$$\log_a N \cdot \log_b a = \log_b N, \text{ или } \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

3) Имеем $a^{n \log_a N} = N^n$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию a^n:

$$\log_a N \cdot \log_{a^n} a^n = \log_{a^n} N^n, \text{ или } \log_a N = \log_{a^n} N^n.$$

4) Поскольку $\log_{ak} N = \dfrac{\log_a N}{\log_a ak} = \dfrac{\log_a N}{1 + \log_a k}$, то утверждение задачи доказано.

5) Поскольку $\log_{a^k} N = \dfrac{1}{k}\log_a N$, то

$$\frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_{a^2} N} + \frac{1}{\log_{a^3} N} + \frac{1}{\log_{a^4} N} + \frac{1}{\log_{a^5} N} =$$

$$= \frac{1}{\log_a N}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \frac{15}{\log_a N} = 15\log_N a.$$

6) $\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \log_x a_1 + \log_x a_2 + \ldots + \log_x a_n =$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} x} + \dfrac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

7) $\dfrac{1}{\log_{abc} N} = \log_N abc = \log_N a + \log_N b + \log_N c =$

$$= \frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_b N} + \frac{1}{\log_c N} =$$

$$= \frac{\log_b N \cdot \log_c N + \log_a N \cdot \log_c N + \log_a N \cdot \log_b N}{\log_a N \log_b N \log_c N}.$$

Задача 2.

Дано $\log_{12} 27 = a$. Найти $\log_6 16$.

Решение.

$$\log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 4 + 1} = a; \quad \log_4 3 = \frac{a}{3 - a};$$

$$\log_6 16 = 2\log_6 4 = \frac{2}{\log_4 3 + \dfrac{1}{2}} = \frac{4}{2\log_4 3 + 1} = \frac{12 - 4a}{3 + a}.$$

Задача 3.

Дано $\log_{14} 2 = a$. Найти $\log_{49} 16$.

Решение.

$$\log_{49} 16 = \log_7 4 = 2\log_7 2; \quad \log_{14} 2 = \frac{1}{\log_2 7 + 1} = a;$$

$$\log_2 7 = \frac{1-a}{a}; \quad \log_{49} 16 = \frac{2a}{1-a}.$$

Задача 4.

Дано $\log_4 125 = a$. Найти $\lg 64$.

Решение.

$$\log_4 125 = 3\log_4 5 = a;$$

$$\log_{10} 64 = \frac{3}{\log_4 10} = \frac{3}{\log_4 5 + \frac{1}{2}} = \frac{18}{3+2a}.$$

Задача 5.

Дано $\log_5 4 = a$ и $\log_5 3 = b$. Найти $\log_{25} 12$.

Решение.

$$\log_{25} 12 = \frac{1}{2}\log_5 12 = \frac{1}{2}(\log_5 4 + \log_5 3) = \frac{a+b}{2}.$$

Задача 6.

Дано $\lg 125{,}5 = a$ и $\lg 7 = b$. Найти $\lg 5$.

Решение.

$$\lg 5 = \lg 2{,}5 + \lg 2, \quad 1 = \lg 10 = \lg 5 + \lg 2;$$

$$1 - \lg 2 = \lg 2 + \lg 2{,}5, \quad \lg 2 = \frac{1}{2}(1 - \lg 2{,}5);$$

$$\lg 5 = 1 - \frac{1}{2}(1 - \lg 2{,}5) = \frac{1 + \lg 2{,}5}{2};$$

$$\lg 2{,}5 = \lg\frac{122{,}5}{49} = \lg 122.5 - 2\lg 7; \quad \lg 5 = \frac{1}{2}(1 + a - 2b).$$

Задача 7.

Дано $\log_{36} 8 = a$. Найти $\log_{36} 9$.

Решение.

$$\log_{36} 8 = \frac{1}{2}\log_6 8 = \frac{1}{2}\log_6 4 + \frac{1}{2}\log_6 2 = \frac{3}{2}\log_6 2 =$$

$$= \frac{3}{2\log_2 3 + 2} = a; \quad \log_2 3 = \frac{3 - 2a}{2a};$$

$$\log_{36} 9 = \log_6 3 = \frac{1}{\log_3 2 + 1} = \frac{3 - 2a}{3} = 1 - \frac{2}{3}a.$$

Задача 8.

Дано $\log_6 2 = a$. Найти $\log_6 9$.

Решение.

$$\log_6 2 = \frac{1}{\log_2 3 + 1} = a; \quad \log_2 3 = \frac{1 - a}{a};$$

$$\log_6 9 = \frac{1}{\log_{3^2} 6} = \frac{2}{\log_3 2 + 1} = \frac{2(1 - a)}{1} = 2 - 2a.$$

Задача 9.

Зная, что $\lg 64 = a$, найти $\lg \sqrt[3]{25}$.

Решение.

$$\lg 64 = 3\lg 4 = a; \quad \lg 4 = \frac{a}{3};$$

$$\lg 25\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\lg\frac{100}{4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\lg 4 = \frac{2}{3} - \frac{a}{9}.$$

Задача 10.

Зная, что $\log_6 2 = a$, найти $\log_3 6$.

Ответ: $\frac{1}{1 - a}$.

Задача 11.

Вычислить $\log_{25} 24$, если $\log_6 15 = \alpha$ и $\log_{12} 18 = \beta$.

Решение.

Имеем: $\log_{12} 18 = 2\log_{12} 3 + \log_{12} 2 =$

$$= \frac{2}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_2 12} = \frac{2}{2\log_3 2 + 1} + \frac{1}{2 + \log_2 3} =$$

$$= \frac{2\log_2 3 + 1}{2 + \log_2 3} = \beta, \text{ т.е. } \ 2\log_2 3 + 1 = 2\beta + \beta\log_2 3;$$

$$\log_2 3\,(2 - \beta) = 2\beta - 1$$

а так как $\beta \neq 2$, то $\log_2 3 = \dfrac{2\beta - 1}{2 - \beta}$.

Далее, $\log_6 15 = \log_6 3 + \log_6 5$;

$$\log_6 3 = \frac{1}{\log_3 6} = \frac{1}{1 + \log_3 2} = \frac{2\beta - 1}{\beta + 1}. \text{ Отсюда:}$$

$$\log_6 5 = \alpha - \frac{2\beta - 1}{\beta + 1} = \frac{\alpha\beta + \alpha - 2\beta + 1}{\beta + 1}. \text{ Имеем:}$$

$$\log_6 2 = \frac{1}{\log_2 6} = \frac{1}{1 + \log_2 3} = \frac{2 - \beta}{\beta + 1}.$$

Задача 12.

Доказать, что если a и b — длины катетов, а c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника, то

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Решение.

При $a = 1$ это очевидно. Пусть $a \neq 1$. Тогда

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = \frac{1}{\log_a (c + b)} + \frac{1}{\log_a (c - b)} =$$

$$= \frac{\log_a (c - b) + \log_a (c + b)}{\log_a (c + b)\log_a (c - b)} = \frac{\log_a a^2}{\log_a (c + b)\log_a (c - b)} =$$

$$= \frac{2}{\log_a (c + b)\log_a (c - b)} = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Задача 13.

Вычислить (без калькулятора)

$$(\log_2 3 + \log_3 16 + 4)(\log_2 3 - 2\log_{12} 3)\log_3 2 - \log_2 3.$$

Решение.

1) $\log_2 3 + \log_3 16 + 4 = \log_2 3 + 4\log_3 2 + 4 =$

$$= \frac{1}{\log_3 2} + 4\log_3 2 + 4 = \frac{1 + 4\log_3^2 2 + 4\log_3 2}{\log_3 2} =$$

$$= \frac{(1 + 2\log_3 2)^2}{\log_3 2}.$$

2) $\log_2 3 - 2\log_{12} 3 = \dfrac{1}{\log_3 2} - \dfrac{2}{\log_3 12} =$

$$= \frac{1}{\log_3 2} - \frac{2}{1 + 2\log_3 2} = \frac{1}{\log_3 2\,(1 + 2\log_3 2)}.$$

3) $\dfrac{(1 + 2\log_3 2)^2}{\log_3 2} \cdot \dfrac{1}{\log_3 2\,(1 + 2\log_3 2)} \cdot \log_3 2 -$

$$- \log_2 3 = \frac{1 + 2\log_3 2}{\log_3 2} - \frac{1}{\log_3 2} = 2.$$

Задача 14.

Известно, что числа 3; $3\log_y x$, $3\log_z y$ и $7\log_x z$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что $x^{12} = y^{21} = z^{28}$.

Доказательство.

Обозначим $\log_y x = a$; $\log_z y = b$. Тогда

$$\begin{cases} 2 \cdot 3a = 3 + 3b, \\ 2 \cdot 3b = \dfrac{7}{ab} + 3a, \end{cases}$$

откуда $a = \dfrac{1 + b}{2}$; $6b = \dfrac{7 \cdot 2}{b(1 + a)} + \dfrac{3(1 + a)}{2}$, значит,

$$12b^2(1 + b) = 28 + 3b(1 + b)^2, \text{ или}$$

$$27b^3 + 18b^2 - 9b - 84 = 0.$$

Пусть $3b = c$, тогда $c^3 + 2c^2 - 84 = 0$ или

$$(c - 4)(c^2 + 6c + 21) = 0, \text{ значит, } c = 4,$$

$$b=\frac{4}{3},\ a=\frac{7}{6},\ \log_y x=\frac{7}{6},\ \text{т.е. } x^6=y^7.$$

Имеем: $\log_z y=\frac{4}{3}$, т.е. $y^3=z^4$, откуда $y^{21}=z^{28}$,

$$x^{18}=y^{21}=z^{28}.$$

Задача 15.

При каких x числа $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$ и $\lg(2^x+3)$ составляют арифметическую прогрессию?

Решение.

Имеем: $2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$;

$\lg(2^x-1)=\lg[2(2^x+3)]$, откуда $(2^x-1)^2=2(2^x+3)$.

Пусть $2^x=y>0$. Тогда $(y-1)^2=2(y+3)$, т.е.

$y^2-2y+1=2y+6$, или $y^2-4y-5=0$; $y_1=5$, $y_2=-1$.

Так как $y>0$, то второе значение отпадает. Итак, $y=5$, т.е. $2^x=5$, $x=\log_2 5$.

Задача 16.

Упростить: $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$.

Решение.

Обозначим $\lg a=x$, $y=a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$. Имеем

$$\lg a\cdot\lg y=\lg(\lg a)\lg a,\ \text{откуда } x\lg y=\lg x^x,$$

следовательно, $\lg y^x=\lg x^x$, или $y^x=x^x$, значит,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^x=1,\ x=y,\ y=\lg a.$$

Задача 17.

Дано: $\lg 2=a$, $\lg 7=b$. Найти $\log_8 9{,}8$.

Решение.

Имеем $\log_8 9{,}8=\dfrac{\lg 9{,}8}{\lg 8}=\dfrac{\lg(49\cdot 0{,}2)}{3\lg 2}=$

$$=\frac{2\lg 7+\lg 2-1}{3\lg 2}=\frac{2b+a-1}{3a}.$$

Задача 18.

Дано: $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$, $z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$. Доказать: $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

Доказательство.

Имеем $(1-\lg x)\lg y=1$, $(1-\lg y)\lg z=1$. Отсюда

$$\lg x=1-\frac{1}{\lg y}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\lg z}}=\frac{1}{1-\lg z}.$$

Поэтому $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

Задача 19.

Доказать, что если a, b и c — три последовательных члена геометрической прогрессии, то

$$\frac{\log_a-\log_b x}{lo_b x-\log_c x}=\frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

Доказательство.

Так как $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ и $b=\sqrt{ac}$, то

$$\log_b x=\frac{1}{\log_x b}=\frac{1}{\log_x\sqrt{ac}}=$$

$$=\frac{2}{\log_x a+\log_x c}=\frac{2\log_a x\cdot\log_c x}{\log_a x+\log_c x}.$$

Подставляя значения $\log_b x$ в левую часть доказываемого равенства, получим

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=$$

$$=\frac{\log_a x\,(\log_a x+\log_c x)-2\log_a x\cdot\log_c x}{2\log_a x\cdot\log_c x-\log_c x\,(\log_a x+\log_c x)}=$$

$$=\frac{(\log_a x)^2-\log_a x\cdot\log_c x}{\log_a x\cdot\log_c x-(\log_c x)^2}=\frac{\log_a x\,(\log_a x-\log_c x)}{\log_c x\,(\log_a x-\log_c x)}=\frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

Задача 20.

Доказать, что если $\log_k x$; $\log_m x$; $\log_n x$ образуют арифметическую прогрессию, то $n^2 = (kn)^{\log_k m}$.

Доказательство.

По определению арифметической прогрессии можем записать: $\log_m x - \log_k x = \log_n x - \log_m x$, или

$$\frac{\log_k x}{\log_k m} - \log_k x = \frac{\log_k x}{\log_k n} - \frac{\log_k x}{\log_k m}.$$

Сокращая на $\log_k x$, приводя подобные члены и потенцируя, получим:

$$\frac{2}{\log_k m} = 1 + \frac{1}{\log_k n}; \quad 2\log_k n = \log_k m\,(\log_k n + 1);$$

$$\log_k n^2 = \log_k m \cdot \log_k (nk); \quad \log_k n^2 = \log_k (nk)^{\log_k m};$$

$$n^2 = (nk)^{\log_k m}.$$

Задача 21.

Доказать, что $\log_2 3$ — иррациональное число.

Доказательство.

Поскольку $1 < \log_2 3 < 2$, то $\log_2 3$ — число не целое. Предположим, что $\log_2 3 = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда $2^m = 3^n$. При m и n — натуральных, это равенство невозможно.

Задача 22.

Доказать, что если $\alpha = \log_{12} 18$ и $\beta = \log_{24} 54$, то

$$\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1.$$

Доказательство.

Имеем $\alpha = \log_{12} 18 = \dfrac{\log_3 18}{\log_3 12} = \dfrac{2 + \log_3 2}{1 + 2\log_3 2}$;

$$\beta = \log_{24} 54 = \frac{\log_3 54}{\log_3 24} = \frac{3 + \log_3 2}{3\log_3 2 + 1}.$$

Тогда $\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = \dfrac{(2 + \log_3 2)(3 + \log_3 2)}{(3\log_3 2 + 1)(1 + 2\log_3 2)} +$

$$+ \frac{\log_3^2 2 + 5\log_3 2 + 6}{(3\log_3 2 + 1)(1 + 2\log_3 2)} + \frac{5\log_3^2 2 - 5}{(3\log_3 2 + 1)(1 + 2\log_3 2)} =$$

$$= \frac{6\log_3^2 2 + 5\log_3 2 + 1}{(3\log_3 2 + 1)(1 - 2\log_3 2)} = 1.$$

Задача 23.

Дано $\lg 676 = a$, $\lg 104 = b$. Найти $\lg 2$.

Решение.

Имеем: $676 = 2^2 \cdot 13^2$, $104 = 2^3 \cdot 13$, значит,

$\lg 676 = 2\lg 2 + 2\lg 13 = a$; $\lg 104 = 3\lg 2 + \lg 13 = b$.

Имеем

$$\left\{\begin{array}{l} 6\lg 2 + 2\lg 13 = 2b, \\ -\,2\lg 2 - 2\lg 13 = -a, \\ \hline 4\lg 2 = 2b - a, \end{array}\right. \quad \text{значит,} \quad \lg 2 = \frac{2b - a}{4}.$$

Задача 24.

Дано $\log_7 12 = a$; $\log_{12} 24 = b$. Найти $\log_{54} 168$.

Решение.

Имеем $\log_{54} 168 = \dfrac{\log_7 168}{\log_7 54} = \dfrac{\log_7(8 \cdot 3 \cdot 7)}{\log_7(27 \cdot 2)} =$

$$= \frac{\log_7 8 + \log_7 3 + \log_7 7}{\log_7 27 + \log_7 2}. \qquad (1)$$

Но $\log_7 72 = 2\log_7 2 + \log_7 3 = a$,

$$\log_{12} 24 = \frac{\log_7 24}{\log_7 12} = \frac{\log_7 3 + 3\log_7 2}{\log_7 12} = b,$$

$$2\log_7 2 + \log_7 3 = a, \quad \log_7 3 + 3\log_7 2 = ab,$$

тогда $\log_7 2 = ab - a$.

Поскольку $\log_7 3 = a - 2ab + 2a = 3a - 2ab$. то

$$\log_{54} 168 = \frac{3ab - 3a + 3a - 2ab + 1}{9a - 6ab + ab - a} = \frac{ab + 1}{3a - 5ab}.$$

Задача 25.

Вычислить $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

Решение.

Заданная разность равна нулю, так как

$$2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}.$$

Действительно, $\log_2 2^{\sqrt{\log_2 3}} = \sqrt{\log_3 2} \cdot \log_2 2 = \sqrt{\log_2 3}$.

$$\log_2 3^{\sqrt{\log_2 3}} = \sqrt{\log_3 2} \cdot \log_2 3 = \frac{\log_2 3}{\sqrt{\log_2 3}} = \sqrt{\log_2 3}.$$

24. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы

Задача 1.

Решить уравнение: $5^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 3^{2x} + 2^{2x}$.

Решение.

Преобразуем данное уравнение:

$$5^x + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x = (3^x)^2 + (2^x)^2;$$

$$5^x = (3^x - 2^x)^2; \quad (\sqrt{5})^x = |3^x - 2^x|.$$

Если $x \geqslant 0$, то $(\sqrt{5})^x = 3^x - 2^x$, т.е.

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.$$

Легко видеть, что $x = 2$ является корнем уравнения. Этот корень единственный, так как левая часть уравнения — убывающая функция.

Если $x < 0$, то $(\sqrt{5})^x = 2^x - 3^x$, т.е. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$.

Функция $f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1$ монотонно возрастает, а поэтому уравнение $f(x) = 0$ не может иметь более одного корня. Неравенства $f(-3) < 0$ и $f(-2) > 0$ показывают, что корень существует и лежит в интервале $]-3; -2[$. Этот корень можно вычислить приближенно с любой степенью точности.

Итак, данное уравнение имеет два корня.

Задача 2.

Решить уравнение $3^{x^2}(3^{2(x+1)} - 1) = 3^x \cdot 6552$.

Решение.

$$6552 = 3^2(3^6 - 1);$$

$$3^{x^2}(3^{2(x+1)} - 1) = 3^x \cdot 3^2(3^6 - 1)$$

Докажем, что $x = 2$. Действительно, если $x > 2$, то левая часть уравнения больше правой.

Если $x < 2$ — наоборот. Остается, что $x = 2$.

Задача 3.

Решить неравенство $\sqrt{x} > \ln(x + 1)$.

Решение.

Неравенство равносильно неравенству $f(x) > 0$, где $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x + 1)$; $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)} = \dfrac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2\sqrt{x}(x+1)} > 0$ на промежутках $]0;\ 1[$ и $]1;\ \infty[$.

Следовательно, $y(x)$ возрастает на промежутках $[0;\ 1]$ и $[1;\ \infty[$, а значит, и на промежутке $[0;\ \infty[$. Поэтому для $x \in\ ]0;\ \infty[$ имеем: $y(x) > y(0) = 0$.

Ответ: $x \in\ ]0;\ \infty[$.

Задача 4.

Решить уравнение $(x - y)^2 + (e^x - y)^2 = 0{,}5$.

Решение.

Левая часть уравнения представляет собой квадрат расстояния от точки с координатами $(x;\ y)$ до точки A с координатами $(x;\ e^x)$. Найдем наименьшее расстояние r между точками биссектрисы первого и третьего координатных углов и точками показательной кривой. Это расстояние равно расстоянию между биссектрисой и касательной к показательной кривой, параллельной к биссектрисе; уравнение касательной, как нетрудно показать, есть $y = x + 1$, а тогда $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Поскольку наименьшее расстояние $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ достигается только в случае, когда A — точка касания, то $x = 0$, а тогда $y = \dfrac{1}{2}$ и, таким образом, единственным решением данного уравнения является пара $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Задача 5.

Решить уравнение $3 \cdot 5^{2x+1} - 7 \cdot 2^{4x+1} = 19$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде: $14 \cdot 4^{2x} + 19 = 15 \cdot 5^{2x}$. После деления обеих частей на 5^{2x} получим

$$14 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} + 19 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = 15.$$

Легко проверить, что $x = \frac{1}{2}$ является корнем этого уравнения, а поскольку левая часть уравнения убывающая функция, то этот корень единственный.

Задача 6.

Решить уравнение $2 \log_3 \operatorname{ctg} x = \log_2 \cos x$.

Решение.

Обозначим $\log_2 \cos x = y$. Тогда $\cos x = 2^y$, $\operatorname{ctg}^2 x = 3^y$, $\operatorname{ctg} x > 0$. Но $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$.

Задача 7.

При каких a уравнение $\log_{2x}(ax + 1) = \frac{1}{2}$ имеет единственное решение?

Решение.

$$\begin{cases} \sqrt{2x} = ax + 1, \\ x \neq \dfrac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = (ax + 1)^2, \\ x \neq \dfrac{1}{2}, \\ ax + 1 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

При $a = 0$ уравнение $a^2 x^2 + 2(a - 1)x + 1 = 0$ имеет единственный корень $x = \frac{1}{2}$. Поэтому при $a = 0$ система (2) решений не имеет. Пусть теперь $a \neq 0$. В этом случае при

$a > \frac{1}{2}$ уравнение $a^2 x^2 + 2(a-1)x + 1 = 0$, а значит, и система (2), решений не имеют. При $a = \frac{1}{2}$ система (2) имеет единственное решение. Итак, пусть $a < \frac{1}{2}$, $a \neq 0$. Положим

$$x_1 = \frac{1 - a + \sqrt{1-2a}}{a^2}; \quad x_2 = \frac{1 - a - \sqrt{2-2a}}{a^2}.$$

Тогда $ax_1 + 1 = \frac{1 + \sqrt{1-2a}}{a}$; $ax_2 + 1 = \frac{1 - \sqrt{1-2a}}{a}$.

Подставив в уравнение $a^2 x^2 + 2(a-1)x + 1 = 0$ «запрещенный» корень $x = \frac{1}{2}$, получим $a = 0$ или $a = -4$. У нас $a \neq 0$. При $a = -4$, имеем: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{8}$.

При $a \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, имеем: $x_1 \neq \frac{1}{2}$;

$$ax_1 + 1 > 0 \text{ и } x_2 \neq \frac{1}{2}, \quad ax_2 + 1 > 0.$$

Значит, при таких x система (2) имеет 2 решения.

При $a < 0$ $ax_1 + 1 < 0$, $ax_2 + 1 > 0$. Выше мы уже отмечали, что при $a \neq 0$ имеем $x_2 \neq \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left]-\infty; 0\right[$.

Задача 8.

Решить уравнение $(\sqrt{3})^x - 2^{x-1} = 1$.

Решение.

Положим $f(x) = 3^{x/2} - 2^{x-1}$. Тогда

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3^{x/2} \ln 3 - \frac{1}{2} \cdot 2^x \ln 2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x < \frac{\ln 2}{\ln 3} \Leftrightarrow x > \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \log_3 2,$$

и поэтому функция f возрастает на $(-\infty; a]$ и убывает на $[a; +\infty)$, где $a = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \log_3 2$. Следовательно, уравнение $f(x) = 1$ имеет не более двух корней. Но $f(2) = f(4) = 1$, так что корнями данного уравнения являются 2 и 4.

Задача 9.

$$\log_2 (1 + \sqrt{x}) = \log_3 x.$$

Решение.

$\log_3 x = y$. Тогда уравнение примет вид:

$$\log_2 (1 + \sqrt{3^y}) = y, \text{ или } 1 + (\sqrt{3})^y = 2^y, \text{ откуда}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1; \qquad y = 2;\ x = 9.$$

Задача 10.

Решить уравнение $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 8.$

Решение.

Легко видеть, что $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = \dfrac{1}{(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x}$.

Обозначим $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = y$, тогда получим уравнение $y^2 - 8y + 1 = 0$, из которого находим $y = 4 \pm \sqrt{15}$.

Ответ: $x = \dfrac{\log 4 \pm \sqrt{15}}{\log \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

Задача 11.

Решить уравнение $27^x - 7\sqrt[3]{7 \cdot 3^x + 6} = 6.$

Решение.

Обозначив 3^x через t, перепишем уравнение в виде

$$\frac{t^3 - 6}{7} = \sqrt[3]{7t + 3},$$

Функция $y = f(t) = \dfrac{t^3 - 6}{7}$ — возрастающая, и если выразить t через y, $t = \sqrt[3]{7y + 6}$, то полученное уравнение можно записать в виде $f(t) = g(t)$, где g — функция, обратная к t.

Но графики возрастающей функции и ее обратной могут пересекаться только на биссектрисе первого и третьего квадрантов, так что

$$f(t) = g(t) \Leftrightarrow f(t) = t \Leftrightarrow t^3 - 6 = 7t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2 + 3t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Следовательно, единственным корнем исходного уравнения является $x = 1$.

Задача 12.

Решить уравнение $2\,|\sin x|^{1+\ln 2} = 1 + |\sin x|$.

Решение.

Так как $|\sin x|^{\ln 2} \leqslant 1$, то

$$2\,|\sin x|^{1+\ln 2} \leqslant 2\,|\sin x| \leqslant 1 + |\sin x|.$$

Поэтому левая часть уравнения равна правой в том и только в том случае, когда оба неравенства превратятся в равенства, т.е. при $|\sin x| = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in Z)$.

Задача 13.

Определить a так, чтобы сумма квадратов всех решений уравнения $\log_a |x - 2a| + \log_a x = 2$ равнялась 4.

Решение.

Заданное уравнение равносильно уравнению

$$x\,|x - 2a| = a^2,$$

для решения которого следует найти положительные корни уравнения $x^2(x - 2a)^2 = a^4$, или

$$(x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - 2ax - a^2) = 0.$$

Так как $a>0$, то это уравнение имеет положительные корни a и $a(1+\sqrt{2})$, откуда получаем, что сумма квадратов корней равна 4 только при $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Задача 14.

Решить уравнение $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$.

Решение.

Пользуясь легко доказуемым равенством $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (прологарифмировать обе части равенства), преобразуем данное уравнение: $9^{\log_2 x} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x}$; $3^{\log_2 x} = x^2 - 1$.

Положив $\log_2 x = y$, получаем $3^y + 1 = 4^y$, или

$$\left(\frac{3}{4}\right)^y + \left(\frac{1}{4}\right)^y = 1.$$

Это уравнение имеет корень $y=1$ — единственный, так как левая часть — убывающая функция. Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень $x=2$.

Задача 15.

Решить уравнение $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

Решение.

Воспользовавшись формулой $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, приведем данное уравнение к такому: $\log_{\cos x} \sin x + \dfrac{1}{\log_{\cos x} \sin x} = 2$ или

$$\log^2_{\cos x} \sin^2 x - 2\log_{\cos x} \sin x + 1 + 0.$$

Отсюда: $(\log_{\cos x} \sin x - 1)^2 = 0$, $\log_{\cos x} \sin x = 1$;

$$\sin x = \cos x,\quad \operatorname{tg} x = 1,\quad x = 2R\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Здесь нельзя написать $x = R\pi + \dfrac{\pi}{4}$, так как при $R = 2n+1$ будет $\sin x < 0$ и $\cos x < 0$, а этого не должно быть, потому что $\cos x$ и $\sin x$ являются основаниями логарифмов не могут быть отрицательными.

Задача 16.

Решить уравнение $2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(4\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 3\cdot 2^x$

Решение.

Перепишем уравнение в виде:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 3.$$

Поскольку $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, то $y^2 - 3y + 2 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Далее находим:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\lg 2}{\lg\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}.$$

Задача 17.

Решить уравнение $9^x - 5^x - 4{3}^x = 2\sqrt{20^x}$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$9^x = (2^x + 5^{x/2})^2,\ 3^x = 2^x + (\sqrt{3})^x,\ \text{или}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x = 1.$$

Отсюда находим, что $x = 2$. Других решений уравнение не имеет, так как при $x > 2$ левая часть последнего уравнения меньше 1, а при $x < 2$ — больше 1.

Задача 18.

При каких действительных числах a, b равенство

$$a\ln x + b = \ln(ax + b) \qquad (1)$$

является тождеством в своей области определения?

Решение.

Пусть сначала $a > 0$, тогда область определения данного равенства — пересечение лучей $]0;\infty[$ и $\left]-\frac{b}{a};\infty\right[$, т.е. некоторый луч. Если равенство (1) является тождеством, то оно остается тождеством и после дифференцирования. В этом случае мы получим $\frac{a}{x} = \frac{a}{ax+b}$.

Это тождество выполняется, очевидно, лишь при $b = 0$ и $a = 1$; полученная пара $(1;\ 0)$ является решением.

Пусть $a = 0$, тогда равенство (1) принимает вид $b = \ln b$ и не выполняется ни при каком b. Если $a < 0$, то область определения (1) — пересечения лучей $]0;\ \infty[$ и $\left]-\infty;\ -\frac{b}{a}\right[$, при $b \leqslant 0$ пересечение пусто, при $b > 0$ — интервал. Снова дифференцируем. Придем к значению $a = 1$, что невозможно.

Ответ: $(1;\ 0)$.

Задача 19.

При каких значениях a и b имеет место неравенство

$$\log_a(a^2 b) > \log_b\left(\frac{1}{a^5}\right)?$$

Решение.

Имеем: $2 + \log_a b > -5\log_b a$, или

$$\frac{2\log_a b + \log_a^2 b + 5}{\log_a b} > 0,\quad \frac{(\log_a b + 1)^2 + 4}{\log_a b} > 0,\ \text{следовательно,}$$

$$\log_a b > 0.$$

Итак, либо $a > 1$ и $b > 0$, либо $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$.

Задача 20.

Решить неравенство $\log_2(x^9 - 2x^5 + 3x) \leqslant 1$.

Решение.

Область определения неравенства — множество решений неравенства $x(x^8 - 2x^4 + 3) > 0$ — промежуток $]0;\ \infty[$. На этом промежутке исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) = x^9 - 2x^5 + 3x - 2 \leqslant 0$; $f'(x) = 9x^8 - 10x^4 + 3 > 0$ для всех x, поэтому $f(x)$ возрастает и, стало быть, $f(x) \leqslant 0$ при $x \leqslant 1$ $(f(1) = 0)$. Учитывая область определения, получаем ответ: $x \in\ ]0;\ 1]$.

Задача 21.

Доказать, что при $x \geqslant 0$

$$\frac{2x}{x+2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant \frac{x(x+2)}{2(x+1)}.$$

Решение.

Рассмотрим на промежутке $]0; +\infty[$ функцию

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}. \text{ Тогда}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0,$$

и, следовательно, функция f — возрастающая, поэтому для любого $x > 0$ выполняется неравенство $f(x) > f(0) = 0$. Это доказывает одно из требуемых неравенств. Второе неравенство доказывается аналогично.

Задача 22.

Решить уравнение $\log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sin^2\frac{\pi x}{2} + \cos^4\frac{\pi x}{2}$.

Решение.

Найдем минимум левой части.

Так как $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, то

$$\log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) \geqslant 1, \text{ следовательно, } \min\log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Найдем теперь максимум правой части, он очевидно также равен 1.

Равенство может выполняться лишь при

$$\log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1,\ x^2 - 2x + 1 = 0,\ x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Задача 23.

Доказать неравенство $\ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$, $x > 0$.

Доказательство.

Для функции $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x(x + 2)}{2(x + 1)}$, $x \geqslant 0$ имеем:

$$f(0) = 0 \text{ и } f'(x) = -\frac{x^2}{2(x + 1)^2} < 0, \quad x > 0.$$

Следовательно, функция убывает, и $f(x) < f(0) = 0$ для $x > 0$.

Задача 24.

Доказать неравенство $\ln(1 + x) < x$ на промежутке $]0; \infty[$.

Решение.

Пусть $f(x) = \ln(1 + x) - x$. Тогда $f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{-x}{1 + x} < 0$ на промежутке $]0; \infty[$. Следовательно, на этом промежутке $f(x) < f(0) = 0$.

Задача 25.

Решить систему $\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3}, \\ xy = 9\sqrt[3]{9}. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения $y = x^{-1} \cdot 3^{8/3}$. Подставляем в первое:

$$20x^{-\log_3 x + 8/3} + 7x^{-\log_3 x} \cdot 3^{8/3 \log_3 x} = 81\sqrt[3]{3}.$$

Учитывая, что $3^{8/3 \log_3 x} = (3^{\log_3 x})^{8/3} = x^{8/3}$,

$$20x^{8/3 - \log_3 x} + 7x^{8/3 - \log_3 x} = 81\sqrt[3]{3}, \text{ откуда } x^{8/3 - \log_3 x} = 3^{4/3}.$$

Теперь прологарифмируем по основанию 3.

$$3\log_3^2 x - 8\log_3 x + 4 = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно $\log_3 x$, получим $x_1 = 3^{2/3}$; $x_2 = 9$. Находим соответственно $y_1 = 9$; $y_2 = 3^{2/3}$.

Ответ: $(\sqrt[3]{9};\ 9)$, $(9;\ \sqrt[3]{9})$.

Задача 26.

Решить систему $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_8 x \cdot \log_2 (y+1)^2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Решение.

Прологарифмируем: $\begin{cases} 2\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 (y+1) = 3, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (y+1) = 2, \end{cases}$

и обозначим $\log_2 x = a$; $\log_2 (y+1) = b$;

$$\begin{cases} 2a + \dfrac{1}{2}b = 3, \\ ab = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 6, \\ ab = 2, \end{cases} \text{, откуда}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ b_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2}, \\ b_2 = 4. \end{cases}$$

Теперь найдем соответствующие x и y.

Ответ: $(\sqrt{2};\ 15)$; $(2;\ 3)$.

Задача 27.

$$\begin{cases} (x+y)\cdot 3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5 (x+y) = x - y. \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения: $x + y = \dfrac{5}{27}\cdot 3^{x-y}$. Из второго:

$$\log_5 (x+y) = \frac{x-y}{3};\quad x + y = 5^{\frac{x-y}{3}};$$

$$\begin{cases} x + y = 5^{\frac{x-y}{3}}, \\ x + y = 5 \cdot 3^{-3} \cdot 3^{x-y}. \end{cases}$$

Далее: $5^{\frac{x-y}{3}} = 5 \cdot 3^{x-y-3} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-y-3}{3}} = 3^{x-y-3}$, т.е.

$$(\sqrt[3]{5})^{x-y-3} = 3^{x-y-3}.$$

Отсюда: $x - y - 3 = 0$;

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (4; 1).

Задача 23.

Решить систему

$$\begin{cases} \log_2 (y - x) - \log_8 (3y - 5x) = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Решение.

Учитывая, что $\log_8 (y - x)^3 = \log_8 (3y - 5x)$, имеем:

$$\begin{cases} (y - x)^3 = 3y - 5x, \\ 5 = x^2 + y^2, \end{cases}$$

$$5\,(y - x)^3 = (3y - 5x)(x^2 + y^2).$$

Если $x \neq 0$, то разделим почленно на x^3 и $\frac{y}{x} = t$.

$$t^3 - 5t^2 + 6t = 0 \rightarrow t = 0, 2, 3.$$

Если $t = 0$, то $y = 0$, а $x = \pm\sqrt{5}$; если $t = 2$, то $y = 2x$. Значит, из $(-1; -2)$, $(1; 2)$ подходит только вторая; если $t = 3$, то $y = 3x$; $x^2 = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. С помощью подстановки: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Ответ: $(-\sqrt{5}; 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $(1; 2)$

Задача 29.

$$\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} x = 1, \\ b^{\log_{\sqrt{b}}\sqrt{y}} + x^2 = 2a. \end{cases}$$

Решение.

Систему можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} 2\log_a x + \log_a x = 2, \\ y + x^2 = 2a. \end{cases}$$

Учитывая, что $y > 0$; $b > 0$; $b \neq 1$, получим из первого уравнения

$$x = \sqrt[3]{a^2}, \text{ где } a > 0;\ \ a \neq 1;$$

$$y = 2a - \sqrt[3]{a^4};\ \ 2a > \sqrt[3]{a^4}\text{ , значит, } a < 8.$$

Ответ: при $0 < a < 1$, $1 < a < 8$, $b > 0$, $b \neq 1$
$x = \sqrt[3]{a^2}$; $y = 2a - \sqrt[3]{a^4}$.

Задача 30.

$$\begin{cases} 7 \cdot 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{y+z-x+1} = 9, \\ 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{y+z-x} = 27, \\ \lg(x+y+z) - 3\lg x = \lg yz + \lg 2. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим: $3^{x+1} = a$; $3^{-x+z+y} = b$. Тогда первые два уравнения примут вид:

$$\begin{cases} 7a - 6b = 9, \\ 2a + b = 27. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $a = 9$; $b = 9$. Следовательно, $x = 1$; $y + z - x = 2$, $y + z = 3$.

Последнее уравнение данной системы примет вид: $\lg yz = \lg 2$, $yz = 2$. Решая систему

$$\begin{cases} y + z = 3, \\ yz = 2, \end{cases}\text{, получим } \begin{cases} y_1 = 1, \\ z_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} y_2 = 2, \\ z_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 2; 2); (1; 2; 1).

Задача 31.

Решить систему $\begin{cases} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3, \\ xy = 3. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения видим, что x и y одного знака, и $x + y > 1$. Следовательно,

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + |\log_2(x+y)| = 3, \\ xy = 3. \end{cases}$$

При $0 < x - y < 1$:

$$\begin{cases} \log(x+y) - \log_2(x-y) = 3, \\ xy = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 8, \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$y = \sqrt{\frac{7}{3}}; \quad x = 3\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Если $x - y > 1$: $\begin{cases} \log(x+y) + \log_2(x-y) = 3, \\ xy = 3, \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ xy = 3, \end{cases} \quad x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Поскольку $x^2 \neq -1$, то $x^2 = 9$; $x = 3$; $y = 1$.

Ответ: $\left(3\sqrt{\frac{3}{7}};\ \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$; $(3; 1)$.

Задача 32.

Решить уравнение $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20$.

Решение.

$10^{\lg^2 x} = (10^{\lg x})^{\lg x} = x^{\lg x}$, таким образом, данное уравнение запишется так: $2x^{\lg x} = 20$; $x^{\lg x} = 10$; $\lg^2 x = 1$; $\lg x = \pm 1$;

$$x_1 = 10; \quad x_2 = \frac{1}{10}.$$

Задача 33.

Найти все значения a и b, при которых система

$$\left|\frac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a, \quad x^2 + y^2 = b$$

имеет только одно решение ($x > 0$).

Решение.

Прежде всего заметим, что если (x_0, y_0) — решение данной системы, то $x_0; -y_0$ — также решения данной системы. Но так как по условию система должна иметь единственное решение, то $y_0 = 0$. Итак, если система имеет единственное решение, то это решение должно иметь вид $(x_0, 0)$, $(x_0 > 0)$, но тогда из уравнений системы следует, что $a = 0$, $b > 0$, и она принимает вид:

$$x^y = 1, \ \ x^2 + y^2 = b, \ \ b > 0.$$

Из уравнения $x^y = 1$ следует, что либо $x = 1$, либо $y = 0$.

Если $y = 0$, то $x = \sqrt{b}$ и система имеет решение $(\sqrt{b}; 0)$. Если $x = 1$, то $y^2 = b - 1$. Если $0 < b < 1$, то система $y^2 = b - 1$, $x = 1$ решений не имеет $(y \in R)$. Если $b = 1$, то система $x = 1$, $y^2 = b - 1$ имеет решение $(1; 0)$, которое совпадает с решением $(\sqrt{b}; 0)$, найденным выше. Если, наконец, $b > 1$, то система $x = 1$, $y^2 = b - 1$ имеет два решения $(1; \pm\sqrt{b-1})$. Итак, данная система имеет только одно решение $(\sqrt{b}; 0)$ тогда и только тогда, когда $a = 0$; $0 < b \leqslant 1$.

Задача 34.

Доказать неравенство $\log_{30}^2 2 + \log_{30}^2 3 + \log_{30}^2 5 > \frac{1}{3}$.

Доказательство. Первый способ.

$$\log_{30}^2 2 + \log_{30}^2 3 + \log_{30}^2 5 = \log_{30} 30 = 1 \qquad (1)$$

Возведением (1) в квадрат получим

$$(\log_{30}^2 2 + \log_{30}^2 3 + \log_{30}^2 5)^2 = 1, \text{ или}$$

$$\log_{30}^2 2 + \log_{30}^2 3 + \log_{30}^2 5 + 2\,(\log_{30} 2 \log_{20} 3 + \log_{30} 2 \log_{30} 5 + \\ + \log_{30} 3 \log_{30} 5) = 1. \qquad (2)$$

Поскольку $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$, можно записать:

$$\log_{30} 2 \log_{30} 3 + \log_{30} 2 \log_{30} 5 + \log_{30} 3 \log_{30} 5 \leqslant \\ \leqslant \log_{30}^2 2 + \log_{30}^2 3 + \log_{30}^2 5. \qquad (3)$$

Согласно (2) и (3) имеем:

$$3\left(\log_{30}^2 2+\log_{30}^2 3+\log_{30}^2 5\right)\geqslant 1.$$

Значит, $\log_{30}^2 2+\log_{30}^2 3+\log_{30}^2 3\geqslant 5.$

Второй способ.

$$2ab\leqslant a^2+b^2. \qquad (1)$$

Имеем

$$\log_{30}2+\log_{30}3+\log_{30}5=1. \qquad (2)$$

Обозначим $A=\log_{30}^2 2+\log_{30}^2 3+\log_{30}^2 5$. Возведем в квадрат выражение (2). Получим

$$A+(2\log_{30}2\cdot\log_{30}3+2\log_{30}2\cdot\log_{30}5+2\log_{30}5\cdot\log_{30}5)=1.$$

Учитывая неравенство (1), имеем

$$A+2\left(\log_{30}^2 2+\log_{30}3+\ldots\right)>1. \text{ Значит,}$$

$$3A>1;\ \ A>\frac{1}{3}.$$

Из неравенства $x+y+z=1$

$$x^2+y^2+z^2>\frac{1}{3} \qquad (1^\circ)$$

получим: $\log_{30}2+\log_{30}3+\log_{30}5=\log_{30}30=1$. Значит,

$$\log_{30}^2 2+\log_{30}^2 3+\log_{30}^2 5>\frac{1}{3}$$

(исследованием неравенства (1°) можно доказать, что знак равенства имеет место только при $x=y=z=\frac{1}{3}$).

Задача 35.

Задача-шутка «О числе *e* и π».

Однажды сказало (известно вполне)
древнейшее π трансцендентному e:
«Я больше тебя по значенью и веку,
А, значит, скорее нужна человеку!»

Один ученик ручку взял и чернила —
короткая формула их примирила.
Задачу скорей приведете к ответу,
если найдете формулу эту.

Решение.

$$[\pi]^{[e]} + [e] = [e]^{[\pi]} + [\pi]$$

Задача 36.

Доказать: $\log_7 8 < \log_6 7$.

Решение.

$$2 > \log_7 48 = \log_7 8 + \log_7 6 > 2\sqrt{\log_7 8 \cdot \log_7 6} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{\log_7 8}{\log_6 7}}, \text{ отсюда}$$

$$\log_7 8 : \log_6 7 < 1 \text{ и } \log_7 8 < \log_6 7.$$

Задача 37.

Доказать $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 4 > 5$.

Доказательство.

$$\frac{1}{5}(\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 4) >$$

$$> \sqrt[5]{\log_4 5 \cdot \frac{1}{\log_6 5}\log_6 7 \cdot \frac{\log_4 8}{\log_4 7} \cdot \log_8 4} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{\log_6 7}{\log_6 5} \cdot \frac{\log_4 5}{\log_4 7} \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 4} =$$

$$\sqrt[5]{\log_5 7 \cdot \log_7 5} = 1.$$

Задача 38.

Решить уравнение $3^{|1-4x^2|} = \sin \pi x$. (1)

Решение.

Поскольку $3 > 1$, $|1 - 4x^2+ \geqslant 0$, то $3^{|1-4x^2|} \geqslant 1$, $\sin x \leqslant 1$, и уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 3\,|1-4x^2| = 1, \\ \sin \pi x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = 2k + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad k \in t.$$

Система совместна, если $k = 0$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Задача 39.

Найти наибольшее значение расстояния между графиками функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в зависимости от a.

Решение.

Так как график первой функции проходит через точку $A = (0;\ 1)$, а график второй функции — через точку $B = (1;\ 0)$, то искомое расстояние d не больше $|AB|$, т.е. $d \leqslant \sqrt{2}$.

Найдем расстояние между графиками функций $y = e^x$ и $y = \ln x$. Первый график лежит выше своей касательной $y = x + 1$ в точке A. В самом деле, если $f(x) = e^x - x - 1$, то $f_{\min} = f(0) = 0$. Аналогично второй график лежит ниже своей касательной в точке B. Поскольку отрезок AB перпендикулярен этим касательным, то $|AB| = \sqrt{2}$ и есть наибольшее расстояние между данными графиками.

Задача 40.

Решить уравнение $2 \cdot 9^{\log_2 0{,}5 2} = x^{\log_2 6} - x^2$.

Решение.

Преобразуем данное уравнение:

$$2 \cdot 9^{\log_2 x - 1} = x^{\log_x 6 \cdot \log_2 x} - 2^{2\log_2 x},$$

$$\frac{2}{9} \cdot 9^{\log_2 x} = 6^{\log_2 x} - 4^{\log_2 x}.$$

Разделим обе части уравнения почленно на $6^{\log_2 x}$:

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = 9 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 x} \cdot 9.$$

Приняв $\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = t$, будем иметь $2t^2 - 9t + 9 = 0$, откуда $t = 3$; $t = \frac{3}{2}$. Таким образом,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = \frac{3}{2}, \; x = 2; \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = 3, \; x = 2^{\frac{1}{\log_3 2}}.$$

Задача 41.

Решить систему:

$x^y = y^x$, $a^x = b^y$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$; $b \neq 1$.

Решение.

$x > 0$; $y > 0$ (так как x и y — основания показательных функций).

$$\begin{cases} y \lg x = x \lg y, & (1) \\ x \lg a = y \lg b, & (2) \end{cases}$$

$$y = x\frac{\lg a}{\lg b}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет положительные решения $x > 0$, $y > 0$ при условии $\frac{\lg a}{\lg b} > 0$. Следовательно, данная система не имеет решений, если одно из чисел a и b больше, а другое меньше 1. Будем считать, что они оба либо больше 1, либо меньше 1, тогда $\frac{\lg a}{\lg b} > 0$. Подставив y из (3) в (1) и сократив на x $(x > 0)$, получим

$$\left(\frac{\lg a}{\lg b} - 1\right) \lg x = lg\frac{\lg a}{\lg b}. \qquad (4)$$

Если $\lg a \neq \lg b$, т.е. если $a \neq b$, то из уравнения (4) находим x, а затем из уравнения (3) — y. Если $a = b$, то (4) удовлетворяется тождественно, а исходная система примет вид $x^y = y^x$, $a^x = a^y$, откуда $x = y$.

Ответ: $x = \left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg b}{\lg a - \lg b}}$, $y = \left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg a}{\lg a - \lg b}}$, если a и b (оба) больше либо меньше 1 и $a \neq b$, $y = x$, где x и y — любые положительные числа, если $a = b$. Система противоречива, если одно из чисел a и b больше, а другое меньше 1.

Задача 42.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + e^x = y + e^y, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

Решение.

Первое уравнение системы означает, что функция $t \to t + e^t$ принимает равные значения при значениях аргумента, равных x и y; но эта функция, очевидно, возрастающая, и следовательно, $x = y$. Тогда из второго уравнения системы получаем, что решениями системы являются пары $(2; 2)$ и $(-2; -2)$.

Задача 43.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x (ax + by) \cdot \log_y (bx + ay) = 4, \\ \log_x (bx + ay) + \log_y (ax + by) = 4, \end{cases} \quad (a, b > 0).$$

Решение.

Заметим, что при всех допустимых значениях переменных имеет место равенство $\log_a c \cdot \log_b d = \log_b c \cdot \log_a d$.

Для доказательства этого равенства достаточно перейти к общему основанию логарифмов. Поэтому в данной системе число 4 представлено в виде произведения и суммы одинаковых выражений; легко видеть, что такое представление можно осуществить единственным образом: $4 = 2 + 2 = 2 \cdot 2$. Следовательно, каждое из этих выражений равно 2. Другими словами, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} y^2 = ax + by, \\ x^2 = bx + ay \end{cases} \tag{1}$$

(в области определения системы)

Деля первое уравнение системы на второе и обозначая $\dfrac{y}{x}$ через t, получаем уравнение $t^2 = \dfrac{a + bt}{b + at}$, откуда

$$at^3 + bt^2 - bt - a = 0 \text{ или } (t - 1)(at^2 + (a + b)\,t + a) = 0.$$

Но квадратное уравнение $at^2 + (a + b)\,t + a = 0$ не может иметь положительных корней (следует из теоремы Виета), так что $t = 1$, следовательно, $x = y$, а тогда из системы (1) получаем, что

$$x = y = a + b.$$

Это и будет единственное решение исходной системы при $a + b \neq 1$; при $a + b = 1$ система решений не имеет.

Задача 44.

Доказать: $\log_N (N + 1) > \log_{N+1} (N + 2)$.

Доказательство. Первый способ.

$$\log_N (N + 1) + \log_{N+1} N \geqslant 2. \qquad (1)$$

Далее

$$\log_{N+1} (N + 2) + \log_{N+1} N = \log_{N+1} N\,(N + 2) \leqslant$$
$$\leqslant \log_{N+1} (N + 1)^2 = 2. \qquad (2)$$

Складываем (1) и (2).

Второй способ.

Очевидно, $(n + 1)^2 > n\,(n + 2)$, или $\dfrac{n+1}{n} > \dfrac{n+2}{n+1}$.

Прологарифмируем, например, по основанию 10:

$$\lg (n + 1) - \lg n > \lg (n + 2) - \lg (n + 1).$$

Очевидно, что

$$\lg n < \lg (n + 1).$$

Значит,

$$\frac{\lg (n+1)}{\lg n} - 1 > \frac{\lg (n+2)}{\lg (n+1)} - 1, \text{ следовательно,}$$

$$\log_n (n + 1) > \log_{n+1} (n + 2).$$

Задача 45.

Решить неравенство $1 + 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x < 6^x$.

Решение.

Разделив обе части неравенства на 6^x, получим неравенство $\left(\frac{1}{6}\right)^x + 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$, левая часть которого $f(x)$ является убывающей функцией. Так как $f(2) = 1$, то $f(x) < 1$, значит, $x > 2$.

Задача 46.

Основания четырех логарифмов одного и того же числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным этому числу. Найти логарифмы, если известно, что сумма первых двух из них равны сумме остальных.

Решение.

Пусть $\log_y x = z$. Имеем:

$$\log_{xy} x = \frac{\log_y x}{\log_y (xy)} = \frac{\log_y x}{\log_y x + 1} = \frac{z}{z+1};$$

$$\log_{yx^2} x = \frac{z}{1+2z}, \quad \log_{yx^3} x = \frac{z}{1+3z}.$$

По условию задачи $z + \frac{z}{1+z} = \frac{z}{1+2z} + \frac{z}{1+3z}$, или после упрощения: $3z^2 + 6z + 2 = 0$, откуда $z = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$. Окончить самостоятельно.

Задача 47.

Решить неравенство $9^n + 10^n < 11^n$ (n — натуральное число).

Решение.

Данное неравенство приводит к неравенству

$$\left(\frac{9}{11}\right)^n + \left(\frac{10}{11}\right)^n < 1,$$

в левой части которого стоит убывающая функция $f(n)$. Поэтому достаточно найти наименьшее число n_0 такое, что $f(n_0) < 1$, и тогда неравенство будет справедливым для всех $n \geqslant n_0$.

При подборе числа более удобно, конечно, иметь дело с исходным неравенством. Непосредственные подсчеты показывают, что оно не выполняется при $n = 1, 2, 3, 4$, а при $n = 5$ выполняется.

Ответ: $n \geqslant 5$ $(n \in Z)$.

Задача 48.

При каких $a > 1$ уравнение $a^x = x$ имеет решение? Сколько?

Решение.

Очевидно, что прямая $y = x$ пересечет график, если она лежит выше касательной, т.е. ее угловой коэффициент 1 больше углового коэффициента k касательной. Неравенство $1 > k$ есть необходимое и достаточное условие пересечения графика $y = a^x$ и прямой $y = x$. Для отыскания k запишем уравнение касательной

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (1)$$

Если прямая (1) проходит через начало координат, то $y_0 = kx_0$, отсюда $k = \dfrac{y_0}{x_0}$, но $y_0 = a^{x_0}$, поэтому

$$k = a^{x_0}\ln a = \frac{a}{x_0} \text{ и } x_0 = \frac{1}{\ln a} = \log_a e.$$

Далее $k = \dfrac{a}{\log_a e} = \dfrac{e}{\log_a e} = e\ln a$.

Итак, если $k < 1$, то $e\ln a < 1$ и $a < e^{1/e}$. Как видим, при всех основаниях, удовлетворяющих условию $1 < a < e^{1/3}$, или $1 < a < 1{,}445$ (поскольку $e^{1/e} \approx 1.444$), прямая $y = x$ и кривая a^x имеют две общие точки, а при $a = e^{1/e}$ прямая $y = x$ касается — одно решение.

Задача 49.

При каких значениях p уравнение

$$\lg(x^2 + 2px) - \lg(8x - 6p - 3) = 0$$

имеет единственный корень?

Решение.

Исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2px = y, \\ 8x - 6p - 3 = y, \end{cases} \text{ где } y > 0.$$

В результате решения этих уравнений получим пары чисел $(x;\ y)$. Решения данного уравнения будут давать только те пары, в которых $y > 0$. Если парабола с прямой пересекается в двух точках, то единственный корень данное уравнение будет иметь только в том случае, когда ординаты этих точек имеют разные знаки. Если же прямая $y = 8x - 6p - 3$ касается параболы, то получаем единственное решение только в том случае, когда точка касания лежит выше оси абсцисс.

Решаем систему

$$x = \frac{y + 6p + 3}{8};\quad \frac{(y + 6p + 3)^2}{64} + 2p;\quad \frac{y + 6p + 3}{8} = y;$$

$$y^2 + (28p - 58)\,y + 3\,(44p^2 + 84p + 3) = 0.$$

Мы ищем те p, при которых решения этого уравнения y_1 и y_2 — разного знака, а значит, свободный член отрицателен.

$$44p^2 + 84p + 3 < 0;\quad -\frac{1}{2} < p < -\frac{3}{22}.$$

Отдельно нужно проверить значения $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{22}$. Те p, при которых прямая касается параболы $(D = 0)$, суть $p = 1$; $p = 13$. Но при $p = 13$ $y_1 = y_2 < 0$, а значит, решений нет. Остается $p = 1$.

Ответ: $p = 1,\ p \in \left[-\frac{1}{2};\ -\frac{3}{22}\right[$.

25. ЦЕЛАЯ И ДРОБНАЯ ЧАСТИ ЧИСЛА

Целой частью действительного числа x (или функцией Антье) называется наибольшее целое число x, не превышающее x. Оно обозначается так: $[x]$. Значит, $[x] \leqslant x$.

Например, $[3{,}7] = 3$; $[-2{,}4] = -3$; $[0{,}5] = 0$;

$$[-120] = -120; \quad [-\sqrt{3}\,] = -2;$$

$$[3 + \cos\alpha] = \begin{cases} 4, & \cos\alpha = 1, \\ 3, & 0 \leqslant \cos\alpha < 1, \\ 2, & \cos\alpha < 0. \end{cases}$$

Разность $x - [x]$ называется дробная часть числа (или функция мантисса). Оно обозначается $\{x\}$:

$$\{x\} = x - [x].$$

Ясно, что $x - [x] = \{x\} \geqslant 0$ и $0 \leqslant \{x\} < 1$.

Пример: $\{2{,}5\} = 0{,}5$; $\{-4{,}35\} = 0{,}65$; $\{7\} = 0$; $\left\{\frac{19}{5}\right\} = \frac{4}{5}$.

Заметим, что $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

Задача 1.

Доказать, что:

1. $[x + n] = [x] + n$, где $x \in R$, $n \in Z$.

Доказательство.

Известно, что $x = [x] + \alpha$, где $0 \leqslant \alpha < 1$ и $\alpha = \{x\}$.

Имеем $[x + n] = [[x + \alpha + n] = [[x] + n + \alpha] = [x] + n$.

Аналогично доказывается, что

2. $[x + y] = \begin{cases} [x] + [y], & \text{если } \{x\} + \{y\} < 1, \\ [x] + [y] + 1, & \text{если } \{x\} + \{y\} \geqslant 1. \end{cases}$

3. $\{x + y\} = \begin{cases} \{x\} + \{y\}, & \text{если } \{x\} + \{y\} < 1, \\ \{x\} + \{y\} - 1, & \text{если } \{x\} + \{y\} \geqslant 1. \end{cases}$

Последние два соотношения можно переписать в виде:

2′. $[x + y] = [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}]$.

3′. $\{x + y\} = \{x\} + \{y\} - [\{x\} - \{y\}]$.

Следствие:

$$[x] + [y] \leqslant [x + y]; \quad \{x\} + \{y\} \geqslant \{x + y\}.$$

Задача 2.

Что можно сказать о числах x и y, если

а) $[x+y]=y$.

Ответ: $x \in [0;\ 1)$, $y \in Z$.

б) $\{x+y\}=y$.

Ответ: $x \in Z$, $y \in [0; 1[$.

Задача 3.

Что больше: $[a]$ или $\{a\}$?

Ответ: $[a]>\{a\}$, если $a \geqslant 1$;
$\{a\} \geqslant [a]$, если $a<1$.

Задача 4.

Решить уравнение: $[x^2]=4$.

Решение.

$[x^2]=4$ для всех x таких, что $4 \leqslant x^2<5$, то есть

$$-\sqrt{5}<x \leqslant -2 \text{ или } 2 \leqslant x<\sqrt{5}.$$

Ответ: $x \in (-\sqrt{5};\ -2] \cup [2; \sqrt{5})$.

Задача 5.

Решить уравнение $[x^2]=x$.

Решение.

x — целое число, тогда $[x^2]=x^2$; $x^2=x$, $x(x-1)=0$, $x=0$ или $x=1$.

Ответ: $x \in \{0;\ 1\}$.

Задача 6.

Решить уравнение $[x^2]=[x]$.

Решение.

$[x^2] \geqslant 0$. Из условия $[x^2]=[x]$ выходит, что $[x] \geqslant 0$, то есть $x \geqslant 0$. Все $x \in [0; 1]$ являются решениями уравнения. Рассмотрим интервал $(1;\ 2)$: $x=1+\{x\}$,

$$[(1+\{x\})^2] = [1+\{x\}], \quad [1+2\{x\}+\{x\}^2] = 1,$$

$$1+[2\{x\}+\{x\}^2] = 1, \quad [2\{x\}+\{x\}^2] = 0.$$

Поскольку $\{x\} \geqslant 0$, имеем $2\{x\}+\{x\}^2 < 1$.

Решениями уравнения $y^2+2y-1=0$ являются $y=\sqrt{2}-1$ и $y=-\sqrt{2}-1$. Итак, $-\sqrt{2}-1<\{x\}<\sqrt{2}-1$, откуда $\{x\} \in (0; \sqrt{2}-1)$. Таким образом, $x \in (1; \sqrt{2})$. Каждое $x \geqslant 2$ не является решением заданного уравнения, поскольку при $x \geqslant 2$ $x+1<x^2$, откуда

$$[x+1] \leqslant [x^2], \text{ или } [x]+1 \leqslant [x^2], \text{ т.е. } [x]<[x^2].$$

Таким образом, $x \in [0; 1] \cup (1; \sqrt{2})$.

Ответ: $x \in [0; \sqrt{2})$.

Задача 7.

Решить уравнение $[x^2-4x] = x-6$.

Решение.

$x-6=[x^2-4x]$ — целое число, тогда x — целое число, $[x^2-4x]=x^2-4x$, $x^2-4x=x-6$, $x^2-5x+6=0$.

Корни этого уравнения: $x_1=2$, $x_2=3$.

Ответ: $x \in \{2; 3\}$.

Задача 8.

Решить уравнение: $[x]+[2x]=2$.

Решение.

а) $0 \leqslant x < 1$: $[x]=0$, $[2x]=2$, $2 \leqslant 2x<3$, $1 \leqslant x < \frac{3}{2}$, что не соответствует условию;

б) $1 \leqslant x < 2$: $[x]=1$. Тогда $[2x]$ должно равняться 1, $1 \leqslant 2x<2$, $\frac{1}{2} \leqslant x<1$, что не соответствует условию $1 \leqslant x < 2$;

в) каждое $x \geqslant 2$ или $x<0$ не является решением уравнения.

Ответ: $\varnothing$.

Задача 9.

Решить уравнение: $[x]+[2x]=3$.

Решение.

Если $[x]<1$, то $[2x]<2$, $[x]+[2x]<3$.

Если $[x]=1$, то из условия $[x]+[2x]=3$ следует: $[2x]=2$. Тогда

$$\begin{cases} 1 \leqslant x < 2, \\ 2 \leqslant 2x < 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x < 2, \\ 1 \leqslant x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Оба неравенства удовлетворяют все $x \in \left[1;\ \frac{3}{2}\right)$. Каждое $x \geqslant 2$ не является решением уравнения.

Ответ: $x \in \left[1;\ \frac{3}{2}\right)$

Задача 10.

Решить уравнение: $[x]+[2x]+[3x]=3$.

Решение.

Сумма трех чисел $[x]$, $[2x]$, $[3x]$ равняется 3. Если $[x]<0$, то $[2x]<0$ и $[3x]<0$.

Если $[x]\geqslant 0$, то $[2x]\geqslant 0$, $[3x]\geqslant 0$ и $[x]\leqslant[2x]\leqslant[3x]$.

Рассмотрим такие случаи:

а) $[x]=0$, $[2x]=0$, $[3x]=3$, тогда одновременно должны выполняться неравенства $0\leqslant x<1$, $0\leqslant 2x<1$, $3\leqslant 3x<4$, то есть $0\leqslant x<1$, $0\leqslant x<\frac{1}{2}$, $1\leqslant x<\frac{4}{3}$, что невозможно.

б) $[x]=0$, $[2x]=1$, $[3x]=2$. В этом случае одновременно выполняются три неравенства:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x < 1, \\ 1 \leqslant 2x < 2, \\ 2 \leqslant 3x < 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{2} \leqslant x < 1, \\ \frac{2}{3} \leqslant x < 1, \end{cases}$$

что справедливо при $\frac{2}{3}\leqslant x<1$;

в) $[x]=1,\ \ [2x]=1,\ \ [3x]=1$. Чтобы найти x, который удовлетворяет этим трем неравенствам, надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} 1 \leqslant x < 2, \\ 1 \leqslant 2x < 2, \\ 1 \leqslant 3x < 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x < 2, \\ \dfrac{1}{2} \leqslant x < 1, \\ \dfrac{1}{3} \leqslant x < \dfrac{2}{3}, \end{cases} \quad x \in \varnothing.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{2}{3};\ 1\right)$.

Задача 11.

Решить уравнение:

$$[x] + [2x] + \ldots + [nx] = 1, \quad n \geqslant 2, \quad n \in N.$$

Решение.

При $x \leqslant 0$ и $2x \leqslant 0, \ldots, nx \leqslant 0$.

При $x > 0$ $0 \leqslant [x] \leqslant [2x] \leqslant \ldots \leqslant [nx]$. По условию сумма этих n положительных чисел $[x]$, $[2x]$, ..., $[nx]$ равняется 1, то есть

$$\begin{cases} [x] = [2x] = \ldots = [(n-1)\,x] = 0, \\ [nx] = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x < 1,\ 0 \leqslant 2x < 1, \ldots, 0 \leqslant (n-1)\,x < 1, \\ 1 \leqslant nx < 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x < \dfrac{1}{n-1}, \\ \dfrac{1}{n} \leqslant x < \dfrac{2}{n}. \end{cases}$$

Поскольку $n \geqslant 2$, то $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{2}{n}$, откуда $\frac{1}{n} \leqslant x < \frac{1}{n-1}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{n};\ \frac{1}{n-1}\right)$.

Задача 12.

Решить уравнение: $\frac{2}{x} + \frac{x}{2} = [x]$, $x > 0$.

Решение.

Из условия выходит, что $\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$ — целое число. Если $[x]=n$, то $n \leqslant x < n+1$, $n \in N$. Рассмотрим уравнения

$$\frac{2}{x}+\frac{x}{2}=n, \quad x^2-2nx+4=0,$$

$$x=n\pm\sqrt{n^2-4},\ n\geqslant 2, \quad x=2 \text{ при } n=2.$$

При $n>2$ $n+\sqrt{n^2-4}>n+1$, $n-\sqrt{n^2-4}<n-1$.

Ответ: $x=2$.

Задача 13.

Решить уравнение: $[x]=2\{x\}+4$.

Решение.

$2\{x\}=[x]-4$, то есть $2\{x\}$ — целое число. Поскольку $0\leqslant\{x\}<1$, то $0\leqslant 2\{x\}<2$. Таким образом, $2\{x\}$ равняется 0 или 1. Когда $2\{x\}=0$, то $\{x\}=0$, $[x]=4$, $x=4$. Когда $2\{x\}=1$, то $\{x\}=\frac{1}{2}$, $[x]=5$, $x=5\frac{1}{2}$.

Ответ: $x\in\left\{4;\ 5\frac{1}{2}\right\}$.

Задача 14.

Решить уравнение: $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.

Решение.

$\{x\}=[x^3]+[x^2]+[x]+1$, значит, $\{x\}$ — целое число. Поэтому $\{x\}=0$, $[x]=x$, $x^3+x^2+x+1=0$,

$$x^2(x+1)+(x+1)=0, \ (x+1)(x^2+1)=0;$$

$$x^2+1>0, \ x+1=0, \ x=-1.$$

Ответ: $x=-1$.

Задача 15.

Найти множество целых положительных решений и найти количество таких решений: $\left[\frac{x}{5}\right]=\left[\frac{x}{4}\right]$.

Решение.

Рассмотрим такие случаи:

а) $\left[\frac{x}{5}\right] = \left[\frac{x}{4}\right] = 0$. Тогда $\begin{cases} 0 \leqslant \frac{x}{5} < 1, \\ 0 \leqslant \frac{x}{4} < 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x < 5, \\ 0 \leqslant x < 4, \end{cases}$

$$x \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3\};$$

б) $\left[\frac{x}{5}\right] = \left[\frac{x}{4}\right] = 1$. Тогда $\begin{cases} 1 \leqslant \frac{x}{5} < 2, \\ 1 \leqslant \frac{x}{4} < 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \leqslant x < 10, \\ 4 \leqslant x < 8, \end{cases}$

$$x \in \{5;\ 6;\ 7\};$$

в) $\left[\frac{x}{5}\right] = \left[\frac{x}{4}\right] = 2$. Тогда $\begin{cases} 2 \leqslant \frac{x}{5} < 3, \\ 2 \leqslant \frac{x}{4} < 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 \leqslant x < 15, \\ 8 \leqslant x < 12, \end{cases}$

$$x \in \{10;\ 11\};$$

г) $\left[\frac{x}{5}\right] = \left[\frac{x}{4}\right] = 3$. Тогда $\begin{cases} 3 \leqslant \frac{x}{5} < 4, \\ 3 \leqslant \frac{x}{4} < 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 \leqslant x < 20, \\ 12 \leqslant x < 16, \end{cases}$

$$x = 15;$$

д) $\left[\frac{x}{5}\right] = \left[\frac{x}{4}\right] = k \leqslant 4,\ \ k \in Z$. Тогда $\begin{cases} k \leqslant \frac{x}{5} < k+1, \\ k \leqslant \frac{x}{4} < k+1, \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5k \leqslant x < 5k+5, \\ 4k \leqslant x < 4k+4. \end{cases}$$

Но $k \geqslant 4 \Rightarrow 4k+4 \leqslant 5k$, т.е. $x \in \varnothing$.

Таким образом, $x \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 7;\ 10;\ 11;\ 15\}$.

Уравнение имеет 10 решений.

Ответ: $x \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 7;\ 10;\ 11;\ 15\}$, 10 решений.

Задача 16.

Решить уравнение: $\left[\dfrac{x}{2}\right] = 1.$

Решение.

$$1 \leqslant \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leqslant x < 4.$$

Ответ: $x \in [2;\ 4)$.

Задача 17.

Решить уравнение: $\left[\dfrac{\left[\frac{x}{2}\right]}{2}\right] = 1.$

Решение.

$1 \leqslant \dfrac{\left[\frac{x}{2}\right]}{2} < 2;\ \ 2 \leqslant \left[\dfrac{x}{2}\right] < 4$, то есть возможны два случая:

а) $\left[\dfrac{x}{2}\right] = 2$, тогда $2 \leqslant \dfrac{x}{2} < 3,\ \ 4 \leqslant x < 6;$

б) $\left[\dfrac{x}{2}\right] = 3$, тогда $3 \leqslant \dfrac{x}{2} < 4,\ \ 6 \leqslant x < 8.$

Ответ: $x \in [4;\ 8)$.

Задача 18.

Решить уравнение: $[\lg x] = -2.$

Решение.

$-2 \leqslant \lg x < -1$. Таким образом, $10^{-2} \leqslant x < 10^{-1}$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{100};\ \dfrac{1}{10}\right)$.

Задача 19.

Решить уравнение: $\dfrac{x}{2\pi} = [\cos x].$

Ответ: $x = 2\pi$.

Задача 20.

Решить уравнение: $[x] = [\sin x]$.

Ответ: $0 \leqslant x < 1,\ \ x = \frac{\pi}{2}$.

Задача 21.

Решить уравнение: $[x] = \sin x$.

Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Задача 22.

Решить уравнение: $[x]^x = 1,\ \ x > 0$.

Решение.

$[x]^x = 1$, если $[x] = 1,\ \ x > 0,\ \ 1 \leqslant x < 2$.

Ответ: $x \in [1;\ 2)$.

Задача 23.

Решить уравнение $x^3 - [x] = 3$.

Решение.

Используем тождество $\{x\} = x - [x]$. Тогда данное уравнение запишем в виде:

$$x^3 - (x - \{x\}) = 3 \text{ или } x^3 - x = 3 - \{x\}.$$

Поскольку $0 \leqslant \{x\} < 1$, то $2 < x^3 - x \leqslant 3$.

1) при $x \leqslant -1$ $\ x^2 - 1 > 0,\ \ x^3 - x = x(x^2 - 1) < 0$;

2) при $-1 < x \leqslant 0$ $\ x^3 - x = x(x^2 - 1) \leqslant -x < 1$;

3) при $0 < x \leqslant 1$ $\ x^3 - x < x^3 \leqslant 1$;

4) при $x \geqslant 2$ $\ x^3 - x = x(x^2 - 1) \geqslant 2(2^2 - 1) = 6$.

Таким образом, $1 < x < 2$. Следовательно, $[x] = 1$ и данное уравнение имеет вид: $x^3 - 1 = 3,\ \ x = \sqrt[3]{4}$.

Задача 24.

$$\{x^2\} = \{x\}^2.$$

Решение.

Из равенства $x = [x] + \{x\}$ получаем:

$$\{x\}^2 = \{([x] + \{x\})^2\} = \{[x]^2 + 2\,[x]\,\{x\} + \{x\}^2\} =$$
$$= \{2\,[x]\,\{x\} + \{x\}^2\}.$$

Обозначая $\{x\}^2 = t < 1$, имеем $\{t\} = t = \{2\,[x]\,\{x\} + t\}$, отсюда заключаем, что равенство $\{x^2\} = \{x\}^2$ возможно лишь тогда, когда $2\,[x]\,\{x\}$ — целое число. Поэтому $0 \leqslant x \leqslant 1$ или $x = m + \frac{l}{2m}$, где m — любое, а $0 \leqslant l < 2m$.

Задача 25.

Решить уравнение: $\left[\frac{8x+19}{7}\right] = \frac{16(x+1)}{11}$.

Решение.

$\frac{16(x+1)}{11} = t$, где t — целое число.

$$16x = 11t - 16, \text{ или } \left[\frac{11t+22}{14}\right] = t,$$

$$0 \leqslant \frac{11t+22}{14} - t < 1, \text{ отсюда}$$

$$2\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 7\frac{1}{3} \Rightarrow t \in \{3,\ 4,\ 5,\ 6, 7\}.$$

Задача 26.

Решить $x^3 - [x] = 3$.

Решение. (*второй способ*).

Если $x \geqslant 2$, то $f(x) = x^3 - [x] > 3$;

Если $x \leqslant 1$, то $f(x) = x^3 - [x] < 3$.

Следовательно, если уравнение имеет решение, то они принадлежат промежутку $1 < x < 2$. Но тогда $[x] = 1$. Уравнение принимает вид: $x^3 - 1 = 3$, $x = \sqrt[3]{4}$.

Задача 27.

Решить уравнение $[x] = [x]^2$ во множестве положительных чисел.

Решение.

Рассмотрим x, заключенные в интервале $n \leqslant x < n+1$, где n — неотрицательное целое число. Для всех таких x $[x]^2 = n^2$. Для того, чтобы выполнялось равенство, левая часть уравнения тоже должна быть n^2, поэтому $x < \sqrt{n^2+1}$.

Таким образом, x лежит в одном из интервалов $[n; \sqrt{n^2+1})$, где $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$.

Задача 28.

Решить уравнение: $[-x^2+3x] = \left[x^2+\frac{1}{2}\right]$.

Решение.

Ясно, что $x^2+\frac{1}{2} > 0$. Поэтому $\left[x^2+\frac{1}{2}\right] = n \geqslant 0$. С другой стороны, легко видеть, что неравенство $-x^2+3x \geqslant 3$, или $x^2-3x+3 \leqslant 0$ решений не имеет.

Поэтому n может принять значения 0; 1; 2. Этим трем значениям соответствуют три системы неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant -x^2+3x < 1, \\ 0 \leqslant x^2+\frac{1}{2} < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \leqslant -x^2+3x < 2, \\ 1 \leqslant x^2+\frac{1}{2} < 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leqslant -x^2+3x < 3, \\ 2 \leqslant x^2+\frac{1}{2} < 3. \end{cases}$$

Из этих систем находим соответственно:

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}); \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x < 1; \quad \frac{\sqrt{6}}{2} \leqslant x < \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Задача 29.

Найти все значения x, которые удовлетворяют равенству

$$[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}.$$

Перепишем в виде $[x] - \{x\} = \frac{1}{\{x\}} - \frac{1}{[x]}$.

$$[x]-\{x\} = \frac{[x]-\{x\}}{[x]\{x\}}.$$

Это равенство может быть верно при $[x]-\{x\}=0$ либо при $[x]\{x\}=1$, x нулем быть не может, так как обратные значения $\frac{1}{[x]}$ и $\frac{1}{\{x\}}$ теряют смысл, следовательно, уравнение $[x]-\{x\}=0$ не имеет решений удовлетворяющих нашему равенству. Решениями уравнения $[x]\{x\}=1$ будут числа вида $(n+1)+\frac{1}{(n+1)}$, где $n \in N$.

Задача 30.

Решить уравнения:

а) $[\sin x+\cos x]=1$; *б)* $[\sin x+\cos x]=0$;

в) $[\sin x+\cos x]=-1$; *г)* $[\sin x+\cos x]=-2$.

Решение.

б) $0 \leqslant \sin x+\cos x<1$, неравенство имеет место, когда $\sin x$ и $\cos x$ имеют разные знаки и абсолютная величина положительного числа больше, т.е. если

$$\frac{\pi}{2}+2\pi k<x \leqslant \frac{3}{4}\pi+2\pi k \text{ и } \frac{7}{4}\pi+2\pi k \leqslant x<2\pi+2\pi k, \quad k \in Z.$$

а) $1 \leqslant \sin x+\cos x<2$, откуда $x \in \left[2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $x \in Z$.

в) $\left]\frac{3}{4}\pi+2\pi k, \pi+2\pi k\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi+2\pi k, \frac{7}{4}\pi+2\pi k\right[$, $k \in Z$.

г) $\left]\pi+2\pi k; \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right[$, $k \in Z$.

Задача 31.

Решить уравнение $[\sin x]=[\cos x]$.

Решение.

Так как $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, то их целые значения могут быть равными -1; 0; 1. Возможны три случая:

а) $\begin{cases}[\sin x]=0,\\ [\cos x]=0,\end{cases}$ или $\begin{cases}0 \leqslant \sin x<1,\\ 0 \leqslant \cos x<1,\end{cases}$

откуда $x \in \left]2\pi k, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right[, \quad k \in Z.$

б) $\begin{cases} [\sin x] = -1, \\ [\cos x] = -1, \end{cases}$ или $\begin{cases} -1 \leqslant \sin x < 0, \\ -1 \leqslant \cos x < 0, \end{cases}$

откуда $x \in \left]\pi + 2\pi k, \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi k\right[, \quad k \in Z.$

в) $\begin{cases} [\sin x] = 1, \\ [\cos x] = 1, \end{cases}$ $x \in \varnothing.$

Задача 32.

Решить уравнения:

а) $[x + 1{,}3] = -5;$

б) $\left[2x + \dfrac{1}{5}\right] = 1;$

в) $[3x - 5{,}2] = 2\dfrac{3}{7}.$

Решение.

Используем неравенство $[a] \leqslant a < [a] + 1$, верное для любого a, поэтому

а) $-5 \leqslant x + 1{,}3 < -4$, откуда $-6{,}3 \leqslant x < -5{,}3;$

б) $1 \leqslant 2x + \dfrac{1}{5} < 2;\ \dfrac{2}{5} \leqslant x < \dfrac{9}{10};$

в) $x \in \varnothing.$

Задача 33.

Найти такое число x, если его дробная часть $\{x\}$, его целая часть $[x]$ и само число x образует арифметическую прогрессию.

Решение.

В арифметической прогрессии $\{x\}$, $[x]$, x разность равняется $\{x\}$; $[x] = 2\{x\}$. Но по определению $0 \leqslant \{x\} < 1$. Тогда $0 \leqslant \{x\} < 2$, $0 \leqslant [x] < 2$, то есть $[x]$ равняется нулю или единице. В первом случае $\{x\} = 0$, $x = 0$, во втором $\{x\} = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $x \in \left\{0;\ \frac{3}{2}\right\}$.

Задача 34.

Найти x, если x, его целая часть $[x]$ и его дробная часть $\{x\}$ образуют геометрическую прогрессию.

Решение.

По условию x, $[x]$, $\{x\}$ — три члена геометрической прогрессии. Тогда $[x]^2 = x \cdot \{x\}$, $[x]^2 = ([x] + \{x\}) \cdot \{x\}$.

Если $x = 0$, то $[x] = 0$, $\{x\} = 0$.

Если $x \neq 0$, то $\frac{[x]^2}{[x] + \{x\}} = \{x\}$.

По определению $0 \leqslant \{x\} < 1$; $\frac{[x]^2}{[x] + \{x\}} > [x]$; $\frac{[x]}{[x] + 1} > 1$ при $[x] \geqslant 2$.

Рассмотрим случай, когда $[x] = 1$:

$$\{x\} = \frac{1}{1 + \{x\}},\quad \{x\}^2 + \{x\} - 1 = 0.$$

Отсюда следует, что $\{x\} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Тогда

$$x = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$; 1, $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. При $[x] = 0$ $\{x\} = \frac{0}{\{x\}} = 0$. При $[x] \leqslant -1$ $[x] + \{x\} < 0$ и $\{x\} = \frac{[x]^2}{[x] + \{x\}} < 0$.

Ответ: $x \in \left\{0;\ \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right\}$.

Задача 35.

Решить уравнение: $[x]^x = 4\sqrt{2}, \ x > 0.$

Решение.

Рассмотрим такие случаи:

а) $0 < x < 1, \ [x] = 0, \ [x]^x = 0$. Среди $x \in [0; \ 1)$ нет решений уравнения;

б) $1 \leqslant x < 2, \ [x] = 1, \ [x]^x = 1$. Каждое $x \in [1; 2)$ не является решением уравнения;

в) $2 \leqslant x < 3$: $[x] = 2, \ [x]^x = 2^x, \ 2^x = 4\sqrt{2}, \ 2^x = 2^{5/2}, \ x = \frac{5}{2}$;

г) $3 \leqslant x < +\infty$: $[x] \geqslant 3, \ [x]^x \geqslant 27$. Каждое $x \geqslant 3$ не является решением уравнения.

Ответ: $x = \frac{5}{2}$.

Задача 36.

Решить уравнение: $x^{[x]} = \frac{81}{16}, \ x > 0.$

Решение.

Рассмотрим отдельно такие случаи:

а) $0 \leqslant x < 1, \ [x] = 0$. Каждое $x \in [0; \ 1)$ не является решением уравнения;

б) $1 \leqslant x < 2, \ [x] = 1, \ x^{[x]} = x, \ \frac{81}{16} \notin [1; 2)$. Каждое $x \in [1; 2)$ не является решением уравнения;

в) $2 \leqslant x < 3, \ [x] = 2, \ x^2 = \frac{81}{16}, \ x = \frac{9}{4}$;

г) $3 \leqslant x < +\infty, \ [x] \geqslant 3, \ x^{[x]} > 27$. Среди $x \in [3; +\infty)$ нет решений уравнения.

Ответ: $x = \frac{9}{4}$.

Задача 37.

Решить уравнение: $[x]^{[x]} = 27.$

Решение.

$$[x]^{[x]} = 3^3; \quad [x] = 3; \quad 3 \leqslant x < 4.$$

Ответ: $x \in [3; 4)$.

Задача 38.

Решить уравнение: $\dfrac{\sin 2x + \sin 5x - \sin 3x}{\cos x + 1 - 2\sin^2 2x} = 2\left[\dfrac{x}{\pi}\right]\sin x.$

Решение.

$$\frac{\sin 2x + \sin 5x - \sin 3x}{\cos x + 1 - 2\sin^2 2x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x + 2\cos 4x \cdot \sin x}{\cos x + 1 - (1 - \cos 4x)} =$$

$$= \frac{2\sin x(\cos x + \cos 4x)}{\cos x + \cos 4x} = 2\sin x.$$

$$\cos x + \cos 4x \neq 0; \quad x \neq \frac{2k+1}{5}\pi; \quad x \neq \frac{2k+1}{3}\pi; \quad k \in Z.$$

Таким образом,

$$2\sin x = 2\left[\frac{x}{\pi}\right]\sin x, \quad \left(1 - \left[\frac{x}{\pi}\right]\right)\sin x = 0.$$

Если $\sin x = 0$, то $x = 2k\pi$, $k \in Z$ (каждое x из множества $\{(2k+1)\pi,\ k \in Z\}$ не принадлежит области определения). Если $1 - \left[\frac{x}{\pi}\right] = 0$, то $\left[\frac{x}{\pi}\right] = 1$, $1 \leqslant \frac{x}{\pi} < 2$, $\pi \leqslant x < 2\pi$, но $x = \pi$ не принадлежит области определения.

Ответ: $x \in (\pi; 2\pi) \cup \{2k\pi,\ k \in Z\}$.

Задача 39.

Решить уравнение $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \left[\dfrac{\pi}{6x}\right]\right) = \dfrac{1}{2}$.

Решение.

Из условия следует, что

$$\frac{\pi}{6} + \left[\frac{\pi}{6x}\right] = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } \frac{\pi}{6} + \left[\frac{\pi}{6x}\right] = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$$

где k — любое целое число. Отсюда

$$\left[\frac{\pi}{6x}\right] = 2\pi k \text{ или } \left[\frac{\pi}{6x}\right] = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$$

Левые части последних равенств — целые, а правые — иррациональные, кроме случая при $k = 0$ в первом равенстве. Следовательно, $\left[\frac{\pi}{6x}\right] = 0$, откуда $0 \leqslant \frac{\pi}{6x} < 1$, или $x > \frac{\pi}{6}$.

Итак, данное уравнение имеет решение $x > \frac{\pi}{6}$.

Задача 40.

Решить уравнение $2x + \frac{9}{x} = 3\,[x] + \frac{6}{[x]}$.

Решение.

После несложной группировки данное уравнение приводится к виду $(x\,[x] - 3)(2x - 3\,[x]) = 0$, $x \neq 0$, $[x] \neq 0$.

При $[x]$, равной 1 и -1, получаем уравнения

$$(x - 3)(2x - 3) = 0, \quad (x + 3)(2x + 3) = 0,$$

первое из которых имеет корень $x = \frac{3}{2}$ ($x = 3$ не удовлетворяет условию $[x] = 1$), а корни второго не удовлетворяют условию $[x] = -1$. При $[x] = -2$ получим $x = -\frac{3}{2}$. При $[x] \geqslant 2$

$$x\,[x] \geqslant 4,\ 2x - 3\,[x] < 2\,([x] + 1) - 3\,[x] = 2 - 3\,[x] < 0;$$

при $[x] \leqslant -3$

$$x\,[x] \geqslant 6,\ 2x - 3\,[x] \geqslant 2\,[x] - 3\,[x] = -\,[x] \geqslant 3.$$

Следовательно, уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$.

Задача 41.

Решить уравнение $x\,(x - 2)\,[x] = \{x\} - 1$.

Решение.

После замены $\{x\}$ на $x - [x]$ уравнение нетрудно привести к виду $[x]\,(x - 1)^2 = x - 1$, откуда получаем корень $x = 1$ и после сокращения уравнение примет вид $[x]\,(x - 1) = 1$. При

$x > 2$ оба сомножителя в левой части больше 1, при $x < -1$ оба они меньше -1, и поэтому их произведение по модулю больше 1. Следовательно, корни расположены в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 2$. При $0 \leqslant x < 1$ $[x] = 0$, так что на этом промежутке корней нет. При $-1 \leqslant x < 0$ $[x] = -1$, и из уравнения получаем $x = 0$, а это противоречит равенству $[x] = -1$. При $1 \leqslant x < 2$ $[x] = 1$, $x = 2$, но число 2 не является корнем уравнения. Таким образом, уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Задача 42.

Решить уравнение $x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{1993}\right]$.

Решение.

Так как $[a] \leqslant a < [a] + 1$ и $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$, то

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] \leqslant x < \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] + 3.$$

Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{7}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{1993}\right] < 3,$$

и поэтому, во-первых, $x \geqslant 0$, а во-вторых, в сумме, стоящей в середине полученного двойного неравенства, все слагаемые, начиная с третьего, равны 0, так что $x < 7$.

Поскольку x — целое число, то остается проверить значения от 0 до 6. Решениями уравнения оказываются числа 0, 4 и 5.

Задача 43.

Построить график функции $y = [\,|x|\,]$.

Решение.

Для $x \geqslant 0$ $y = [x]$. Учитывая четность данной функции, производим симметрию относительно оси OY (рис. 25.1.).

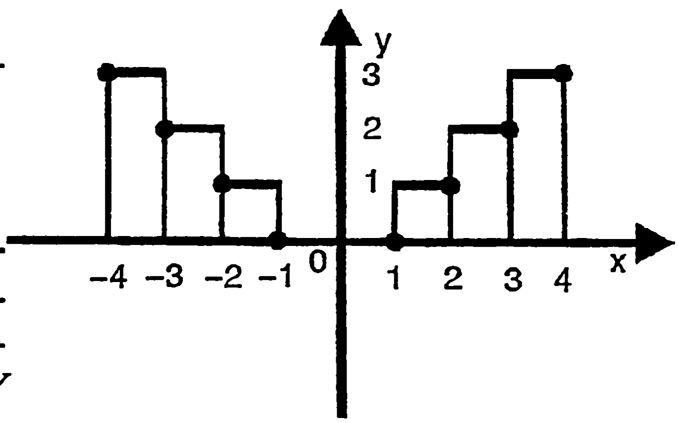


Рис. 25.1.

Задача 44.

Построить график функции $y = x + \{x\} + [x] + |x|$.

Решение.

Учитывая, что $[x] + \{x\} = x$, имеем $y = 2x + |x|$, т.е.

$$y = \begin{cases} 3x, & \text{при } x \geqslant 0, \\ x, & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (\text{рис. } 25.2).$$

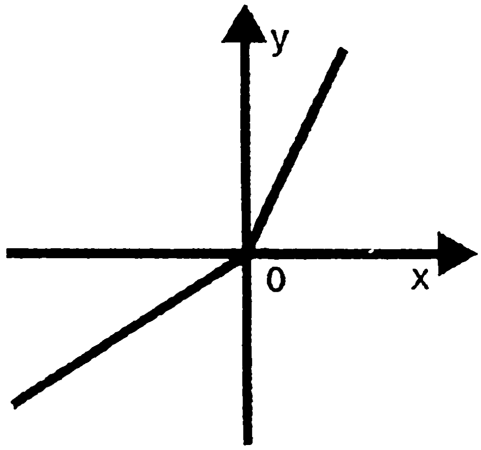


Рис. 25.2

Задача 45.

Построить график функции $y = |[x]|$.

Решение.

Строим уже известный нам график вспомогательной функции $y = |x|$. Используя значение абсолютной величины, строим ту часть искомого графика, которая соответствует значениям аргумента $x \in]-\infty; 0[$ (рис. 25.3).

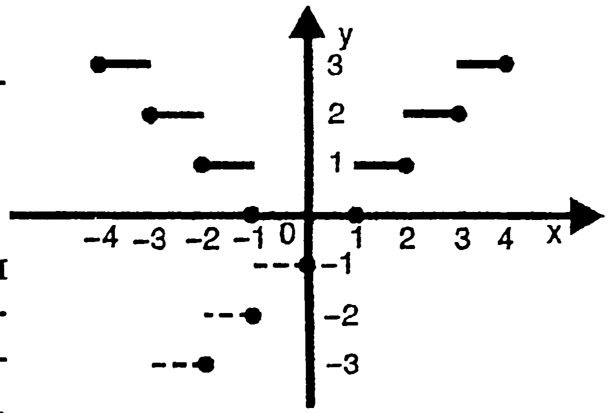


Рис. 25.3

Задача 46.

Построить график функции $y = [x] - \{x\}$.

Решение.

Построив график суммы двух функций $y = [x]$ и $y = -\{x\}$, получаем искомый график (рис. 25.4).

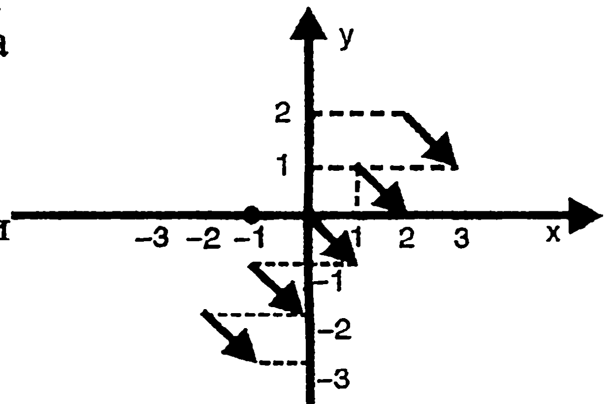


Рис. 25.4

Задача 47.

Построить график функции $y = [x] + |x|$ (рис. 25.5).

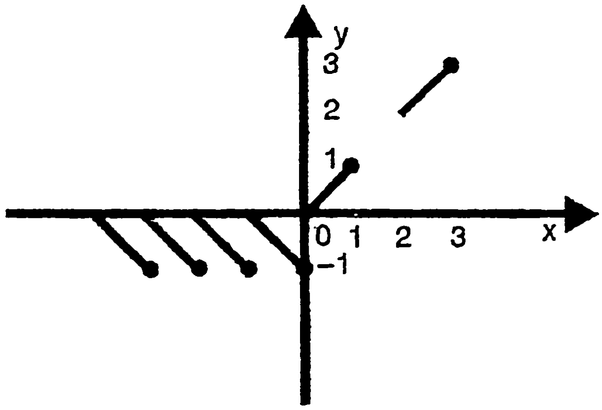


Рис. 25.5

Задача 48.

Построить график функции $y=\dfrac{\{x\}}{[x]}$ (рис. 25.6).

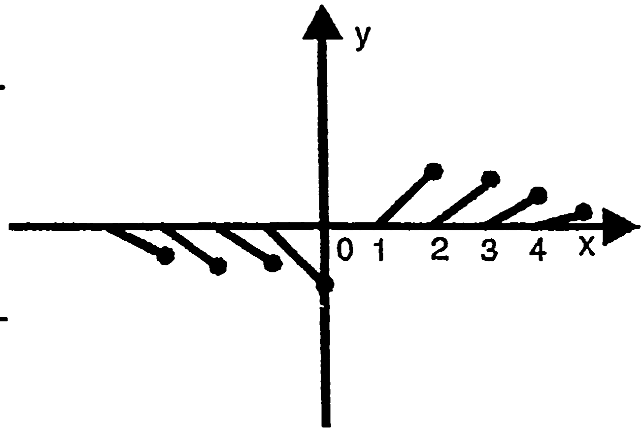


Рис. 25.6

Задача 49.

Построить график функции $y=[x]\cdot\{x\}$.

Решение.

Тут лучше воспользоваться определением целой и дробной части числа:

$[x]=k$ при $k\leqslant x<k+1$;

$\{x\}=x-k$ при $k\leqslant x<k+1$,

где k — целое число. Тогда $y=[x]\cdot\{x\}=k(x-k)=$ $=kx-k^2$.

Построение выполняем для каждого интервала $k\leqslant x<k+1$ (где k — целое число) отдельно (рис. 25.7).

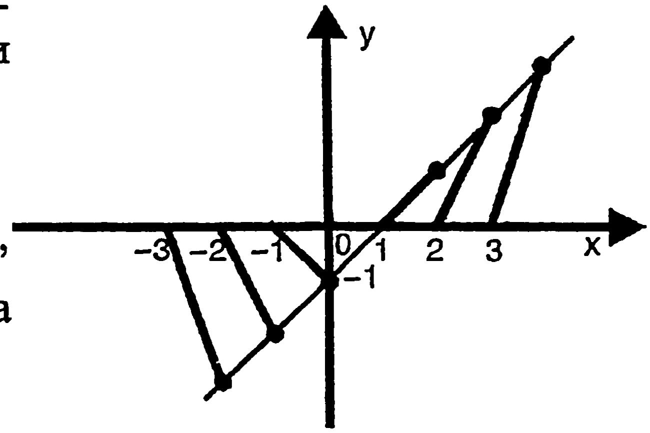


Рис. 25.7

Задача 50.

Построить график функции $y=\dfrac{x}{[x]}$.

Решение.

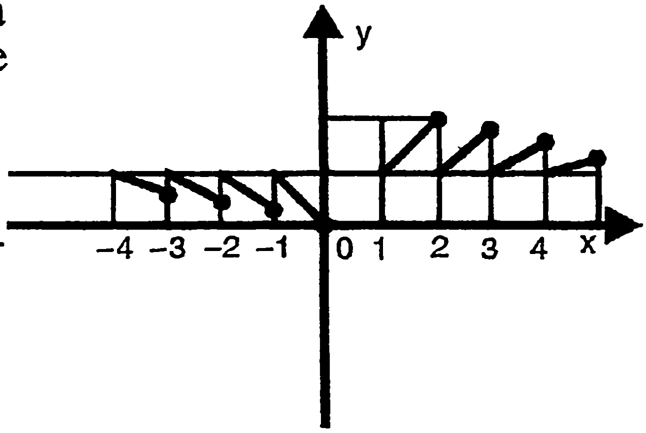


Рис. 25.8

$$y=\begin{cases}\text{не существует при } 0\leqslant x<1,\\ x \text{ при } 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{x}{2} \text{ при } 2\leqslant x<3,\\ \dfrac{x}{3} \text{ при } 3\leqslant 3\leqslant x<x,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{x}{k} \text{ при } k\leqslant x<k+1\end{cases}$$ (рис. 25.8).

Задача 51.

Построить график функции $y = x + [x]$.

Решение.

$$[x] = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 \text{ при } 1 \leqslant x < 2, \\ 2 \text{ при } 2 \leqslant x < 3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k \text{ при } k \leqslant x < k+1. \end{cases}$$

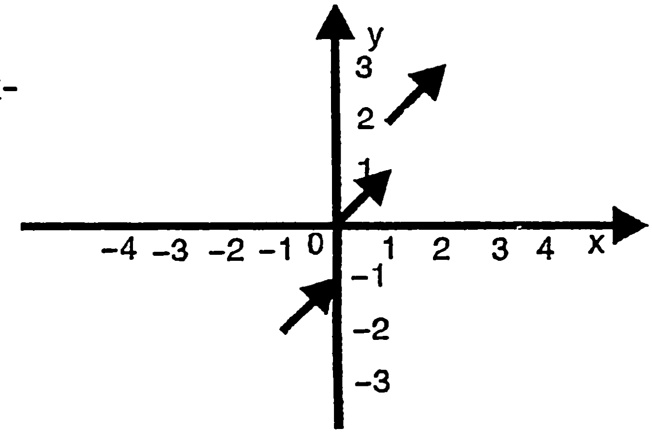


Рис. 25.9

Поэтому

$$y = x + [x] = \begin{cases} \text{x при } 0 \leqslant x < 1, \\ x+1 \text{ при } 1 \leqslant x < 2, \\ x+2 \text{ при } 2 \leqslant x < 3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x+k \text{ при } k \leqslant x < k+1 \end{cases} \quad \text{(рис. 25.9).}$$

Задача 52.

Решить уравнение $x^3 + [x] = 3$, где $[x]$ значит наибольшее целое число, не больше x.

Решение.

Понятно, что число x положительное, причем $1 < x < 2$, так как иначе сумма не может быть равной 3.

$$[x] = 1; \ \ x^3 = 3; \ \ x = \sqrt[3]{2}.$$

Задача 53.

Решить уравнение $\left[\dfrac{x+1}{3}\right] = \dfrac{x-1}{2}$.

Решение.

По условию задачи $\dfrac{x-1}{2}$ — целое число, поэтому x — целое нечетное число, $\dfrac{x-1}{2} \leqslant \dfrac{x+1}{3} < \dfrac{x-1}{2} + 1$,

$$3x - 3 \leqslant 2x + 2 < 3x + 3, \ \begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 5, \end{cases} \text{ отсюда } -1 < x \leqslant 5.$$

Значит, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Задача 54.

Построить график функции $y = [(|x| - 1)(x - 3)]$.

Решение.

Построим график дополнительной функции (рис. 25.10)

$v = (|x| - 1)(x - 3)$.

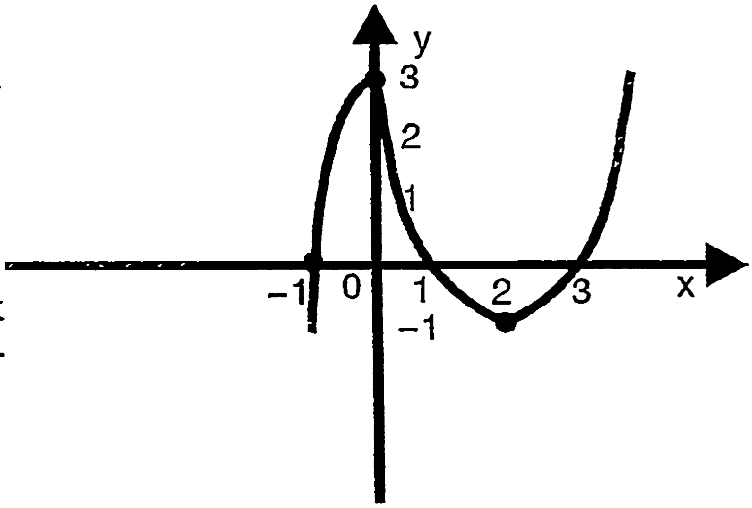


Рис. 25.10

Проведя через этот график прямые $y = k$, где k — целое число, определим промежутки, которые соответствуют значениям аргумента $0 \leqslant x < 1$; $1 \leqslant x < 2$; $2 \leqslant x < 3$; $3 \leqslant x < 4$ и соответственно этому строим искомый график (рис. 25.10 (*а*)).

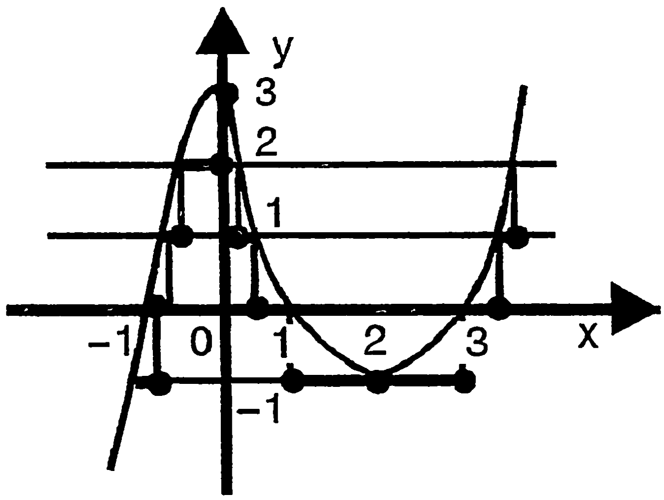


Рис. 25.10 (*а*)

Задача 55.

Решить уравнение $|[x]| = [|x|]$.

Решение.

Ясно, что всякое целое число является корнем данного уравнения. Ясно также, что всякое неотрицательное число также является корнем уравнения. Если же $x < 0$ и $x \neq [x]$, то $[x] < x < 0$, $|[x]| > |x| > [|x|]$, так что других корней уравнение не имеет.

Задача 56.

Решить уравнение $\left[\dfrac{2x - 1}{3}\right] + \left[\dfrac{4x + 1}{6}\right] = \dfrac{5x - 4}{3}$.

Решение.

Положим $\frac{2x-1}{3} = y$, тогда уравнение принимает вид

$$[y] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = \frac{5y-1}{2}.$$

Учитывая, что $[y] + \left[1 + \frac{1}{2}\right] = [2y]$, получим

$$[2y] = \frac{5y-1}{2}.$$

Полагая $\frac{5y-1}{2} = k$, будем иметь $\left[\frac{4k+2}{5}\right] = k$, где k — целое число.

Из последнего равенства следует, что

$$k \leq \frac{4k+2}{5} < k+1, \text{ или } 5k \leq 4k+2 < 5k+5; \quad -3 < k \leq 2.$$

Возможными значениями k являются -2; -1; 0; 1; 2, тогда соответствующие значения x: $-\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{5}$; 2.

Примеры графиков

$[y] = x.$

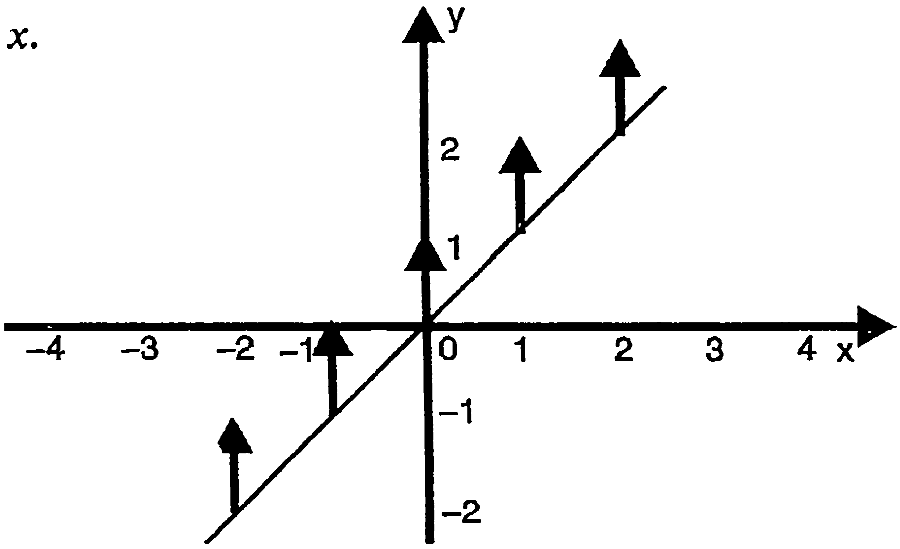


Рис. 25.11

$[y] + y = [x] + x.$

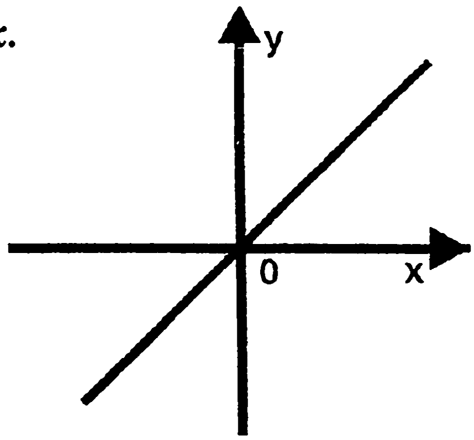


Рис. 25.12

$y = [x - 1].$

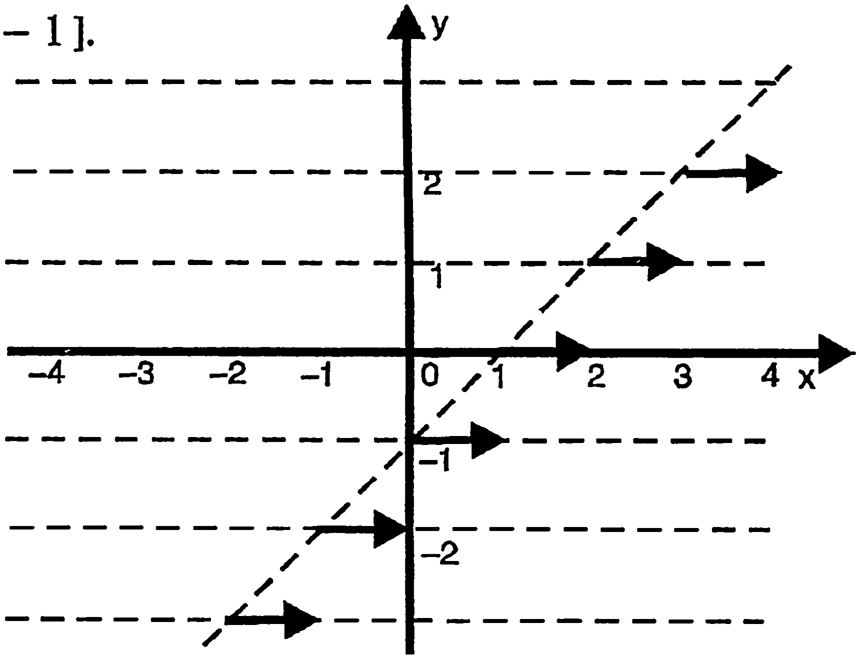


Рис. 25.13

$y = 2\,[x] + 7.$

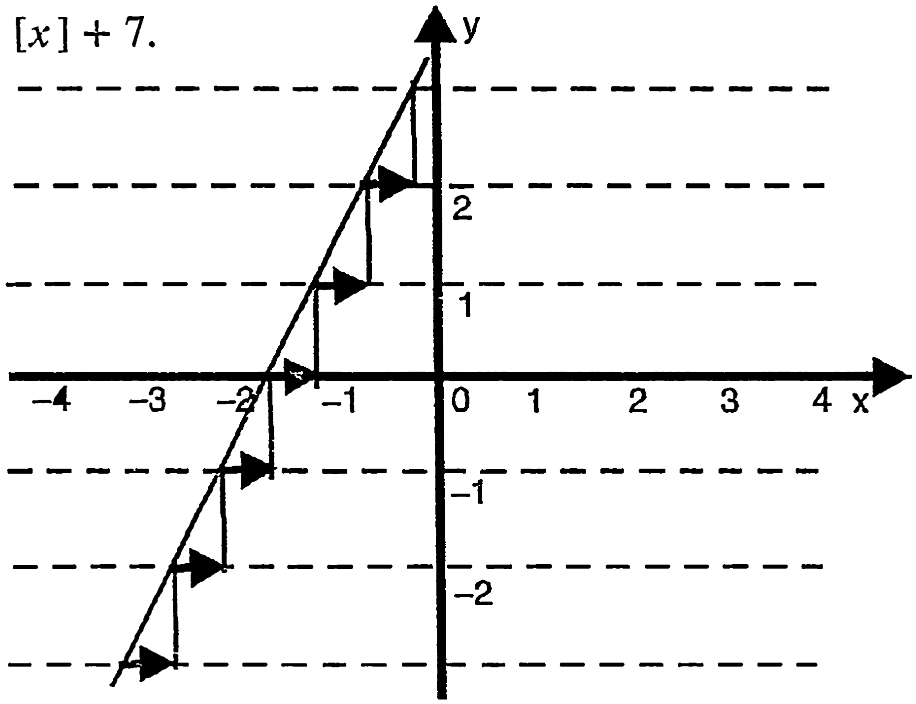


Рис. 25.14

$y = [-2x].$

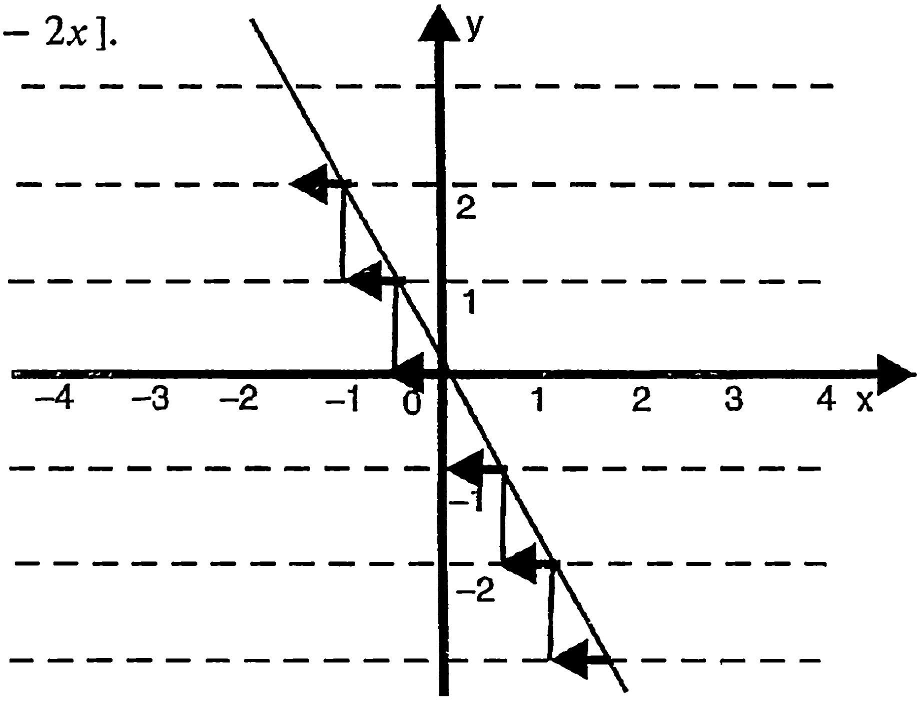


Рис. 25.15

$y = \sqrt{1 - [x]}\,.$

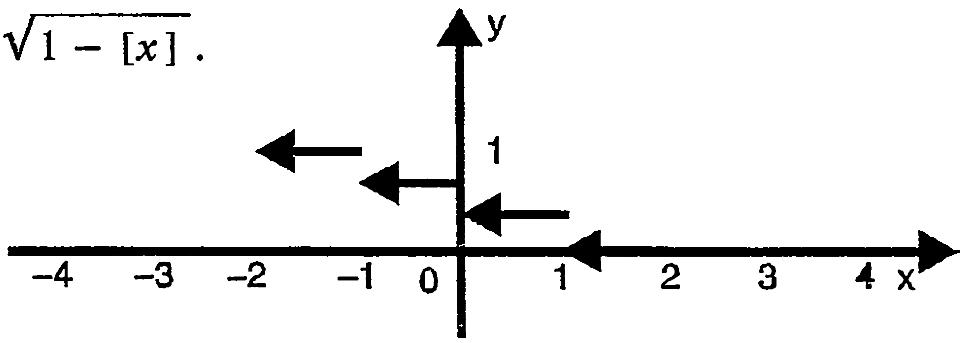


Рис. 25.16

$y = [\sin x]$.

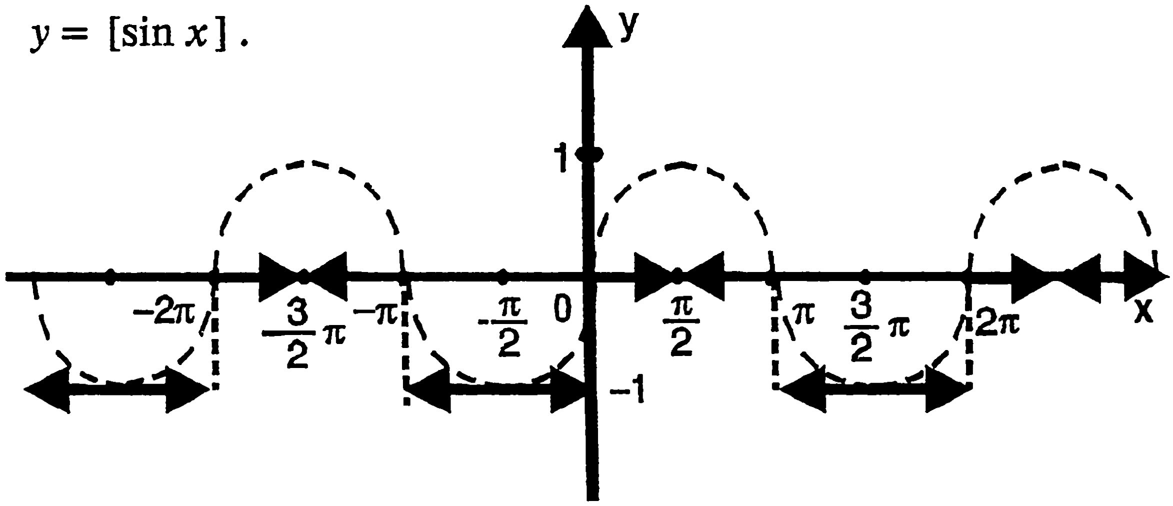


Рис. 25.17

$y = [\sqrt[3]{1 - x}]$.

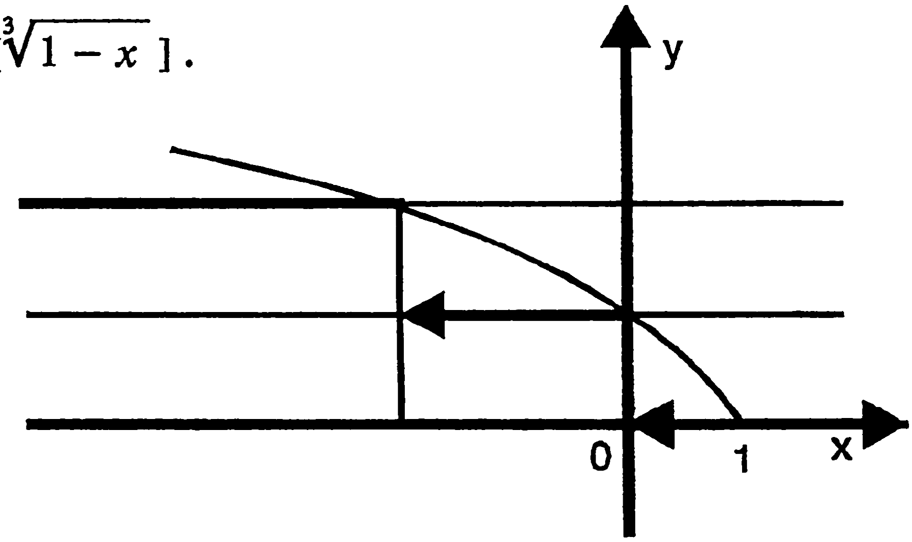


Рис. 25.18

$y = \frac{1}{[x]}$.

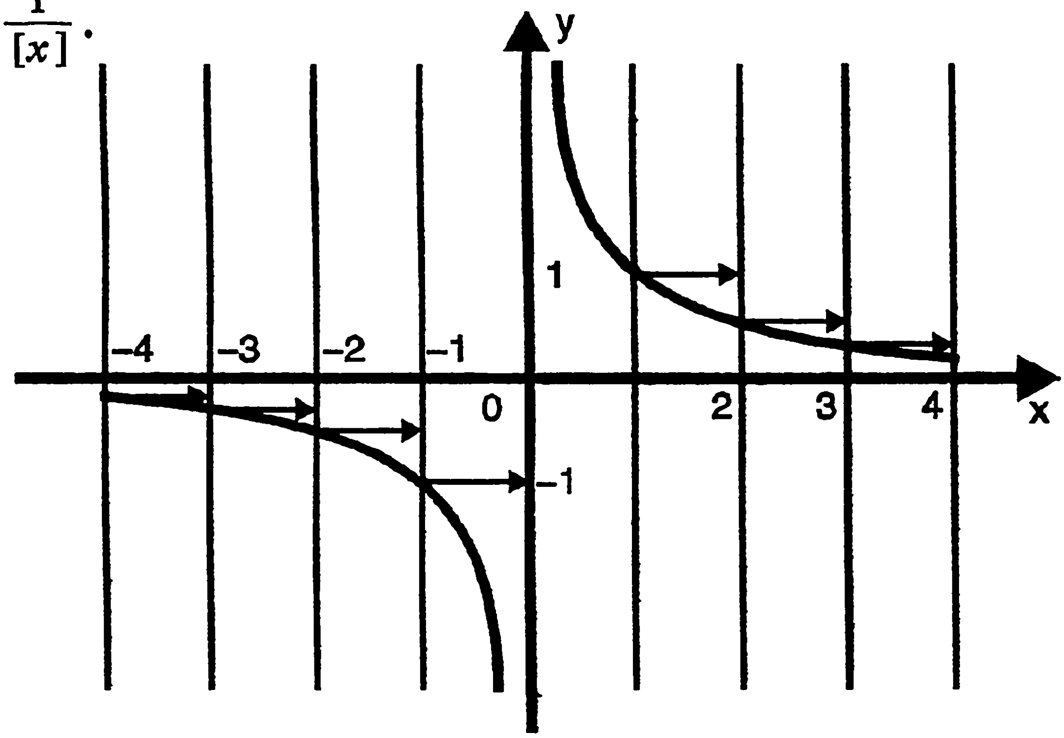


Рис. 25.19

$y = [2^x]$.

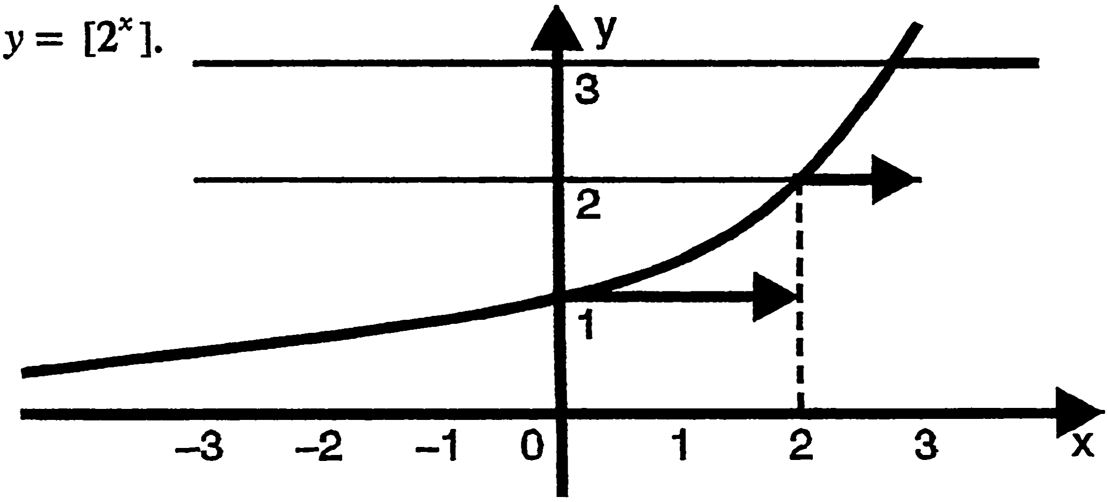


Рис. 25.20

26. ГРАФИКИ

Задача 1.

Над графиком функции $y = f(x)$ проделаны последовательно следующие преобразования: сдвинули вдоль от абсцисс на 3 единицы влево, отразили симметрично от оси ординат, отразили центрально симметрично относительно начала координат, отбросили часть графика, лежащую левее от оси ординат. Написать выражение для функции, заданной новым графиком.

Решение.

Имеем: $f_1(x) = f(x+3)$, $f_2(x) = f_1(-x)$,

$$f_3(x) = -f_2(-x) = -f_1(x) = -f(x+3).$$

Тогда искомая функция $f_4(x)$имеет вид

$$f_4(x) = f_3((\sqrt{x})^2) = -f((\sqrt{x})^2 + 3).$$

Задача 2.

Верно ли, что графики двух взаимно обратных функций могут пересекаться только на прямой $y = x$?

Решение.

Нет, неверно: графики функций $y = \log_{1/16} x$ и $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ имеют общую точку $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, не лежащую на прямой $y = x$. Отметим также, что функция может просто совпадать со своей обратной, например, функция $y = -x + 1$.

Задача 3.

Построить график функции $y = f(x)$, где $f(x)$ — расстояние от числа x до ближайшего целого отрицательного числа.

Решение.

Данная функция теряет смысл при значениях $x = -\frac{2k+1}{2}$, где k — любое целое положительное число, т.е. для этих значений не существует ближайшего целого отрицательного числа. Например, при $k = 1$ точка $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ одинаково удалена как от -2, так и от -1, поэтому для нее не существует ближайшего целого отрицательного числа. Нетрудно увидеть, что для любых целых отрицательных чисел $y = 0$. Для положительных значений x, как и для чисел из интервала $]-1, 0]$, ближайшим целым отрицательным числом будет число -1. Поэтому для всех $x \geqslant -1$ $y = x - (-1) = x + 1$. Для левых частей интервалов $]-|k|; -|k| + 1[$ графиком даной функции будет $y = x - (-|k|) = x + |k|$, где $|k| \neq 1$. Для первых частей интервалов $]-|k|; -|k| + 1[$ $y = f(x) = -|k| + 1 - x$, где $|k| \neq 1$.

Примечание. Анализируя условие задачи, мы считали, что ближайшим целым отрицательным числом должно быть такое единственное число, которое содержится ближе от всех других целых отрицательных чисел, поэтому для случая $x = \frac{-(2k+1)}{2}$ таких чисел не существовало и функция теряла смысл. Если же под выражением ближайшее целое неотрицательное число подразумевать не одно такое число, то ближайшими целыми отрицательными числами будут числа -3 и -2. В точках $x = -\frac{2k+1}{2}$ функция существует и принимает значение $\frac{1}{2}$.

Задача 4.

Найти геометрический образ неравенства

$$\max\{\sin x, |y|\} \leqslant \frac{1}{2}$$

Решение.

Так $\max\{a, b, \dots, t\}$ есть обозначение наибольшего из чисел $a, b, \dots, t$.

В данном случае $F(x, y) = \max\{\sin x, |y|\}$ и для всех (x, y) выполняется равенство $F(x, y) = F(x, -y)$. Поэтому рассмотрим данное неравенство в полуплоскости $y \geqslant 0$. Здесь выражение $F(x, y)$ имеет вид:

$$F(x, y) = \max\{\sin x, y\} = y \text{ при } \sin x \leqslant y;$$

$$F(x; y) = \max\{\sin x, y\} = \sin x \text{ при } \sin x \geqslant y.$$

Т.о. геометрический образ неравенства $F(x, y) \leqslant \frac{1}{2}$ в полуплоскости $y \geqslant 0$ состоит из точек (x, y) полуплоскости $y \geqslant 0$, которые лежат между графиками и на графиках кривых $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$, а также точек (x, y) полуплоскости $y \geqslant 0$, которые лежат под графиком кривой $y = \sin x$ под интервалами $\left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[2k\pi + \frac{5\pi}{6}, (2k+1)\pi\right]$.

Задача 5.

Построить график уравнения

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} + 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{6}(x+1).$$

Решение.

Рассмотрим векторы

$$\vec{a} = (1, 1, 2), \quad \vec{b} = (\sqrt{x+y}, \sqrt{x-y}, \sqrt{x^2+1}).$$

Длины этих векторов равны соответственно $\sqrt{6}$ и $|x+1|$, а скалярное произведение равно, по условию, $\sqrt{6}(x+1)$, и, следовательно, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, т.е.

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x-y} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2}.$$

Отсюда $y = 0$, $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, так что график данного уравнения состоит из полученных двух точек.

Задача 6.

Построить график функции: $y = f(f(f(x)))$,
если $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Решение.

Область определения функции f — все действительные числа, кроме 1. Далее, $f(f(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$; область определения полученной функции состоит из всех x, кроме 1 и 0. Наконец, $f(f(f(x))) = x$, следовательно, рассматриваемая функция во всей области определения совпадает с функцией $y = x$. Таким образом, мы должны построить график функции $y = x$ $(x \neq 0,\ x \neq 1)$.

Задача 7.

Нарисовать график $y = f(x)$, заданной условием: для любого действительного x функция $f(x)$ есть расстояние от x до ближайшего целого положительного числа.

Решение.

Если $x \leqslant 1$, то ближайшим к нему целым числом (положительным) является 1 и значение данной функции при таком значении x равно $1 - x$.

Построение графика на остальной части числовой оси удобно провести геометрически: над каждой точкой, лежащей между целыми числами k и $k+1$, надо отложить по вертикали отрезок длиной от k до x, если x лежит ближе к k, и длиной от x до $k+1$, если x лежит ближе к $k+1$.

Что касается точек x вида $k + \frac{1}{2}$, то функция на них не определена, поскольку у этих точек нет ближайшего целого положительного числа, и поэтому в соответствующих местах стоят стрелки.

Задача 8.

Доказать, что график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\quad x \in R\ (a \neq 0)$$

имеет центр симметрии.

Доказательство.

Нетрудно подобрать такие числа α и β, чтобы выполнялось тождество $ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \alpha\left(x + \frac{b}{3a}\right) + \beta$.

Отсюда видно, что график данной функции получается из графика функции $a\overset{3}{x} + \alpha x$ параллельным переносом $\left(-\frac{b}{3a}, \beta\right)$. Но последняя функция нечетна, и, следовательно, ее график, имеет центр симметрии, а тогда и исходный график, равный ему, что имеет центр симметрии.

27. ПРИМЕРЫ ГРАФИКОВ

1. $y = |x|$.

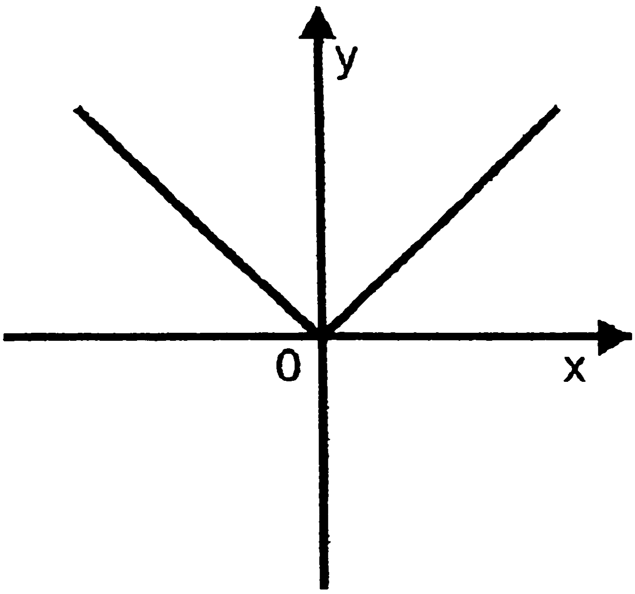


Рис. 27.1

2. $y = ||x - 1| - x|$.

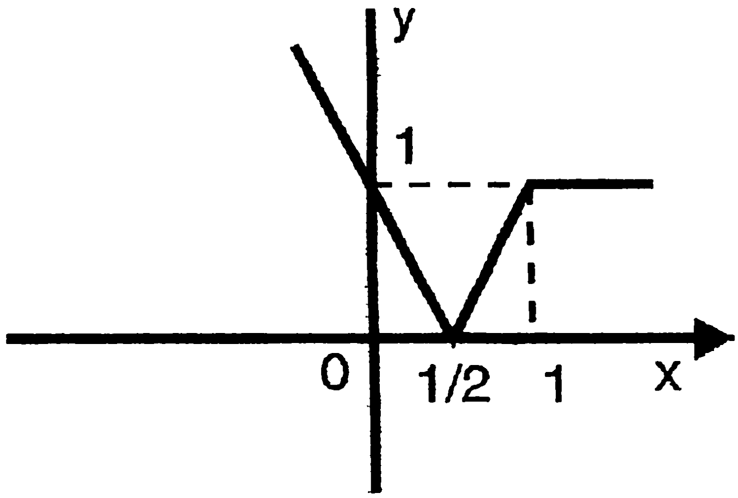


Рис. 27.2

3. $y = \dfrac{1}{|x| - 1}$.

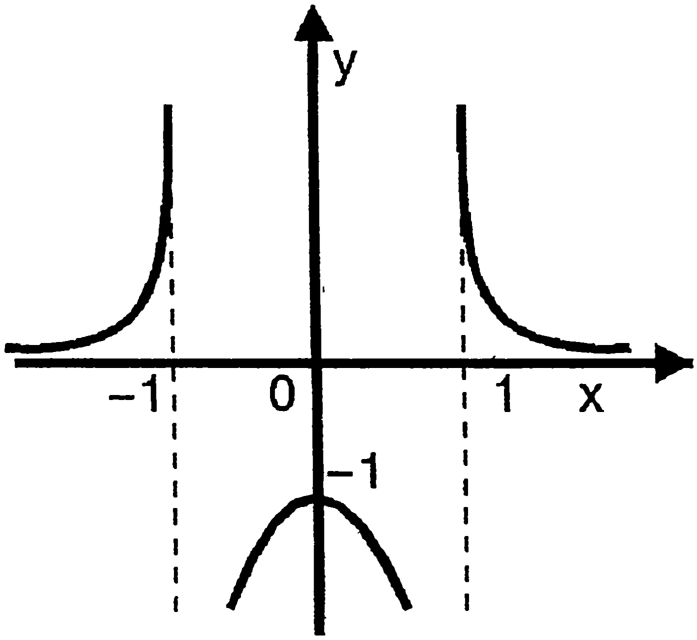


Рис. 27.3

4. $y = \dfrac{1 - 2x}{x - 2}$.

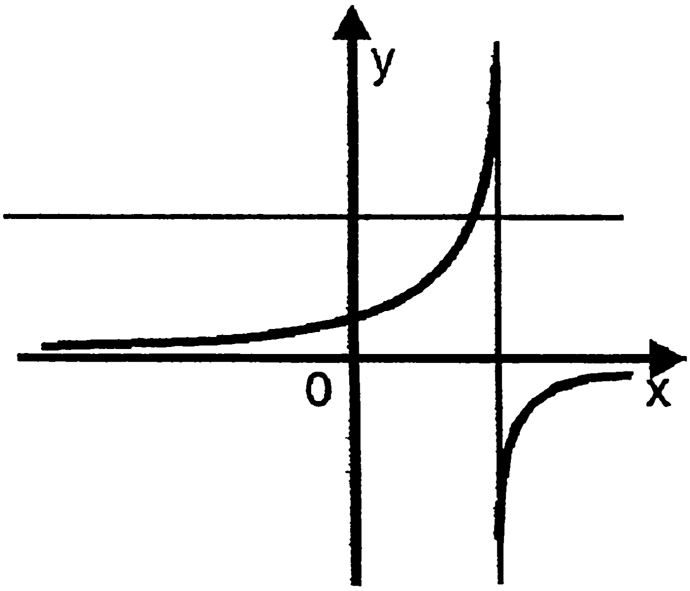


Рис. 27.4

5. $y = f(f(f(x)))$;

$f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.

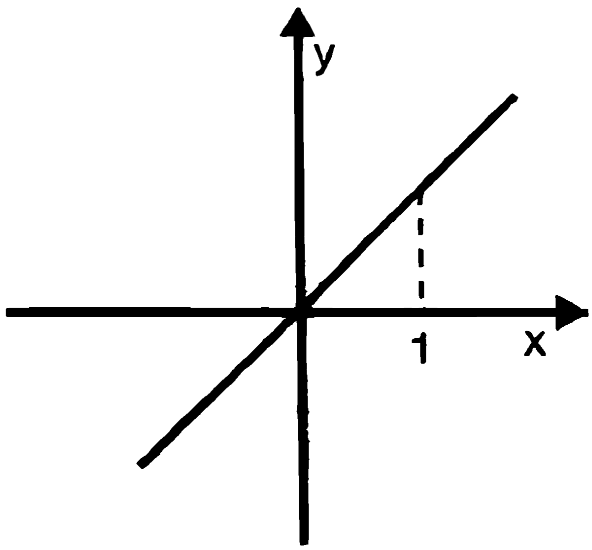


Рис. 27.5

6. $y = \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x - 2}$.

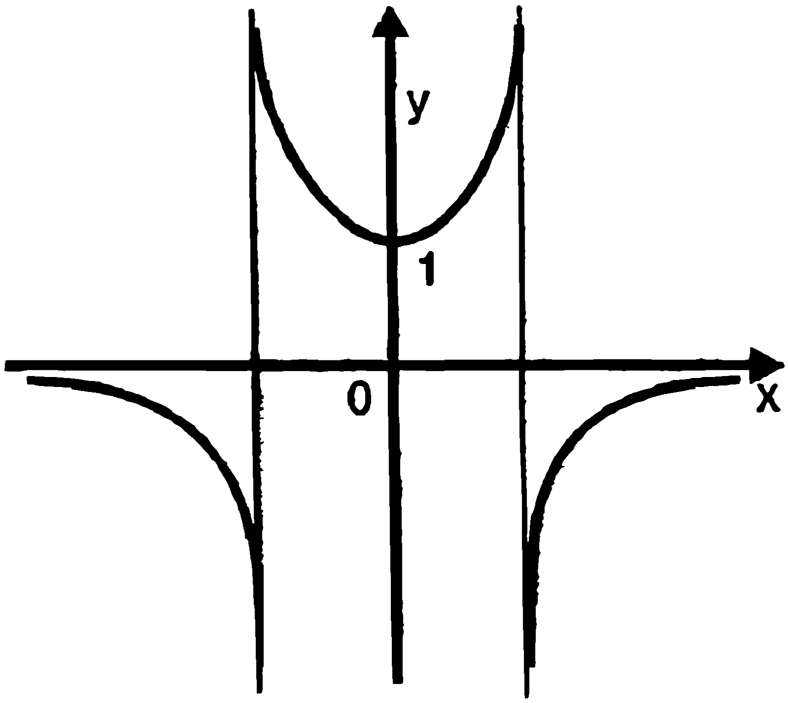


Рис. 27.6

7. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^4}$.

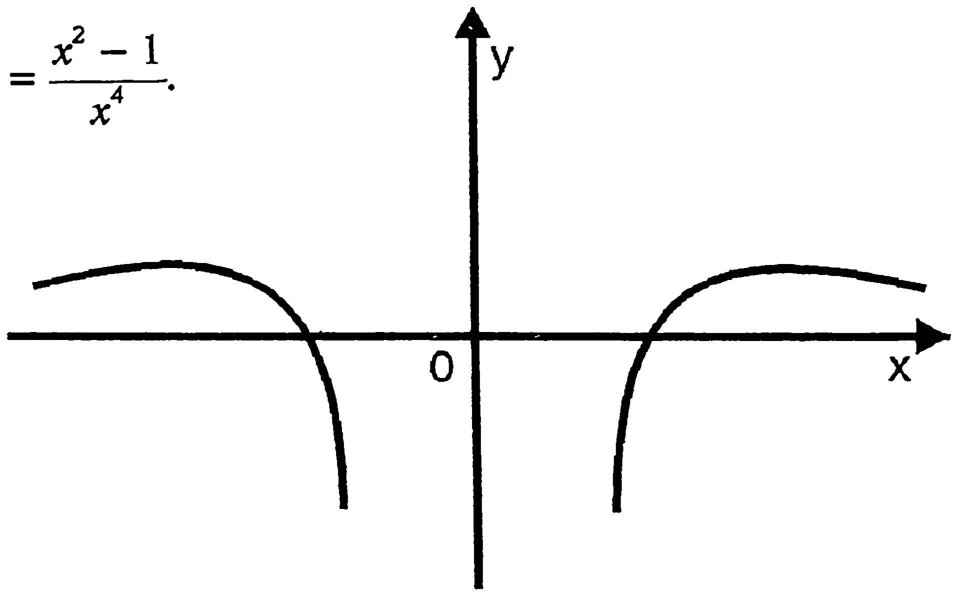


Рис. 27.7

8. $y = (x - 2)\sqrt[3]{x^2}$.

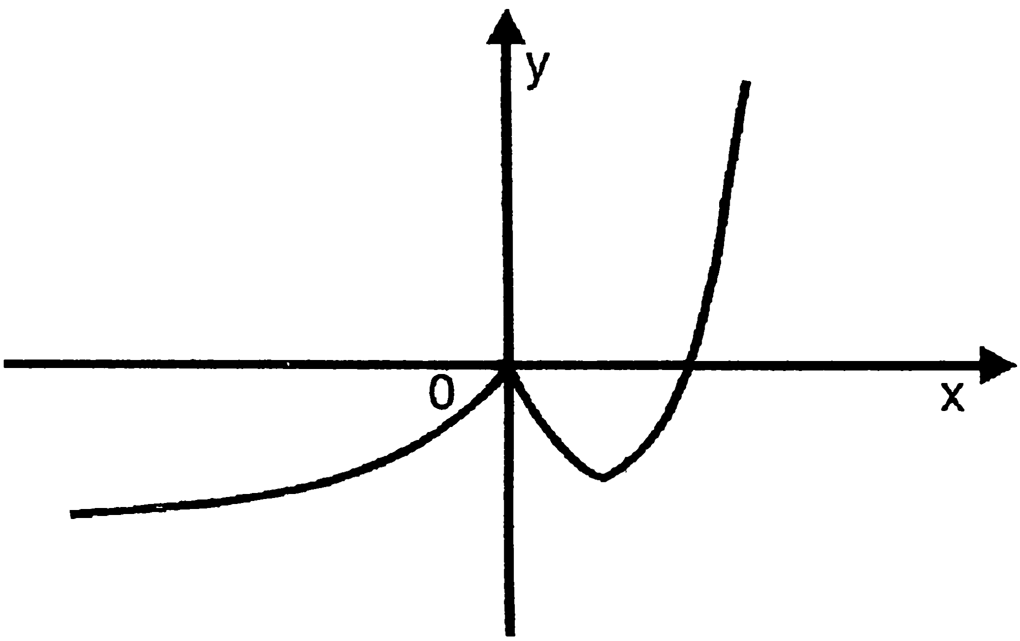


Рис. 27.8

9. $y = \dfrac{1}{1 + (x + 2)^2}$.

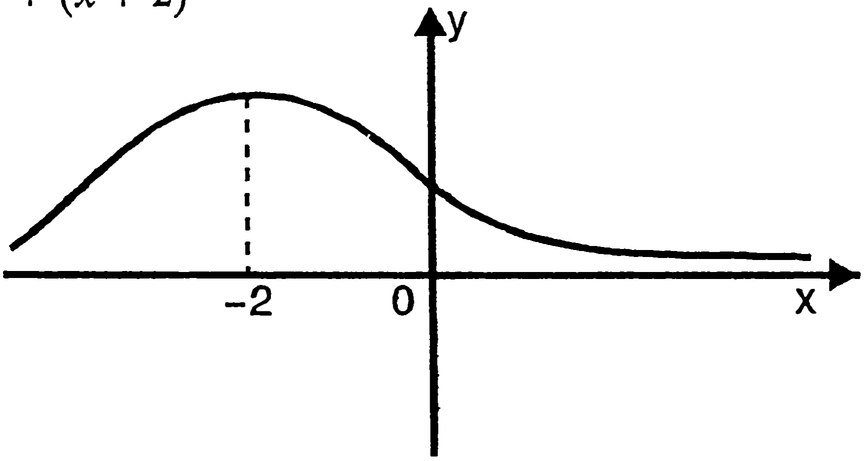


Рис. 27.9

10. $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}$.

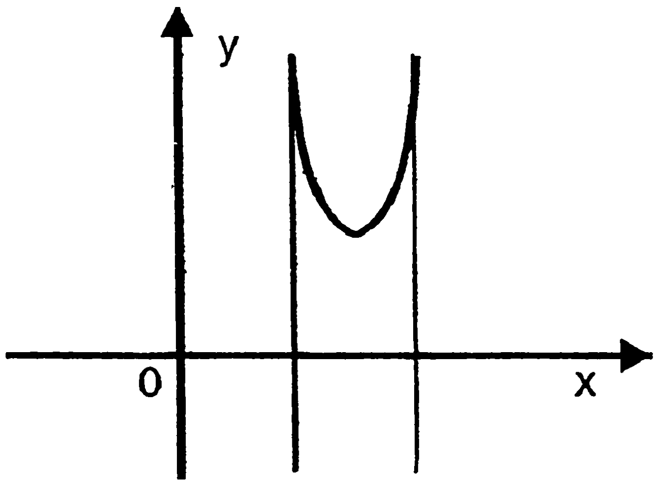


Рис. 27.10

11. $y = \left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot \dfrac{1}{x^2}$.

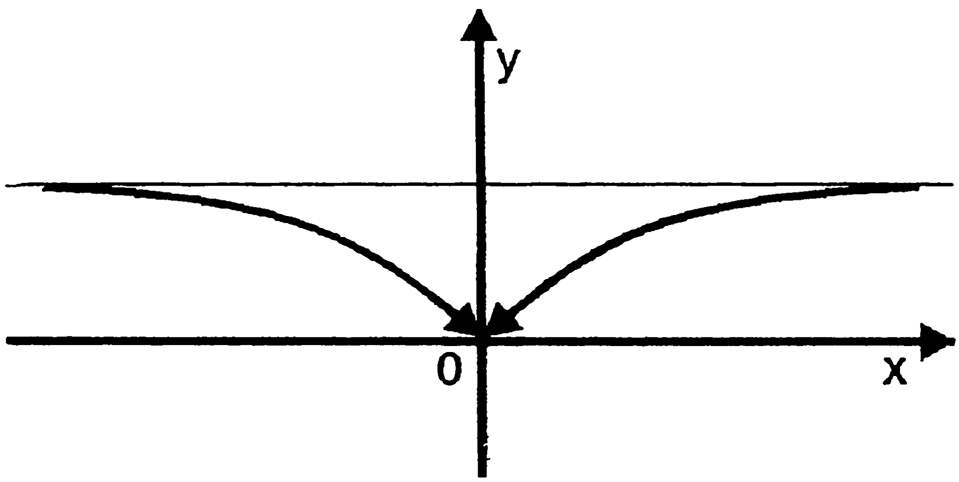


Рис. 27.11

12. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

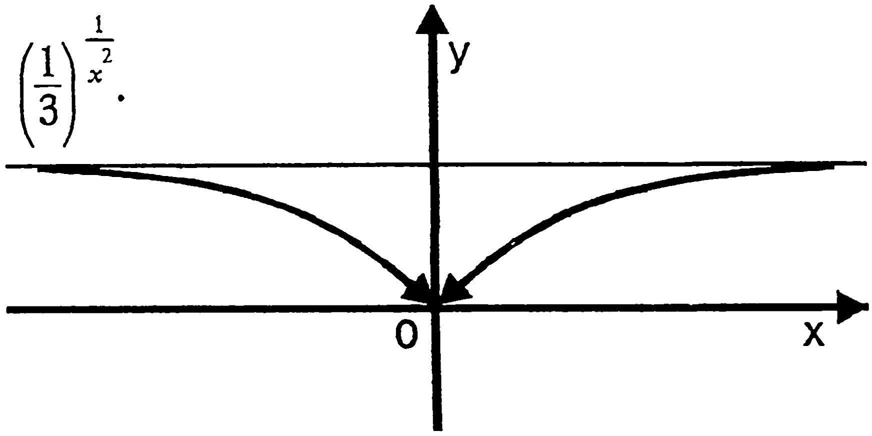


Рис. 27.12

13. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

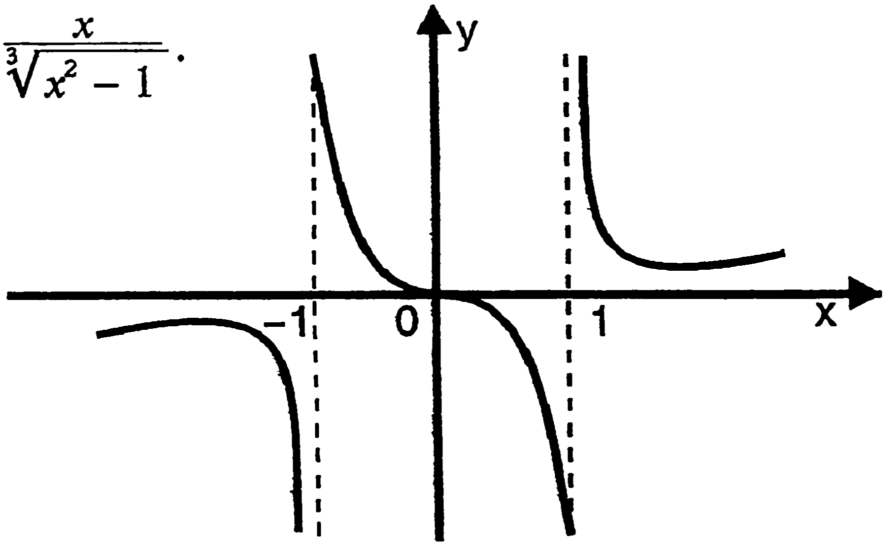


Рис. 27.13

14. $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

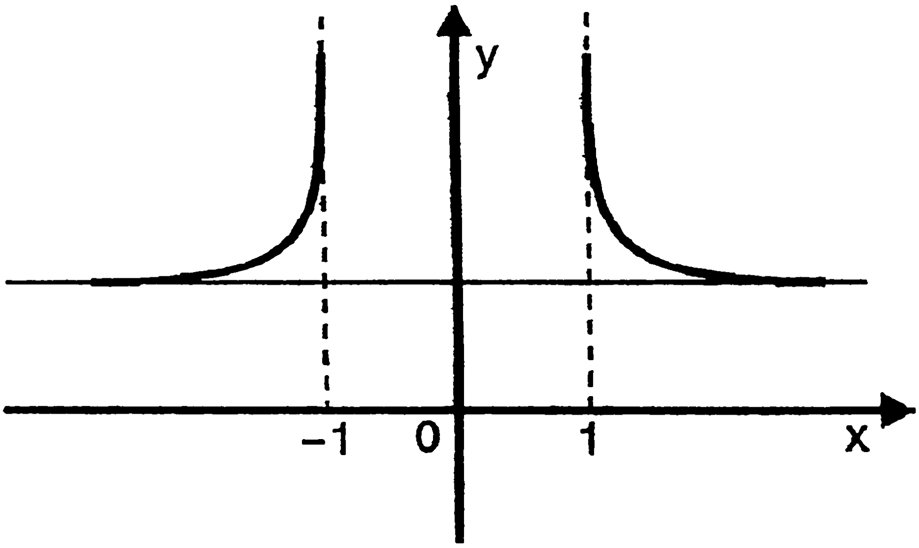


Рис. 27.14

15. $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$.

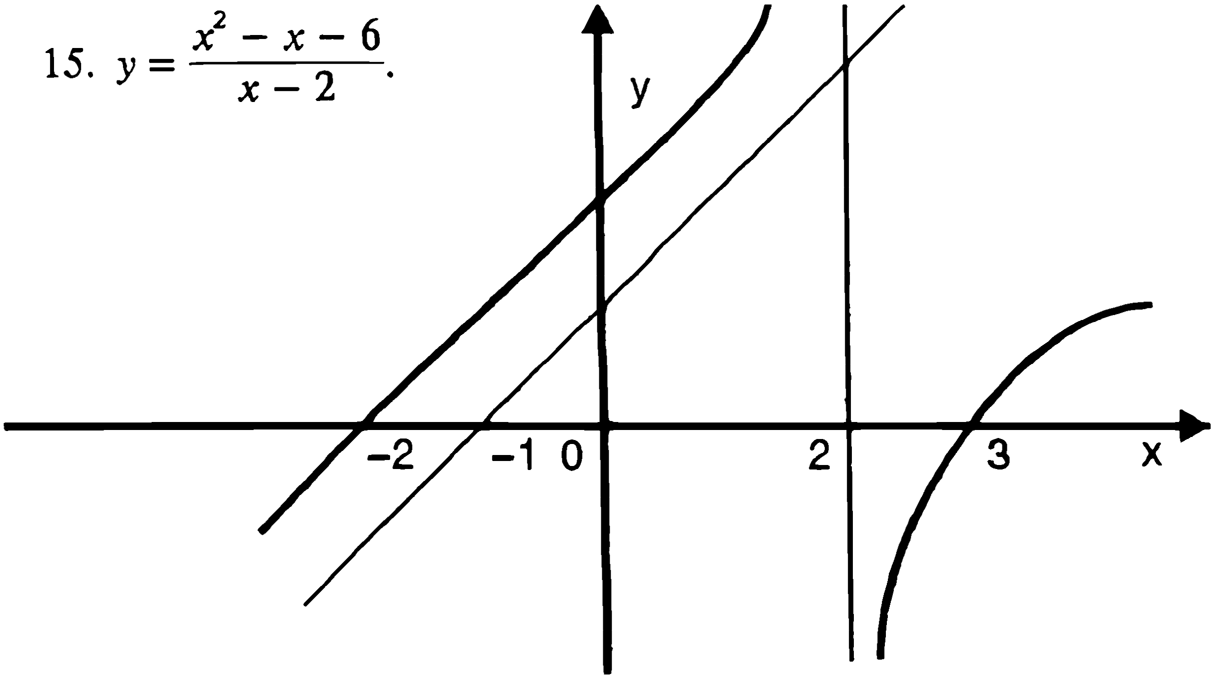


Рис. 27.15

16. $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

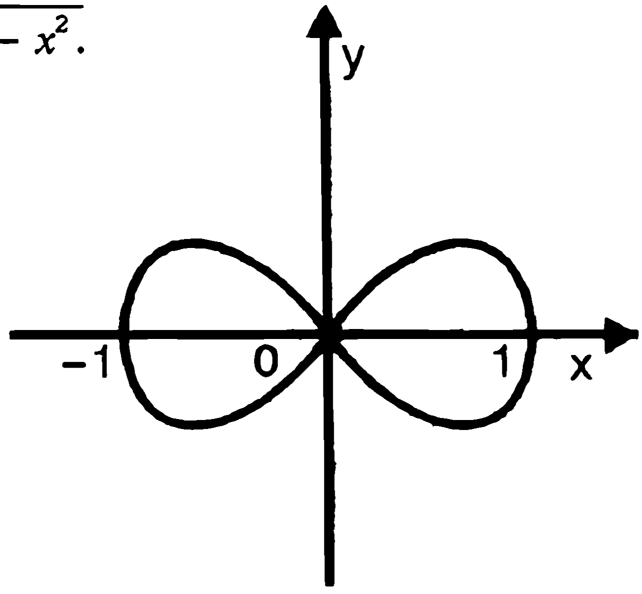


Рис. 27.16

17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

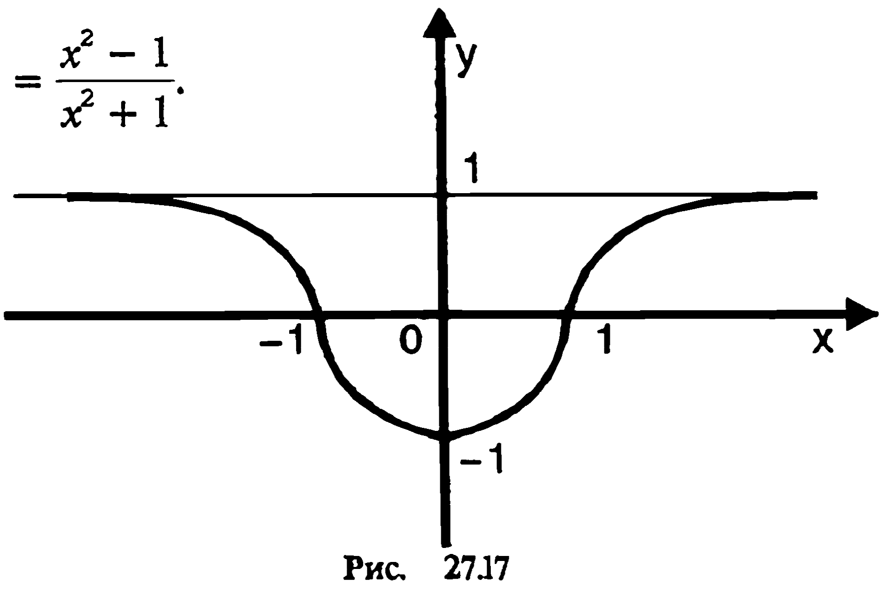


Рис. 27.17

18. $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 4}$.

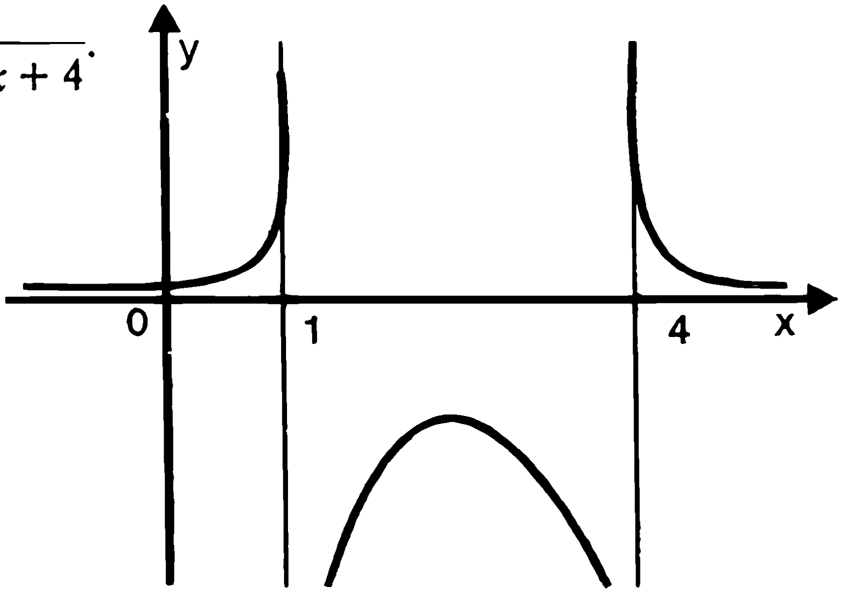


Рис. 27.18

19. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 1}$.

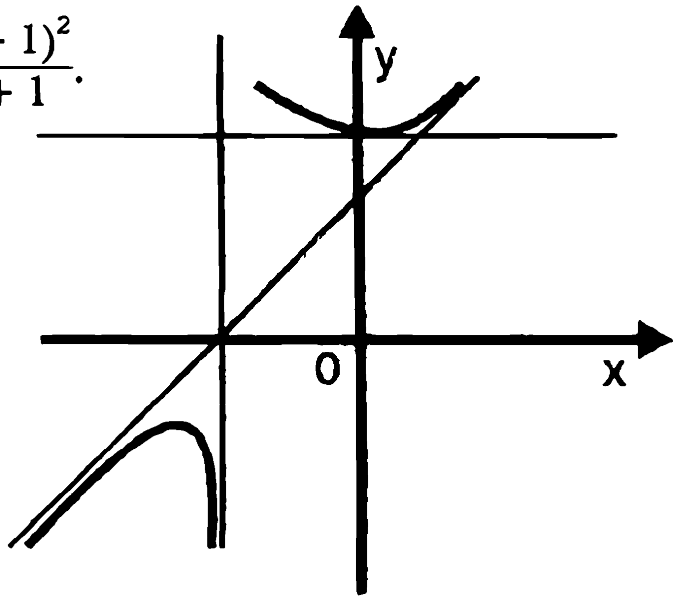


Рис. 27.19

20. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

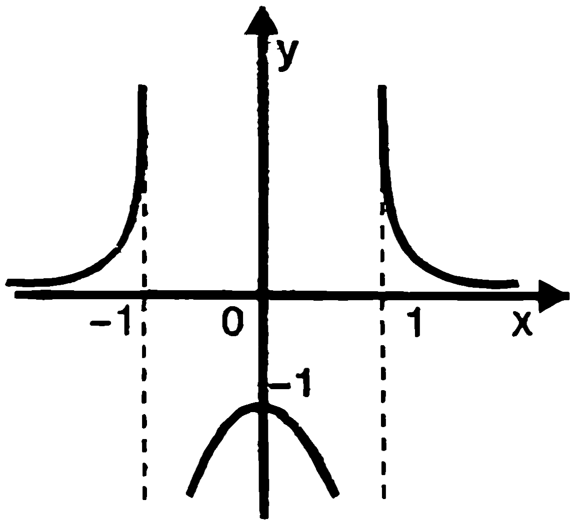


Рис. 27.20

21. $y = \dfrac{3x - 2}{5x^2}$.

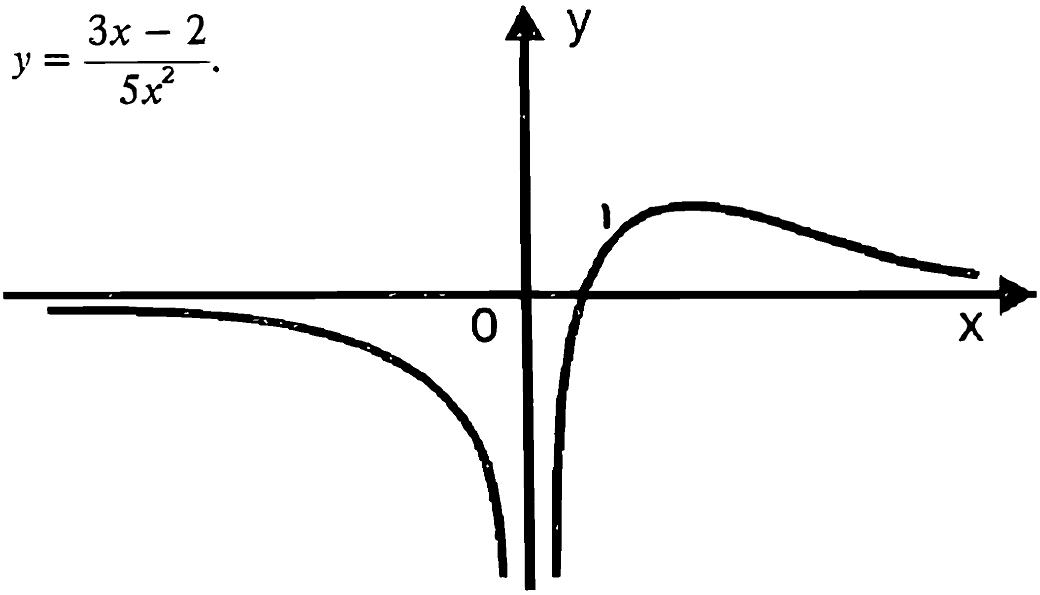


Рис. 27.21

22. $y = \dfrac{1}{1 + x^3}$.

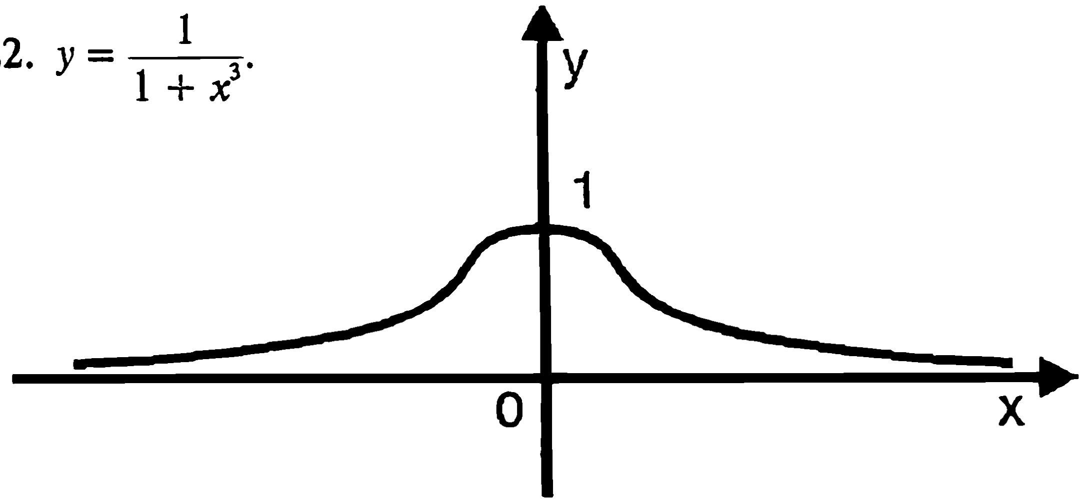


Рис. 27.22

23. $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$.

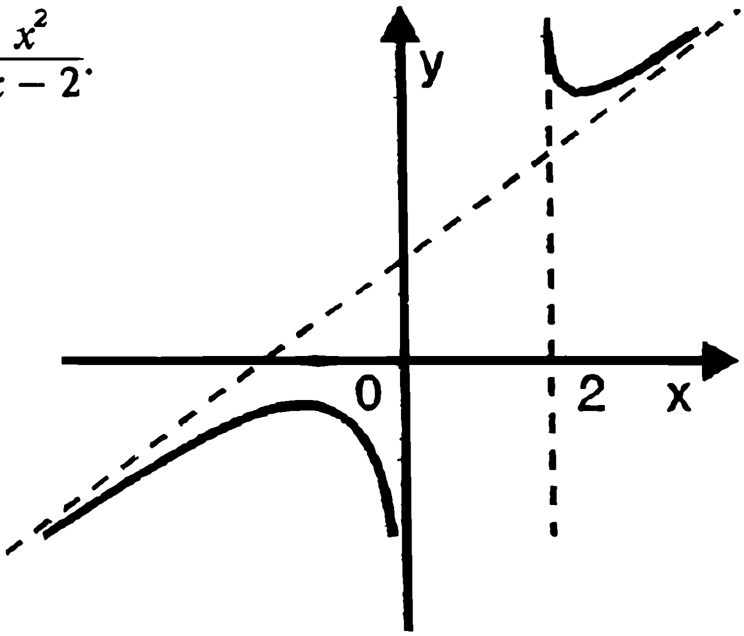


Рис. 27.23

24. $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$.

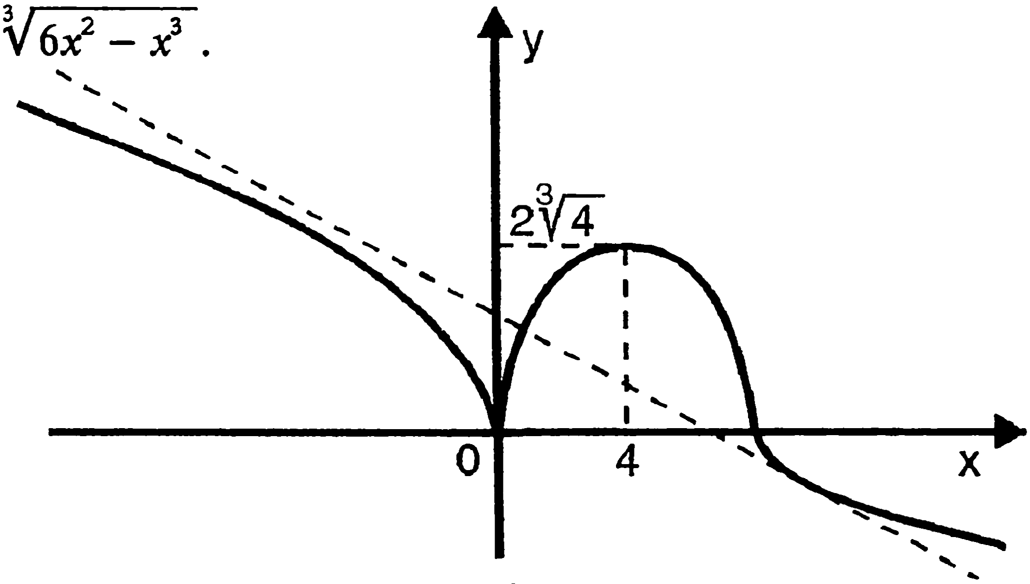


Рис. 27.24

25. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.

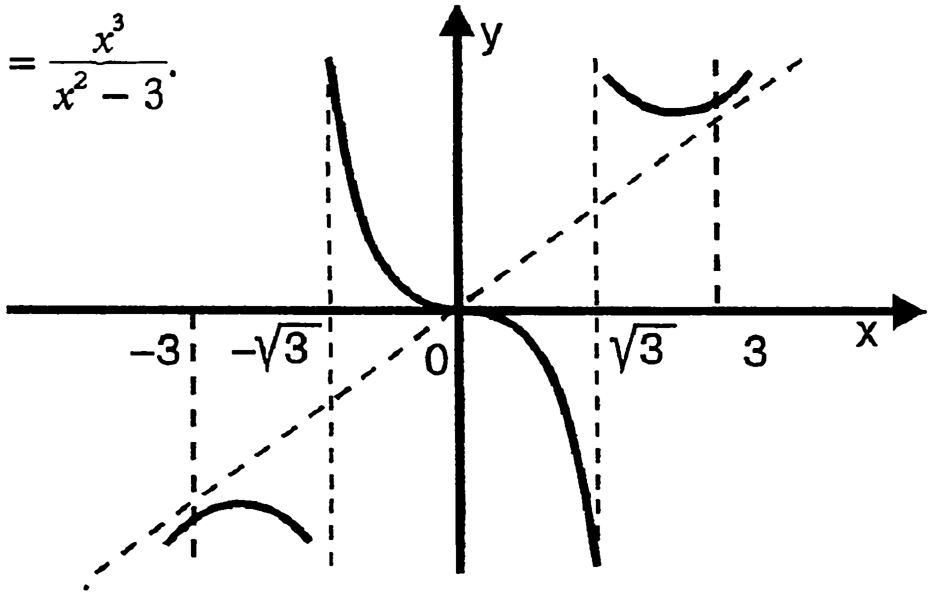


Рис. 27.25

26. $x^3 - 3x$.

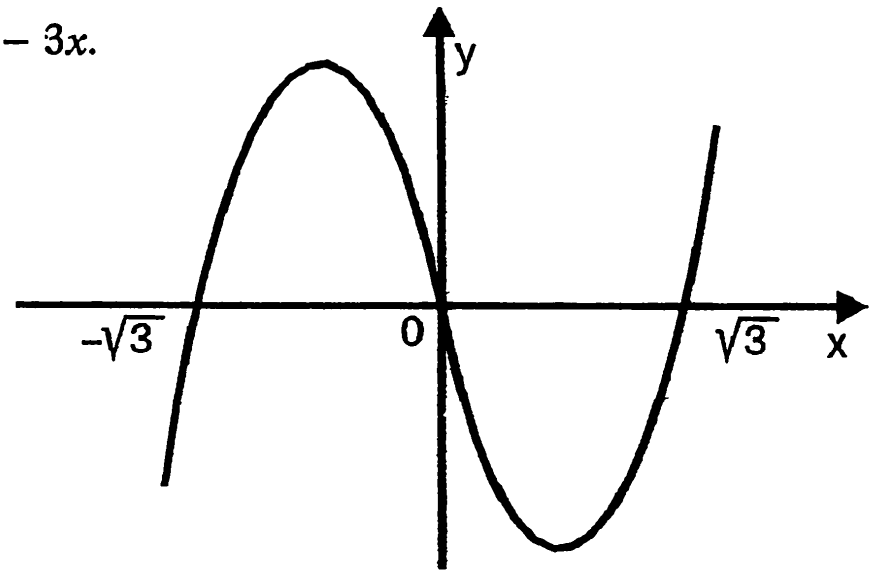
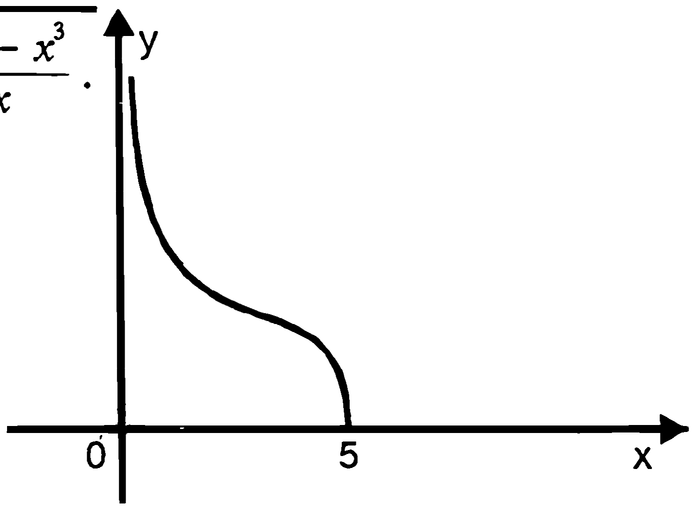


Рис. 27.26

27. $y = \sqrt{\dfrac{125 - x^3}{3x}}$.



Рис, 27.27

28. $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$.

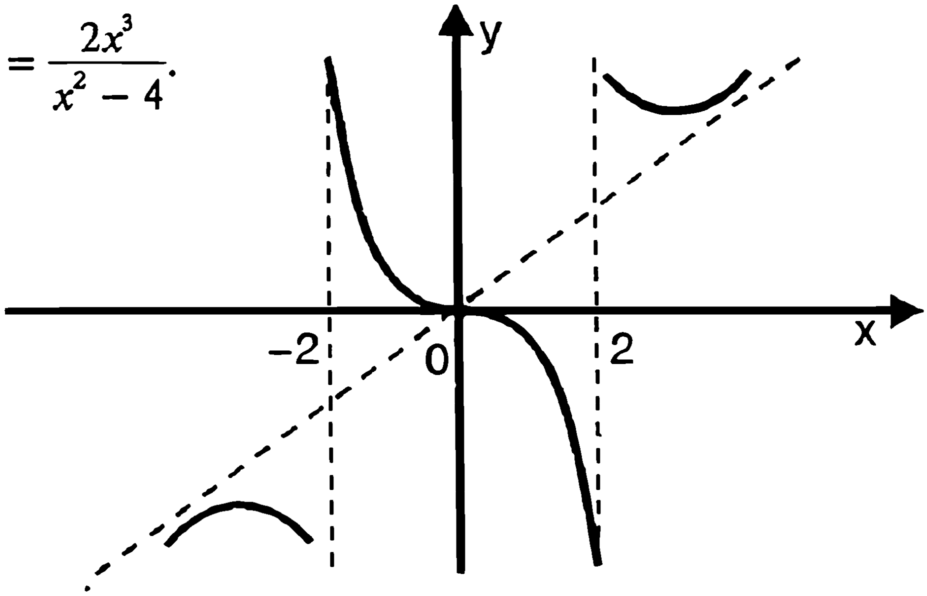


Рис. 27.28

29. $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$.

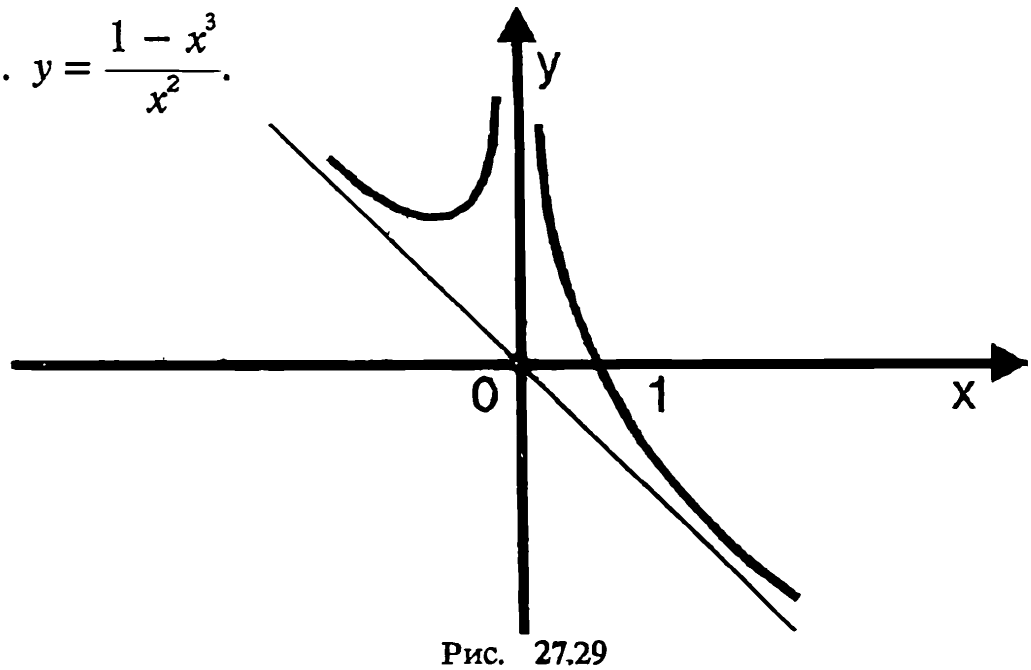


Рис. 27.29

30. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x.$

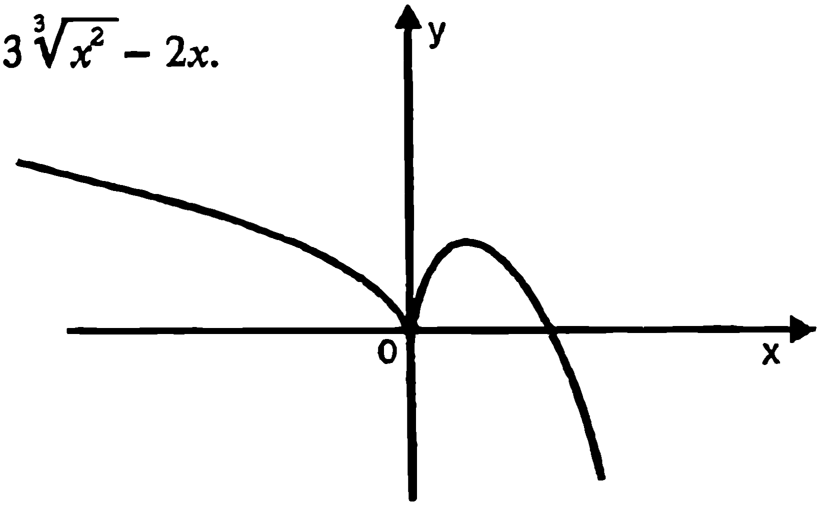


Рис. 27.30

31. $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}.$

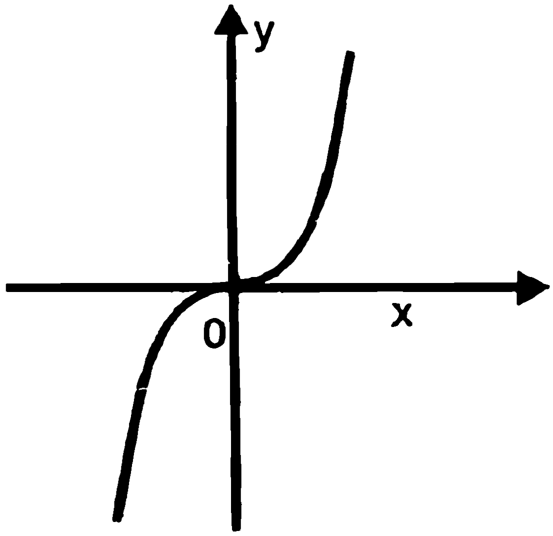


Рис. 27.31

32. $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}.$

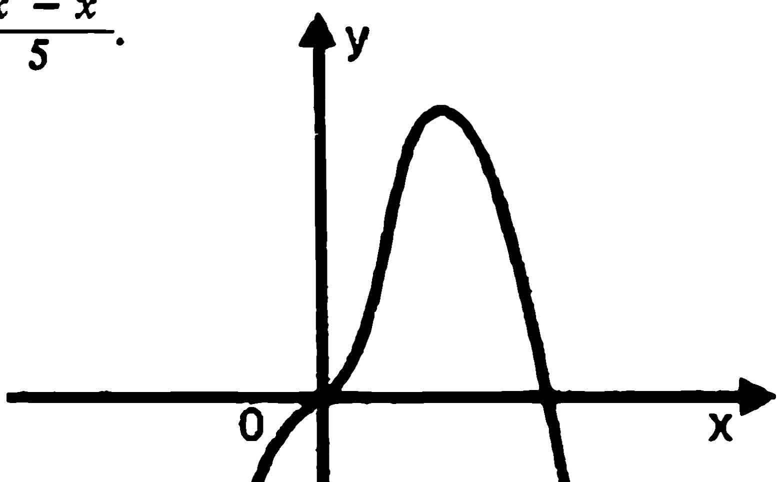


Рис. 27.32

33. $y = x^4 - 2x^2 + 3.$

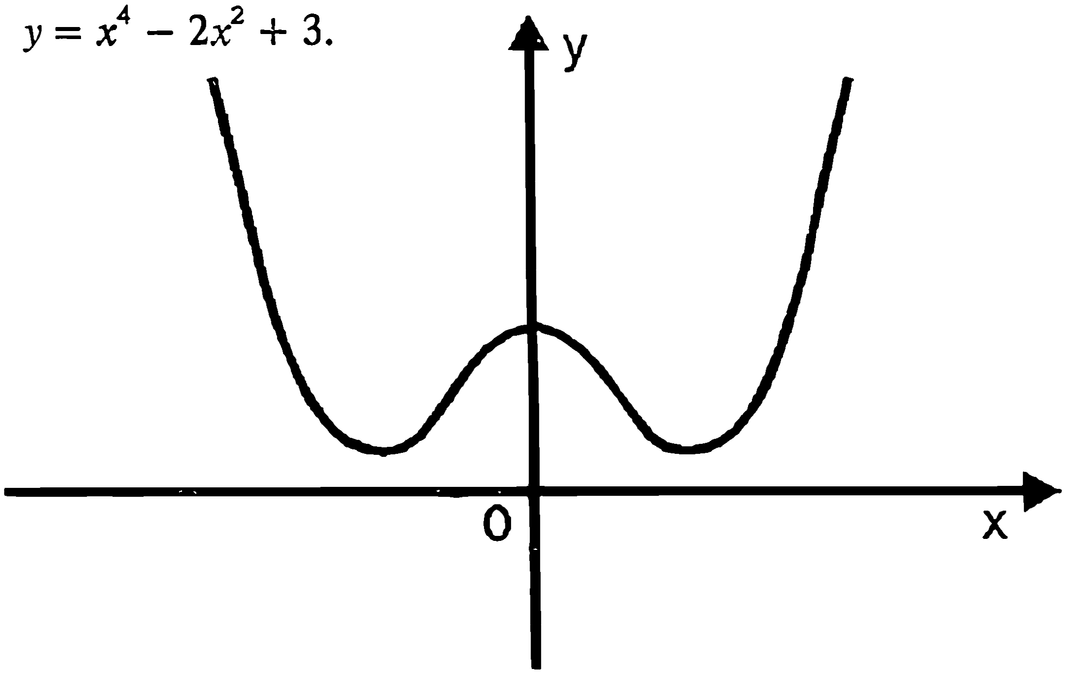


Рис. 27.33

34. $y = 4x^2 - x^4 - 3.$

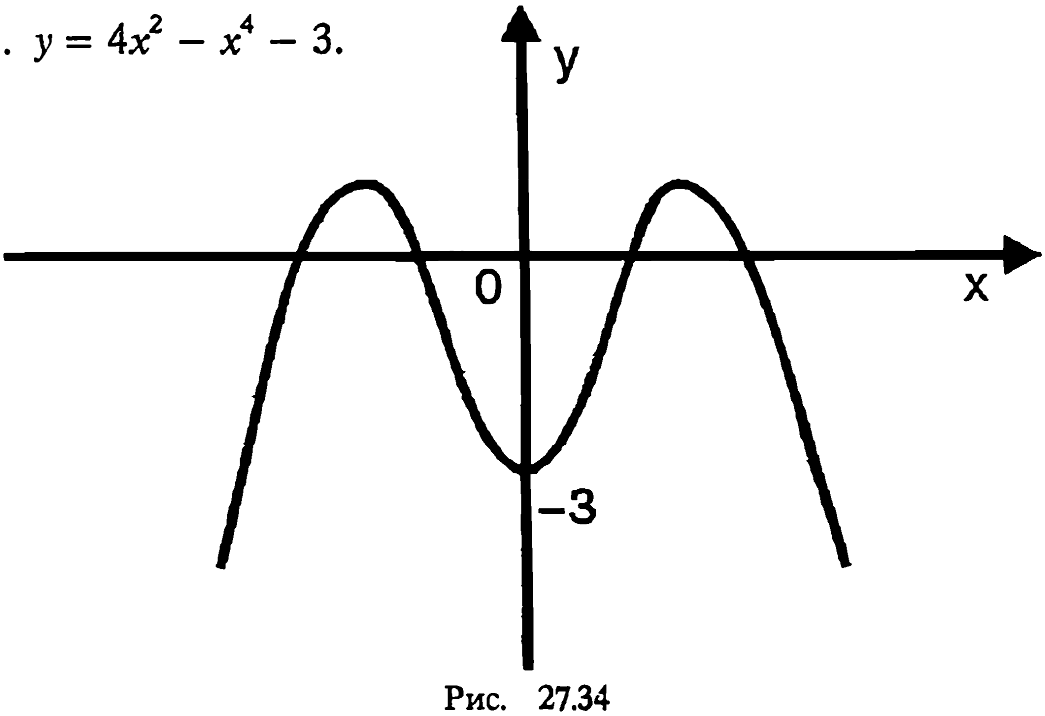


Рис. 27.34

35. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

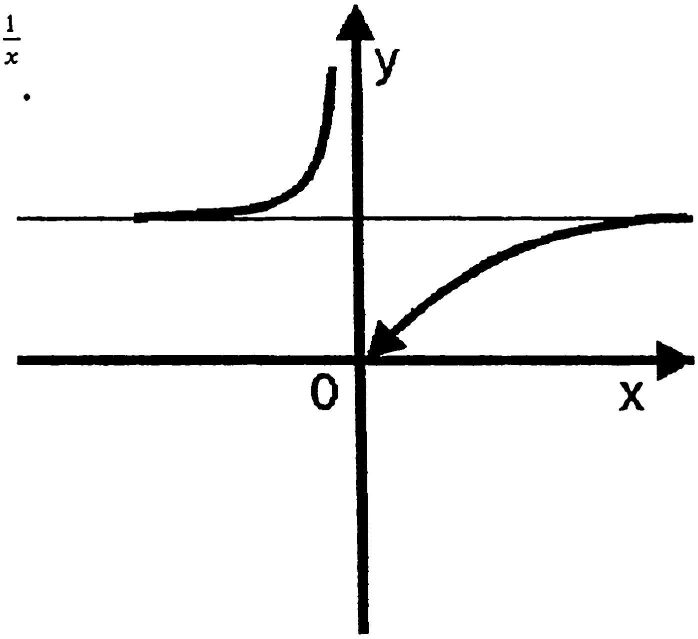


Рис. 27.35

36. $y = x^x$.

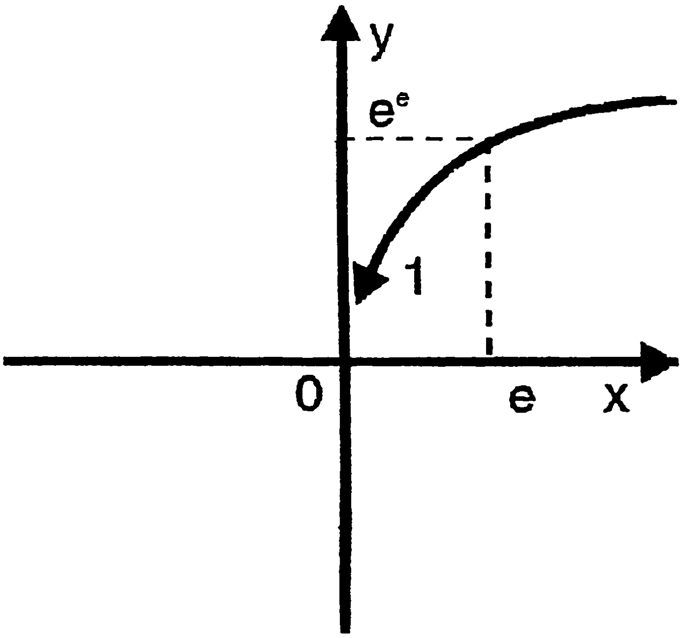


Рис. 27.36

37. $y = 2^{x^2 - 1}$.

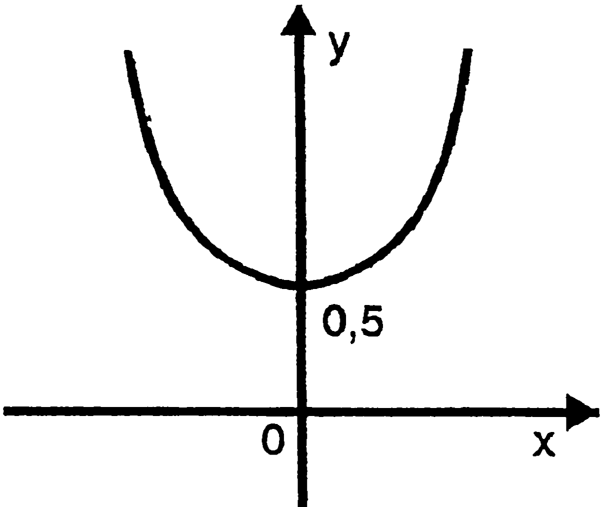


Рис. 27.37

38. $y = |x| + \sin|x|$.

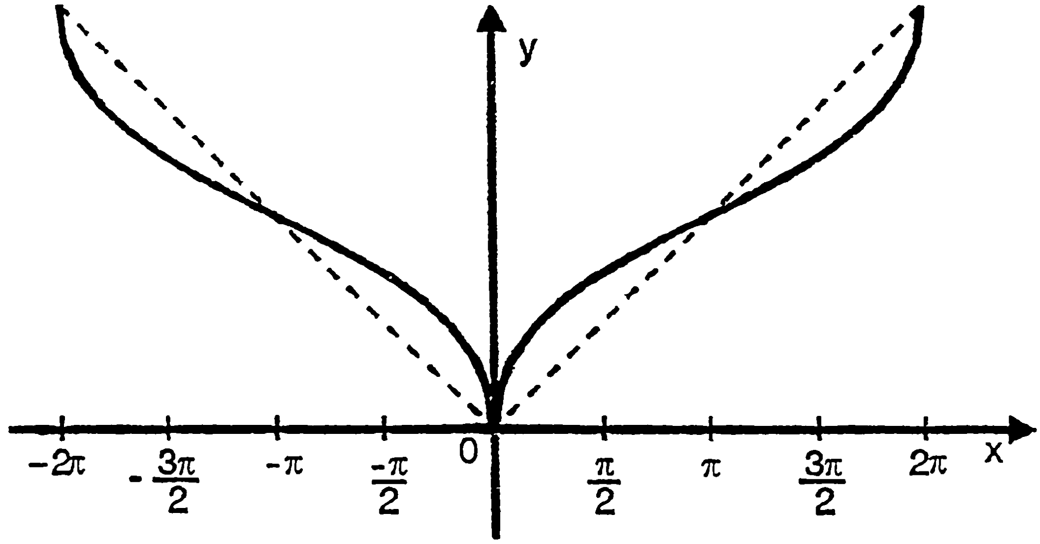


Рис. 27.38

39. $y = \cos x \cdot |\operatorname{tg} x|$.

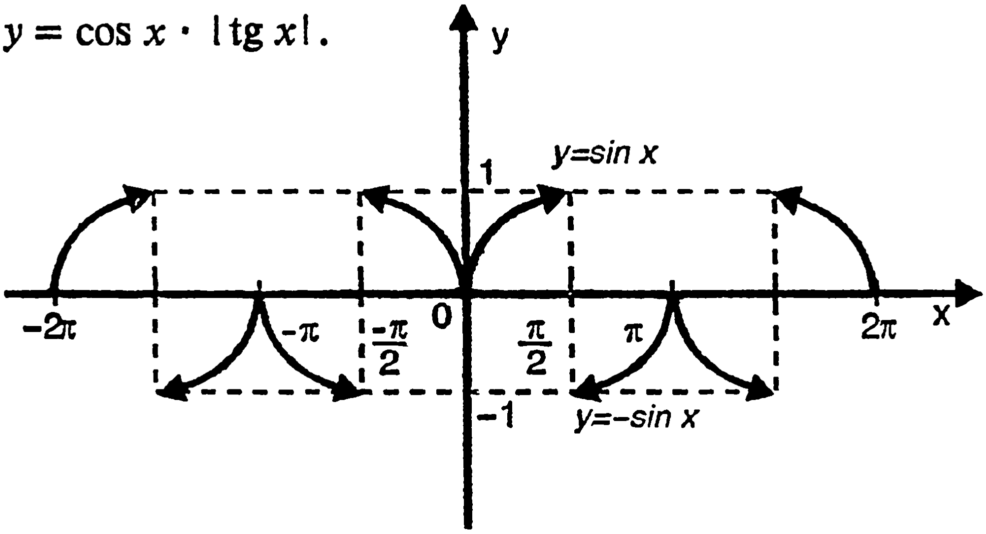


Рис. 27.39

40. $y = 1 - 2^{1+\sin(x+1)}$.

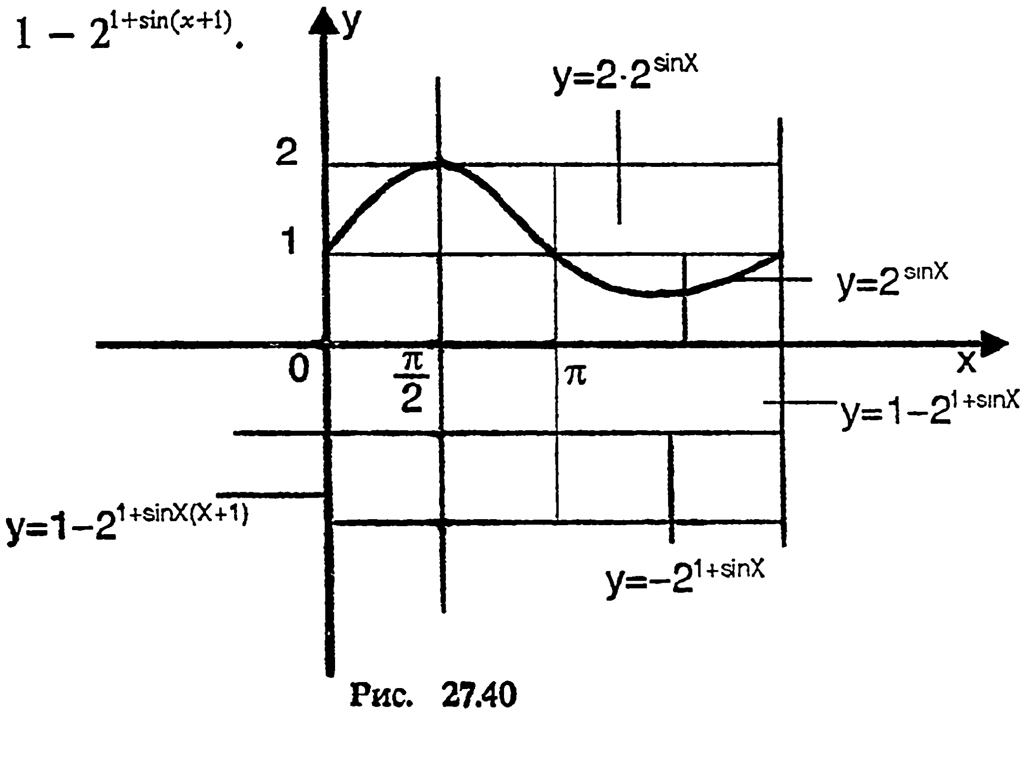


Рис. 27.40

41. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

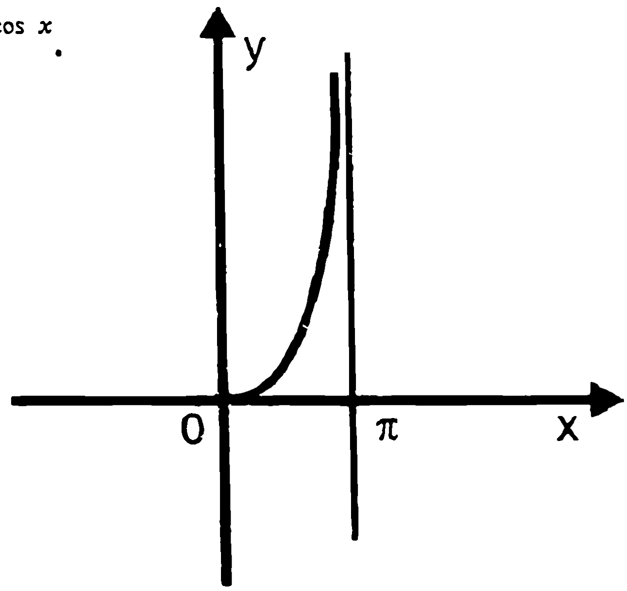


Рис. 27.41

42. $y = 4x^2 - x^4 - 3$.

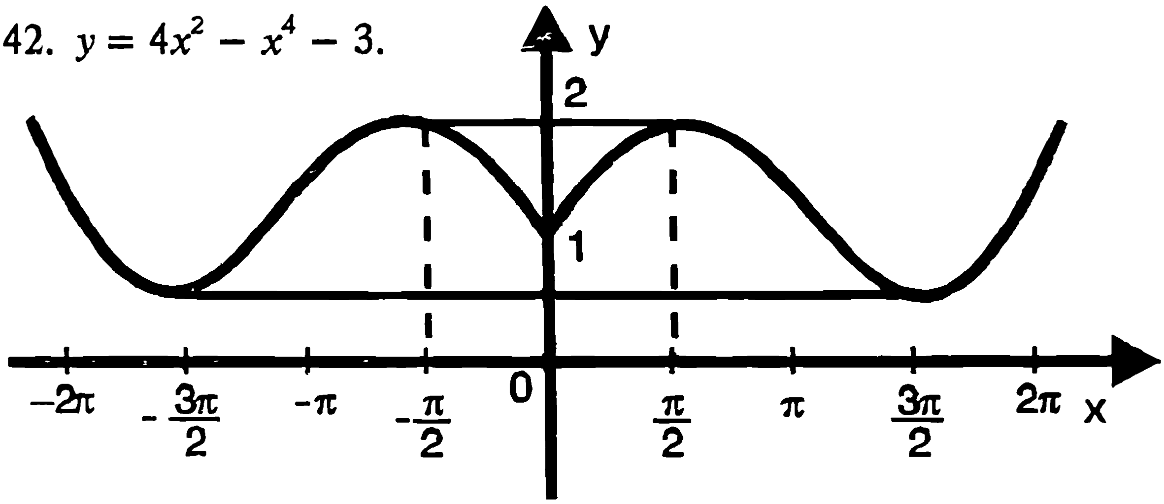


Рис. 27.42

43. $y = 2^{\sec x}$.

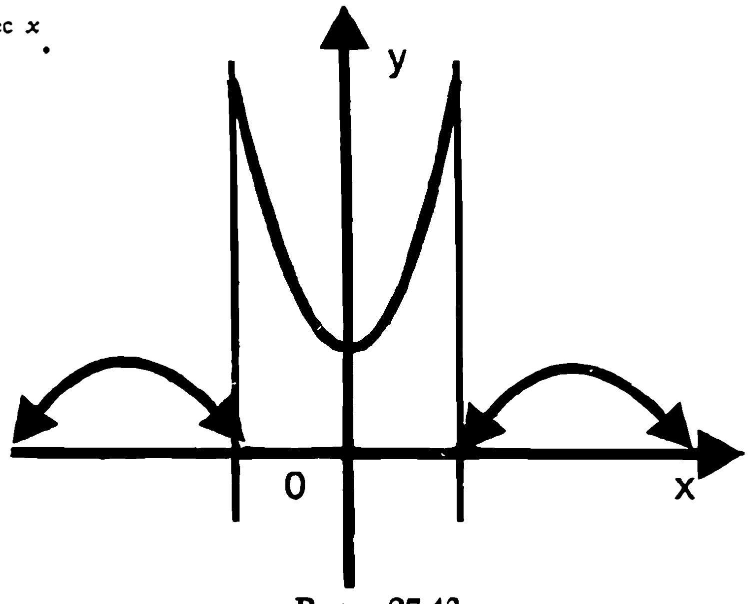


Рис. 27.43

44. $\max\{\sin x, |y|\} \leqslant \frac{1}{2}$.

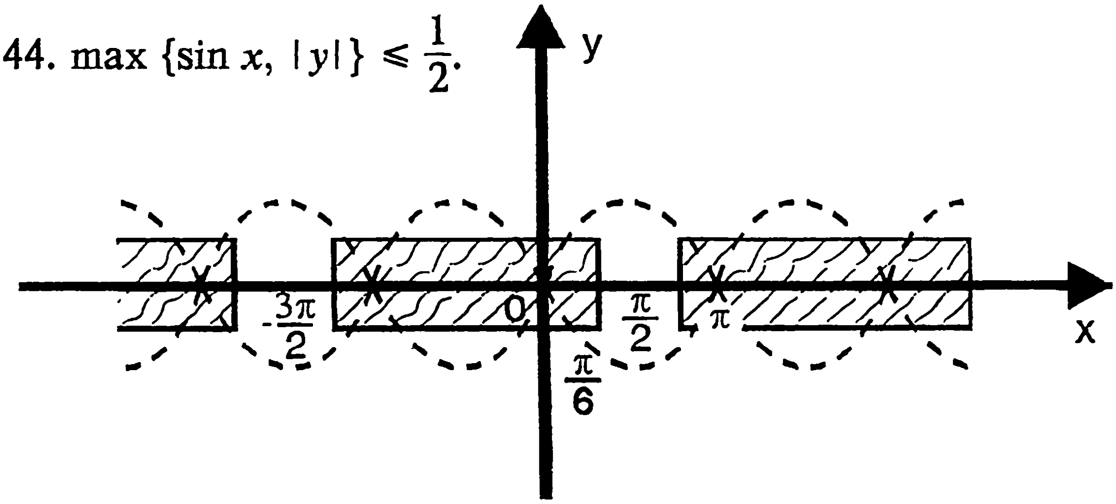


Рис. 27.44

45. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

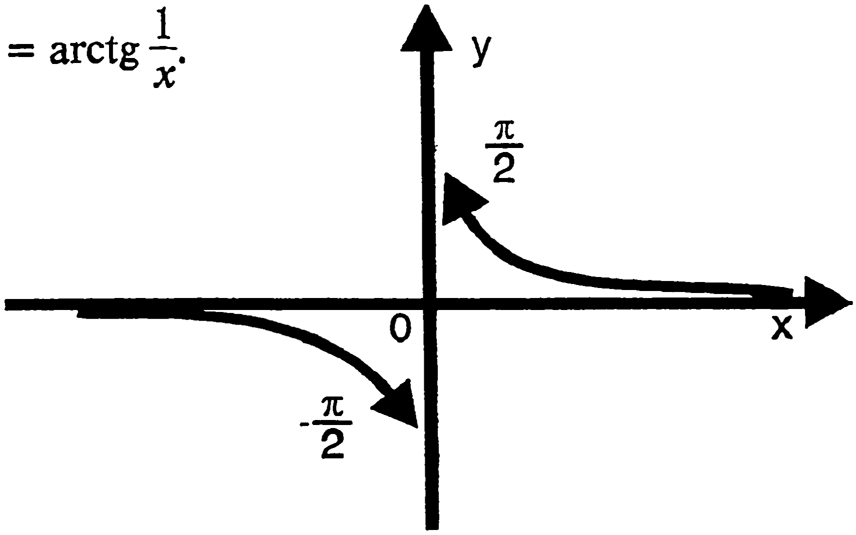


Рис. 27.45

46. $y = \frac{1}{\arcsin x}$.

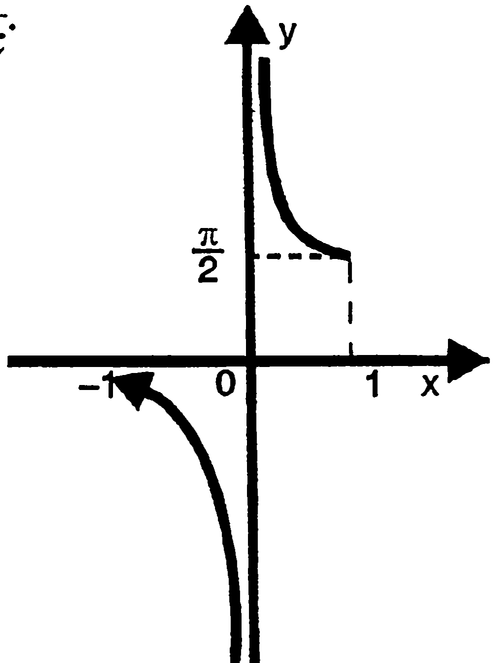


Рис. 27.46

47. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sin x}$.

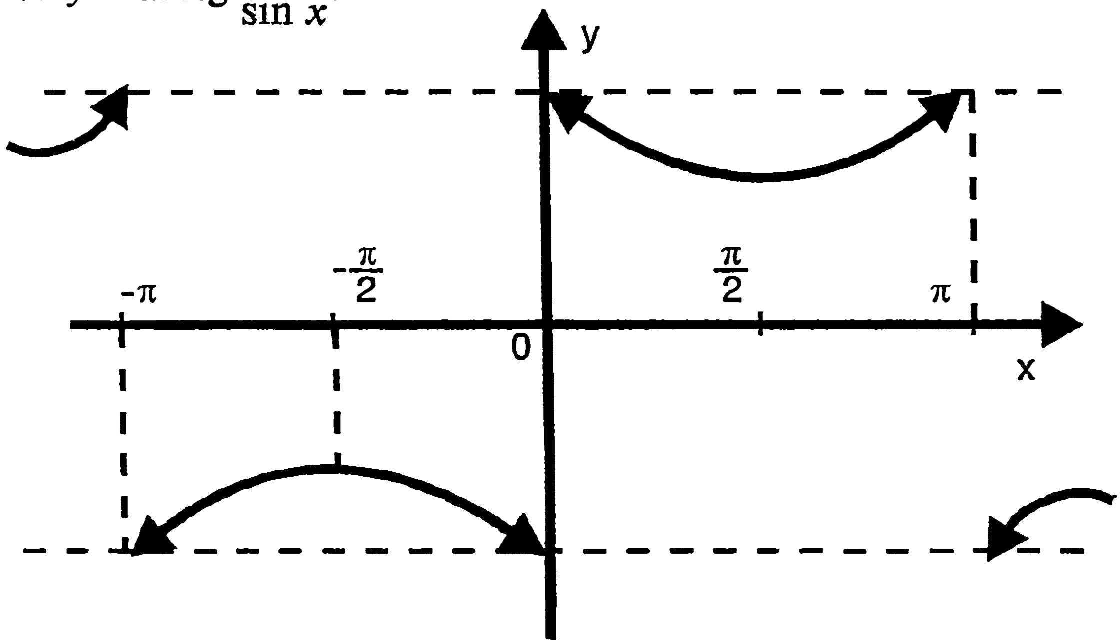


Рис. 27.47

48. $y = \arccos (x^2 - 3x + 1)$.

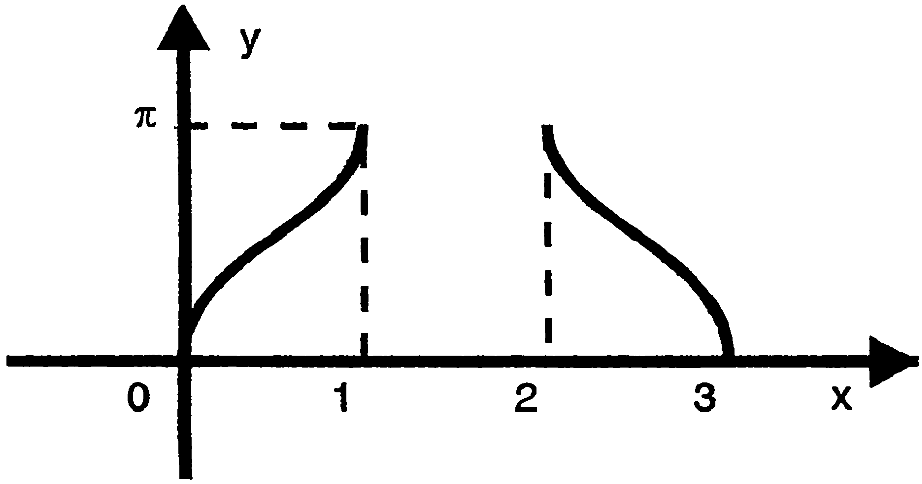


Рис. 27.48

49. $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

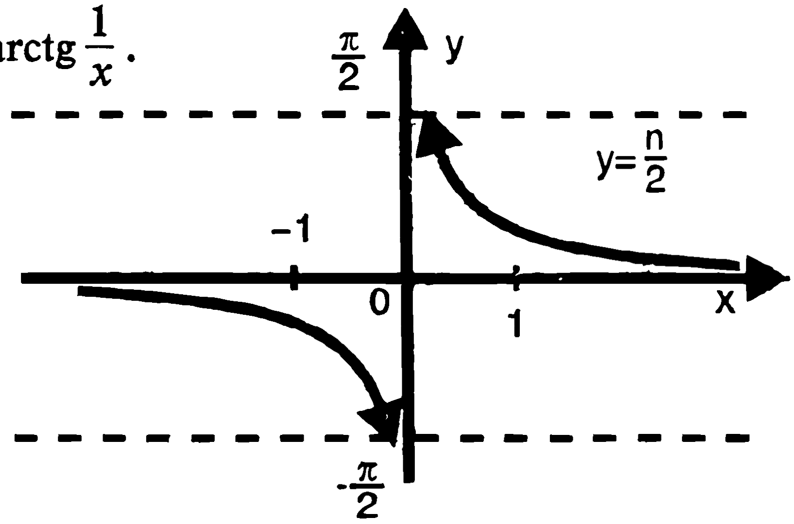


Рис. 27.49

50. $y = \arcsin\frac{1}{x}$.

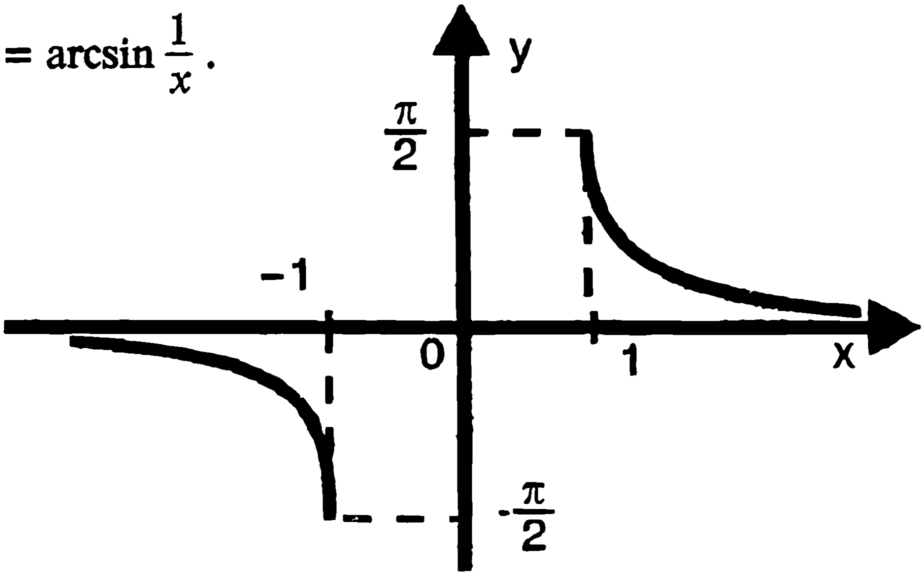


Рис. 27.50

51. $y = \arccos x^2$.

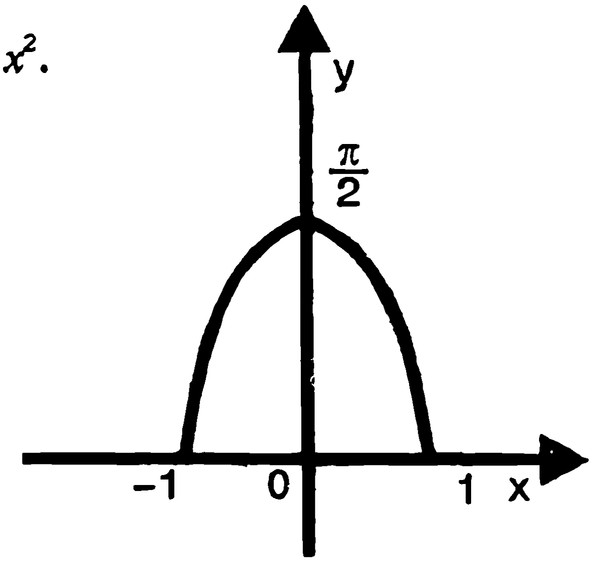


Рис. 27.51

52. $y = -\arcsin|x-1|$.

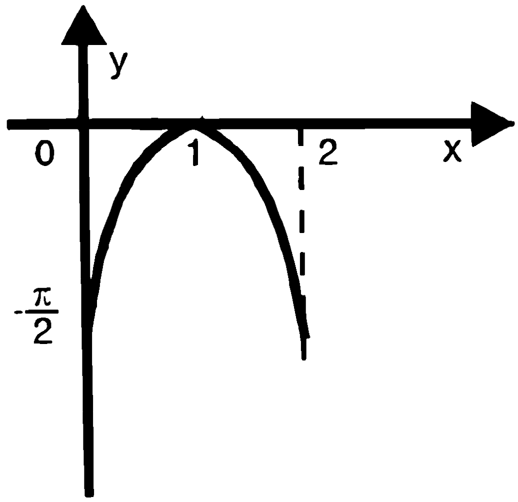


Рис. 27.52

53. $x = x + \arcsin(\sin x)$.

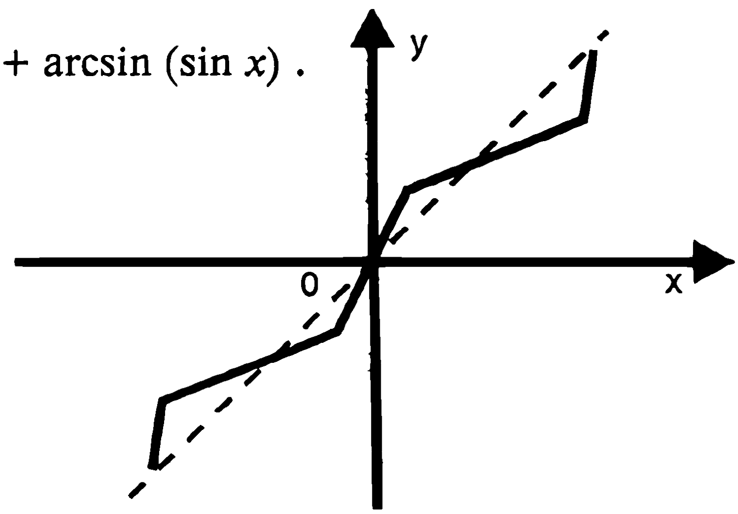


Рис. 27.53

54. $y = x(\arcsin(\sin x))$.

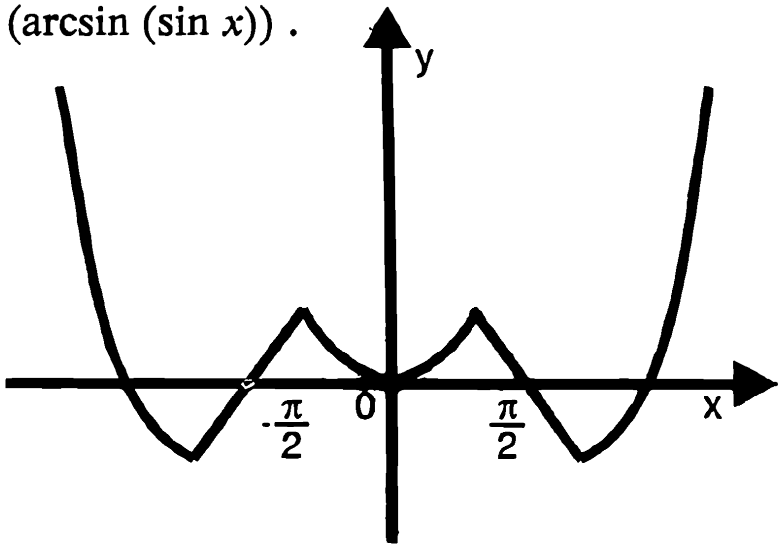


Рис 27.54

55. $y = 1 + \arccos\left|\frac{x}{2}\right|$.

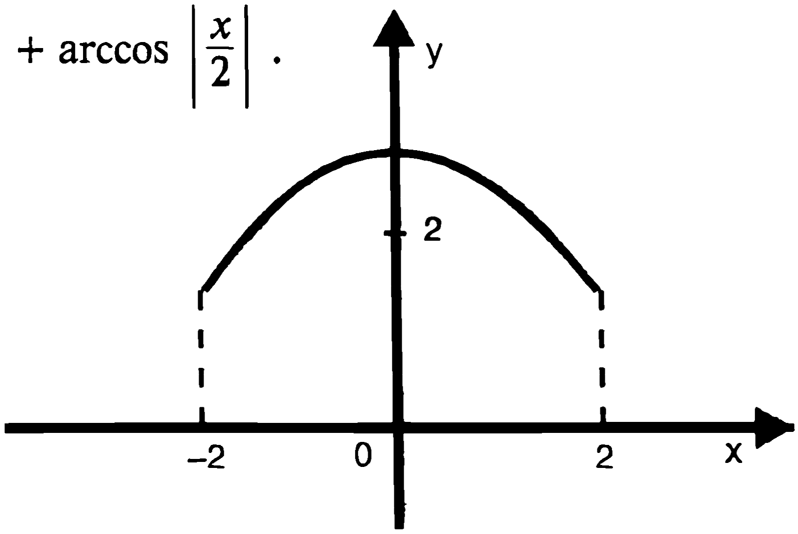


Рис. 27.55

56. $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

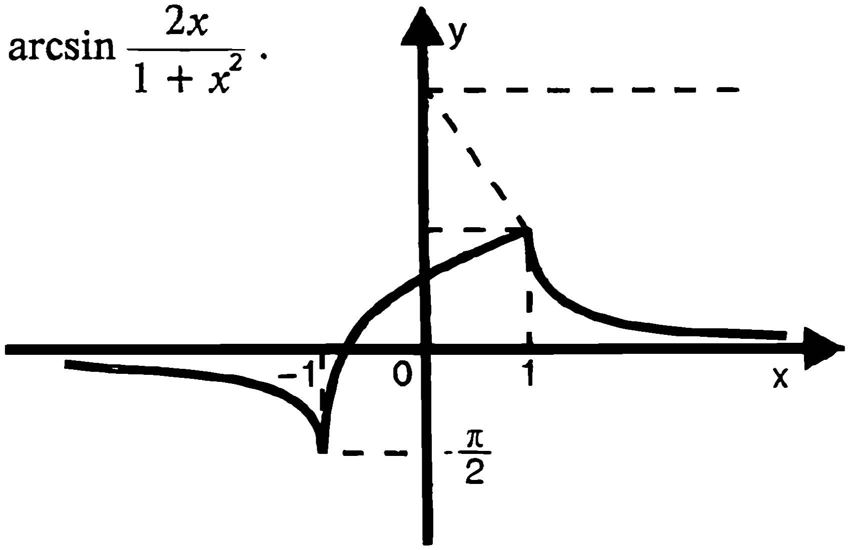


Рис. 27.56

57. $y = \arccos(\arcsin x)$.

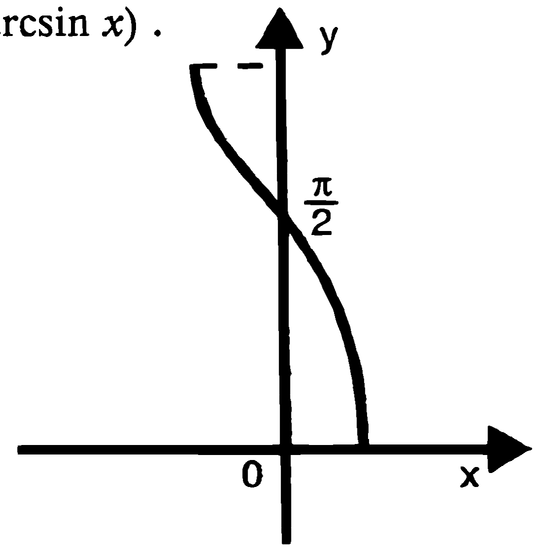


Рис. 27.57

58. $y = 1 + \arcsin 2^x$.

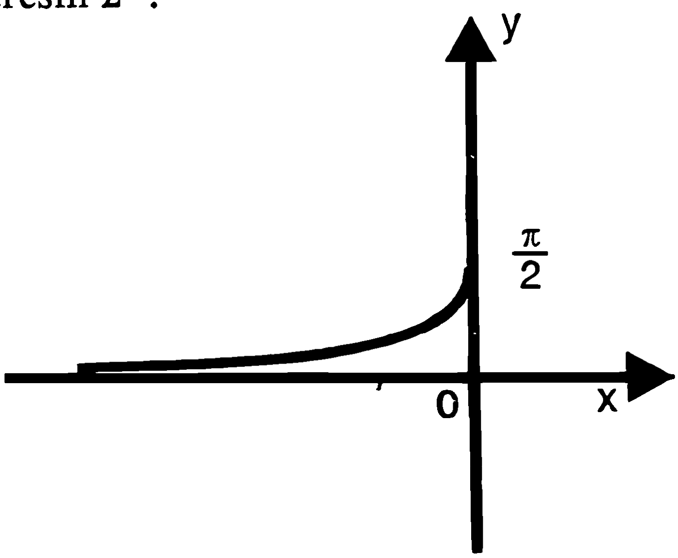


Рис. 27.58

59. $y = \arcsin(\log_{1/2} x)$.

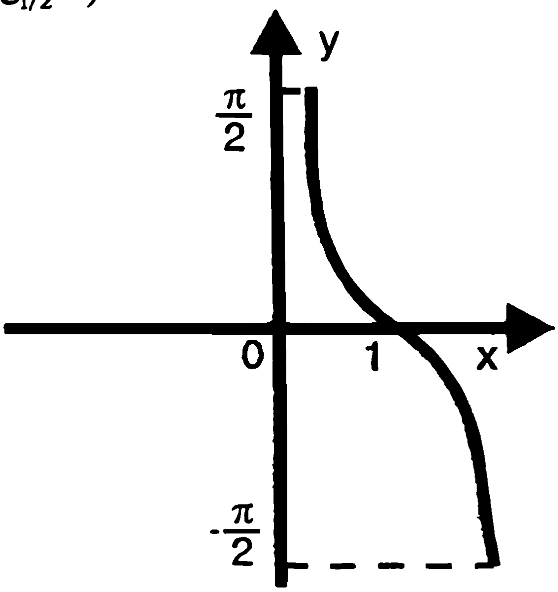


Рис. 27.59

60. $y = \log_2 |\cos x|$.

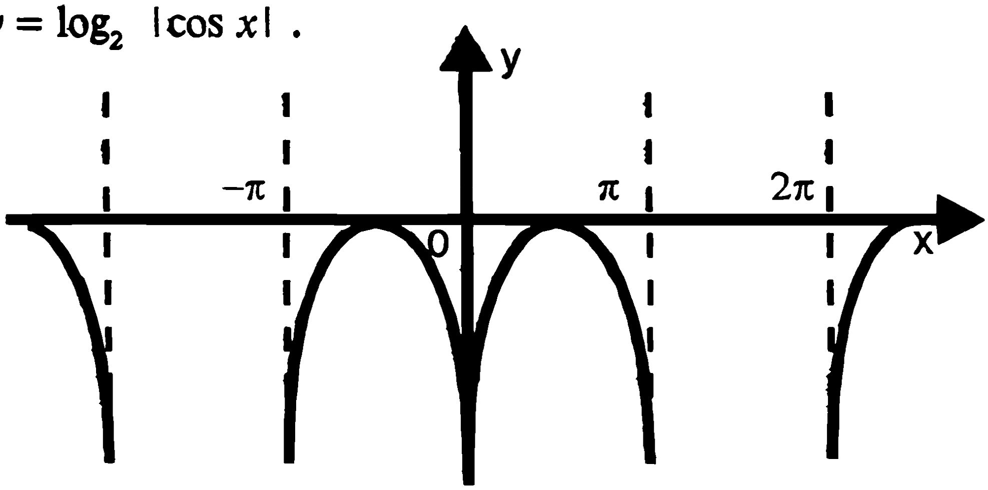


Рис. 27.60

61. $y = \log_2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

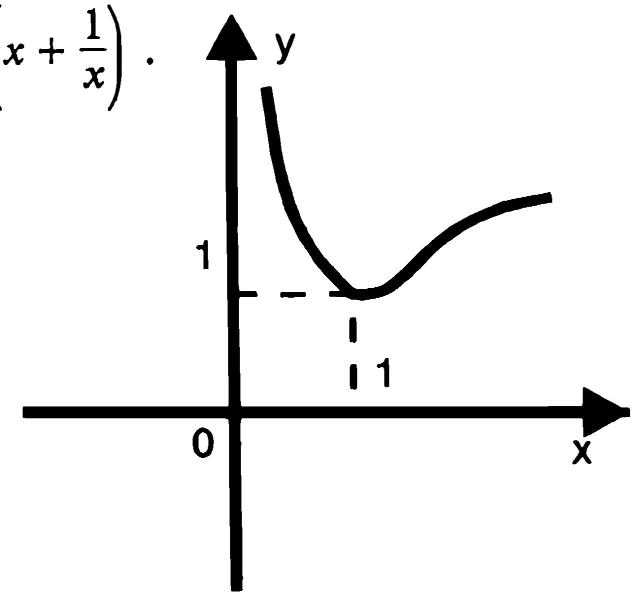


Рис. 27.61

62. $y = \dfrac{1}{\log_{1/2}|x|}$.

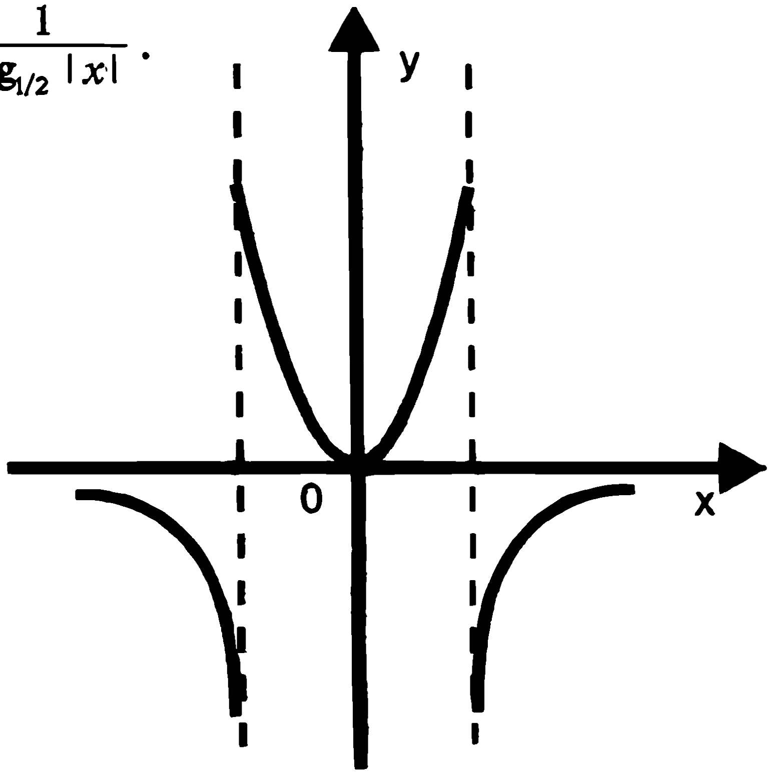


Рис. 27.62

63. $y = \log_{1/3}(|9 - x^2|)$.

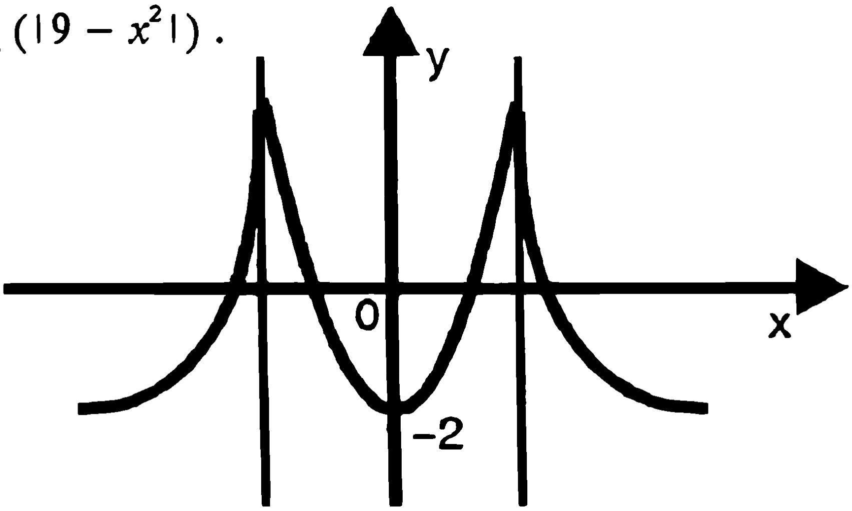


Рис. 27.63

64. $y = \log_{1/3}(\log_{1/3} x)$.

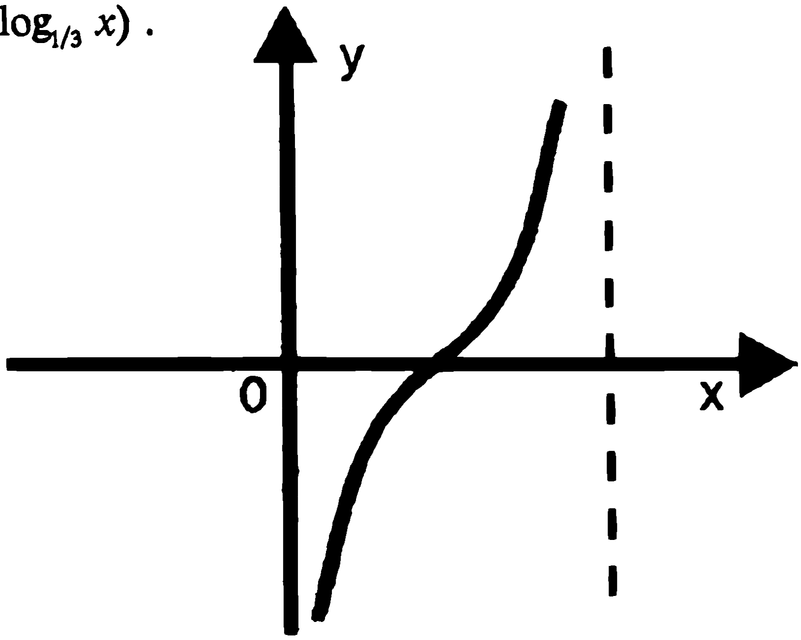


Рис. 27.64

65. $y = \log_2(\log_3 x)$.

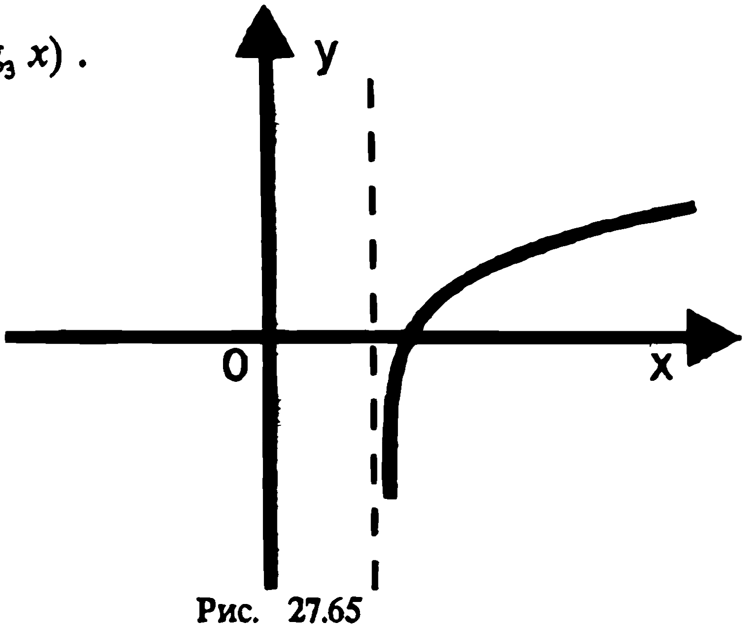


Рис. 27.65

66. $y = \log_2 \dfrac{2 + x}{2x - 3}$.

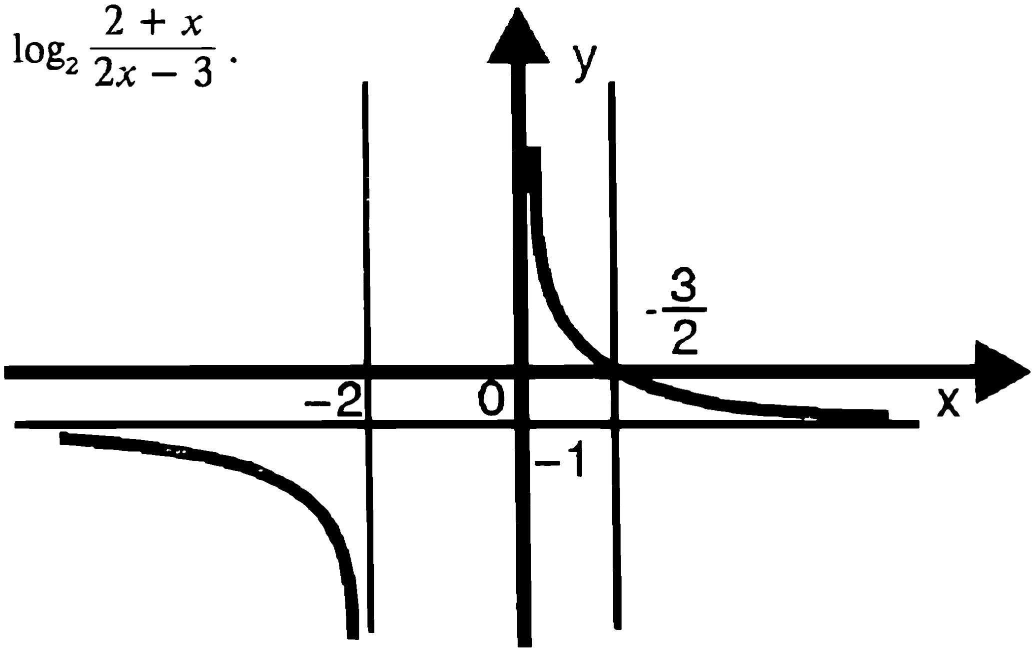


Рис. 27.66

67. $y = \log_2 (4 - x^2)$.

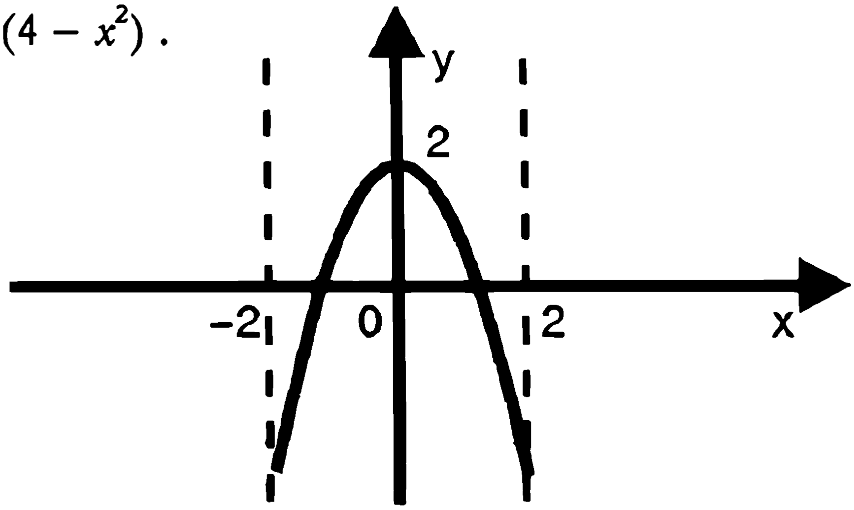


Рис. 27.67

68. $y = \log_3 (3^x + 1)$.

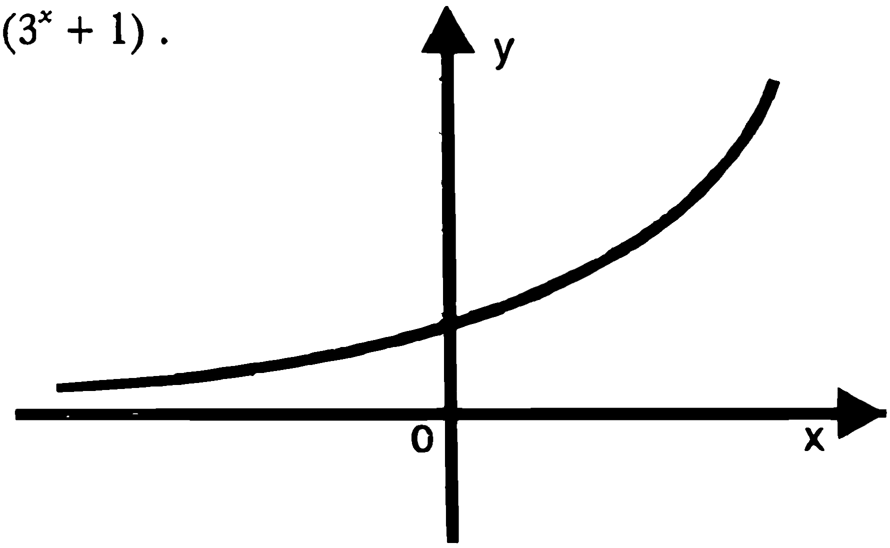


Рис. 27.68

69. $y = \log_{1/3}(x^{5/4} - 1)$.

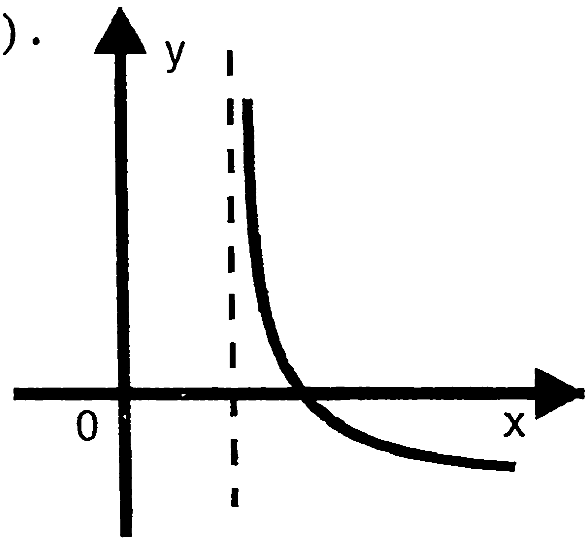


Рис. 27.69

70. $y = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$.

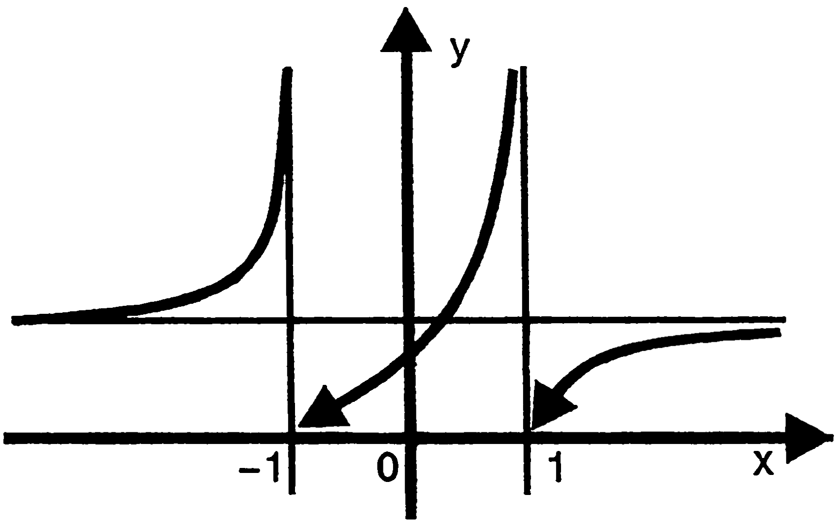


Рис. 27.70

71. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$.

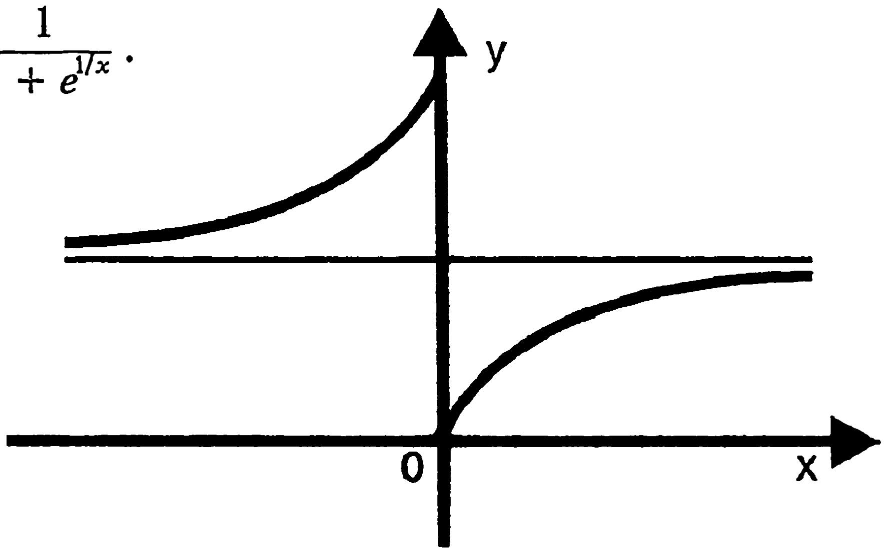


Рис. 27.71

72. $y = x^2 \cdot e^{1/x}$.

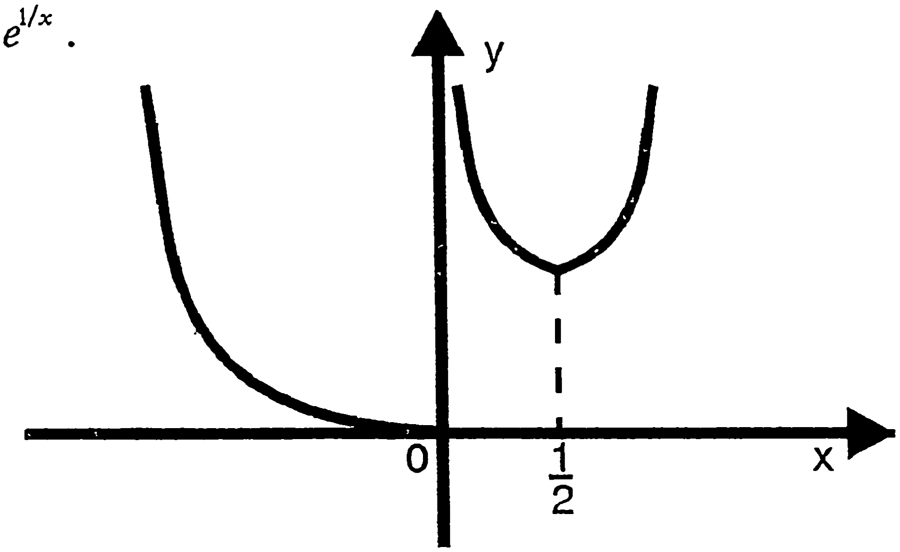


Рис. 27.72

73. $y = \dfrac{e^x}{16 - x^2}$.

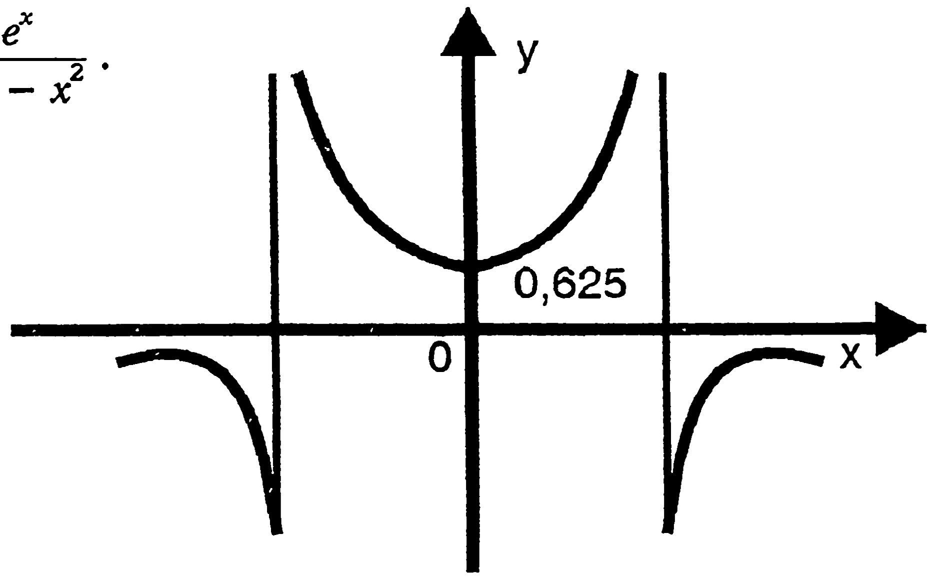


Рис. 27.73

74. $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

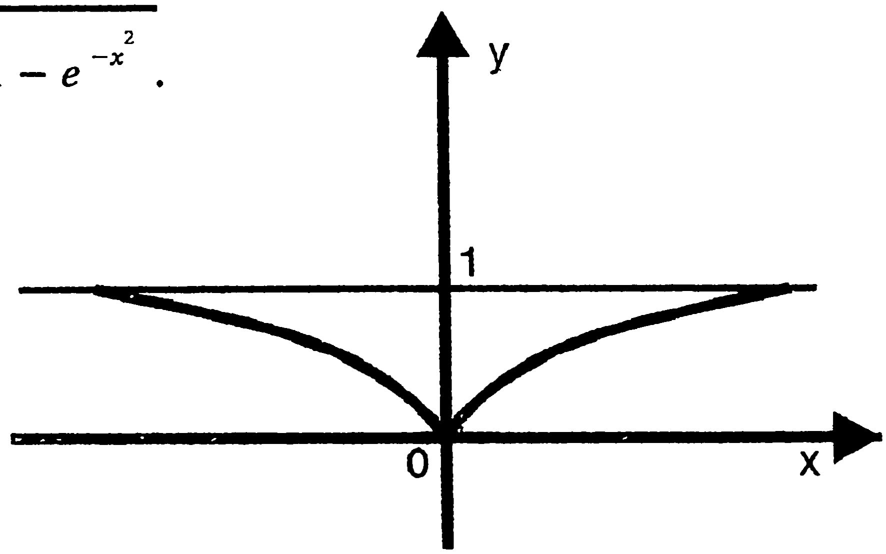


Рис. 27.74

75. $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

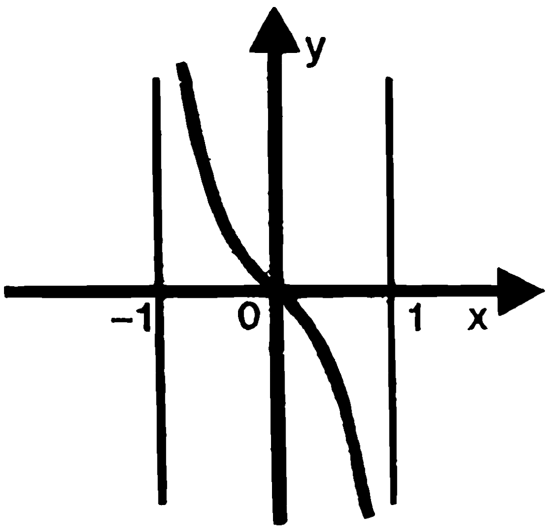


Рис. 27.75

76. $y = \lg|1 - x^2|$.

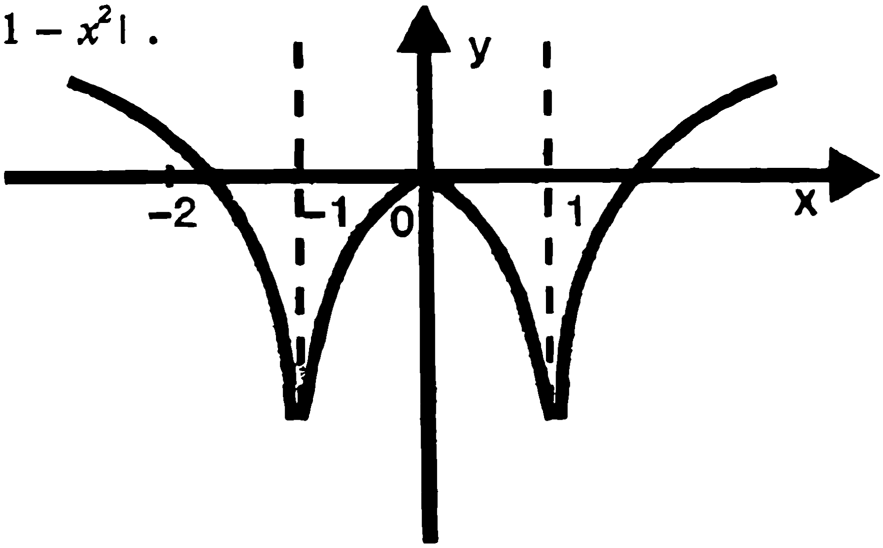


Рис. 27.76

77. $y = -\{x\}$.

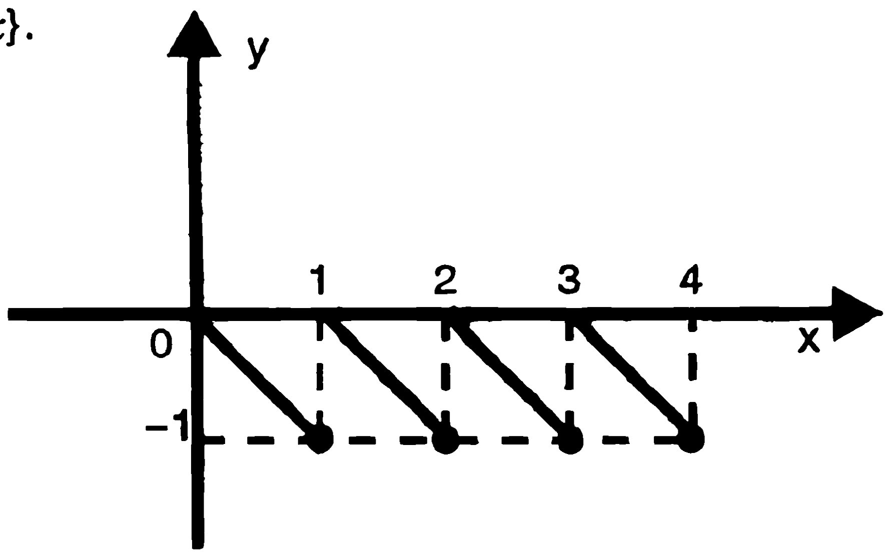


Рис. 27.77

78. $y = \dfrac{1}{\{x\}}$.

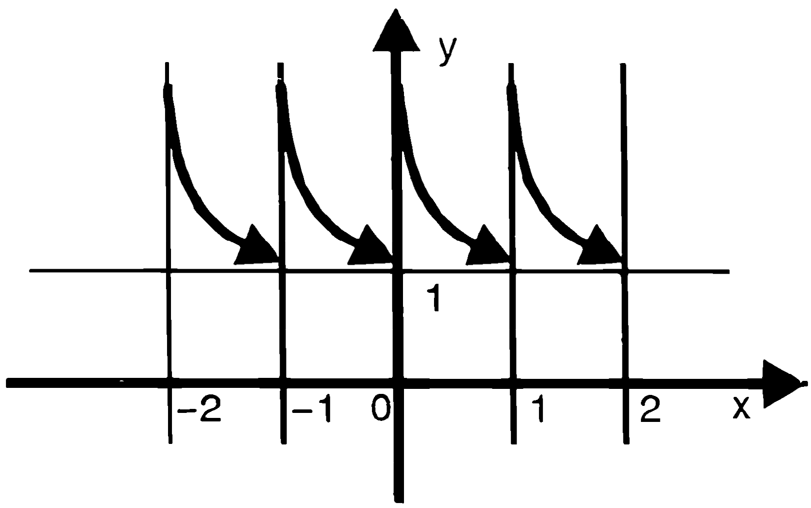


Рис. 27.78

79. $y = \sqrt[3]{\{x\}}$.

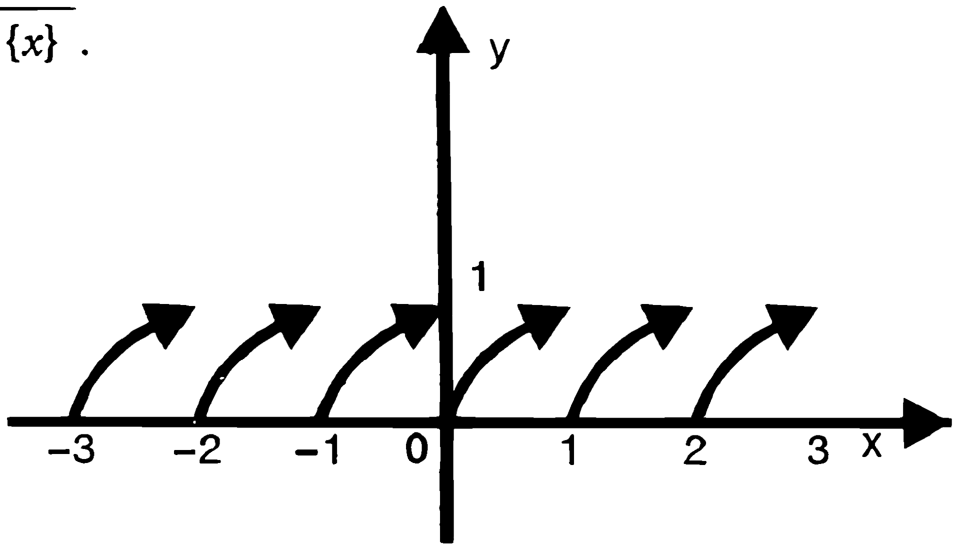


Рис. 27.79

80. $y = [\sqrt{3 - 4x}\ ]$.

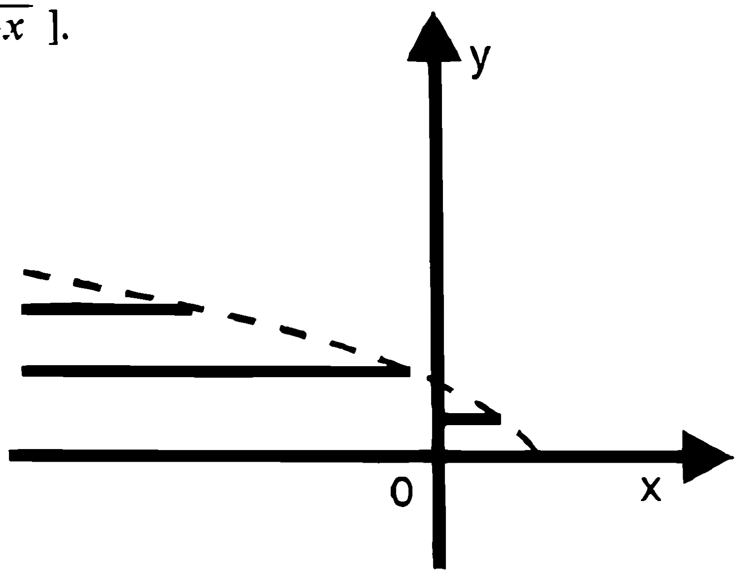


Рис. 27.80

ОГЛАВЛЕНИЕ

И. Кушнир

ШЕДЕВРЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ В ДВУХ КНИГАХ.

Книга I

Художник Гутман М.Б.
Редактор Божко С.М.
Технический редактор Вербовиков А.М.
Корректор Обуховский Л.Я.

Сдано на производство 20.07.95 г. Формат 84×108 1/32. Бумага типографская №2. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. листов 30,24. Уч.-изд. листов 51,28. Заказ № 5–1029.

ООО «Астарта». 252133, г. Киев, бульвар Л.Украинки, 20/22.
Головное предприятие РПО «Полиграфкнига».
252057, г. Киев, ул. Довженко, 3.

И. Кушнир

Шедевры школьной МАТЕМАТИКИ

Автор книги – Заслуженный учитель Украины, доцент Киевского межрегионального института усовершенствования квалификации учителей им. Б Гринченко, лауреат конкурса "Соросовский учитель", учитель-методист гимназии педагогического университета им. М. Драгоманова. Автор более пятидесяти научно-методических статей. Его книги: "Трикутник і тетраедр у задачах", "Побудова трикутника", "Методи розв'язання задач з геометрії", "Векторные методы решения задач" пользуются заслуженным успехом у учащихся и учителей.

Двухтомником "Шедевры школьной математики" издательство "АСТАРТА" открывает серию учебной и научно-популярной литературы.