Популярная библиотека по математике
под общей редакцией Л. А. Люстерника

А. М. ВОРОНЕЦ

ГЕОМЕТРИЯ ЦИРКУЛЯ

Напечатано по изданию:

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книжка предназначается для учащихся старших классов средней школы, заинтересовавшихся геометрическими построениями, которые снова стали появляться, хотя очень медленно и в весьма ограниченном объеме, в школьном курсе элементарной геометрии. Решение задач на построение развивает геометрическое мышление гораздо полнее и острее, чем решение задач на вычисление, и способно вызвать увлечение работой, которое приводит к усилению любознательности и к желанию расширить и углубить изучение геометрии.

Усвоив основные задачи на построение и использование циркуля и линейки для выполнения чертежа, узнав, что некоторые задачи не могут быть решены с помощью циркуля и линейки, учащийся естественно заинтересуется вопросом, почему одну задачу можно решить с помощью линейки и циркуля, а другую — нельзя. Зная, что деление окружности на шесть одинаковых частей не требует применения линейки, учащийся может задуматься, нельзя ли решать некоторые задачи с помощью только циркуля, какие именно и как. На эти вопросы и отвечает предлагаемая книжка, главное содержание которой есть геометрия циркуля.

В общем, книжка должна подготовить читателя к самостоятельному штудированию превосходных книг Адлера и Александрова.

Геометрия циркуля изложена здесь в методической разработке, позволяющей постепенно переходить от простейших построений к более сложным. Метод инверсий не излагается здесь, потому что и без него сведения о циркульных построениях даны довольно полно, и, кроме того, по мнению автора, начинающему никогда не следует сообщать одновременно двух способов.

А. Воронец

Май 1934 г.

ГЛАВА I

КАКИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ МОГУТ БЫТЬ РЕШЕНЫ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙКИ И ЦИРКУЛЯ?

Сделать хороший геометрический чертеж от руки очень трудно. Если и можно напрактиковаться в проведении отдельных прямых линий и окружностей, то начертить комбинацию нескольких пересекающихся окружностей и прямых линий просто невозможно. Необходимы инструменты, с помощью которых можно достигнуть высокого качества чертежей.

Следует различать точность выполнения чертежа и точность геометрического построения. Абсолютной точности выполнения никогда не может быть, так как на чертеже мы имеем не геометрические линии, а их изображения в виде полосок, хотя бы тончайших, и так как самые лучшие инструменты и наши органы чувств несовершенны. Чертеж считается точным лишь условно. Если самое зоркое зрение не замечает невязок в сопряжении начерченных прямых и кривых линий, мы признаем чертеж практически точным. Но дурно исполненный чертеж может быть идеально точным геометрически, если сделанное построение обосновывается геометрическими теоремами. Например, мы говорим: «Проведем две взаимно перпендикулярные прямые линии и из точки их пересечения опишем окружность произвольного радиуса; соединив соседние точки пересечения окружности и прямых, мы получим квадрат». Мы утверждаем, что описанное построение даст нам действительно квадрат, так как получается четырехугольник с прямыми углами (они вписанные и опираются на диаметр) и с одинаковыми сторонами (гипотенузы конгруэнтных треугольников). Выполним описанное построение без инструментов, от руки. Получим неважный по внешности чертеж, но исполненный в соответствии с геометрическими теоремами и потому геометрически точный.

Инструменты, употребляемые для выполнения геометрических построений, весьма разнообразны. К основным принадлежат линейка и циркуль, служащие для проведения прямых линий, одиночных, параллельных и перпендикулярных, и окружностей. Угольник есть вспомогательный инструмент, так как, имея линейку и циркуль, можно строить параллельные и перпендикулярные прямые. К вспомогательным инструментам относится также миллиметровая шкала, которую можно построить с помощью циркуля и линейки, отложив на прямой линии циркулем одинаковые сантиметровые отрезки и разделив каждый из этих отрезков на 10 равных между собою частей. Транспортир есть уже самостоятельный инструмент, так как точное в геометрическом смысле градуирование любой дуги на произвольное число равных частей с помощью линейки и циркуля невозможно (почему — об этом будет сказано дальше).

Не упоминая пока о других многочисленных чертежных инструментах, скажем, что с глубокой древности повелось допускать к исполнению геометрических построений только циркуль и линейку, т. е. приборы, позволяющие проводить прямые линии и окружности. Знакомую нам логическую элементарную геометрию, в которой каждая теорема обосновывается рассуждением, создали древние греки. В III в. до начала нашей эры появился замечательный труд греческого математика Евклида, изложившего в стройной системе определения геометрических форм, теоремы и доказательства. Геометрические построения делались в строгом соответствии с доказанными теоремами и выполнялись с помощью только линейки и циркуля. Такие построения называются классическими.

Оказалось, что подавляющее большинство геометрических задач на построение может быть решено элементарным путем, т. е. на основании теорем элементарной геометрии, а выполнение построения может быть достигнуто с помощью циркуля и линейки. Но уже древние греки столкнулись, правда с немногими, такими задачами, решение которых не может быть выполнено с помощью циркуля и линейки. К числу таких задач принадлежат следующие три знаменитые задачи: 1) разделить произвольный угол на три равные части; 2) построить квадрат, равновеликий данному кругу и 3) построить ребро куба, объем, которого в два раза больше данного куба. Не понимая причины невозможности решения таких задач (невозможности вследствие ограничительного требования выполнить построение с помощью только линейки и циркуля), древние греки и математики последующих веков тщетно стремились к победе над этими неподатливыми задачами. И в настоящее время встречаются любители-математики, которые вследствие недостаточного знания теории напрасно тратят время на изобретение способа разделить с помощью линейки и циркуля любой угол на три равные части и потом испытывают глубокое разочарование от неудач.

Исчерпывающая теория геометрических построений создалась сравнительно недавно, в конце прошлого века. Теперь мы знаем, какие задачи могут быть решены с помощью циркуля и линейки и почему, какие — нет и почему, как решить «невозможную» задачу с помощью добавочных инструментов, как решать некоторые задачи, и какие именно, с помощью какого-либо определенного инструмента, например, только циркуля. Кроме того, мы знаем, каким приемом легче всего решить теоретически данную геометрическую задачу.

Пока математики не расчленили приемы или методы решений на характерные, типовые, самое решение шло ощупью, догадкою. Нужно много остроумия, чтобы догадаться, как решить некоторые задачи. Например, как построить треугольник, зная три его высоты? Обозначим эти высоты через h_a, h_b, h_c соответственно сторонам a, b и c. Легче всего решить эту задачу методом подобия, а именно построить сначала треугольник, подобный данному. В самом деле, так как

$$\frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$$

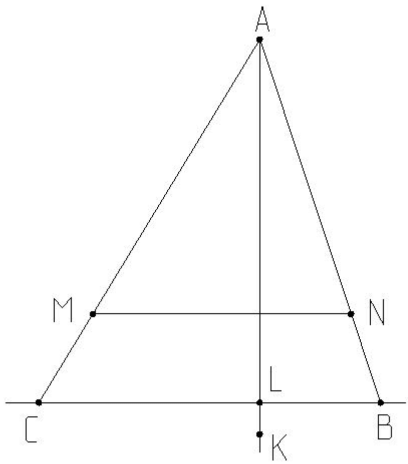
то имеем:

$$a:b:c = h_b:h_a:\frac{h_a h_b}{h_c},$$

следовательно, стороны a, b и c искомого треугольника пропорциональны отрезкам h_b, h_a и $\frac{h_a h_b}{h_c}$ причем последний $x = \frac{h_a h_b}{h_c}$ есть отрезок четвертый, пропорциональный отрезкам h_c, h_a и h_b:

$$h_c{:}h_a = h_b{:}x\,.$$

Поэтому, построив треугольник *MAN* (черт. 1) со сторонами $MN = h_b$, $MA = h_a$ и $AN = \frac{h_a h_b}{h_c}$, мы получим треугольник, подобный искомому. Проведя *AK* перпендикулярно к *NM*, отложив $AL = h_a$ и проведя через *L* прямую, параллельную *MN*, получим искомый треугольник *ABC*. Читателю нетрудно будет убедиться в геометрической правильности сделанного построения и в том, что построение выполняется с помощью циркуля и линейки. Заметим, что алгебраическое решение рассмотренной задачи содержит только уравнения первой степени.



Черт. 1

Среди методов решения геометрических задач на построение есть метод алгебраический. Он заключается в том, что из условий задачи составляется уравнение, связы-вающее величину неизвестного отрезка искомой фигуры с данными величинами. Решив составленное уравнение, мы найдем, что неизвестная величина равна алгебраическому выражению, содержащему величины данных отрезков и постоянные числа. Остается построить полученное выражение.

Например, решим алгебраическим методом следующую задачу: вписать в круг радиуса R прямоугольник данного периметра $2p$.

Обозначим через x одну из сторон искомого прямоугольника; тогда соседняя сторона равна $p - x$. Эти стороны и диаметр круга образуют прямоугольный треугольник, поэтому:

$$x^2 + (p - x)^2 = 4R^2,$$

или

$$2x^2 - 2px + (p^2 - 4R^2) = 0,$$

отсюда

$$x_1 = \frac{p + \sqrt{8R^2 - p^2}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{p - \sqrt{8R^2 - p^2}}{2}.$$

Из этих формул видно, что, зная отрезки p и R, можно построить отрезки x_1 и x_2 так как:

$$x = \frac{p \pm t}{2},$$

где

$$t = \sqrt{8R^2 - p^2},$$

причем очевидно, что t есть катет треугольника, гипотенуза которого равна $2R\sqrt{2}$ а другой катет есть p.

Из тех же формул видно, что между отрезками R и p должно существовать соотношение:

$$8R^2 - p^2 \geq 0,$$

или

$$2R\sqrt{2} \geq p,$$

иначе отрезки x_1 и x_2 получатся мнимые. Кроме того, отрезок x_2 не может быть отрицательным или равным нулю. Поэтому необходимо, чтобы было:

$$p-\sqrt{8r^2-p^2}>0,$$

или

$$2p^2>8R^2,$$

или

$$p>2R.$$

Итак, между отрезками p и R должна быть следующая зависимость:

$$2R\sqrt{2}\geq p>2R.$$

Таким образом при соблюдении этого условия задача имеет единственное решение и притом прямоугольник превращается в квадрат, если $2R\sqrt{2}=p$, так как тогда $x_1 = x_2$. Легко видеть, что

$$x_1+x_2=p,$$

т. е. соседние стороны искомого прямоугольника равны соответственно x_1 и x_2.

Надлежащий выбор отрезка p при свободном выборе отрезка R и построение отрезков x_1 и x_2 видны из черт. 2.

Если $OA = R$ и $CE = AB$, то $AE=2R\sqrt{2}$. Выбираем $p = AH$.

$$KH=\sqrt{AK^2-AH^2}=\sqrt{AE^2-AH^2}=\sqrt{(2R\sqrt{2})^2-p^2};$$

$$AM=AH-MH=p-\sqrt{(2R\sqrt{2})^2-p^2};$$

$$AD=AH+HD=p+\sqrt{(2R\sqrt{2})^2-p^2};$$

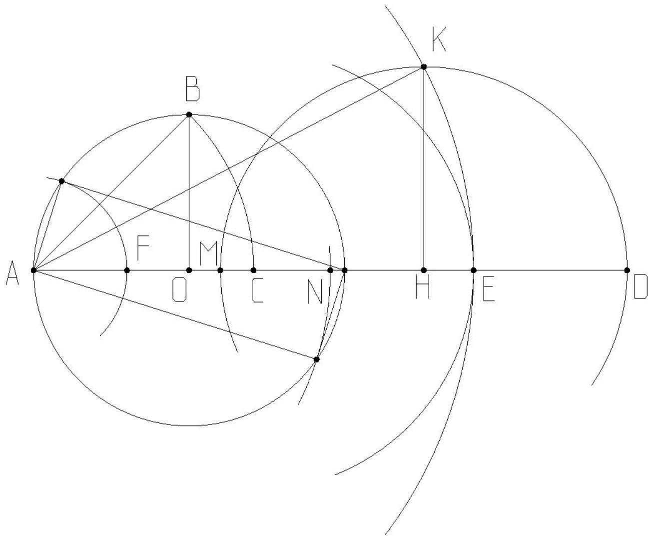
$$AF = FM = x_2;\ \ AN = ND = x_1.$$

Доказательство может ограничиться тем, что

$$x_1 + x_2 = p$$

и

$$x_1^2 + x_2^2 = 4R^2 .$$



Черт. 2

Решение задачи свелось, как видно, к решению квадратного уравнения. Если геометрическая задача на построение решается с помощью уравнения первой или второй степени, то построение всегда возможно с помощью циркуля и линейки. В самом деле, если неизвестный отрезок определяется из уравнения первой степени, то получается выражение, не содержащее радикалов. Оно всегда может быть сведено к многочлену, члены которого в самых сложных случаях приводятся к виду $x = \frac{ab}{c}$, где a, b, c суть заданные отрезки. Если $x = \frac{ab}{c}$, то $c:a = b:x$, откуда видно, что x есть отрезок, четвертый пропорциональный отрезкам a, b и c. Если же, например,

$$x = \frac{a^3 b^2 c}{d^3 c^2},$$

то

$$x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{e},$$

следовательно:

$$x = \frac{ya}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{e} = \frac{za}{d} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{e} = \frac{tb}{e} \cdot \frac{c}{e} = \frac{uc}{e},$$

где

$$y = \frac{ab}{d}; \quad z = \frac{ya}{d}; \quad t = \frac{za}{d}; \quad u = \frac{tb}{e}.$$

Следовательно, в самом сложном случае дробного одночлена первого измерения дело сводится к повторному построению отрезка, четвертого пропорционального трем известным.

Если неизвестный отрезок определяется из квадратного уравнения, то получается алгебраическое выражение, содержащее квадратный радикал из однородного многочлена второй степени. Такого рода радикал, например $\sqrt{5a^2 - 3b^2 + c^2}$ может быть построен повторным применением теоремы Пифагора и теоремы об отрезке, среднем пропорциональном двум данным. В самом деле,

$$x = \sqrt{5a^2 - 3b^2 + c^2} = \sqrt{y^2 - z^2 + c^2} = \sqrt{t^2 + c^2},$$

где

$$y^2 = 5a \cdot a; \quad z^2 = 3b \cdot b; \quad t^2 = y^2 - z^2.$$

При этом все необходимые построения выполняются проведением прямых линий и окружностей, т. е. задача решается с помощью линейки и циркуля.

Задачи на построение, решаемые с помощью уравнений первой и второй степени, называются задачами первой и второй степени. Аналогично задачи на построение, решаемые уравнениями третьей, четвертой и т. д. степени, называются задачами третьей, четвертой и т. д. степени; в этих задачах построение вообще не может быть выполнено с помощью линейки и циркуля; оно возможно только в некоторых частных случаях.

Рассмотрим, например, одну из знаменитых задач древности: разделить произвольный угол на три равные части.

Обозначив данный угол через 3α и искомый через α, воспользуемся выводимою в курсах тригонометрии формулою:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

или

$$2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 3\cdot 2\cos\alpha .$$

Далее, обозначив известную величину $2\cos 3\alpha$ через m, а неизвестную $2\cos\alpha$ через x, получим уравнение:

$$m = x^3 - 3x$$

или

$$x^3 - 3x - m = 0.$$

Это неполное уравнение третьей степени. В курсах высшей алгебры доказывается, что уравнение

$$y^3 + py + q = 0.$$

имеет три корня:

$$y_1 = M + N, \quad y_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}M + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}N$$

и

$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}M + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}N,$$

где

$$M = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ и } N = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Эти выражения y_1, y_2 и y_3, содержащие кубические корни, не могут быть построены с помощью циркуля и линейки, так как в элементарной геометрии нет ни одной теоремы, в которой метрические соотношения между отрезками выражались бы через кубические корни.

Но в некоторых частных случаях уравнение

$$x^3 - 3x - m = 0$$

может быть решено без помощи кубических корней. Например, когда $m = 0$ и $m = \sqrt{2}$, оно решается очень просто. В самом деле, если $m = 0$, то

$$x^3 - 3x = 0$$

или

$$x(x^2 - 3) = 0$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}$$

Следовательно, если $m = 0$, то

$$2\cos 3\alpha = 0,$$

откуда

$$\cos 3\alpha = 0$$

и

$$3\alpha = 90^\circ.$$

Итак

$$2\cos\alpha_1 = 0, \quad 2\cos\alpha_2 = \sqrt{3}, \quad 2\cos\alpha_3 = -\sqrt{3};$$

$$\alpha_1 = 90^\circ, \quad \boxed{\alpha_2 = 30^\circ}, \quad \alpha_3 = 150^\circ.$$

Точно так же, если $m=\sqrt{2}$, то

$$2\cos 3\alpha=\sqrt{2}\,,\quad \cos 3\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\quad 3\alpha=45^\circ\,.$$

Тогда уравнение

$$x^3-3x-\sqrt{2}=0$$

имеет очевидный корень $-\sqrt{2}$ и может быть представлено в виде

$$(x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x-1)=0$$

откуда

$$x_1=-\sqrt{2}\,,\quad x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\,,\quad x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$2\cos\alpha_1=-\sqrt{2}\,,\;\; 2\cos\alpha_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\,,\;\; 2\cos\alpha_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\,;$$

$$\alpha_1=135^\circ\,,\quad \boxed{\alpha_2=15^\circ},\quad \alpha_3=75^\circ\,.$$

Здесь и выше обведены рамками пригодные ответы; остальные должны быть отброшены.

Таким образом в частных случаях, когда решение уравнения приводит к квадратным радикалам, деление угла на три равные части возможно с помощью циркуля и линейки.

К таким случаям относятся еще углы, равные $\dfrac{180^\circ}{2^n}$, где n есть целое положительное число, и некоторые другие.

Другая знаменитая задача древности: построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба.

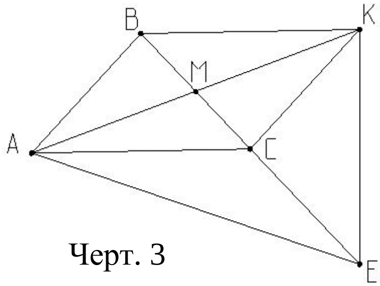
Обозначив через x искомое ребро и через a данное, находим:

$$x^3=2a^3\,,$$

откуда

$$x^3 = a \cdot \sqrt[3]{2}\,.$$

Этот отрезок по указанной выше причине не может быть построен с помощью циркуля и линейки. Ясно, что здесь не может быть благоприятных частных случаев.



Черт. 3

Третья знаменитая задача древности: построить квадрат, равновеликий данному кругу.

Обозначим через x сторону искомого квадрата и через R радиус круга. Получим:

$$x^2 = \pi R^2$$

или

$$x = R\sqrt{\pi}\,.$$

Число π не выражается ни в каких радикалах, оно не может быть корнем какого-либо алгебраического уравнения. Эта теорема доказана математиками лишь во второй половине прошлого века. Читатель может найти доказательство в книге проф. Ф. Рудио «О квадратуре круга» (Одесса 1911, изд. Матезис). Эта книга будет скоро выпущена новым изданием.

Таким образом задача не может быть решена с помощью линейки и циркуля.

Рассмотрим еще две задачи на построение.

1. Построить треугольник, зная его медианы m_a, m_b и m_c.

Пусть треугольник ABC (черт. 3) искомый. Обозначим стороны его через a, b и c. Проведя $CK \parallel AB$, отложив $CK = AB$ и соединив точки B и K, получим параллелограмм $ABKC$.

Тогда

$$AK^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2,$$

или

$$(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2,$$

откуда

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \tag{1}$$

Аналогично найдем:

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \tag{2}$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \tag{3}$$

Из уравнений (1), (2) и (3) легко определить a, b и c через m_a, m_b и m_c. В самом деле, складывая эти уравнения почленно, получим:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4},$$

или

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

отсюда

$$\frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = a^2 + b^2 + c^2,$$

или

$$\frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2}. \tag{4}$$

Вычитая почленно равенства (1) из (4), найдем:

$$\frac{2}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)-m_a^2=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4},$$

откуда легко получить

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}\,.$$

Аналогично найдем:

$$b=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_c^2-m_b^2}\,,$$

$$c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_b^2-m_c^2}\,.$$

Таким образом стороны треугольника выражаются через квадратные корни из алгебраических сумм, в которые данные медианы входят в квадратах, следовательно, мы имеем задачу второй степени, т. е. задачу, решаемую циркулем и линейкою. Построив отрезки a, b и c, мы легко построим искомый треугольник. Но самое построение можно выполнить гораздо проще, если снова обратимся к черт. 3. Отложим на продолжении BC отрезок $CE = BC$ и соединим точки A и K с точкою E. Пусть читатель убедится сам, что

$$AK = 2m_a,\quad AE = 2m_c\quad \text{и}\quad EK = 2m_b.$$

Тогда легко построить треугольник AKE, найти точку M, разделить отрезок ME в отношении 1:2 и, следовательно, найти точку C, а затем точку B.

2. Построить равнобедренный треугольник, зная его биссектрисы.

Пусть треугольник ABC (черт. 4) равнобедренный, причем $AB = BC$. Обозначим биссектрису AK угла A через l и биссектрису BE угла B через h. Ясно, что $BE \perp AC$. Обозначим угол KAC через x. Очевидно, что искомый треугольник ABC будет легко построен, если мы будем знать угол x.

Нетрудно усмотреть, что

$\angle BKA = 3x$ и $\angle ABK = 180° - 4x$.

Из треугольника ABK имеем:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{\sin ABK}{\sin AKB},$$

или

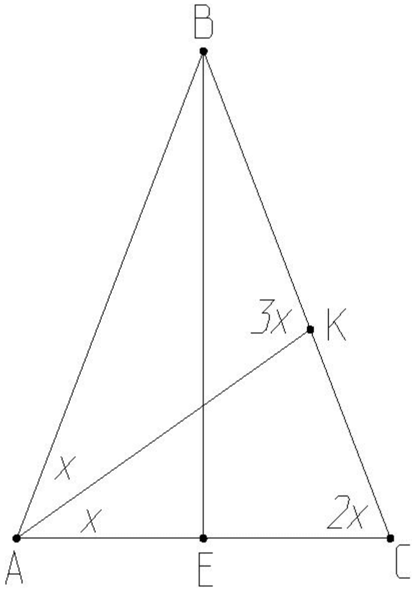
$$\frac{l}{AB} = \frac{\sin 4x}{\sin 3x}. \qquad (1)$$

Из треугольника ABE имеем:

$$BE = AB \cdot \sin BAE,$$

или

$$AB = \frac{h}{\sin 2x}. \qquad (2)$$



Черт. 4

Из равенств (1) и (2) находим:

$$\frac{l \sin 2x}{h} = \frac{\sin 4x}{\sin 3x};$$

так как

$$\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x,$$

то предыдущее уравнение сокращается на $\sin 2x$, причем корни уравнения $\sin 2x = \cdot 0$ явно непригодны. Тогда

$$\frac{l}{h} = \frac{2\cos 2x}{\sin 3x}.$$

Рассмотрим теперь частные случаи. Пусть $l = h$. Тогда

$$\sin 3x = 2\cos 2x$$

или

$$3\sin x - 4\sin^3 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x),$$

или

$$3\sin x - 4\sin^3 x = 2 - 4\sin^2 x,$$

или, полагая $\sin x = y$,

$$4y^3 - 4y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Это уравнение имеет корень $y = \frac{1}{2}$, в чем легко убедиться подстановкою. Тогда

$$y = \sin x = \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$x = 30°.$$

Так и следовало ожидать: если $l = h$, то треугольник равносторонний, и он легко строится по заданной высоте с помощью циркуля и линейки.

Пусть $l = 2h$. Тогда

$$\sin 3x = \cos 2x,$$

откуда заключаем, что

$$3x + 2x = 90°,$$

или

$$x = 18°.$$

Так как

$$\sin 18° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4},$$

то в этом случае задача также может быть решена с помощью линейки и циркуля.

Пусть $l = 4h$. Тогда

$$4\sin 3x = 2\cos 2x,$$

или

$$6\sin x - 8\sin^3 x = 1 - 2\sin^2 x,$$

или, полагая $y = \sin x$, получаем:

$$8y^3 - 2y^2 - 6y + 1 = 0.$$

Это уравнение не имеет ни рациональных корней, ни иррациональных, выражаемых в квадратных радикалах. Следовательно, в этом случае задача не может быть решена с помощью циркуля и линейки.

Отсюда заключаем, что построение треугольника по заданным биссектрисам с помощью линейки и циркуля вообще не может быть выполнено. Оно оказывается возможным лишь в некоторых частных случаях.

ГЛАВА II

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ОДНОГО ТОЛЬКО ЦИРКУЛЯ

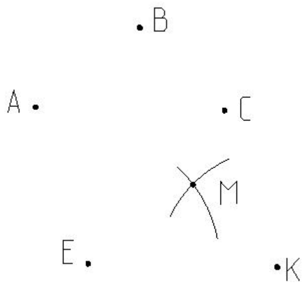
Читатель без сомнения умеет разделить окружность на шесть равных частей, не прибегая к линейке, но вряд ли умеет найти центр данной окружности, не проводя по линейке прямых линий. Какие задачи на построение можно решить с помощью только одного циркуля? На этот вопрос впервые дал ответ итальянский математик Маскерони, труд которого под названием «Геометрия циркуля» («La geometria del compasso») был напечатан в 1797 г. Эта книга не была переведена на русский язык, но некоторые извлечения встречаются в нашей математической литературе. Маскерони дал решения множества самых разнообразных задач, его приемы решения отличаются изяществом и остроумием.

В этой главе читатель найдет изложение решений различных задач, причем они располагаются не в той последовательности, которая привычна в элементарной геометрии. Дело в том, что некоторые начальные задачи на построение решаются с помощью только циркуля сравнительно сложно. Здесь задачи рассортированы по признаку постепенного усложнения построений и обоснования новых построений предыдущими.

Заметим, что ограничение построений циркулем позволяет нам проводить непрерывные линии только в виде окружностей. Прямых линий мы фактически уже не можем проводить. Но мы можем определять направление прямой линии двумя точками, сможем, как увидит читатель, отмечать сколько угодно точек, лежащих в направлении заданной (двумя точками) прямой, находить точки пересечения намеченных прямых и намеченной прямой с окружностью.

Задача 1. Построить угол, равный данному.

Данный угол определяется вершиной A (черт. 5) и точками B и C, взятыми где-либо на его сторонах.

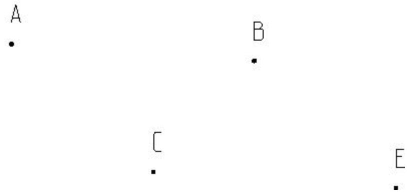


Черт. 5

Построение. Строим отрезок $EK = AC$, т. е. отмечаем циркулем две точки, расстояние между которыми равно AC. Описываем из точек E и K дуги радиусов соответственно AB и CB. Эти дуги пересекутся в некоторой точке M. Угол MEK — искомый.

Доказательство. Треугольники ABC и EMK конгруэнтны.

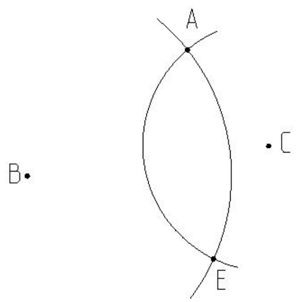
Задача 2. Из данной точки C (черт. 6) провести прямую, параллельную данной прямой AB.



Черт. 6

Построение. Строим угол BCE, равный углу ABC (см. предыдущую задачу). Линия CE — искомая.

Доказательство. Углы BCE и ABC — накрест лежащие.



Черт. 7

Задача 3. Построить точку, симметричную данной точке A (черт. 7) относительно данной прямой BC.

Построение. Точки B и C суть центры окружностей, радиусы которых соответственно равны BA и CA. Точка E, их пересечение, есть искомая.

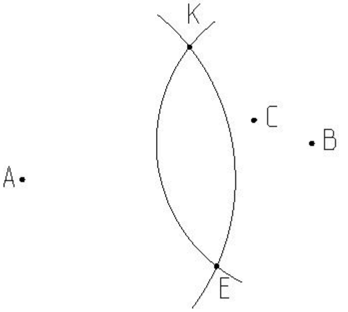
Доказательство. Так как треугольники BAC и BEC конгруэнтны (по третьему признаку), то при перегибе чертежа по линии BC точка A совместится с точкою E.

Задача 4. Из данной точки *A* (черт. 7) провести прямую, перпендикулярную к данной прямой *BC*.

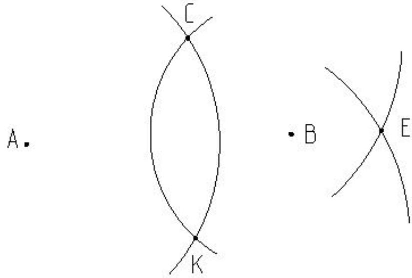
Решение (см. предыдущую задачу). Так как точки *A* и *E* симметричны относительно прямой *BC*, то *AE* перпендикулярна к *BC*. Таким образом точки *A* и *E* определяют искомую прямую.

Задача 5. Определить, лежат ли три данные точки *A*, *B* и *C* на одной прямой линии (черт. 8).

Решение. Возьмем вне прямой *AB* произвольную точку *K* и построим точку *E*, симметричную точке *K* относительно прямой *AB*. Очевидно, что точка *C* лежит на прямой *AB*, если отрезки *KC* и *EC* равны между собою.



Черт. 8



Черт. 9

Задача 6. Даны две точки *A* и *B* (черт. 9). Построить точку, лежащую на прямой линии *AB*.

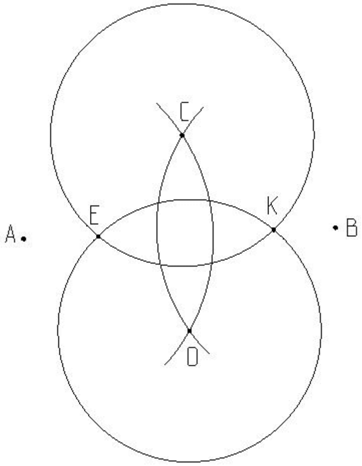
Построение. Строим точку *K*, симметричную произвольной точке *C* относительно прямой *AB*. Проведя из *C* и *K* дуги равных радиусов, получаем в пересечении этих дуг искомую точку *E*.

Доказательство опирается на решение предыдущей задачи. Таким образом можно построить сколько угодно точек, лежащих на данной прямой.

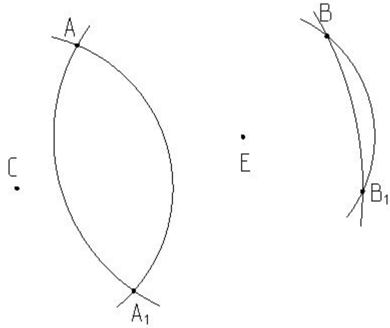
Задача 7. Найти точки пересечения данной прямой *AB* (черт. 10) с окружностью данного радиуса с центром в данной точке *O*.

Построение. Строим точку C, симметричную точке O относительно прямой AB. Из точки C описываем окружность радиусом, равным радиусу данной окружности, пересекающую данную окружность в точках E и K. Точки E и K — искомые.

Доказательство. Точки E и K лежат на прямой AB (см. задачу 6).



Черт. 10



Черт. 11

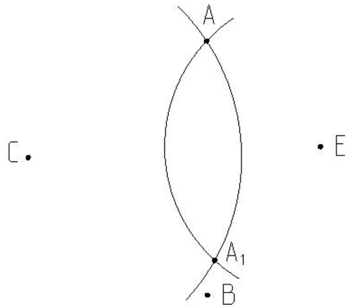
Задача 8. Определить, параллельны ли данные прямые AB и CE (черт. 11).

Решение. Строим точки A_1 и B_1 симметричные точкам A и B относительно прямой CE.

Если $AA_1 = BB_1$ то AB параллельна CE. В самом деле, AA_1 перпендикулярна к CE и BB_1 перпендикулярна к CE, следовательно, AA_1 параллельна BB_1; поэтому, если кроме того $AA_1 = BB_1$, или $\frac{AA_1}{2} = \frac{BB_1}{2}$, то точки A и B одинаково отстоят от прямой CE.

Задача 9. Определить, перпендикулярна ли прямая *AB* (черт. 12) к прямой *CE*.

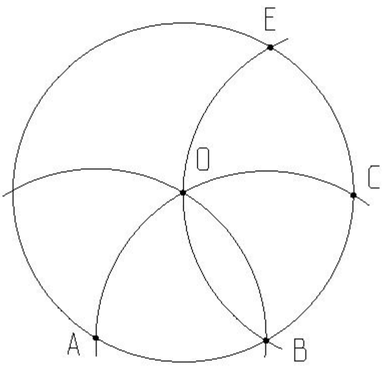
Решение. Строим точку A_1 симметричную точке *A* относительно прямой *CE*. Так как AA_1 перпендикулярна к *CE*, то *AB* будет перпендикулярна к *CE* только тогда, когда точки *A*, A_1 и *B* лежат на одной прямой (см. задачу 5).



Черт. 12

Задача 10. К данной прямой линии *AB* (черт. 13) восстановить перпендикуляр в точке *B*.

Построение. Сохраняя раствор циркуля неизменно равным расстоянию *AB*, описываем из точек *A* и *B*, как из центров, дуги, пересекающиеся в течке *O*. Из точки *O* описывается полная окружность, а затем на ней отмечаются дуги *BC* = *AB*, *CE* = *AB*. Прямая *BE* есть искомый перпендикуляр.



Черт. 13

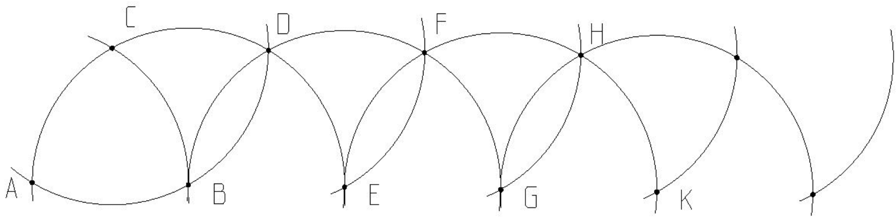
Доказательство. Так как окружность делится радиусом на шесть одинаковых частей, то дуга *ABCE* есть половина окружности, следовательно, вписанный угол *ABE*, опирающийся на диаметр *AE*, есть прямой.

Задача 11. Дан отрезок *AB* (черт. 13). Построить отрезок, равный $AB \cdot \sqrt{3}$.

Построение (см. предыдущую задачу). Получаем $AC = AB \cdot \sqrt{3}$.

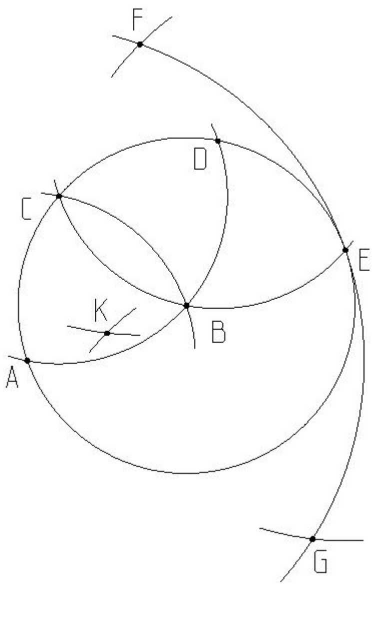
Доказательство. Так как дуги *AB* и *BC* содержат по 60°, то дуга *AC* содержит 120°, следовательно, хорда *AC* стягивает третью часть окружности и равна стороне правильного треугольника, вписанного в круг радиуса *AB*, т. е. равна $AB\cdot\sqrt{3}$.

Задача 12. Построить отрезок, в *n* раз больший данного отрезка *AB* (черт. 14).



Черт. 14

Построение. Сохраняя раствор циркуля неизменно равным расстоянию *AB*: 1) описываем дугу из *B*; 2) откладываем *AC* = = *CD* = *DE* = *BA*; 3) описываем дугу из *E*; 4) откладываем *BD* = = *DF* = *FG* = *AB*; 5) описываем дугу из *G* и т. д. Получаем *AE* = 2·*AB*, *AG* = 3·*AB*, *AK* = 4·*AB* и т. д. При этом точки *A*, *B*, *E*, *G*, *K*,... лежат на одной прямой.



Черт. 15

Доказательство опирается на свойство радиуса, делящего окружность на шесть равных частей.

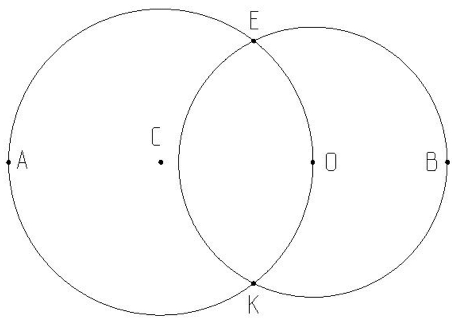
Задача 13. Разделить данный отрезок *AB* (черт. 15) пополам.

Построение. 1) Описываем из точки *B* окружность радиуса *AB*; 2) откладываем *AC* = *CD* = *DE* = *AB*; 3) описываем из *A* дугу радиуса *AE*; 4) описываем из *E* дуги радиуса *AD*, которые пересекут дугу, описанную из *A*, в точках *F* и *G*; 5) описываем из *F* и *G* дуги радиуса *AD*, пересекающиеся в точке *K*. Получаем: *K* лежит на прямой *AB* и *AK* = *KB*.

Доказательство. Точки A, B и E лежат на одной прямой (см. задачу 12). Точки F и G симметричны относительно прямой AE (см. задачу 3). Точка K лежит на прямой AB (см. задачу 6). Отрезок $AD = AB \cdot \sqrt{3}$ (см. задачу 11). Равнобедренные треугольники AFE и KFE, имеющие общий угол FEK, подобны, следовательно, $\frac{KE}{FE} = \frac{EF}{AF}$, или $\frac{KE}{AB\sqrt{3}} = \frac{AB\sqrt{3}}{2AB}$, откуда $KE = \frac{3}{2}AB$, поэтому

$$KB = KE - BE = \frac{3}{2}AB - AB = \frac{AB}{2}.$$

Задача 14. Из данной точки A (черт. 16) провести касательные к данной окружности радиуса OB с центром в точке O.



Черт. 16

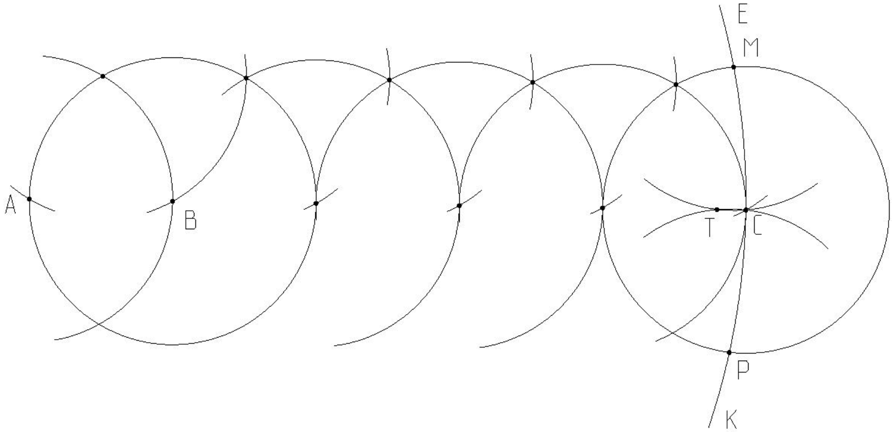
Построение. 1) Находим середину C отрезка AO (см. задачу 13); 2) описываем из точки C окружность радиуса $CA = CO$, которая пересекает данную окружность в точках E и K. Прямые AE и AK суть искомые касательные.

Доказательство. Углы AEO и AKO, как вписанные в вспомогательной окружности и опирающиеся на диаметр OCA, — прямые, следовательно, прямые AE и AK соответственно перпендикулярны к радиусам OE и OK данной окружности.

Задача 15. Разделить данный отрезок AB (черт. 17) на n равных частей.

Построение. Полагаем для примера $n = 5$. Построение для всякого целого числа n производится аналогично. 1) Строим отрезок AC, в пять раз больший данного AB (см. задачу 12); 2) описываем из A дугу ECK радиуса AC; 3) описываем из C дуги радиуса AB, которые пересекут дугу ECK в точках M и P;

4) описываем из M и P дуги радиуса AB, которые пересекутся в точках C и T. Отрезок CT в пять раз меньше отрезка AB.



Черт. 17

<u>Доказательство</u>. Точки A, B, T и C лежат на одной прямой (см. задачу 6). Равнобедренные треугольники AMC и MTC, имеющие общий угол MCT, подобны, поэтому $\frac{AC}{MC}=\frac{AB}{TC}$; так как $MC = AB$, то $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{TC}$. По построению AC : AB = 5, следовательно, $AB = 5 \cdot TC$.

Задача 16. Разделить данную дугу AB (черт. 18) пополам.

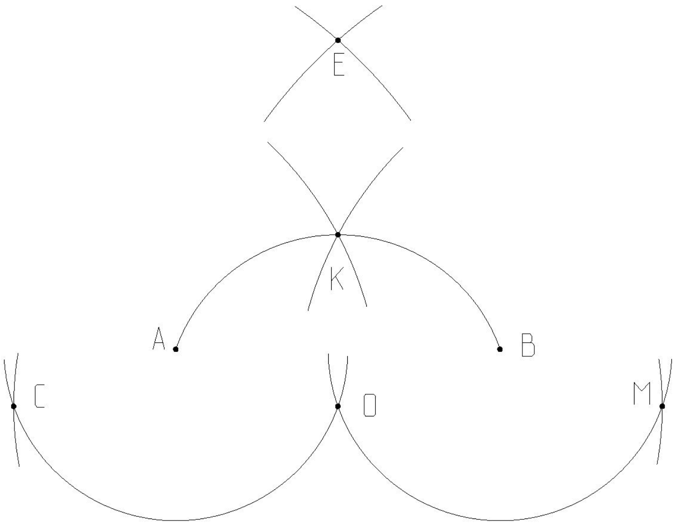
<u>Построение</u>. Центр данной дуги есть точка O. 1) Описываем из точек A и B дуги радиуса AO; 2) описываем из точки O дуги радиуса AB, которые пересекут проведенные из A и B дуги в точках C и M; 3) описываем из C и M дуги радиуса CB или MA, которые пересекаются в точке E; 4) описываем из точек C и M дуги радиуса OE; эти дуги пересекутся в искомой точке K.

<u>Доказательство</u>. Прямые AB и CO параллельны (см. задачу 8). Так как, кроме того, $AB = CO$, то $CABO$ есть параллелограмм, поэтому

$$CB^2 + AO^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot OB^2,$$

или

$$CB^2 = 2 \cdot AB^2 + OB^2. \qquad (1)$$



Черт. 18

Так как *OE* перпендикулярна *CM* (см. задачу 4), то

$$CE^2 = CB^2 = OC^2 + OE^2 = AB^2 + OE^2,$$

следовательно

$$CB^2 = AB^2 + OE^2. \qquad (2)$$

Сличая равенства (1) и (2), получаем:

$$2 \cdot AB^2 + OB^2 = AB^2 + OE^2,$$

или

$$OE^2 = AB^2 + OB^2. \qquad (3)$$

Так как *OK* перпендикулярна *CM*, то

$$CK^2 = OE^2 = CO^2 + OK^2 = AB^2 + OK^2,$$

следовательно

$$OE^2 = AB^2 + OK^2. \qquad (4)$$

Сличая равенства (3) и (4), получаем:

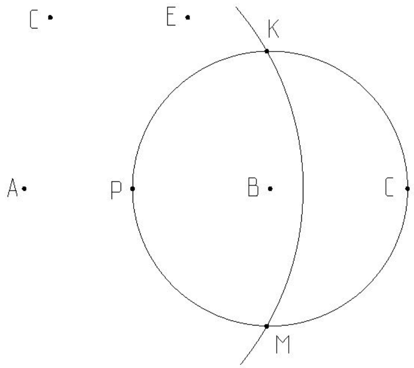
$$OB^2 = OK^2 \text{ или } OB = OK .$$

Отсюда заключаем, что точка K лежит на дуге AB. Так как AB перпендикулярна OE, то точка K делит дугу AB пополам.

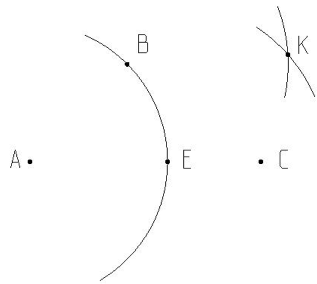
Задача 17. Построить сумму и разность двух данных отрезков AB и CE (черт. 19).

Построение. 1) Описываем из B окружность радиуса CE; 2) описываем из A дугу произвольного радиуса, пересекающую проведенную окружность в точках K и M; 3) делим образовавшиеся на проведенной окружности дуги пополам в точках P и T (см. задачу 16). Получаем $AP = AB + CE$ и $AT = AB – CE$.

Доказательство. Точки A, T, B и P лежат на одной прямой (см. задачи 6 и 16): $BP = BT = CE$.



Черт. 19



Черт. 20

Задача 18. Разделить данный угол BAC пополам (черт. 20).

Построение. 1) Находим на прямой AC точку E так, чтобы $AE = AB$ (см. задачу 17); 2) описываем из B и E дуги произвольного радиуса, пересекающиеся в точке K. Прямая AK есть искомая биссектриса.

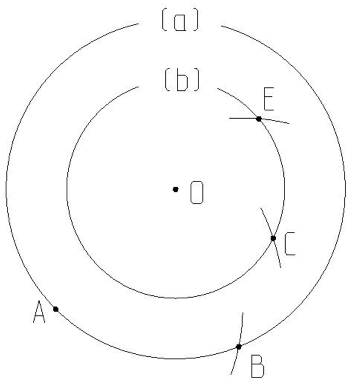
Доказательство. Треугольники ABK и AKE конгруэнтны.

Задача 19. Построить отрезок, четвертый пропорциональный трем данным a, b и c.

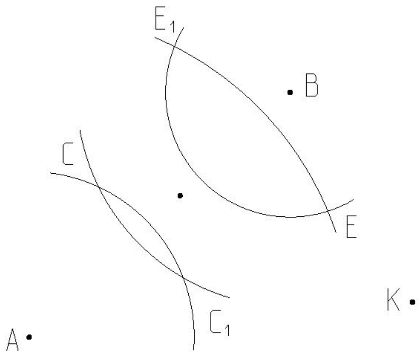
Построение. 1) Описываем из произвольной точки O (черт. 21) концентрические окружности радиусов a и b; 2) из точки A, произвольно взятой на внешней окружности, описываем две дуги: одну радиуса $AB = c$ и другую произвольного размера AC; 3) из точки B описываем дугу радиуса $BE = AC$. Отрезок CE — искомый.

Доказательство. Треугольники AOC и BOE по построению конгруэнтны, следовательно, $\angle AOC = \angle BOE$. Отсюда $\angle AOC - \angle BOC = \angle BOE - \angle BOC$, или $\angle AOB = \angle COE$. Поэтому равнобедренные треугольники AOB и COE подобны, следовательно

$$AO:OC = AB:CE, \text{ или } a:b = c:CE.$$



Черт. 21



Черт. 22

Задача 20. Найти точку пересечения двух данных прямых AB и CE (черт. 22).

Построение. 1) Строим точки C_1 и E_1, симметричные точкам C и E относительно прямой AB (см. задачу 3); 2) находим на прямой EE_1 точку K так, чтобы $EK = CC_1$ (см. задачу 17); 3) находим отрезок x так, чтобы $x:E_1C_1 = EE_1:E_1K$ (см. задачу 19); 4) находим на прямой E_1C_1 точку O так, чтобы $E_1O = x$ (см. задачу 17). Точка O — искомая.

Доказательство. Так как CC_1 параллельно EE_1 и EK равно и параллельно CC_1, то CE параллельно C_1K.

Если точка M есть пересечение прямых CE и E_1C_1, то из подобия треугольников ME_1E и C_1E_1K заключаем, что

$$E_1M:E_1C_1 = EE_1:E_1K.$$

Следовательно, $E_1M = x$ или точки M и O совпадают. Итак, точка O есть точка пересечения прямых CE и C_1E_1 и вследствие симметрии точек C и C_1 и E и E_1 относительно AB лежит на прямой AB.

Примечание. На черт. 22 не все описанные построения фактически выполнены; он сделан схематично. При подробных построениях чертеж получается довольно громоздкий. Читателю рекомендуется выполнить чертеж со всеми подробностями. Это примечание относится и к последующим задачам.

Задача 21. Разделить данный отрезок AB (черт. 23) в данном отношении m:n, где m и n — данные отрезки.

Построение. 1) Проводим произвольную прямую AC и на ней откладываем $AE = m$ и $EH = n$ (см. задачу 17); 2) проводим из точки E прямую EK параллельно HB (см. задачу 2); 3) находим точку M пересечения прямых AB и EK (см. задачу 20). Получаем $AM:MB = m:n$.

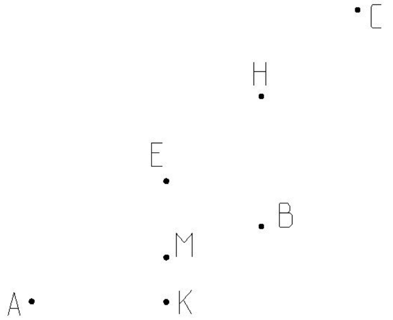
Доказательство. Параллельные линии HB и EM рассекают стороны угла HAB на пропорциональные части.

Если m и n даны числами, то в описанном построении заменяем нахождение точек E и H приемом, изложенным в задаче 12.

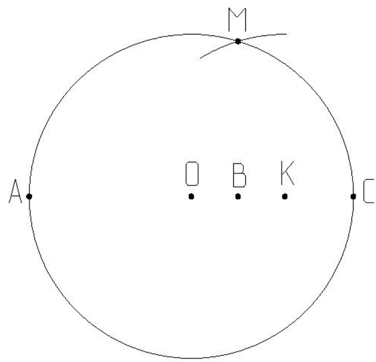
Задача 22. Построить отрезок, средний пропорциональный двум данным a и b.

Построение. 1) Находим на произвольной прямой линии точки A, B и C (черт. 24) так, чтобы $AC = AB + BC = a + b$ (см. задачу 17); 2) делим отрезок AC в точке O пополам (см. задачу 13); 3) описываем из точки O окружность радиуса $OA = OC$; 4) откладываем на прямой BC отрезок $BK = OB$ (см. задачу 13); 5) описываем из точки K дугу радиуса $OA = OC$, которая пересечет проведенную окружность в точке M. Отрезок BM — искомый.

Доказательство. Треугольник OMK — равнобедренный, так как $OM = AO = KM$. Так как $OB = BK$, то MB перпендикулярна OK, следовательно $MB^2 = AB \cdot BC = a \cdot b$.

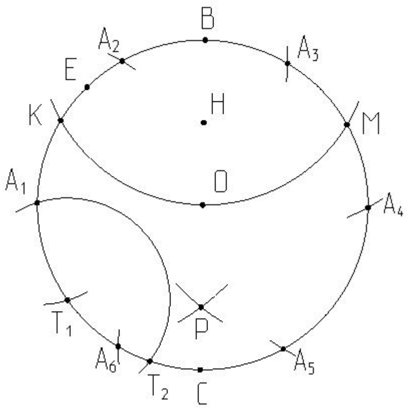


Черт. 23



Черт. 24

Задача 23. Деление окружности на равные части.



Черт. 25

Пусть данная окружность имеет центр в точке O (черт. 25). Радиус ее $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_1$ будем считать для простоты линейною единицей.

1. Очевидно, что точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 делят окружность на шесть равных частей, а три из них, взятые через одну, например A_1, A_3 и A_5, делят окружность на три равные части. При этом хорда $A_1A_3 = \sqrt{3}$.

2. Разделив дуги A_2A_3 и A_5A_6 пополам (см. задачу 16) в точках B и C, получим, что точки A_1, B, A_4 и C делят окружность на четыре равные части. Следовательно хорда $A_1B = \sqrt{2}$. Кроме то-

го, ясно, что дуга A_2B есть двенадцатая часть окружности, поэтому хорда

$$A_2B=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

3. Разделив дугу A_1B в точке E пополам, получим, что дуга A_1E есть восьмая часть окружности, поэтому хорда

$$A_1E=\sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

4. Опишем из точки B дуги радиуса A_1O, которые пересекут данную окружность в точках K и M. Хорда $KM=\sqrt{3}$. Опишем из точек K и M дуги радиуса $A_1B=\sqrt{2}$, которые пересекаются в точке P. Пусть точка H есть пересечение диагоналей ромба $KBMO$ (эту точку можно найти способом, изложенным в задаче 20). Точки B, H, O и P лежат на одной прямой. Из прямоугольного треугольника KHP получаем:

$$KH^2+HP^2=KP^2,$$

или

$$KH^2+(HO+OP)^2=KP^2,$$

или

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+OP\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+OP+OP^2=2$$

или

$$OP^2+OP-1=0.$$

Следовательно

$$OP = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Так как отрезок OP не может быть отрицательным, получаем:

$$OP = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

откуда заключаем, что отрезок OP равен стороне правильного вписанного десятиугольника. Поэтому, если хорда $A_1T_1 = OP$, то дуга A_1T_1 есть десятая часть окружности. Если дуга $T_1T_2 = A_1T_1$, то дуга A_1T_2 есть пятая часть окружности и поэтому

$$A_1T_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Интересно отметить, что $A_1T_2 = A_1P$. В самом деле, из прямоугольного треугольника A_1OP находим:

$$A_1P = \sqrt{A_1O^2 + OP^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Поэтому точка T_2 может быть найдена проведением из A_1 дуги радиуса A_1P.

5. Так как

$$\angle T_1OA_6 = \angle A_1OA_6 - \angle A_1OT_1 = 60° - 36° = 24° = \frac{360°}{15},$$

то дуга T_1A_6 есть пятнадцатая часть окружности и хорда

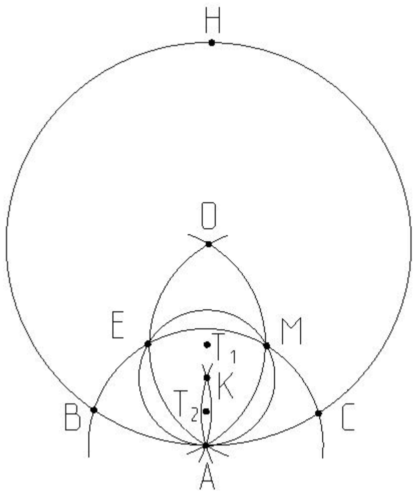
$$T_1A_6 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} + \sqrt{15}\right).$$

Таким образом окружность разделена на 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 равных частей. Деля соответственную дугу пополам, можно получать шестнадцатую, двадцатую, двадцать четвертую, тридцатую и т. д. части окружности. Кроме того, как видно из изложенного, возможно построение различных сложных иррациональных выражений, содержащих квадратные радикалы.

Деление окружности на 7, 9, 11, 13, 14 равных частей невозможно с помощ ью линейки и циркуля, а следовательно, и с помощью только циркуля. Немецкий математик Гаусс (1777-1855) показал, что деление окружности на 17 равных частей возможно с помощью линейки и циркуля, следовательно, оно возможно и с помощью только циркуля.

Задача 24. Найти центр данной окружности.

Построение. 1) Из точки A (черт. 26), произвольно взятой на данной окружности, описываем дугу произвольного радиуса, пересекающую данную окружность в точках B и C. 2) Находим точку K, симметричную точке A относительно прямой BC (см. задачу 3). 3) Из точки К описываем окружность радиуса KA, пересекающую проведенную из A дугу в точках E и M. 4) Находим точку O, симметричную точке A относительно прямой EM. Точка O — искомая.



Черт. 26

Доказательство. Найдем точку H пересечения прямой AK с данною окружностью (см. задачу 7). Так как AH перпендикулярна BC (см. задачу 4), то центр искомой окружности должен лежать на прямой AK. На этой же прямой лежит точка O (см. задачу 6). Найдем середины T_1 и T_2 отрезков EM и BC (см. задачу 13). Точки T_1 и T_2 лежат на прямой AO и EM перпендикулярна

OA, а *BC* перпендикулярна *OA*, так как точки *E* и *M* симметричны относительно прямой *OA*.

Так как BT_2 есть перпендикуляр, опущенный из точки *B* данной окружности на диаметр *AH*, то

$$AB^2 = AH \cdot AT_2 .$$

Точно так же, по отношению к окружности с центром в *K*, имеем:

$$AE^2 = 2 \cdot AK \cdot AT_1 .$$

Но *AB* = *AE*, $AT_1 = \frac{1}{2} AO$ (AEOM есть ромб), $AT_2 = \frac{1}{2} AK$, поэтому

$$AH \cdot AT_2 = 2 \cdot AK \cdot AT_1$$

или

$$AH \cdot \frac{1}{2} AK = 2 \cdot AK \cdot \frac{1}{2} AO ,$$

откуда

$$AH = 2 \cdot AO .$$

Читатель узнал из первой главы, что с помощью линейки и циркуля решаются все задачи на построение, которые при алгебраическом решении приводятся к решению уравнений первой и второй степени. Если расчленить такие построения на основные операции, то мы заметим, что они сводятся к следующим четырем:

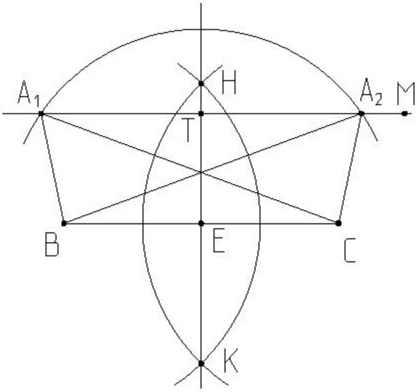
1. Отметить на данной прямой *AB*, от данной на ней точки *C*, точку *E*, находящуюся на данном расстоянии от точки *C*.

2. Найти точку пересечения данных прямой линии и окружности.

3. Найти точку пересечения двух данных прямых.

4. Найти точку пересечения двух данных окружностей.

Возьмем для примера задачу: построить треугольник по данным основанию и соответственным высоте и медиане. Задача решается так:



Черт. 27

а) Отложим на произвольной прямой отрезок *BC* (черт. 27), равный данному основанию треугольника; для этого находим на прямой точку *C*, отстоящую от произвольно взятой на той же прямой точки *B* на данном расстоянии, т. е. выполняем первую операцию.

б) Делим отрезок *BC* пополам, для чего описываем из *B* и *C* дуги одинакового радиуса произвольного размера. Прямая, соединяющая точки *H* и *K* пересечения дуг, разделит *BC* в точке *E* пополам; кроме того, $HK \perp BC$. Здесь выполняются операции третья и четвертая.

в) Отложим на *EH* от точки *E* отрезок *ET*, равный данной высоте треугольника. Это первая операция.

г) Проведем из точки *T* прямую *TM* параллельно *BC*. Третья вершина треугольника должна лежать на прямой *TM*. Проведение параллели требует выполнения третьей и четвертой операций.

д) Описываем из точки *E* дугу, радиус которой равен данной медиане треугольника. Третья вершина треугольника должна лежать на этой дуге, следовательно, лежит в пересечении этой дуги с прямою *TM*. Находим две точки A_1 и A_2. Здесь выполняется вторая операция. Итак, это построение расчленяется на четыре основные операции.

Искомый треугольник может быть построен не при всяких заданиях. Если данная медиана меньше данной высоты, построение невозможно. Если данная медиана равна высоте, дуга, проводимая из точки *E*, коснется прямой *TM* в точке *T*, следовательно, будет построен равнобедренный треугольник. Если данная медиана более высоты, то получим два различных треугольника BA_1C и BA_2C, удовлетворяющие требованиям задачи.

Означенные выше четыре операции выполняются очень просто с помощью циркуля и линейки. Но читатель, прочтя решения задач 7, 17 и 20, убедился, что те же операции могут быть выполнены с помощью только циркуля. Следовательно, <u>всякая задача первой и второй степени, т. е. всякая задача, решаемая с помощью циркуля и линейки, может быть решена с помощью только циркуля.</u>

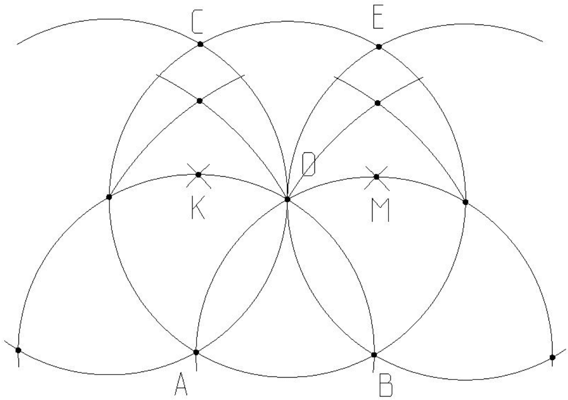
Сказанное дает ответ на важный теоретический вопрос геометрии: какие задачи на построение могут быть решены с помощью только циркуля? Разумеется, практическое решение сильно упрощается, если мы пользуемся и циркулем и линейкою. В этом читатель убедился по задачам 12, 13, 15, 16, 17, 20 и 21, решение которых с помощью только циркуля сравнительно громоздко.

Следует отметить, что для деления окружности на шесть, а, следовательно, и на три равные части линейка вообще совершенно не нужна. Интересно то, что некоторые задачи, а именно: 10, 11, 12, 23 п. 1 решаются при неизменном растворе циркуля.

Усвоив, как производятся основные построения с помощью только циркуля, читатель может теперь сам решать разнообразные задачи. Далее предлагается список задач 27-37 для самостоятельных упражнений, причем рекомендуется делать подробно все необходимые построения по примеру следующих задач 25 и 26. Чтобы не сбиться в распознавании вспомогательных точек, полезно обозначать их буквами и попутно делать записи типа: $AB \perp CE$, $KH \parallel MP$, точка O есть середина KH, точка T есть пересечение прямых CE и MP и т. п. Для нахождения плана решения полезно сделать сначала построение с помощью линейки и циркуля.

Задача 25. Построить квадрат по данной его стороне.

Построение. 1) Отрезок AB (черт. 28) определяет размер данной стороны квадрата. 2) Проводим $AC \perp AB$ и $BE \perp AB$ (см. задачу 10). 3) Находим на прямых AC и BE точки K и M так, чтобы $AK = AB$ и $BM = AB$ (см. задачу 17). Четырехугольник $AKMB$ есть искомый квадрат.



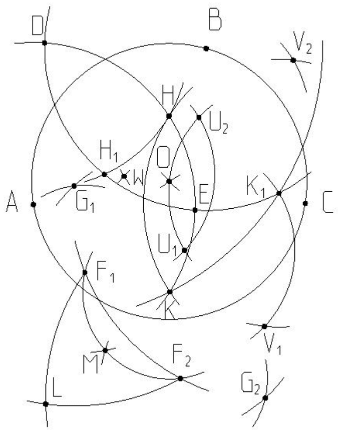
Черт. 28

Доказательство. $AK = BM = AB$, $AK \parallel BM$, и $AK \perp AB$.

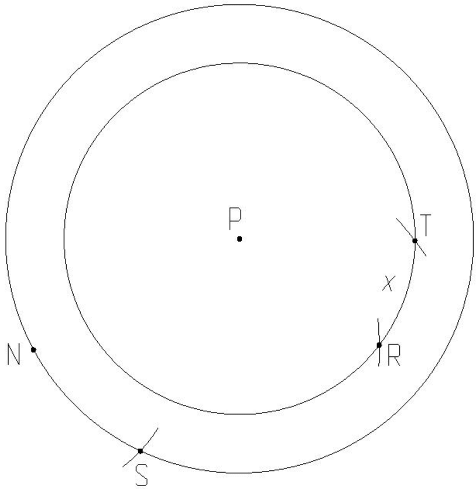
Примечание. Построения, необходимые для решения задач 10 и 17, исполнены, как видно из чертежа, проведением дуг радиуса AB, где это возможно, т. е. с сохранением раствора циркуля. Это способствует точности чертежа, делает его симметричным и облегчает распознавание опорных точек. Интересно заметить, что по зрительному впечатлению $KM > AB$, чего на самом деле нет.

Задача 26. Около данного треугольника ABC (черт. 29) описать окружность.

Построение. 1) Восстанавливаем к сторонам AB и AC перпендикуляры в их серединах. Для этого описываем из точек A, B и C дуги одного и того же произвольного радиуса. Эти дуги пересекутся попарно в точках D и E, H и K. Имеем $DE \perp AB$ и $HK \perp AC$ (см. задачи 3 и 4). Центр искомой окружности находится в пересечении прямых DE и HK. 2) Находим точки H_1 и K_1, симметричные точкам H и K относительно прямой DE (см. задачу 3). Для этого описываем дуги из точки D радиуса DH и из той же точки D дугу радиуса DK. Эти дуги вместе с дугой, проведенной из B, определяют точки H_1 и K_1. 3) Находим на продолжении прямой KK_1 точку M так, чтобы $KM = HH_1$ (см. задачу 17). Для этого описываем из точки K дугу радиуса HH_1 и из точки K_1 дугу произвольного радиуса. Эти дуги пересекутся в точках F_1 и F_2. Описываем из точек F_1 и F_2 дуги радиуса $KF_1 = KF_2$ и из точки K дугу радиуса F_1F_2. Эти дуги пересекутся в точках G_1 и G_2. Описываем из G_1 и G_2 дуги радиуса $G_2F_1 = G_1F_2$, которые пересекутся в точке L. Описываем из G_1 и G_2 дуги радиуса KL, которые пересекутся в точке M. Получим (см. задачу 16), что точка M делит дугу F_1MF_2 пополам.



Черт. 29



Черт. 30

4) Находим отрезок x так, чтобы $x : K_1H_1 = KK_1 : K_1M$ (см. задачи 19 и 20). Для этого на отдельном черт. 30 проводим две концентрические окружности радиусов $PN = K_1M$ и $PR = K_1H_1$. Из точки N описываем дугу радиуса KK_1, которая пересечет внешнюю из концентрических окружностей в точке S, и дугу произвольного радиуса, которая пересечет внутреннюю из кон-

центрических окружностей в точке R. Из точки S описываем дугу радиуса NR, которая пересечет внутреннюю из концентрических окружностей в точке T. Тогда $RT = x$ (см. задачу 19). 5) Находим на прямой KH_1 точку O так, чтобы $K_1O = x = RT$ (см. задачу 17). Для этого описываем из K_1 дугу радиуса x и из H_1 дугу хотя бы того же радиуса. Эти дуги пересекутся в точках U_1 и U_2. Разделим первую из этих дуг пополам. Для этого описываем из U_1 и U_2 дуги радиуса $K_1U_1 = K_1U_2$, а из K_1 дугу радиуса U_1U_2. В пересечении этих дуг найдем точки V_1 и V_2. Описываем из V_1 и V_2 дуги радиуса $V_1U_2 = U_1V_2$, которые пересекутся в точке W. Описываем из V_1 и V_2 дуги радиуса K_1W, которые пересекутся в точке O. Точка O и есть пересечение прямых DE и HK (см. задачу 20). Проводим наконец из точки O окружность радиуса OA. Она пройдет через точки B и C.

Доказательство. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит в точке пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах.

Задача 27. Построить прямоугольник с заданными сторонами и описать около него окружность.

Задача 28. Построить общие касательные к двум данным не пересекающимся окружностям.

Задача 29. Построить треугольник, зная середины его сторон.

Указание. Средние линии треугольника параллельны его сторонам.

Задача 30. Построить на данном отрезке, как на хорде дугу, вмещающую данный угол, т. е. найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Задача 31. Построить треугольник по основанию, противолежащему углу и высоте, соответствующей данному основанию.

Задача 32. Построить квадрат, равно великий данному треугольнику.

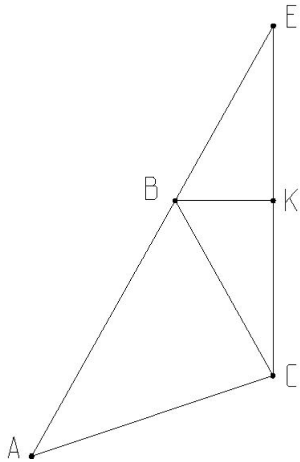
Указание. Треугольник дан его вершинами A, B и C. Построив высоту BE соответствующую основанию AC (см. задачи 4 и 20), найдем отрезок x так, чтобы $x^2 = AC \cdot \frac{1}{2} BE$ (см. задачу 22).

Задача 33. Разделить площадь данного треугольника ABC пополам прямою, параллельною одной из его сторон.

Указание. Если точка E лежит на AB, точка K на AC и $EK \parallel BC$, то вследствие подобия треугольников ABC и AEK имеем $AK^2 : AC^2 = \frac{1}{2}$, откуда $AK = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \sqrt{2}$ (см. п. 2 задачи 23 и задачу 13).

Задача 34. Построить треугольник по основанию, прилежащему углу и сумме двух других сторон.

Указание. Если ABC (черт. 31) есть искомый треугольник с заданным основанием AC и прилежащим углом A, если по продолжению AB отложим $BE = BC$, если $CK = KE$, то перпендикуляр, восставленный к CE в точке K пересечет AE в точке B. Таким образом надо построить сначала треугольник AEC и затем найти точку B.

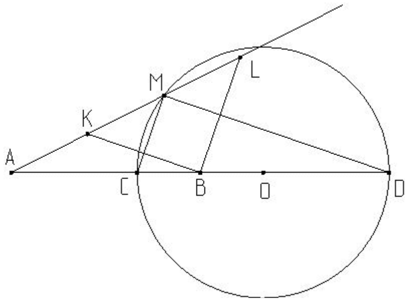


Черт. 31

Задача 35. Построить треугольник по основанию, прилежащему углу и разности двух других сторон.

Задача 36. Построить окружность Аполлония, т. е. геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек находятся в данном отношении.

Указание. Аполлоний — один из знаменитых греческих математиков древности — жил приблизительно за 200 лет до нашей эры. Он прославился исследованием конических сечений, т. е. кривых линий, получающихся в пересечении поверхности прямого круглого конуса плоскостями; при этом могут получиться окружность, эллипс, парабола и гипербола.



Черт. 32

Пусть данные точки суть A и B (черт. 32) и данное отношение есть $a : b$, где a и b суть или данные отрезки, или данные целые числа. Находим на прямой AB две такие точки C и D, чтобы $AC : CB = a : b$ и $AD : BD = a : b$. Тогда CD есть диаметр искомой окружности. Для доказательства возьмем на окружности произвольную точку M и докажем, что $AM : MB = a : b$. Проведя $BK \parallel DM$, получим:

$$AM : KM = AD : BD = a : b. \qquad (1)$$

Проведя $BL \parallel MC$, получим:

$$AM : ML = AC : CB = a : b. \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), заключаем, что $KM = ML$ и что MB есть медиана гипотенузы KL треугольника KBL, так как CMD есть прямой угол и $\angle CMD = \angle KBL$ как углы с параллельными сторонами. Итак, $MB = KM$ и, следовательно, равенство (1) превращается в

$$AM : MB = a : b,$$

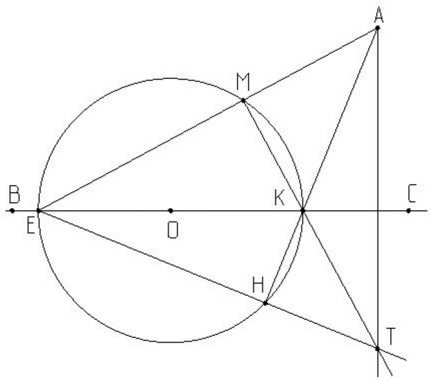
что и требовалось доказать.

Задача 37. Построить треугольник по основанию, противолежащему углу и отношению двух других сторон.

ГЛАВА III

ДОБАВЛЕНИЯ

Ознакомившись с содержанием предыдущей главы, а может быть и раньше, читатель, вероятно, задумается над вопросами о том, нельзя ли решать задачи на построение с помощью одной линейки и какие именно, какими инструментами и как решать задачи, неразрешимые с помощью циркуля и линейки.



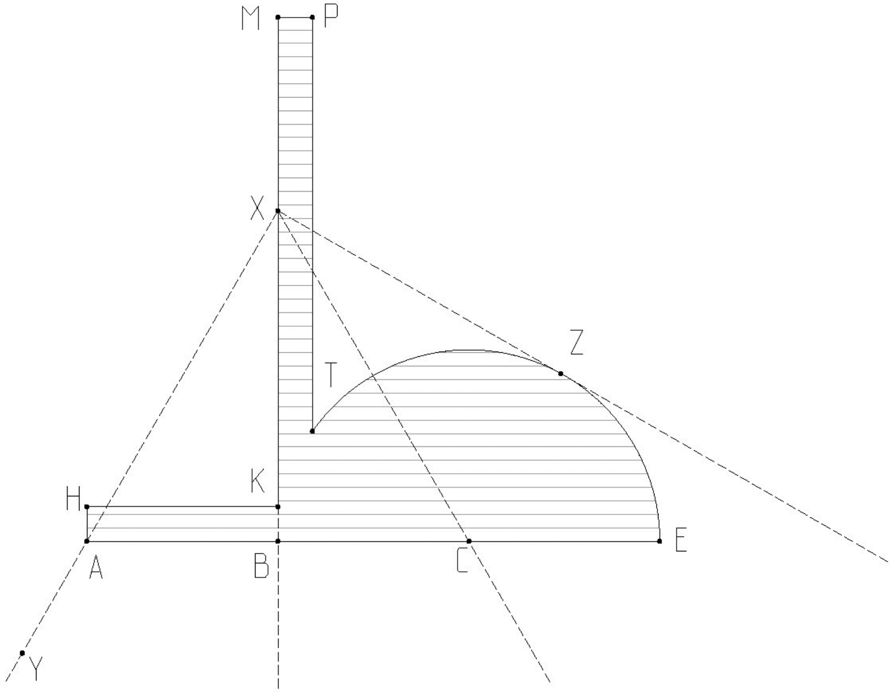
Черт. 33

Пользование только линейкою, т. е. проведение только прямых линий, очевидно, не позволяет выполнять все те основные операции, из которых слагается решение задач первой и второй степени (см. главу II, пп. 1-4 после задачи 24). Но, как показал в своем труде (напечатан в 1833 г.) о геометрических построениях немецкий математик Штейнер, всякая задача первой и второй степени решается с помощью только линейки, если дана вспомогательная окружность определенного радиуса и с центром в определенной точке.

Пусть требуется, например, опустить из точки A (черт. 33) перпендикуляр к прямой BC. Возьмем вспомогательную окружность произвольного радиуса с центром в точке O, лежащей на прямой BC. Соединяем точку A с точками E и K, находим в пересечении с окружностью точки M и H. Находим точку T пересечения прямых EH и MK. Утверждаем, что AT перпендикулярна BC. В самом деле, углы EMK и EHK — прямые, следовательно, AH и TM суть две высоты треугольника EAT, пересекающиеся в точке K. Следовательно, EK есть третья высота, т. е. EK или BC есть перпендикуляр к AT.

Вспомогательную окружность можно было бы взять или задать иначе; при всяком ее положении построение искомого перпендикуляра будет возможно, но более сложно.

Следует заметить, что штейнеровские построения вообще весьма громоздки, сложнее, чем операции с помощью одного циркуля.



Черт. 34

Здесь дан лишь один пример геометрии линейки. Полное изложение вопроса выходит за пределы темы этой книжки. Заметим, что существуют, кроме того, геометрия двухсторонней линейки, геометрия угольника. Иначе говоря, решение задач на построение первой и второй степени возможно применением или двухсторонней линейки (т. е. прибора, позволяющего начертить две параллельные прямые с заданным расстоянием между ними) или угольника (т. е. прибора, позволяющего начертить две прямые, пересекающиеся под прямым или заданным острым углом).

Из простейших приборов, решающих практически трисекцию угла, т. е. деление произвольного угла на три равные части, следует указать на такой, который легко делается из картона. Вырезается фигура *AETPMKH* (черт. 34), в которой существенными частями являются: а) отрезок *AE*, разделенный на три одинаковые части *AB* = *BC* = *CE*, б) дуга *ET* полуокружности, имеющей центр в точке *C* и радиус в *BC* = *CE*, в) прямая *MKB*, перпендикулярная к *AE* в точке *B*. Длина *MB* может быть произвольною; практически удобно, если *MB* в два раза (приблизительно) более *AE*. Отрезки *AH*, *HK* и прямая *TP* не являются существенными частями прибора, они необходимы только для его конструкции и практически достаточно, если *AH* и *MP* равны 1 см.

Чтобы разделить произвольный угол, например *YXZ*, на три равные части, устанавливаем наш прибор так, чтобы вершина *X* угла приходилась на прямой *MB*, чтобы одна сторона *XY* угла проходила через точку *A* и чтобы другая сторона *XZ* угла была касательною к дуге *ET*. Отметив точки *B* и *C*, соединяем их с точкою *X* и получаем:

$$\angle YXB = \angle BXC = \angle CXZ \ .$$

Действительно, $\angle YXB = \angle BXC$, так как прямоугольные треугольники *AXB* и *BXC* конгруэнтны, а $\angle BXC = \angle CXZ$, так как *XB* и *XZ* суть касательные к полуокружности *BTZE*.

Итак описанный прибор производит трисекцию угла геометрически точно. Так как существенными частями прибора являются полуокружность, точка *A*, отстоящая от центра на расстоянии радиуса по продолжению диаметра, и прямая *MB*, перпендикулярная к диаметру, то можно подумать, что трисекция угла осуществляется проведением прямых линий и окружностей, т. е. разрешима с помощью линейки и циркуля. Такое заключение ошибочно. Конструкция нашего прибора действительно не требует иных линий, кроме прямых и полуокружности, но при трисекции угла этим прибором мы не проводим их, мы не делаем построений, а пользуемся готовым сочетанием полуокружности и прямых.

Геометрически точные трисекция угла и удвоение куба производятся также другими инструментами или осуществляются построением различных кривых. Мы рекомендуем читателю, заинтересовавшемуся геометрическими построениями, ознакомиться с двумя книгами:

1. И. Александров, Сборник геометрических задач на построение, ГИЗ, 1924.
2. А. Адлер, Теория геометрических построений. Перевод с немецкого, изд. 2-е Матезис, Одесса 1924.

Оглавление