



# **Э**лементы прикладной математики

Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧ  
А.Д. МЫШКИС



Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, А. Д. МЫШКИС

# ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1972



**Элементы прикладной математики,**  
Я. Б. Зельдович, А. Д. Мыш-  
ки с, Главная редакция физико-мате-  
матической литературы изд-ва «На-  
ука», 1972.

В задачах физики, техники и практических вычислений используются численные и графические методы, ряды. В книге содержатся полезные приемы таких вычислений. В наглядной форме даются основные сведения о комплексном переменном, линейных дифференциальных уравнениях, векторах и векторных полях и вариационном исчислении.

Формальные доказательства в большинстве случаев заменены наводящими соображениями; за счет этого достигнуто упрощение и облегчено применение математических понятий. Подробно анализируются некоторые физические задачи, в частности относящиеся к оптике, механике, теории вероятностей.

Рис. — 208, табл. 6.

*Яков Борисович Зельдович,  
Анатолий Дмитриевич Мышкис*

#### ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

М., 1972 г., 592 стр. с илл.

Редактор А. А. Овчинников.

Техн. редактор С. Я. Шкаляр.

Корректоры Т. С. Плетнева, А. Л. Ипатова.

Сдано в набор 2/VI 1971 г. Подписано к печати 9/XI 1971 г. Бумага 60×90<sup>1/16</sup>.

Физ. печ. л. 37.

Условн. печ. л. 37.

Уч.-изд. л. 36,13.

Тираж 65 000 экз. Т-16376. Цена книги 1 р. 36 к. Заказ № 2119.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова  
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,  
Москва, М-54, Валовая, 28.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава I. Некоторые численные методы . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Численное интегрирование . . . . .	12
§ 2. Вычисление сумм при помощи интегралов . . . . .	17
§ 3. Численное решение уравнений . . . . .	25
Ответы и решения . . . . .	33
<b>Глава II. Математическая обработка результатов опыта . . . . .</b>	<b>36</b>
§ 1. Таблицы и разности . . . . .	36
§ 2. Интегрирование и дифференцирование функций, заданных таблично . . . . .	41
§ 3. Подбор формул по данным опыта по методу наименьших квадратов . . . . .	45
§ 4. Графический способ подбора формул . . . . .	51
Ответы и решения . . . . .	58
<b>Глава III. Дополнительные сведения об интегралах и рядах . . . . .</b>	<b>61</b>
§ 1. Несобственные интегралы . . . . .	61
§ 2. Интегрирование быстроменяющихся функций . . . . .	69
§ 3. Формула Стирлинга . . . . .	77
§ 4. Интегрирование быстроколеблющихся функций . . . . .	79
§ 5. Числовые ряды . . . . .	82
§ 6. Интегралы, зависящие от параметра . . . . .	93
Ответы и решения . . . . .	97
<b>Глава IV. Функции нескольких переменных . . . . .</b>	<b>100</b>
§ 1. Частные производные . . . . .	100
§ 2. Геометрический смысл функции двух переменных . . . . .	107
§ 3. Неявные функции . . . . .	108
§ 4. Радиолампа . . . . .	116
§ 5. Огибающая семейства линий . . . . .	118
§ 6. Ряд Тейлора и задачи на экстремум . . . . .	120
§ 7. Кратные интегралы . . . . .	127
§ 8. Многомерное пространство и число степеней свободы . . . . .	137
Ответы и решения . . . . .	141
<b>Глава V. Функции комплексного переменного . . . . .</b>	<b>144</b>
§ 1. Простейшие свойства комплексных чисел . . . . .	144
§ 2. Сопряженные комплексные числа . . . . .	147
§ 3. Возведение в мнимую степень. Формула Эйлера . . . . .	150
§ 4. Логарифмы и корни . . . . .	154
§ 5. Описание гармонических колебаний с помощью показательной функции от мнимого аргумента . . . . .	157
§ 6. Производная функции комплексного переменного . . . . .	164



§ 7. Гармонические функции . . . . .	166
§ 8. Интеграл от функции комплексного переменного . . . . .	168
§ 9. Вычеты . . . . .	172
Ответы и решения . . . . .	180
<b>Глава VI. Дельта-функция Дирака . . . . .</b>	<b>183</b>
§ 1. Дельта-функция Дирака $\delta(x)$ . . . . .	183
§ 2. Функция Грина . . . . .	188
§ 3. Функции, связанные с дельта-функцией . . . . .	193
§ 4. Понятие об интеграле Стильеса . . . . .	198
Ответы и решения . . . . .	199
<b>Глава VII. Дифференциальные уравнения . . . . .</b>	<b>201</b>
§ 1. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	201
§ 2. Интегрируемые типы уравнений первого порядка . . . . .	204
§ 3. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	212
§ 4. Простейшее линейное неоднородное уравнение второго порядка . . . . .	217
§ 5. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	224
§ 6. Устойчивые и неустойчивые решения . . . . .	230
Ответы и решения . . . . .	235
<b>Глава VIII. Дальнейшие сведения о дифференциальных уравнениях . . . . .</b>	<b>237</b>
§ 1. Особые точки . . . . .	237
§ 2. Системы дифференциальных уравнений . . . . .	239
§ 3. Определители и решение линейных систем с постоянными коэффициентами . . . . .	242
§ 4. Устойчивость по Ляпунову состояния равновесия . . . . .	247
§ 5. Построение приближенных формул для решения . . . . .	250
§ 6. Адиабатическое изменение решения . . . . .	258
§ 7. Численное решение дифференциальных уравнений . . . . .	261
§ 8. Краевые задачи . . . . .	269
§ 9. Пограничный слой . . . . .	275
§ 10. Подobie явлений . . . . .	276
Ответы и решения . . . . .	280
<b>Глава IX. Векторы . . . . .</b>	<b>282</b>
§ 1. Линейные действия над векторами . . . . .	283
§ 2. Скалярное произведение векторов . . . . .	287
§ 3. Производная от вектора . . . . .	289
§ 4. Движение материальной точки . . . . .	291
§ 5. Понятие о тензорах . . . . .	295
§ 6. Многомерное векторное пространство . . . . .	300
Ответы и решения . . . . .	303
<b>Глава X. Теория поля . . . . .</b>	<b>306</b>
§ 1. Введение . . . . .	306
§ 2. Скалярное поле и градиент . . . . .	307
§ 3. Потенциальная энергия и сила . . . . .	311
§ 4. Поле скорости и поток . . . . .	316
§ 5. Электростатическое поле, его потенциал и поток . . . . .	320
§ 6. Примеры . . . . .	323
§ 7. Общее векторное поле и его дивергенция . . . . .	332
§ 8. Дивергенция поля скорости и уравнение неразрывности . . . . .	336

§ 9. Дивергенция электрического поля и уравнение Пуассона . . . . .	339
§ 10. Вектор площадки и давление . . . . .	342
Ответы и решения . . . . .	346
<b>Глава XI. Векторное произведение и вращение . . . . .</b>	<b>349</b>
§ 1. Векторное произведение векторов . . . . .	349
§ 2. Некоторые приложения к механике . . . . .	353
§ 3. Движение в поле центральных сил . . . . .	356
§ 4. Вращение твердого тела . . . . .	363
§ 5. Симметрические и антисимметрические тензоры . . . . .	366
§ 6. Истинные векторы и псевдовекторы . . . . .	371
§ 7. Ротор векторного поля . . . . .	373
§ 8. Оператор Гамильтона «набла» . . . . .	379
§ 9. Потенциальные поля . . . . .	382
§ 10. Ротор поля скорости . . . . .	386
§ 11. Магнитное поле и электрический ток . . . . .	388
§ 12. Электромагнитное поле и уравнения Максвелла . . . . .	392
§ 13. Потенциал в многосвязной области . . . . .	396
Ответы и решения . . . . .	398
<b>Глава XII. Вариационное исчисление . . . . .</b>	<b>402</b>
§ 1. Пример перехода от конечного числа степеней свободы к бесконечному . . . . .	402
§ 2. Функционал . . . . .	408
§ 3. Необходимое условие экстремума . . . . .	411
§ 4. Уравнение Эйлера . . . . .	414
§ 5. Всегда ли существует решение поставленной задачи? . . . . .	419
§ 6. Варианты основной задачи . . . . .	423
§ 7. Условный экстремум для конечного числа степеней свободы . . . . .	425
§ 8. Условный экстремум в вариационном исчислении . . . . .	428
§ 9. Задачи на экстремум с ограничениями . . . . .	436
§ 10. Вариационные принципы. Принцип Ферма в оптике . . . . .	438
§ 11. Принцип наименьшего действия . . . . .	445
§ 12. Прямые методы . . . . .	449
Ответы и решения . . . . .	453
<b>Глава XIII. Теория вероятностей . . . . .</b>	<b>459</b>
§ 1. Постановка вопроса . . . . .	459
§ 2. Умножение вероятностей . . . . .	462
§ 3. Анализ результатов многих испытаний . . . . .	467
§ 4. Энтропия . . . . .	478
§ 5. Радиоактивный распад. Формула Пуассона . . . . .	483
§ 6. Другой вывод распределения Пуассона . . . . .	487
§ 7. Непрерывно распределенные величины . . . . .	488
§ 8. Случай весьма большого числа испытаний . . . . .	493
§ 9. Корреляционная зависимость . . . . .	500
§ 10. О распределении простых чисел . . . . .	505
Ответы и решения . . . . .	511
<b>Глава XIV. Преобразование Фурье . . . . .</b>	<b>516</b>
§ 1. Введение . . . . .	516
§ 2. Формулы преобразования Фурье . . . . .	520
§ 3. Причинность и дисперсионные соотношения . . . . .	527
§ 4. Свойства преобразования Фурье . . . . .	531
§ 5. Преобразование колокола и принцип неопределенности . . . . .	539
§ 6. Спектральный анализ периодической функции . . . . .	544



§ 7. Пространство Гильберта . . . . .	548
§ 8. Модуль и фаза спектральной плотности . . . . .	553
Ответы и решения . . . . .	556
<b>Глава XV. Электронные цифровые вычислительные машины . . . . .</b>	<b>559</b>
§ 1. Моделирующие вычислительные машины . . . . .	560
§ 2. Цифровые вычислительные машины . . . . .	561
§ 3. Запись чисел и команд в ЭЦВМ . . . . .	563
§ 4. Программирование . . . . .	568
§ 5. Пользуйтесь ЭЦВМ! . . . . .	574
Ответы и решения . . . . .	581
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>584</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является не систематическим учебником, а скорее, книгой для чтения. На простых примерах, взятых из физики, на различных математических задачах мы старались ввести читателя в круг идей и методов, широко распространенных сейчас в приложениях математики к физике, технике и некоторым другим областям. Некоторые из этих идей и методов (такие, как применение дельта-функции, принципа суперпозиции, получение асимптотических выражений и т. д.) еще недостаточно освещаются в распространенных математических учебниках для нематематиков, так что здесь наша книга может служить дополнением к этим учебникам. Нашей целью было пояснить основные идеи математических методов и общие закономерности рассматриваемых явлений. Напротив, формальные доказательства, рассмотрение исключений и усложняющих факторов по возможности опущены. Взамен этого мы в некоторых местах старались входить более подробно в физическую картину рассматриваемых процессов.

Предполагается, что читатель владеет основами дифференциального и интегрального исчисления для функций одной переменной, включая разложение таких функций в степенные ряды, и может применять эти разделы математики к решению физических задач. Достаточно (но не необходимо!), например, знакомство с книгой Я. Б. Зельдовича «Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике», на которую мы будем иногда ссылаться, обозначая ее буквами ВМ (имеется в виду издание 5, «Наука», 1970). Более того, настоящая книга в какой-то степени может рассматриваться как продолжение ВМ. В немногих местах изложение близко книге А. Д. Мышкиса «Лекции по высшей математике», издание 3 («Наука», 1969). Тем не менее настоящая книга является совершенно самостоятельной, поскольку от читателя никаких специальных познаний, помимо только что указанных, не потребуется.

Содержание книги ясно из прилагаемого оглавления. Ее не обязательно читать подряд: читатель может знакомиться с интересующими его разделами независимо от других разделов и только в явно указываемых случаях из этих других разделов потребуются отдельные сведения. Поэтому для удобства в начале отдельных глав и параграфов указываются сведения из предыдущих глав, знакомство



с которыми необходимо. Нумерация параграфов и формул производится в каждой главе самостоятельно, а при ссылках в пределах одной главы ее номер не указывается.

Книга может быть полезна студентам — инженерам, физикам и представителям других специальностей (в том числе, заочникам), начиная, примерно, с середины второго семестра 1-го курса в качестве пособия к изучаемому ими курсу математики. Она пригодна и практику, если он захочет подробнее ознакомиться с тем или иным разделом математики, который может понадобиться ему в его работе.

Несомненно, что разнородный материал трудно читать активно. Целеустремленная проработка обычно подразумевает читателя, перед которым жизнь поставила в данный момент одну определенную задачу. Такой читатель склонен пропускать все, что не относится к его задаче.

Возникает общий вопрос: целесообразно ли читать подобную книгу «впрок», не будет ли такое чтение поверхностным, не окажутся ли приведенные в ней советы забытыми вскоре после прочтения?

В ответ на это авторы могут высказать два аргумента.

Во-первых, мы везде старались давать не только практические рецепты, но и те глубокие общие идеи, из которых эти рецепты возникают. Такие идеи обогащают интеллект читателя, развивают его научный кругозор, дают возможность по-иному взглянуть на окружающий мир и потому задерживаются гораздо прочнее.

Второй аргумент относится к психологии памяти. Очень часто бывает так, что хотя Вы не можете воспроизвести прочитанное все подряд, в том порядке, в котором материал Вам преподносился, но этот материал не изгладился из памяти! Отдельные его части могут быть воспроизведены Вами при ассоциативном воспоминании, например, когда Вы сталкиваетесь с задачей, требующей того или иного приема. Даже смутное воспоминание о том, где можно найти этот материал, и то часто оказывается полезным\*). Говоря грубо, имеются вещи, понятия и связи, которые мы вспоминаем лишь тогда, когда это нам очень нужно. Вспомните, что сказал по аналогичному поводу монах Варлаам: «Я давно не читывал и худо разбираю, а тут уж разберу, как дело до петли доходит».

Итак, читайте нашу книгу и изучайте ее. Но даже если нет возможности изучать ее глубоко, читайте, как детектив, и, может быть, она поможет Вам найти решение трудных задач.

Пусть судьба хранит Вас от петли, но не от трудностей.

Только решая трудные задачи, человек полностью раскрывает свой талант, свои возможности, только в трудных задачах он дает максимальную отдачу.

---

\*) Следуя З. Фрейду, можно было бы сказать, что забытые теоремы находятся в подсознании, где-то рядом с подавленными импульсами раннего детства.

Мы будем благодарны читателям за любые замечания по содержанию и изложению материала книги. Несомненно, что на отдельных местах книги сказались различные навыки ее авторов, один из которых является физиком, а другой — математиком. Порой мы упорно тянули в разные стороны. Теперь сюда приложит свои усилия еще и читатель, так что все эти усилия будут складываться\*). Подобный случай был разобран еще в известной басне Крылова, однако мы надеемся, что у нас результаты будут не столь плачевны.

Авторы выражают свою признательность К. А. Семендяеву, который прочитал рукопись книги и сделал ряд ценных замечаний.

По истечении четырех лет оказалось необходимым новое, третье издание книги. Этот факт авторы рассматривают как одобрение основного замысла — вооружить читателя практически полезными методами и сведениями, предельно упрощая и облегчая формальные определения и доказательства.

Вместе с тем, новое издание налагает и новую ответственность. Поэтому книга была подвергнута тщательному пересмотру (в котором большое участие принял редактор А. А. Овчинников) и добавлены важные разделы.

В третьем издании значительно переработаны §§ IX.1, IX.2, расширены §§ X.9, XIV.4, XIV.7, добавлены §§ III.4, VIII.10, XI.3, XI.5, XIV.8 и небольшая гл. XV. При этом были учтены замечания А. Н. Тихонова, которому авторы выражают свою признательность.

Наиболее существенным добавлением является глава XV, посвященная электронным цифровым машинам. В ней изложены принципы действия машин и программирования наиболее простых задач. Эта глава не должна заменять специальные учебники для программистов, однако она позволяет понять некоторые общие принципы и специфику численных расчетов.

В третьей главе подробнее рассмотрено интегрирование быстроколеблющихся функций. В главе VIII добавлен параграф о подобии явлений, в котором с физической и математической сторон рассматриваются теория размерности, понятие подобия и автомодельности.

В главах IX и XI более подробно и четко даны определения вектора и тензора, связь этих понятий с линейными преобразованиями. Подробно рассмотрены симметрические и антисимметрические тензоры; в частности, описано введение псевдовектора, эквивалентного антисимметричному тензору в трехмерном пространстве. Добавлены физические задачи о движении точки в поле центральных сил и о вращении твердого тела. Эти задачи были и остаются классическими примерами приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений к физике.

---

\*) Сложение сил по векторному закону изложено в гл. IX.

В связи с теорией спектрального разложения рассмотрен вопрос о фазе Фурье-компонент; потеря информации при переходах к спектральной плотности стала привычной, полезно напомнить о том, что, кроме квадрата модуля, колебания характеризуются также фазой.

В целом мы надеемся, что добавления, не меняя общей устремленности и доступности изложения, делают книгу более физической и несколько более современной.

Мы отдаем себе отчет в том, что название книги не вполне отражает ее содержание; может быть, ее следовало бы назвать как-то иначе. Однако для того, чтобы было ясно, что эта книга является новым изданием предыдущей, основа которой осталась прежней, мы были вынуждены название сохранить.

В заключение добавим, что в настоящее время авторы заканчивают работу над книгой «Среда из невзаимодействующих частиц», которая непосредственно примыкает к настоящей книге и составляет первую часть курса математической физики.

## ГЛАВА I

### НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Решение физической задачи, полученное в математических терминах, например в виде комбинации различных функций, производных, интегралов и т. п., нужно уметь «довести до числа», которое чаще всего и служит окончательным ответом. Для этого в различных разделах математики выработаны разнообразные численные методы. В элементарной математике рассматриваются, как правило, лишь методы точного решения поставленных задач — решения уравнений, геометрических построений и т. п. Это является ее слабой стороной, так как такое решение возможно в очень редких случаях (что приводит к резкому сокращению круга рассматриваемых задач), а если и возможно, то часто получается чрезвычайно громоздким. Даже такой сравнительно простой вопрос, как решение общих (с произвольными коэффициентами) алгебраических уравнений  $n$ -й степени, оказался в рамках элементарной математики при  $n > 2$  непомерно сложным и громоздким, а при  $n > 4$  и вовсе неразрешимым. И только систематическое применение методов приближенных вычислений на основе аппарата высшей математики дало возможность доводить до конца, и притом единообразным способом, решение широкого класса важных для приложений математических задач. Более того, развитие численных методов высшей математики и внедрение современной вычислительной техники привели к тому, что если какая-либо задача достаточно четко сформулирована математически, то (за исключением уж особо сложных случаев) она обязательно будет решена с достаточной для практики точностью. Таким образом, высшая математика дает не только идеи, лежащие в основе анализа физических явлений, но и численные методы, позволяющие довести решение конкретных задач физики и техники до конца.

Некоторые из этих методов указываются и в начальном курсе дифференциального и интегрального исчисления: например, простейшие методы вычисления производных и интегралов, вычисление значений функции с помощью рядов и т. п. В этой и в последующих главах (в частности, гл. II, III, VIII) мы остановимся на таких методах более подробно. Они не связаны непосредственно один с другим и потому с ними можно знакомиться независимо.

## § 1. Численное интегрирование

Когда та или иная практическая задача сведена к вычислению определенного интеграла, то можно сказать, что самая трудная часть дела уже позади. Если подынтегральная функция  $f(x)$  такова, что можно выразить неопределенный интеграл  $F(x)$  при помощи конечного числа элементарных функций, то величину определенного интеграла принципиально получить нетрудно, пользуясь формулой

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$
 При этом придется выполнять ряд арифметических действий для того, чтобы найти значения величин  $F(b)$  и  $F(a)$ . На практике, однако, это может привести к существенным затруднениям, так как для неопределенного интеграла  $F(x)$  может получиться очень сложная формула.

Указанный способ может оказаться и вовсе непригодным, если (а это случается нередко) не удастся получить формулу для неопределенного интеграла.

Иногда рассматриваемый интеграл выражается через неэлементарные, но хорошо изученные функции, для которых составлены подробные таблицы (см., в частности, книгу: Е. Янке, Ф. Эмде и Ф. Леш, Специальные функции, «Наука», 1968). К таким функциям относятся, например,

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx$$

и т. д. Эти интегралы, не выражающиеся через элементарные функции, даже имеют специальные наименования: интеграл ошибок (см. гл. XIII), интегральный синус и т. д.

В других случаях интеграл удастся вычислить, разлагая подынтегральную функцию в ряды того или иного вида. Например, для интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции. Тем не менее, воспользовавшись рядом Тейлора для синуса

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

получаем

$$I = \int_0^1 \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots$$

Вычисляя последовательно члены полученного ряда, мы останавливаемся, когда достигаем выбранной разумной степени точности. Например, при вычислении с точностью до 0,001 достаточно ограничиться тремя первыми членами ряда, что даст значение  $I=0,946$ .

Некоторые определенные интегралы удастся подсчитать точно с помощью методов теории функций комплексного переменного. Так, например, в § V.9 мы покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx = \pi e^{-\omega} \quad (\omega > 0), \quad (1)$$

хотя соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции.

Если и эти методы непригодны, то величину определенного интеграла можно подсчитать численно с помощью формул численного интегрирования, к которым мы сейчас переходим.

Простой и вместе с тем хороший способ (который был уже освещен в ВМ, § I. 7) состоит в следующем: промежуток интегрирования разбиваем на несколько малых равных частей. Интеграл по каждому малому промежутку приближенно считаем равным произведению

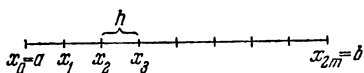


Рис. 2.

длины промежутка на среднее арифметическое значений подынтегральной функции в начале и в конце промежутка. Этот способ называется *способом трапеций*, потому что получается такой результат, как если бы в каждом малом промежутке дуга графика  $y=f(x)$  заменялась на ее хорду, а площадь под этой дугой (величина интеграла) заменялась площадью получающейся трапеции с вертикальными основаниями (рис. 1). Соответствующая формула имеет вид (проверьте!)

$$\int_a^b y dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left( \frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \quad (2)$$

где для краткости обозначено  $f(x_i)=y_i$ .

Еще более эффективную формулу можно получить, если кривую  $y=f(x)$  на малом интервале заменить параболой, т. е. графиком квадратичной зависимости. Разобьем промежуток интегрирования от  $x=a$  до  $x=b$  на четное число  $2m$  равных промежутков. Границы промежутков пусть будут  $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_{2m}=b$  (рис. 2). Длину одного промежутка обозначим через  $h$ , так что  $x_1=x_0+h, x_2=x_1+h=x_0+2h, \dots, x_{2m}=x_{2m-1}+h=x_0+2mh$ .

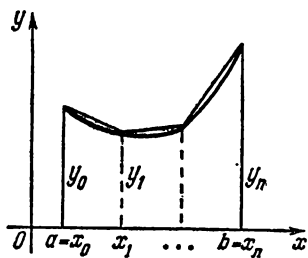


Рис. 1.

Рассмотрим

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx,$$

т. е. вклад в исходный интеграл от первых двух промежутков. Кривую  $y=f(x)$  на промежутке от  $x=x_0$  до  $x=x_2$  заменим параболой, проходящей через точки  $(x_0; y_0)$ ,  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$ ; и площадь под кривой приближенно заменим площадью под параболой. Уравнение параболы имеет вид  $y=mx^2+nx+l$ . Коэффициенты  $m$ ,  $n$ ,  $l$  определяются из условия, что парабола проходит через три данные точки:

$$\begin{cases} y_0 = mx_0^2 + nx_0 + l, \\ y_1 = mx_1^2 + nx_1 + l, \\ y_2 = mx_2^2 + nx_2 + l. \end{cases}$$

Однако это приводит к довольно длинным выкладкам.

Проще поступить так. Будем искать уравнение параболы в виде  $y=A(x-x_0)(x-x_1)+B(x-x_0)(x-x_2)+C(x-x_1)(x-x_2)$ . (3)

Ясно, что справа в (3) стоит многочлен второй степени, так что (3) действительно есть уравнение параболы. Положим в (3)  $x=x_0$ , получим  $y_0=C(x_0-x_1)(x_0-x_2)$ , или  $y_0=C2h^2$ ; полагая в (3)  $x=x_1=x_0+h$ , получим  $y_1=-Bh^2$ ; наконец, полагая в (3)  $x=x_2=x_0+2h$ , получим  $y_2=2Ah^2$ . Отсюда

$$A = \frac{y_2}{2h^2}; \quad B = -\frac{y_1}{h^2}; \quad C = \frac{y_0}{2h^2}. \quad *) \quad (4)$$

Площадь под параболой есть

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+2h} [A(x-x_0)(x-x_1)+B(x-x_0)(x-x_2)+ \\ + C(x-x_1)(x-x_2)] dx = A \frac{2}{3} h^3 - B \frac{4}{3} h^3 + C \frac{2}{3} h^3. \end{aligned}$$

(При выполнении интегрирования удобно сделать замену переменной  $x-x_1=s$ ; при этом надо учесть, что  $x_0=x_1-h$ ,  $x_2=x_1+h$ .) Поэтому

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx A \frac{2}{3} h^3 - B \frac{4}{3} h^3 + C \frac{2}{3} h^3.$$

---

\*) Отметим, что совершенно аналогично решается следующая задача: найти многочлен степени  $n$ , принимающий заданные значения для  $n+1$  значений  $x$ . Эта интерполяционная задача встречается при подборе эмпирических формул (см. § II. 4), при действиях с функциями, заданными таблично, и т. д.

Пользуясь (4), находим

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (5)$$

Таким же способом можно подсчитать  $\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx, \dots, \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x) dx$ .  
Для интеграла по всему промежутку от  $x=a$  до  $x=b$  получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots \\ \dots + (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})],$$

откуда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + \\ + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})], \quad (6)$$

где  $h = \frac{b-a}{2m}$ . Эта формула называется *формулой Симпсона*.

Если переписать формулу (5) в виде

$$\frac{1}{2h} \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx \approx \frac{2}{3} y_1 + \frac{y_0 + y_2}{6},$$

то получим, что формула Симпсона основана на приближенной замене среднего значения  $\bar{y}$  функции  $y(x)$  на промежутке от  $x_0$  до  $x_0 + 2h$  на

$$\bar{y} \approx \frac{2}{3} y_1 + \frac{y_0 + y_2}{6}. \quad (7)$$

Формула трапеций дала бы (проверьте!)

$$\bar{y} \approx \frac{1}{2} y_1 + \frac{y_0 + y_2}{4}. \quad (8)$$

Для проверки вида формул можно положить  $y(x) \equiv k = \text{const}$ , откуда и  $\bar{y} = k$ ; тогда обе формулы становятся точными. Из вывода формул следует, что обе формулы (7) и (8) являются точными для линейных функций (вида  $y = px + n$ ), а формула (7) — также и для квадратичных функций (вида  $y = px^2 + nx + l$ ). Интересно отметить, что формула (7) на самом деле является точной и для кубических функций ( $y = px^3 + nx^2 + lx + k$ ).

При разбиении промежутка на то же самое число частей формула Симпсона, как правило, значительно точнее формулы трапеций.



Рассмотрим примеры.

1. Найти  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ .

Разобьем промежутки интегрирования на две части и подсчитаем интеграл по формуле трапеций и по формуле Симпсона.

Находим необходимые значения подынтегральной функции

$x$	0	0,5	1
$y$	1	0,6667	0,5

Формула трапеций дает

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{1+0,5}{2} + 0,6667 \right) = 0,7083.$$

Формула Симпсона дает

$$I = \frac{1}{6} (1 + 4 \cdot 0,6667 + 0,5) = 0,6944.$$

Так как  $I = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 = 0,6931$  (с точностью до четырех знаков), то формула Симпсона дала ошибку примерно 0,2%, а формула трапеций 2%.

2. Найти  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ . (Заметим, что  $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$  не берется

в элементарных функциях.) Разбиваем промежуток так же, как и в примере 1, и находим необходимые значения подынтегральной функции

$x$	0	0,5	1
$y$	0	0,324	0,346

По формуле трапеций получаем  $I = \frac{1}{2} \left( \frac{0,346}{2} + 0,324 \right) = 0,248$ . По формуле Симпсона  $I = \frac{1}{6} (0,324 \cdot 4 + 0,346) = 0,274$ . Точное значение (с тремя верными знаками) этого интеграла есть 0,272. Поэтому ошибка при подсчете по формуле трапеций составила около 10%, а по формуле Симпсона менее 1%.

Преимущество формулы Симпсона особенно сказывается при увеличении числа  $n$  интервалов разбиения. Можно показать, что при этом ошибка формулы трапеций убывает обратно пропорционально  $n^2$ , а ошибка формулы Симпсона — обратно пропорционально  $n^4$  (в том случае, если производная третьего порядка от интегрируемой функции остается на интервале интегрирования конечной).

Приведенные примеры показывают, насколько быстро и просто численные методы позволяют находить интегралы. Часто даже в тех случаях, когда для интеграла можно получить точную формулу, его быстрее и легче найти численным интегрированием.

После смерти великого итальянского физика Энрико Ферми, построившего первый урановый котел, были опубликованы странички из его рабочей тетради. По ходу расчетов надо было вычислить интеграл. Ферми предпочел найти его численно, хотя интеграл можно было выразить через логарифмы и арктангенс.

### Упражнения

1. Найдите величины следующих интегралов по формуле Симпсона и по формуле трапеций, разбивая промежуток интегрирования на 4 части:

$$\text{а) } \int_1^3 \frac{dx}{x}, \quad \text{б) } \int_0^2 e^{-x^2} dx, \quad \text{в) } \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Вычисления ведите в пределах точности логарифмической линейки. Значения показательной функции можно взять, например, из справочника по математике И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева \*).

2. Найдите  $\int_0^3 \frac{x dx}{e^x + 1}$  по формуле Симпсона, разбивая промежуток интегрирования на 4 части. Вычисления ведите с четырьмя знаками после запятой. Для контроля найдите величину этого же интеграла, разбивая промежуток интегрирования на 6 частей.

3. Проверьте непосредственно, что формула (8) является точной для многочленов первой степени, а формула (7) — для многочленов второй степени.

У к а з а н и е. Проверьте сначала точность этих формул для функции  $y = x$ , а формулы (7) — для функции  $y = x^2$ .

## § 2. Вычисление сумм при помощи интегралов

Рассмотрим суммы нескольких чисел, образованные по определенному закону, например,

$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6,$$

или

$$S_{99} = \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \dots + \sqrt{99} + \sqrt{100},$$

или

$$S_{21} = 1 + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,3} + \dots + \frac{1}{2,9} + \frac{1}{3,0}.$$

Сумму обозначаем буквой  $S$ . Индекс, стоящий внизу у этой буквы, указывает на число членов в сумме. Каждую такую сумму можно

\*) И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, Справочник по математике, «Наука», 1964.

записать более компактно, если удастся установить связь между величиной отдельного слагаемого в сумме и его номером. Так в первой сумме слагаемое  $a_n$  просто равно номеру  $n$ , который меняется от 1 до 6, а потому первая сумма равна

$$S_6 = \sum_{n=1}^6 a_n = \sum_{n=1}^6 n.$$

Иногда бывает удобнее, чтобы номер начинался от нулевого; тогда надо обозначить  $n-1=m$ , т. е.  $n=m+1$ , что даст

$$S_6 = \sum_{m=0}^5 (m+1);$$

впрочем, здесь вместо  $m$  можно вновь писать  $n$  или любую другую букву, так как индекс суммирования является «немым», т. е. величина суммы не зависит от его обозначения. (В этом индекс суммирования аналогичен переменной интегрирования в определенном интеграле; ср. ВМ, § 1.8). Обратите внимание на то, что в последней сумме индекс меняется от 0 до 5, а число слагаемых в соответствии с этим равно шести.

Подобным образом, вторую из выписанных сумм можно записать так:

$$S_{96} = \sum_{p=5}^{100} \sqrt{p}.$$

Однако лучше, чтобы индекс менялся от 1 или от 0; для этого надо обозначить  $p-4=m$  или  $p-5=n$ , что даст

$$S_{96} = \sum_{m=1}^{96} \sqrt{m+4} = \sum_{n=0}^{95} \sqrt{n+5}.$$

Третья сумма имеет вид

$$S_{21} = \sum_{n=0}^{20} \frac{1}{1+0,1n}.$$

Мы видим, что ее можно рассматривать как сумму значений функции  $f(x) = \frac{1}{x}$ , когда  $x$  принимает значения от  $x=1$  до  $x=3$  через 0,1 (этот подход полезен для дальнейшего). И в других случаях часто бывает удобно рассматривать заданную сумму как сумму значений некоторой функции  $f(x)$  для  $x$ , меняющегося от некоторого  $x=a$  до  $x=b$  с постоянным интервалом  $\Delta x=h$ .

Выписанные суммы не так трудно вычислить, однако, если сумма состоит из большого числа членов, то ее вычисление становится утомительным. К тому же часто приходится сравнивать суммы, составленные по одному и тому же закону, но с разным числом чле-

нов. В этом случае желательно знать не только величину суммы при некотором конкретном числе ее членов, но и зависимость величины суммы от числа ее членов.

Во многих случаях можно приближенно находить суммы при помощи интегралов.

Вспомним, что изучение определенных интегралов начинают с приближенного представления интеграла в виде суммы конечного числа членов. Затем устанавливают, что точное интегрирование многих функций с помощью неопределенных интегралов не представляет затруднений.

Воспользуемся этим для вычисления сумм.

Запишем формулу трапеций, дающую приближенное выражение интеграла в виде суммы. Если промежуток интегрирования от  $x=a$  до  $x=b$  разбит на  $n$  равных промежутков длиной  $\frac{b-a}{n}=h$  каждый, то

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2} f(a+nh) \right],$$

где  $a+nh=b$ .

Из этой формулы мы получаем следующее выражение для суммы:

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b) \approx \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b). \quad (9)$$

Отбрасывая в правой части (9) слагаемое  $\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)$ , что оправдано, если

$$\frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx \gg \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b),$$

т. е. если число членов суммы велико и функция  $f(x)$  меняется не слишком быстро, мы получим более грубую формулу:

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b) \approx \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx. \quad (10)$$

Если величина  $h$  мала, то можно воспользоваться приближенными формулами

$$\frac{1}{2} f(a) \approx \frac{1}{h} \int_{a-\frac{1}{2}h}^a f(x) dx, \quad \frac{1}{2} f(b) \approx \frac{1}{h} \int_b^{b+\frac{1}{2}h} f(x) dx.$$

Тогда из (9) получаем

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b) \approx \\ \approx \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{h} \int_{a-\frac{1}{2}h}^a f(x) dx + \frac{1}{h} \int_b^{b+\frac{1}{2}h} f(x) dx,$$

или

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b) \approx \frac{1}{h} \int_{a-\frac{h}{2}}^{b+\frac{h}{2}} f(x) dx. \quad (11)$$

При выводе формул (10) и (11) мы исходили из формулы (9), а она получена из формулы трапеций, которая является приближенной. Поэтому хотя (9) и (11) точнее формулы (10), они, однако, тоже приближенные, а не точные формулы. При уменьшении величины  $h$  и соответствующем увеличении числа членов суммы точность формул возрастает.

Применим полученные формулы к вычислению сумм, приведенных в начале параграфа.

Для суммы  $S_6 = 21$ ,  $f(x) = x$ ,  $h = 1$ . По формуле (10) получаем

$$\int_1^6 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^6 = 17,5.$$

Ошибка составляет 17%. По формуле (9) находим

$$S_6 \approx \int_1^6 x dx + \frac{1}{2} + \frac{6}{2} = 21.$$

Наконец, по формуле (11) находим

$$S_6 \approx \int_{0,5}^{6,5} x dx = \frac{(6,5)^2}{2} - \frac{(0,5)^2}{2} = 21.$$

При применении формул (9) и (11) мы получили абсолютно точный результат. Это связано с тем, что в рассматриваемом примере функция  $f(x)$  линейная (см. упражнение 3).

Для следующей суммы  $S_{96} = \sqrt{5} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{100}$  получаем, учитывая, что  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $h = 1$ , по формуле (10)

$$\int_5^{100} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_5^{100} = \frac{2}{3} (1000 - 5\sqrt{5}) = 659,2.$$

По формуле (9) находим  $S_{96} \approx 665,3$  и по формуле (11) находим  $S_{96} \approx 665,3$ . Значение суммы  $S_{96}$ , вычисленное непосредственно (с точностью до четырех значащих цифр), есть также 665,3.

Для последней суммы  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $h = 0,1$ . Поэтому по формуле (10) получаем

$$S_{21} \approx \frac{1}{0,1} \int_1^3 \frac{dx}{x} = 10 \ln 3 = 10,99.$$

По формуле (9) находим  $S_{21} \approx 11,66$  и по формуле (11) получаем  $S_{21} \approx 11,51$ . Значение суммы, вычисленное непосредственно, есть  $S_{21} = 11,66$  (с точностью до двух знаков после запятой).

В приведенных примерах формулы (9) и (11) дают вполне удовлетворительную точность, так что ими и следует пользоваться на практике. Грубая формула (10) может быть полезной для формулировки закона возрастания суммы при неограниченном увеличении числа ее членов. Однако при всех численных расчетах с определенным числом членов суммы надо пользоваться формулой (11), которая не сложнее (10), но значительно точнее\*).

Во всех рассмотренных нами примерах отдельные слагаемые, входящие в состав суммы, имели одинаковые знаки.

Если слагаемые имеют разные знаки, то для вычисления суммы при помощи интеграла надо было бы рассматривать интеграл от функции, меняющей знак несколько раз на промежутке интегрирования. Для таких интегралов формула трапеций дает очень плохие результаты. Поэтому полученные нами формулы годятся только для сумм, в которых все слагаемые имеют один знак, и неприменимы к суммам, у которых отдельные слагаемые имеют разные знаки. В частности, полученные формулы неприменимы к суммам, в которых слагаемые меняют знак через один. Суммы такого рода называются *знакопеременяющимися*. Примером знакопеременяющейся суммы может служить

$$S_8 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}.$$

Как же находить такие суммы?

Если члены знакопеременяющейся суммы убывают (или возрастают) по абсолютной величине, так что абсолютная величина каждого последующего члена меньше (или больше) абсолютной величины предыдущего члена, то можно применить следующий прием.

---

\*) Применение формулы (10) связано с очевидной систематической ошибкой, получающейся из-за отбрасывания двух слагаемых при выводе этой формулы. Если все слагаемые одинаковые, т. е.  $f(x) = A = \text{const}$ , а  $(b-a)/h = n$ , то рассматриваемая сумма равна  $(n+1)A$ , тогда как формула (10) дает только  $nA$  (а формула (11) дает в этом случае точное значение).

Объединим попарно соседние положительные и отрицательные члены. После этого задача сводится к вычислению суммы, у которой знаки всех членов одинаковы.

Так, например,

$$S_8 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \\ + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{10 \cdot 11}.$$

Будем считать, что исходная знакочередующаяся сумма состоит из четного числа членов. Тогда если она начинается с положительного члена, то кончается отрицательным. Такую сумму можно записать в виде

$$S_{n+1} = f(a) - f(a+h) + f(a+2h) - f(a+3h) + \dots - f(b), \quad (12)$$

где положено  $b = a + nh$ .

Разность между двумя соседними членами этой суммы можно записать так:

$$f(a+kh) - f(a+(k+1)h) \approx -h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h} = \\ = -h \cdot f' \left( a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right).$$

Это равенство приближенное, однако оно тем точнее, чем меньше  $h^*$ . Сумма (12) принимает вид

$$S_{n+1} \approx -h \left[ f' \left( a + \frac{h}{2} \right) + f' \left( a + \frac{5}{2} h \right) + \dots + f' \left( b - \frac{h}{2} \right) \right]. \quad (13)$$

Применим к правой части формулу (11). Заметим, что в формуле (11)  $h$  представляет собой разность между соседними значениями независимой переменной. В формуле (13) эта разность равна  $a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h - \left[a + \left(k - \frac{3}{2}\right)h\right] = 2h$ . Поэтому, применяя формулу (11), мы должны

---

\*) Если обозначать  $a+kh=x$  и поменять знаки, то последнее равенство можно переписать в виде  $f(x+h) - f(x) \approx hf' \left( x + \frac{h}{2} \right)$ . Легко оценить его точность: в самом деле, по формуле Тейлора

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 + \dots, \\ hf' \left( x + \frac{h}{2} \right) = h \left[ f'(x) + f''(x) \frac{h}{2} + \frac{f'''(x)}{2} \left( \frac{h}{2} \right)^2 + \dots \right].$$

Таким образом, разложения различаются, лишь начиная с членов третьего порядка малости в сравнении с  $h$ .

вместо  $h$  взять  $2h$ ; тогда получаем

$$S_{n+1} \approx -h \cdot \frac{1}{2h} \int_{a+\frac{h}{2}-h}^{b-\frac{h}{2}+h} f'(x) dx = -\frac{1}{2} f(x) \Big|_{a-\frac{h}{2}}^{b+\frac{h}{2}} = \\ = \frac{f\left(a-\frac{h}{2}\right) - f\left(b+\frac{h}{2}\right)}{2}. \quad (14)$$

Применим эту формулу для вычисления суммы

$$S_8 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}.$$

Здесь

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a=4, \quad b=11, \quad h=1,$$

поэтому находим

$$S_8 \approx \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{3,5} - \frac{1}{11,5} \right) = 0,0994.$$

Непосредственное суммирование дает  $S_8 = 0,0968$  (ошибка менее 3%).

Если знакочередующаяся сумма имеет нечетное число членов, то, начинаясь с члена  $f(a)$ , она кончается членом  $f(b)$  того же знака, что и  $f(a)$ . В этом случае мы сперва по формуле (14) найдем сумму без последнего члена  $f(b)$ , а затем добавим этот член:

$$S_{n+1} = f(a) - f(a+h) + f(a+2h) - \dots + f(b) \approx \\ \approx \frac{1}{2} \left[ f\left(a-\frac{h}{2}\right) - f\left(b-\frac{h}{2}\right) \right] + f(b).$$

Если  $h$  мало, то для вычисления  $f\left(b \pm \frac{h}{2}\right)$  можно ограничиться двумя первыми членами ряда Тейлора:

$$f(x) = f(b) + f'(b) \cdot (x-b) + \dots$$

Полагая здесь  $x = b - \frac{h}{2}$ , найдем  $f\left(b - \frac{h}{2}\right) \approx f(b) - \frac{h}{2} f'(b)$ , а полагая  $x = b + \frac{h}{2}$ , найдем  $f\left(b + \frac{h}{2}\right) \approx f(b) + \frac{h}{2} f'(b)$ . Поэтому

$$f(b) - \frac{1}{2} f\left(b - \frac{h}{2}\right) \approx f(b) - \frac{1}{2} f(b) + \frac{1}{4} h f'(b) = \\ = \frac{1}{2} \left[ f(b) + \frac{h}{2} f'(b) \right] \approx \frac{1}{2} f\left(b + \frac{h}{2}\right).$$



Окончательно сумма для случая нечетного числа членов равна

$$S_{n+1} \approx \frac{f\left(a - \frac{h}{2}\right) + f\left(b + \frac{h}{2}\right)}{2}. \quad (15)$$

Эта формула не менее точна, чем (14), с помощью которой она получена. Рассмотрим пример:

$$S_9 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12}.$$

По формуле (15) получаем  $S_9 \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3,5} + \frac{1}{12,5} \right) = 0,1829$ , непосредственное суммирование дает  $S_9 = 0,1801$ . Ошибка составляет примерно 1,5%. Отметим, что величина знакопередающей суммы, как это видно из формул (14) и (15), имеет тот же порядок, что и отдельные слагаемые. Поэтому добавление одного члена существенно меняет эту величину. Так, в рассмотренном примере  $S_9$  почти в два раза больше, чем  $S_8$ .

Отметим существенное различие между знакопередающей суммой и суммой с членами одного знака. Будем увеличивать число членов суммы так, что первый и последний члены не изменяются и не меняется закон образования суммы. Для этого будем уменьшать различие между соседними членами суммы, т. е. уменьшать величину  $h$ . Таким способом можно из суммы  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  получить суммы  $1 +$

$$+ \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,3} + \dots + \frac{1}{3}, \text{ или } 1 + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,02} + \dots + \frac{1}{3}.$$

Если все члены суммы имеют одинаковый знак, то величина суммы приблизительно пропорциональна числу членов. Это видно, например, из формулы (10). Действительно, перед интегралом в правой части (10) стоит множитель  $\frac{1}{h}$ , а величина  $h$  обратно пропорциональна числу членов суммы. Поэтому в описанном процессе величина суммы неограниченно возрастает вместе с ростом числа членов суммы.

В случае знакопередающей суммы с четным числом слагаемых ее величина при описанном увеличении числа членов приближается к определенному числу, не зависящему от количества членов суммы, а именно, к

$$S = \frac{f(a) - f(b)}{2}. \quad (16)$$

Это легко усмотреть из формулы (14), так как при большом числе членов  $h$  будет близко к нулю и потому  $f\left(a - \frac{h}{2}\right) \approx f(a)$ ,  $f\left(b + \frac{h}{2}\right) \approx f(b)$ . Аналогично при нечетном числе слагаемых из

формулы (15) в пределе получаем другое значение, а именно:

$$S = \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (17)$$

Заметим, что при малом числе слагаемых, т. е. когда величина  $h$  велика, упрощенные формулы (16) и (17) гораздо хуже формул (14) и (15). Рассмотрим пример. Пусть  $S = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$ . По упрощенной формуле (16) получаем  $S \approx -\frac{3}{2}$  (ошибка 25%), а формула (14) дает

$$S \approx \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(4 + \frac{1}{2}\right) \right] = -2,$$

т. е. точный результат.

Выражения для сумм, которые были получены нами, являются приближенными, причем их точность увеличивается, когда соседние члены в сумме становятся более близкими друг к другу, т. е. когда уменьшается величина  $h$ .

### Упражнения

1. Найдите сумму  $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}$ , пользуясь формулой (11). Сравните с величинами, найденными непосредственным суммированием для  $n=3; 4; 5$ .

2. Найдите величину суммы

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{20\sqrt{20}}.$$

3. Докажите, что формулы (9) и (11) абсолютно точны, если  $f(x)$  — линейная функция; при этом члены суммы образуют арифметическую прогрессию.

## § 3. Численное решение уравнений

В практических вычислениях довольно часто приходится сталкиваться с численным решением уравнений вида

$$f(x) = 0, \quad (18)$$

где  $f$  — заданная функция. Такие уравнения могут быть алгебраическими или трансцендентными (т. е. неалгебраическими, например тригонометрическими и т. п.); как те, так и другие иногда называются *конечными* в отличие, например, от дифференциальных уравнений. Сейчас имеется большое число методов решения различных классов уравнений вида (18). Мы рассмотрим лишь три наиболее универсальных метода, широко применяемых и в других отделах математики.

Обычно начинают с нахождения грубого, совсем приближенного решения, так называемого *нулевого приближения*. Если решается физическая задача, то это грубое решение может быть известно из

физического смысла задачи. Можно набросать график функции  $f(x)$  и получить грубое решение, наметив точку пересечения этого графика с осью  $x$ .

Допустим, что такое грубое решение  $x_0$  нам известно. Обозначим тогда точное решение, нам пока неизвестное, через  $\bar{x} = x_0 + h$ . Пользуясь формулой Тейлора, получим

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \dots \quad (19)$$

Но левая часть должна равняться нулю; отбрасывая многоточие, т. е. члены высшего порядка малости, получаем

$$f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0,$$

$$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

т. е.

$$\bar{x} \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Если обозначить правую часть через  $x_1$ , т. е.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (20)$$

то мы получаем «первое приближение» (таким образом, индекс равен номеру приближения). С ним можно проделать то же самое; это даст «второе приближение»

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и т. д. Так как отбрасывание членов высшего порядка в формуле (19) равносильно замене графика функции  $f(x)$  на касательную к нему

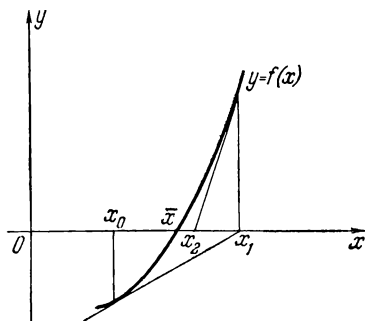


Рис. 3.

при  $x = x_0$ , то геометрический смысл рассматриваемого метода состоит в последовательном построении касательных к графику и нахождении точек пересечения этих касательных с осью  $x$  (см. рис. 3). Очевидно, что последовательные приближения быстро сходятся к искомому решению, если только нулевое приближение не лежало от него слишком далеко.

Этот метод называется *методом Ньютона* (или *методом касательных* в соответствии с его геометрическим смыслом). Удобство этого метода

состоит в том, что при его применении приходится только вычислять значения функции  $f(x)$  и ее производной и производить ариф-

метические действия, что для функции, заданной формулой, не вызывает существенных затруднений.

Рассмотрим пример. Пусть надо решить уравнение

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \quad (21)$$

Так как левая часть равна  $-3$  при  $x=1$  и равна  $1$  при  $x=2$ , то между  $x=1$  и  $x=2$  имеется корень уравнения, причем естественно, что этот корень ближе к  $2$ , чем к  $1$ . Поэтому примем  $x_0=2$ . Тогда формула (20) даст

$$x_1 = 2 - \left( \frac{x^3 - 3x - 1}{3x^2 - 3} \right)_{x=2} = 1,889.$$

Аналогично получаем, вычисляя с тремя знаками после запятой,

$$x_2 = 1,879, \quad x_3 = 1,879.$$

Таким образом, с данной точностью решение  $\bar{x} = 1,879$ .

Интересно отметить, что в этом примере можно было написать и точное решение уравнения. Уже в XVI веке итальянский математик Кардано опубликовал формулу для решения кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0^*),$$

которая имеет вид

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Однако если в эту формулу подставить значения коэффициентов уравнения (21), то мы обнаружим, что под знаком кубических корней стоят мнимые числа  $0,5 \pm i\sqrt{0,75}$  и лишь сумма этих корней вещественна. Таким образом, надо еще извлекать корни из мнимых чисел (ср. § V.4), т. е. даже для приведенного простого примера метод Ньютона оказывается гораздо проще применения «точной» формулы. Что же тогда говорить об уравнениях четвертой степени, где точная формула настолько громоздка, что ее не выписывают даже в справочниках! Или об уравнениях выше четвертой степени, а также о подавляющем большинстве трансцендентных уравнений, где «точной» формулы совсем не существует! Для таких уравнений преимущество численных методов особенно очевидно.

Метод Ньютона принадлежит к числу *итерационных методов* (иначе говоря, *методов последовательных приближений*), в которых некоторый единообразный процесс последовательно повторяется («итерируется», от латинского «итерацио» — повторение), в результате

---

\*) Общее уравнение третьей степени  $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$  приводится к такому виду с помощью подстановки  $y = x - \frac{b}{3a}$ .

чего получаются все более точные приближенные решения. В общем виде в применении к уравнению (18) метод итераций выглядит так: уравнение переписывается в равносильной форме

$$x = \varphi(x). \quad (22)$$

Затем выбирается некоторое значение  $x = x_0$  в качестве нулевого приближения; последующие приближения вычисляются по формулам  $x_1 = \varphi(x_0)$ ,  $x_2 = \varphi(x_1)$ , ..., вообще,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (23)$$

При этом может быть два случая:

1) процесс может *сходиться*, т. е. последовательные приближения стремятся к некоторому конечному пределу  $\bar{x}$ ; в этом случае, переходя в формуле (23) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , видим, что  $x = \bar{x}$  является решением уравнения (22);

2) процесс может *расходиться*, т. е. конечного предела построенных «приближений» существовать не будет; из этого не следует, что и решения уравнения (22) не существует, просто могло оказаться, что процесс итераций выбран неудачно.

Поясним сказанное на простом примере уравнения, которое можно решить без всякой «науки»,

$$x = \frac{x}{2} + 1 \quad (24)$$

с очевидным решением  $\bar{x} = 2$ . Если положить  $x_0 = 0$  и вычислять с точностью до 0,001, то получим

$$\begin{array}{llll} x_1 = 1; & x_2 = 1,5; & x_3 = 1,75; & x_4 = 1,875; & x_5 = 1,938; \\ x_6 = 1,969; & x_7 = 1,984; & x_8 = 1,992; & x_9 = 1,996; & \\ x_{10} = 1,998; & x_{11} = 1,999; & x_{12} = 2,000; & x_{13} = 2,000, & \end{array}$$

т. е. процесс практически сошелся. Предел можно найти быстрее, если заметить, что в данном случае разности между последовательными приближениями образуют геометрическую прогрессию с первым членом  $a = x_1 - x_0$  и знаменателем  $q = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}$ . Поэтому сумма всей прогрессии, т. е.  $\bar{x} - x_0$ , равна

$$\frac{a}{1-q} = \frac{x_1 - x_0}{1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}} = \frac{(x_1 - x_0)^2}{2x_1 - x_0 - x_2},$$

откуда

$$\bar{x} = x_0 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2x_1 - x_0 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_0 x_2}{2x_1 - x_0 - x_2}. \quad (25)$$

В более сложных примерах последовательные разности лишь напоминают геометрическую прогрессию; в этих примерах формула (25)

не дает точного решения, но дает возможность «перескочить» через несколько приближений и получить приближенное значение решения, от которого можно вновь начать итерации. (Это *метод Эйткена*.)

Если уравнение (24) разрешить относительно  $x$ , стоящего в правой части, т. е. переписать в равносильной форме

$$x = 2x - 2 \quad (26)$$

и начать с  $x_0 = 0$ , то мы получим последовательно  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = -6$ ;  $x_3 = -14$  и т. д., т. е. процесс сходиться не будет. Это можно было предвидеть, заметив, что из (23) вытекает равенство

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}),$$

т. е.

$$x_2 - x_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_0),$$

$$x_3 - x_2 = \varphi(x_2) - \varphi(x_1),$$

$$x_4 - x_3 = \varphi(x_3) - \varphi(x_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

Стало быть, если значения функции  $\varphi(x)$  меняются медленнее, чем значения ее аргумента, то расстояния между последовательными приближениями будут все меньше и меньше, а если значения функции  $\varphi(x)$  меняются быстрее, чем значения ее аргумента, то расстояния между последовательными приближениями будут все больше и больше, и процесс разойдется. Так как скорость изменения значений  $\varphi(x)$  по отношению к  $x$  равна  $\varphi'(x)$ , то мы получаем, что если

$$|\varphi'(x)| \leq k < 1, \quad (27)$$

то процесс итераций сходится и притом тем быстрее, чем меньше  $k$ ; если же

$$|\varphi'(x)| > 1,$$

то процесс расходится. Эти неравенства должны выполняться для всех  $x$  либо, во всяком случае, вблизи искомого корня  $\bar{x}$  уравнения (22).

Мы видим, что уравнения (24) и (26) полностью равносильны, но порождают различные итерационные процессы. (Чтобы пояснить эту разницу, нет надобности даже переписывать уравнение (24) в виде (26); достаточно заметить, что для получения последующего приближения надо подставлять предыдущее приближение по первому способу — в правую часть уравнения (24), а по второму способу — в левую часть того же уравнения.) И в других случаях уравнение (18) можно переписать в форме (22) многими способами, каждый из которых порождает свой итерационный метод, причем одни из них могут оказываться быстро сходящимися и потому наиболее удобными, другие — медленно сходящимися, а третьи — даже вовсе расходящимися.

Приведенное выше решение уравнения (21) можно теперь понять так: уравнение переписано в равносильной форме

$$x = x - \frac{x^3 - 3x - 1}{3x^2 - 3},$$

после чего применен метод итераций, начиная с значения  $x_0 = 2$ .

В общем виде метод Ньютона для уравнения (18) сводится к тому (см. (20) и далее), что это уравнение переписывается в равносильной форме

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (28)$$

после чего применяется метод итераций. Эта форма могла бы показаться несколько искусственной: хотя и легко показать равносильность уравнений (18) и (28), т. е. из (18) вывести (28) и обратно, но не сразу видно, чем помогает знаменатель  $f'(x)$ . Однако легко проверить, что производная от правой части, т. е.

$$\left(x - \frac{f}{f'}\right)' = 1 - \frac{f'f' - ff''}{f'^2} = \frac{ff''}{f'^2},$$

обращается в нуль при  $x = \bar{x}$ , где  $\bar{x}$  — решение уравнения (18). Значит (см. рассуждения, связанные с оценкой (27)), чем ближе последовательные приближения подходят к  $\bar{x}$ , тем быстрее сходится процесс.

Более того, так как при выполнении оценки (27) итерации сходятся не медленнее, чем прогрессия со знаменателем  $k$ , то мы получаем, что метод Ньютона сходится быстрее геометрической прогрессии с любым знаменателем!\*)

Перейдем теперь к описанию *метода малого параметра* (он же *метод возмущений*), который, как и метод итераций, представляет собой один из наиболее универсальных методов в прикладной математике. Поясним этот метод на простом примере.

Пусть требуется найти решение трансцендентного уравнения

$$e^{x-1} = 2 - x + \alpha \quad (29)$$

---

\*) Скорость этой сходимости легко установить на следующем простом типичном примере. Пусть рассматриваются приближения по способу Ньютона к нулевому корню уравнения  $x + x^2 = 0$ . Эти приближения связаны друг с другом соотношением

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + x_n^2}{1 + 2x_n} = \frac{x_n^2}{1 + 2x_n} < x_n^2.$$

Допустим, что  $0 < x_0 < 1$ ; тогда мы последовательно получим

$$x_1 < x_0^2, \quad x_2 < x_1^2 < x_0^4, \quad x_3 < x_2^2 < x_0^8, \quad \dots, \quad x_n < x_0^{2^n}, \quad \dots$$

Можно показать, что и в общем случае скорость сходимости метода Ньютона имеет порядок  $a^{2^n}$  ( $0 < a < 1$ ).

при малых  $|\alpha|$ . Заметим для этого, что при  $\alpha=0$  можно найти простым подбором решение:  $x=1$ . Поэтому если решение уравнения (29), зависящее от  $\alpha$ , искать разложенным в ряд по степеням  $\alpha$ ,

$$x = x_0 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots,$$

то, подставляя  $\alpha=0$ , получим, что  $x_0$  должно равняться 1. Подставим теперь разложение

$$x = 1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots \quad (30)$$

в обе части уравнения (29) и воспользуемся известным разложением показательной функции в ряд Тейлора; это даст

$$1 + \frac{a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots}{1!} + \frac{(a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots)^2}{2!} + \\ + \frac{(a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots)^3}{3!} + \dots = 2 - (1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots) + \alpha.$$

Раскрыв скобки и удерживая члены до  $\alpha^3$ , получим

$$1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \frac{a^2}{2}\alpha^2 + ab\alpha^3 + \frac{a^3}{6}\alpha^3 + \dots = \\ = 1 - a\alpha - b\alpha^2 - c\alpha^3 - \dots + \alpha.$$

Приравнявая в обеих частях коэффициенты при одинаковых степенях  $\alpha$ , получим соотношения

$$\begin{aligned} a &= -a + 1, \\ b + \frac{a^2}{2} &= -b, \\ c + ab + \frac{a^3}{6} &= -c, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

откуда последовательно найдем

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{16}, \quad c = \frac{1}{192}, \quad \dots$$

Подставляя эти значения в (30), получаем искомое решение уравнения (29) в виде ряда

$$x = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^3}{192} + \dots, \quad (31)$$

хорошо сходящегося при небольших  $|\alpha|$ .

В общем случае метод малого параметра применяется следующим образом. Пусть формулировка некоторой задачи, помимо основных неизвестных величин, содержит некоторый параметр  $\alpha$ , причем эта задача при  $\alpha=0$  может быть более или менее легко решена (*невозмущенное решение*). Тогда решение задачи при  $\alpha$ , близких к 0,



во многих случаях можно получить разложением по степеням  $\alpha$  с той или иной степенью точности. При этом первый член разложения, не содержащий  $\alpha$ , получается при  $\alpha=0$ , т. е. дает невозмущенное решение. Дальнейшие же члены дают поправки на «возмущение» решения; эти поправки имеют первый, второй и т. д. порядки малости по сравнению с  $\alpha$ . Сами члены часто находятся по методу неопределенных коэффициентов, т. е. коэффициенты при  $\alpha$ ,  $\alpha^2$  и т. д. обозначаются какими-то буквами, которые определяются затем из условий задачи.

Метод малого параметра дает хороший результат только при малых  $|\alpha|$ ; при больших  $|\alpha|$  метод может привести к принципиальным ошибкам, так как может получиться, что отбрасываемые (не выписываемые) члены более существенны, чем оставляемые.

Таким образом, метод малого параметра дает возможность, исходя из решения некоторых «узловых» задач, получить решение задач, формулировка которых близка к этим «узловым», если, конечно, изменение формулировки не влечет за собой принципиального, качественного изменения решения.

Во многих задачах уже вид члена первого порядка малости дает возможность сделать полезные выводы о зависимости решения от параметра при его малом изменении.

Метод малого параметра непосредственно связан с методом итераций, что мы продемонстрируем на примере уравнения (29). Прежде всего удобно, чтобы невозмущенное решение было нулевым; это достигается с помощью подстановки  $x = 1 + y$ , откуда

$$e^y = 1 - y + \alpha. \quad (32)$$

Для проведения итераций заметим, что если искомый корень  $\bar{y}$  уравнения близок к 0, то уравнение удобно переписать в такой форме  $y = \varphi(y)$ , чтобы разложение  $\varphi(y)$  по степеням  $y$  не содержало первой степени, а содержало только свободный член, члены с  $y^2$ ,  $y^3$  и т. д. В самом деле, тогда разложение  $\varphi'(y)$  не будет содержать свободного члена и потому при  $y$ , близких к  $\bar{y}$ , а значит к 0,  $|\varphi'(y)|$  будет принимать малые значения, откуда вытекает сходимость метода итераций. Поэтому в исходном уравнении надо все члены с  $y$  в первой степени перенести в левую часть, а все остальные члены — в правую часть, после чего уже проводить итерации.

В нашем примере, в уравнении (32), левая часть, т. е.  $e^y$ , в силу формулы Тейлора

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \dots$$

содержит слагаемое  $y$ ; значит, ее надо записать в виде

$$e^y = y + (e^y - y),$$

причем разложение скобки уже не содержит  $y$  в первой степени.

Поэтому взамен (32) пишем

$$y + (e^y - y) = 1 - y + \alpha,$$

откуда, объединяя члены с  $y$  (но не раскрывая скобок!), приходим к уравнению

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(e^y - y).$$

Это уравнение, равносильное (32), уже приспособлено к проведению итераций. После разложения правой части по степеням  $y$  получим

$$y = \frac{\alpha}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12} - \dots \quad (33)$$

Теперь можно проводить итерации, начиная с  $y_0 = 0$ . Подставляя это значение в правую часть (33), найдем

$$y_1 = \frac{\alpha}{2}. \quad (34)$$

Подставляя  $y = y_1$  в правую часть (33), получим

$$y_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{16} - \frac{\alpha^3}{96} - \dots \quad (35)$$

Мы видим, что первое приближение (34) совпадает с точным решением (31) до членов первого порядка, второе приближение (35) — с точностью до членов второго порядка. Для построения третьего приближения можно подставить в правую часть (33) просто

$$y = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{16};$$

тогда получится разложение, совпадающее с точным до членов третьего порядка включительно, так что при вычислениях можно учитывать только эти члены и т. д. Это дает возможность при вычислении каждой последующей итерации иметь дело лишь с конечными суммами.

### Упражнения

1. Примените метод Ньютона к уравнению (21), начиная от значения  $x_0 = 0$ ;  $x_0 = 1$ .

2. Переписав уравнение (21) в форме  $x = \frac{x^3 - 1}{3}$ , примените к нему метод итераций, начиная от значения  $x_0 = 0$ ; 1; 2.

3. Найдите решение уравнения  $x^3 + \alpha x - 1 = 0$  при малых  $|\alpha|$  по методу малого параметра.

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1

1. По способу трапеций

а) 1,12; б) 0,88; в) 1,84.

По способу Симпсона

а) 1,10; б) 0,88; в) 1,85.

2. Разбивая промежуток интегрирования на 4 части, находим  $\int_0^3 \frac{x dx}{e^x + 1} = 0,6275$ . Разбивая промежуток интегрирования на 6 частей, получаем также  $\int_0^3 \frac{x dx}{e^x + 1} = 0,6275$ .

3. Рассмотрим формулу (8) для функции  $y=x$  на промежутке от  $x_0$  до  $x_0 + 2h$ . Здесь

$$\bar{y} = \frac{1}{2h} \int_{x_0}^{x_0+2h} x dx = \frac{1}{2h} \frac{(x_0+2h)^2 - x_0^2}{2} = \frac{4x_0h + 4h^2}{4h} = x_0 + h,$$

тогда как

$$\frac{1}{2} y_1 + \frac{y_0 + y_2}{4} = \frac{1}{2} (x_0 + h) + \frac{x_0 + (x_0 + 2h)}{4} = x_0 + h.$$

Результаты совпадают, т. е. в данном случае формула является точной. Отсюда вытекает точность формулы (8) и для функции  $y=ax$  ( $a=\text{const}$ ), так как  $a$  служит общим множителем во всех слагаемых. Записав точное равенство (8) для  $y=ax$  и  $y=k$  (уже проверенное ранее) и сложив левые, а также правые части, получим справедливость равенства (8) и для функции  $y=ax+k$ . Аналогично рассматривается равенство (7).

## § 2

1. В нашем случае  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $h=1$ ,  $a=1$ ,  $b=n$ . По формуле (11) получаем

$$S_n \approx \int_{1/2}^{n+1/2} \sqrt[3]{x} dx = \int_{1/2}^{n+1/2} x^{1/3} dx = \frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_{1/2}^{n+1/2} = \\ = \frac{3}{4} \left[ \sqrt[3]{\left(n + \frac{1}{2}\right)^4} - \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \right],$$

или

$$S_n = \frac{3}{4} \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt[3]{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}} \right].$$

Для  $n=3$  формула дает  $S_3=3,34$ , непосредственно находим  $S_3=3,70$ . Ошибка 11%.

Для  $n=4$  по формуле получаем  $S_4=4,93$ , непосредственно находим  $S_4=5,29$ . Ошибка 7%. Для  $n=5$  по формуле  $S_5=6,64$ , непосредственно находим  $S_5=7,00$ . Ошибка 5%.

2. По формуле (11) получаем  $S=2,39$ .

3. Пусть  $f(x)=px+k$ , т. е. сумма имеет вид

$$S_{n+1} = [pa+k] + [p(a+h)+k] + [p(a+2h)+k] + \dots + [pb+k],$$

где  $b=a+nh$ . Получилась арифметическая прогрессия с первым членом  $a_1=pa+k$  и разностью  $d=ph$ . Сумма такой прогрессии, как известно, равна

$$S_{n+1} = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} (n+1) = \frac{(pa+k) + (pb+k)}{2} (n+1) = \left( p \frac{a+b}{2} + k \right) (n+1).$$

Применим, например, формулу (9). По этой формуле получаем значение

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_a^b (px+k) dx + \frac{1}{2} (pa+k) + \frac{1}{2} (pb+k) &= \\ &= \frac{1}{h} \left[ p \frac{b^2-a^2}{2} + k(b-a) \right] + \left( p \frac{a+b}{2} + k \right) = \\ &= \frac{b-a}{h} \left( p \frac{a+b}{2} + k \right) + \left( p \frac{a+b}{2} + k \right) = \\ &= n \left( p \frac{a+b}{2} + k \right) + \left( p \frac{a+b}{2} + k \right) = \left( p \frac{a+b}{2} + k \right) (n+1), \end{aligned}$$

что совпадает с точным значением для суммы.

### § 3

1. При  $x_0=0$  получаем еще один корень  $\bar{x} = -0,347$  уравнения (21). При  $x_0=1$  применение метода невозможно (знаменатель обращается в нуль).

2. При  $x_0=0$  и  $x_0=1$  получаем сходимость к корню  $\bar{x}$  из упражнения 1. При  $x_0=2$  процесс итераций расходится.

3. Разложение решения имеет вид

$$x = \frac{1}{3} \alpha - \frac{1}{81} \alpha^3 + \dots$$

## ГЛАВА II

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТА

В практической работе часто бывает так, что зависимость между переменными величинами — скажем  $x$  и  $y$  получается в результате опыта, измерений. Обычно в таком случае эта зависимость оказывается заданной при помощи таблицы, в которой для каждого значения  $x$ , при котором проводилось измерение, поставлено соответствующее, найденное путем измерения значение  $y$ . Поэтому мы рассмотрим в этой главе сначала общие правила действий с таблицами, а затем те новые моменты, которые возникают при обработке результатов опытов.

#### § 1. Таблицы и разности

Нам очень часто приходится рассматривать функции, заданные с помощью таблицы. Это могут быть математические таблицы, например таблицы логарифмов, синусов, квадратов и т. п. Это могут быть физические таблицы, взятые из каких-либо справочников, например таблицы зависимости температуры кипения той или иной жидкости от давления и т. п. Наконец, зависимость между переменными величинами может получиться в виде не вполне обработанных результатов опыта, измерений. Во всех этих случаях численные значения зависимой переменной задаются с помощью таблицы при определенных численных значениях независимой переменной. Функции, заданные таким образом, могут входить в дальнейшие операции, в частности, может потребоваться эти функции дифференцировать или интегрировать. Могут понадобиться значения функции при промежуточных, не выписанных в таблице, значениях независимой переменной (*задача интерполяции*) или при значениях независимой переменной, лежащих за пределами таблицы (*задача экстраполяции*)\*).

Мы будем считать для простоты, что независимая переменная  $x$  принимает значения, образующие арифметическую прогрессию, т. е.  $x = x_0$ ,  $x = x_1 = x_0 + h$ ,  $x = x_2 = x_0 + 2h$ , ...,  $x = x_n = x_0 + nh$ ; эти значения аргумента будем условно называть *целыми*, а  $h$  — назы-

---

\*) Слова «интерполяция» и «экстраполяция» происходят от латинских корней «интер» — внутри, «экстра» — снаружи, «полюс» — точка.

вать *шагом* таблицы. Соответствующие значения функции, помещенные в таблице, обозначим через  $y_0 = y(x_0)$ ,  $y_1 = y(x_1)$ , ...,  $y_n = y(x_n)$ .

Приращения переменной  $x$  все одинаковые и равны  $h$ . Приращения переменной  $y$ , вообще говоря, различные. Они называются *первыми разностями* (более подробно *разностями первого порядка*) и обозначаются через

$$\delta y_{1/2} = y_1 - y_0, \quad \delta y_{1+1/2} = y_2 - y_1, \quad \delta y_{2+1/2} = \\ = y_3 - y_2, \quad \dots, \quad \delta y_{n-1/2} = y_n - y_{n-1},$$

так как их естественно сопоставлять *полуцелым* значениям  $x$ , т. е. серединам между соседними «целыми» значениями аргумента:

$$x_{1/2} = x_0 + h/2, \quad x_{1+1/2} = x_0 + 3h/2, \quad \dots, \quad x_{n-1/2} = x_0 + (n-1/2)h^*).$$

От этих разностей можно опять брать разности, в результате чего получатся *вторые разности*, определенные вновь для «целых» значений  $x$ :

$$\delta^2 y_1 = \delta y_{1+1/2} - \delta y_{1/2}, \quad \delta^2 y_2 = \delta y_{2+1/2} - \delta y_{1+1/2}, \quad \dots, \quad \delta^2 y_{n-1} = \\ = \delta y_{n-1/2} - \delta y_{n-3/2}$$

(двойка сверху здесь означает порядок разности, а не показатель степени) и т. д.

Приведем в качестве примера отрывок из таблицы десятичных логарифмов с вычисленными разностями, которые умножены на  $10^5$ .

Таблица 1

$k$	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2
$x_k$	10,0	10,05	10,1	10,15	10,2	10,25	10,3	10,35
$y_k$	1,00000		1,00432		1,00860		1,01284	
$10^5 \delta y_k$		432		428		424		419
$10^5 \delta^2 y_k$			-4		-4		-5	
$10^5 \delta^3 y_k$				0		-1		2
$k$	4	9/2	5	11/2	6	13/2	7	
$x_k$	10,4	10,45	10,5	10,55	10,6	10,65	10,7	
$y_k$	1,01703		1,02119		1,02531		1,02938	
$10^5 \delta y_k$		416		412		407		
$10^5 \delta^2 y_k$	-3		-4		-5			
$10^5 \delta^3 y_k$		-1		-1				

\*) Иногда разность  $y_{k+1} - y_k$  сопоставляется не значению  $x = x_{k+1/2}$ , а значению  $x = x_k$ . Тогда она обычно обозначается  $\Delta y_k$ , т. е.  $\Delta y_k = \Delta y|_{x=x_k} = y_{k+1} - y_k$ . При таком обозначении, как у нас, т. е.  $y_{k+1} - y_k = \delta y_{k+1/2} = \delta y|_{x=x_{k+1/2}}$ , разности называются *центральными*.

Малость вторых разностей по сравнению с первыми и их почти постоянство (третьи разности имеют уже порядок ошибок округления) в приведенном примере указывают на плавность хода изменения функции, на отсутствие случайных «выпадов» из этого хода. Такая закономерность может проявляться в разностях более высокого порядка и всегда свидетельствует о «правильности» хода изменения функции (ср. упражнение 2).

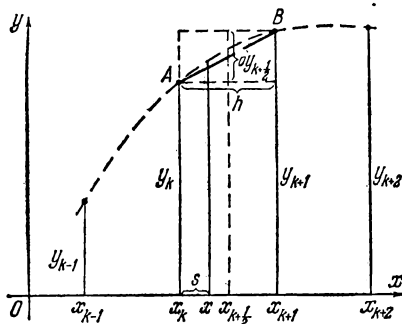


Рис. 4.

Конечно, если шаг не мал, а также вблизи точек разрыва и т. п., разности могут и не быть малыми, но обычно в них проявляется та или иная закономерность.

Разности широко применяются при интерполяции. Пусть требуется найти значение  $y$  при некотором значении  $x$ , заключенном между табличными значениями  $x_k$  и  $x_{k+1}$ . Самый простой способ — *линейная интерполяция* — состоит в приближенной замене изучаемой

функции на линейную функцию, причем так, чтобы обе функции совпадали при  $x = x_k$  и при  $x = x_{k+1}$  (рис. 4); геометрически это означает замену дуги  $\cup AB$  неизвестного нам графика, показанного на рис. 4 штрихами, на хорду  $AB$ , соединяющую две его известные точки  $A$  и  $B$ . Обозначим  $x - x_k = s$ . Так как линейная функция выражается уравнением первой степени, то искомое значение  $y$  зависит от  $s$  по формуле

$$y = a + bs, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые коэффициенты. Из условий при  $x_k$  и  $x_{k+1}$  получаем  $y_k = a$ ,  $y_{k+1} = a + bh$ , откуда

$$\delta y_{k+1/2} = y_{k+1} - y_k = bh.$$

Выражая отсюда  $a$  и  $b$  и подставляя в (1), получаем окончательно формулу для линейной интерполяции

$$y = y_k + \delta y_{k+1/2} \frac{s}{h}. \quad (2)$$

(Выведите эту формулу из подобия треугольников на рис. 4.) Формулой (2) можно пользоваться, если изучаемая функция на интервале от  $x_k$  до  $x_{k+1}$  мало отличается от линейной, т. е. если  $h$  достаточно мало \*). При  $k=0$  и  $s < 0$  формула (2) осуществляет

\*) Из более точной формулы (4) нетрудно вывести, что при малом  $h$  ошибка при линейной интерполяции имеет порядок  $h^2$ , так как такой порядок имеют вторые разности.

линейную экстраполяцию рассматриваемой функции в сторону  $x < x_0$ , а при  $k = n-1$  и  $s > h$  — в сторону  $x > x_n$ . Конечно, при экстраполяции нельзя далеко уходить от табличных значений  $x$ , так как принятый нами линейный закон изменения функции оправдывается лишь на малом интервале изменения  $x$ .

Формулу линейной интерполяции (2), как и последующие формулы, можно переписать в виде, не содержащем разностей. Подставляя в (2) выражение  $\delta y_{k+\frac{1}{2}} = y_{k+1} - y_k$ , получим равносильную формулу

$$y = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{h} s = \left(1 - \frac{s}{h}\right) y_k + \frac{s}{h} y_{k+1}.$$

Хорошо видно, что при изменении  $s$  от 0 до  $h$  коэффициент при  $y_k$  меняется от 1 до 0, а коэффициент при  $y_{k+1}$  — от 0 до 1; таким образом, при  $s = 0$  получается  $y = y_k$ , а при  $s = h$  получается  $y = y_{k+1}$ .

Большую точность дает *квадратичная интерполяция*, при которой изучаемая функция приближенно заменяется на квадратичную функцию, причем так, чтобы обе функции совпадали при  $x = x_k$ ,  $x_{k+1}$  и  $x_{k+2}$  (это в других обозначениях было проделано в § 1.1 при выводе формулы Симпсона). Указанную квадратичную функцию удобно искать в виде

$$y = a + bs + cs(s-h). \quad (3)$$

Согласно условию

$$y_k = a, \quad y_{k+1} = a + bh, \quad y_{k+2} = a + b \cdot 2h + c \cdot 2h^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta y_{k+\frac{1}{2}} &= y_{k+1} - y_k = bh, & \delta y_{k+\frac{3}{2}} &= y_{k+2} - y_{k+1} = 2ch^2 + bh, \\ \delta^2 y_{k+1} &= \delta y_{k+\frac{3}{2}} - \delta y_{k+\frac{1}{2}} = 2ch^2. \end{aligned}$$

Выражая отсюда  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и подставляя в (3), получаем *формулу Ньютона* для квадратичной интерполяции

$$y = y_k + \delta y_{k+\frac{1}{2}} \frac{s}{h} + \frac{\delta^2 y_{k+1}}{2} \frac{s}{h} \left( \frac{s}{h} - 1 \right). \quad (4)$$

Как и выше, эту формулу можно использовать также для экстраполяции. Формула (4) не совсем симметрична: в ней использованы значения  $y_k$ ,  $y_{k+1}$  и  $y_{k+2}$ , тогда как  $x$  расположен между  $x_k$  и  $x_{k+1}$ . Если обратить направление оси  $x$  и подобным же образом использовать значения  $y_{k+1}$ ,  $y_k$  и  $y_{k-1}$ , то взамен (4) мы получим формулу

$$y = y_{k+1} + \left( -\delta y_{k+\frac{1}{2}} \right) \frac{h-s}{h} + \frac{\delta^2 y_k}{2} \frac{h-s}{h} \left( \frac{h-s}{h} - 1 \right), \quad (5)$$

несимметричную уже в другую сторону. Взяв теперь полусумму



правых частей формул (4) и (5), получим симметричную формулу Бесселя

$$y = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} + \delta y_{k+\frac{1}{2}} \left( \frac{s}{h} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\delta^2 y_k + \delta^2 y_{k+1}}{4} \frac{s}{h} \left( \frac{s}{h} - 1 \right),$$

обладающую высокой точностью. Мы предоставим читателю преобразовать формулы Ньютона и Бесселя так, чтобы у оказался выраженным непосредственно через «узловые» значения  $y_k$ , а не через их разности.

Подобным образом можно было бы вывести интерполяционные формулы еще более высокой степени. Однако, так как точность экспериментальных данных ограничена, равно как и точность применяемых таблиц функций, то обычно применение разностей слишком высокого порядка не оправдано. В большинстве случаев (за исключением измерений и вычислений, проводимых с особо высокой точностью) бывает достаточно вторых или даже только первых разностей.

Если изучаемая функция разрывна, то интерполяцию можно проводить только на интервалах, не содержащих точек разрыва; если не обратить на это внимания, то интерполяция может дать совершенно неправильное представление о действительном поведении функции. Так, на рис. 5 показана зависимость внутренней энергии,

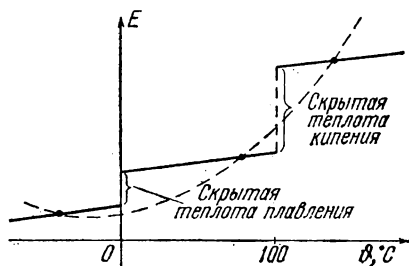


Рис. 5.

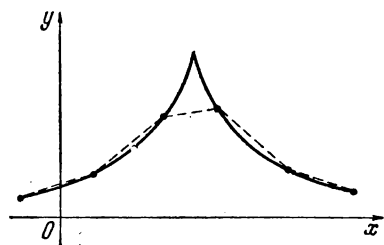


Рис. 6.

которой обладает единица массы воды при нормальном давлении, от температуры \*). Эта зависимость имеет разрывы при температурах фазовых переходов, т. е. при замерзании и при испарении воды. Там же пунктиром показан результат квадратичной интерполяции в случае, если выбранные «узловые» точки отвечают различным фазам; видно, что эта интерполяция искажает реальную картину. Аналогичное искажение получается при разрыве производной (т. е. при изломе графика) у изучаемой функции. Так, на рис. 6 пунктиром показан результат линейной интерполяции при наличии «острого» максимума; хорошо видна ошибка, получающаяся вблизи этого максимума.

\*) Чаше пользуются так называемой *энтальпией* (*теплосодержанием*)  $H = E + pV$ , где  $p$  — давление, а  $V$  — объем. Теплємкость при постоянном давлении равна как раз производной от  $H$  по  $\theta$ .

## Упражнения

1. Пусть  $y_0 = 1,00$ ;  $y_1 = 1,25$ ;  $y_2 = 1,65$ ;  $y_3 = 2,34$ . Найдите  $y_{3/2}$  по формулам (2), (4), (5) и по формуле Бесселя.

2. Проверьте, что если таблица составлена для многочлена степени  $n$ , то разности порядка  $n$  постоянны, а разности порядка  $n+1$  равны нулю.

## § 2. Интегрирование и дифференцирование функций, заданных таблично

Интегрирование функций, заданных таблично, ничем не замечательно. Ведь и раньше при численном интегрировании функций, заданных формулами, мы сперва составляли таблицу подынтегральной функции (см. § 1.1).

При вычислении производной функции, заданной таблицей, следует иметь в виду, что лучший способ найти производную  $y'(x)$  по двум значениям функции — это взять такие значения справа и слева на равном расстоянии от того значения  $x$ , для которого мы хотим подсчитать величину производной

$$y'(x) \approx \frac{y\left(x + \frac{h}{2}\right) - y\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Таким образом, если даны значения  $y$  для значений  $x$ , расположенных через равные промежутки (т. е. в арифметической прогрессии), то удобно вычислять производные в серединах промежутков. Другими словами, если значения  $y$  были заданы для «целых» значений  $x$  (см. § 1), то значения  $y'$  будут подсчитаны для «полуцелых» значений  $x$ . По значениям  $y'$  можно таким же способом найти производную от  $y'$ , т. е.  $y''$ . При этом значения  $y''$  получатся снова для целых значений  $x$ . Можно выразить  $y''$  непосредственно через  $y$ :

$$\begin{aligned} y''(x) &\approx \frac{y'\left(x + \frac{h}{2}\right) - y'\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h} \approx \\ &\approx \frac{\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h}}{h} = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Указанные сейчас формулы удобно записать в обозначениях § 1:

$$y'_{k+\frac{1}{2}} = y'\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) = y'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \approx \frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} = \frac{\delta y_{k+\frac{1}{2}}}{h};$$

это равенство и является обоснованием того, что разность  $y_{k+1} - y_k$

мы относили значению  $x = x_{k+\frac{1}{2}}$ . Аналогично

$$y_k'' \approx \frac{\delta^2 y_k}{h^2}.$$

Приведем пример (таблица 2)\*).

Таблица 2

$x$	$y$	$y'$	$y''$
1,00	1,6487		
1,10	1,7333	0,846	0,42
1,20	1,8221	0,888	0,46
1,30	1,9155	0,934	0,49
1,40	2,0138	0,983	0,49
1,50	2,1170	1,032	

Если нужны значения  $y'$  для других  $x$ , то их можно получить интерполяцией. В частности, для целых  $x$  получаем с помощью интерполяции

$$y_k' \approx \frac{1}{2} \left( y'_{k-\frac{1}{2}} + y'_{k+\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{y_k - y_{k-1}}{h} + \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \right) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}.$$

Таким образом, можно сразу определять значения  $y'$  для целых  $x$  по значениям  $y$  при целых  $x$  справа и слева (см. таблицу 3).

Таблица 3

$x$	$y$	$y'$
1,00	1,6487	
1,10	1,7333	0,867
1,20	1,8221	0,911
1,30	1,9155	0,960
1,40	2,0138	1,002
1,50	2,1170	

Однако при таком способе мы, во-первых, получим значений производных на одно меньше, чем при первом способе, во-вторых,

---

\*) В таблице не выписаны полуцелые значения аргумента.

мы получаем меньше сведений о поведении производной на концах промежутка. Так, в таблице 2 мы знаем производную при  $x=1,05$  (около начала промежутка  $x=1$ ) и при  $x=1,45$  (около конца промежутка  $x=1,5$ ), а в таблице 3 лишь при  $x=1,1$  и при  $x=1,4$ , т. е. при значениях аргумента, более удаленных от концов промежутка. Наконец, при вычислении значений  $y'$  для нецелых (в частности, для полуцелых) значений  $x$  с помощью интерполяции значения, полученные из таблицы 2, оказываются достовернее значений, полученных из таблицы 3, так как наклон кривой более точно передают маленькие хорды, чем большие. Поэтому первый способ предпочтителен.

Очень важные, принципиальные вопросы возникают в связи с ограниченной точностью и ошибками, присущими каждому измерению.

При вычислении интеграла каждое отдельное измеренное значение  $y$  умножается на величину  $\Delta x$ . Поэтому при увеличении числа отдельных измеренных значений функции  $y$  коэффициент, с которым в выражение интеграла входит каждое отдельное значение, уменьшается обратно пропорционально числу промежутков  $\Delta x$ .

Следовательно, уменьшается и ошибка в интеграле, происходящая за счет ошибок при каждом отдельном измерении величины  $y$ .

При вычислении производной разность двух значений  $y$  делится на  $\Delta x$ . Чем меньше промежуток  $\Delta x$ , т. е. чем меньше знаменатель,

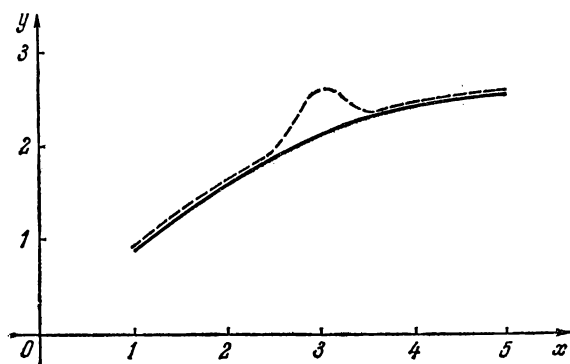


Рис. 7.

тем большую ошибку в величину производной вносит данная ошибка в каждом измеренном значении  $y$ . Поэтому производная функции, заданной экспериментальными значениями, оказывается известной с меньшей точностью, чем сама эта функция.

Разницу между дифференцированием и интегрированием поясним примером.

На рис. 7 изображены две кривые — одна нарисована сплошной линией, другая пунктиром. Сплошная кривая — это график функции  $y=x$  —

— $0,1x^2$ , пунктирная — график функции  $y_1 = x - 0,1x^2 + 0,5e^{-8(x-3)^2}$ . Из рисунка видно, что одна кривая заметно отличается от другой лишь в небольшом промежутке изменения  $x$ .

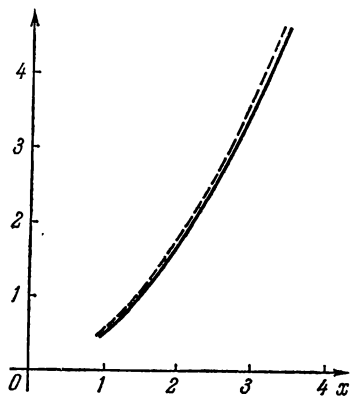


Рис. 8.

На рис. 8 показаны графики

$$I(x) = \int_0^x y dx \quad \text{и} \quad I_1(x) = \int_0^x y_1 dx \quad (\text{пунктирная кривая}).$$

Мы видим, что отличие между кривыми  $y(x)$  и  $y_1(x)$  дает небольшую добавку в интеграл  $I_1(x)$ , заметную на графике лишь при  $x > 2,8$ . В целом кривые  $I(x)$  и  $I_1(x)$  отличаются мало.

На рис. 9 показаны графики производных  $y'(x)$  и  $y'_1(x)$ . Мы видим, что небольшое изменение функции в малом промежутке вызвало в этом промежутке большие изменения производной. Еще

сильнее разнятся вторые производные. Их графики изображены на рис. 10, где масштаб по оси  $y$  взят в два раза меньше, чем на рис. 7—9.

В случае, когда кривая получена из опыта, небольшое изменение хода кривой на каком-либо промежутке может быть результатом

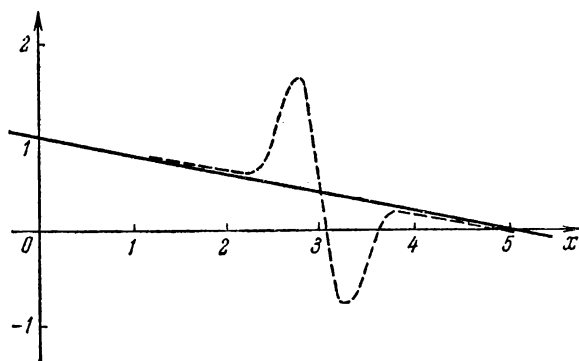


Рис. 9.

ошибки отдельного опыта. Из предыдущего примера видно, что на величине интеграла такие отдельные ошибки сказываются незначительно, а на величину производной (и особенно высших производных) они влияют сильно.

Для того чтобы получить надежные значения производной, нужно сперва подобрать формулу, хорошо описывающую опытные данные, а затем находить производную, пользуясь этой формулой.

Так как формула строится с учетом всех опытных данных, то значение производной при каждом значении  $x$  будет найдено по формуле с учетом всех данных, а не только двух-трех ближайших.

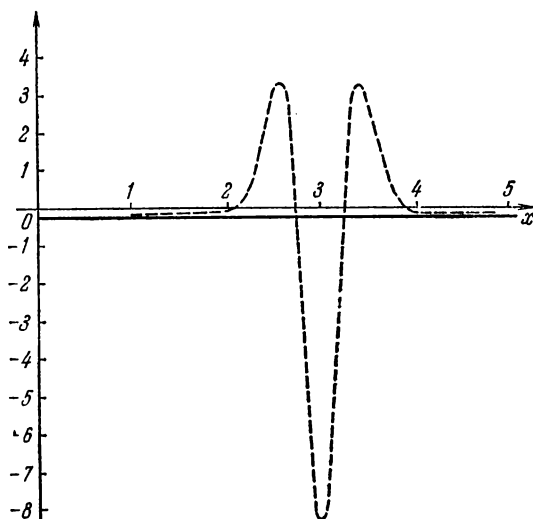


Рис. 10.

Поэтому естественно ожидать, что случайные ошибки в отдельных измерениях меньше скажутся на величине производной.

Подбор формулы, описывающей результаты опыта, вообще является существенной частью обработки экспериментальных данных. Задаче подбора формулы по данным опыта посвящены два следующих параграфа.

#### Упражнение

В условиях упражнения 2 к § 1 подсчитайте значения  $y'$  для полуцелых значений  $x$ , приняв  $\Delta x = h = 0,5$ . Интерполируйте результат линейно, а также по формулам (4) и (5) на целые значения  $x$ .

### § 3. Подбор формул по данным опыта по методу наименьших квадратов

Подбор формул по экспериментальным данным называют *подбором эмпирических формул*. На самом деле, конечно, формула тем лучше, чем больше теоретических представлений вложено в нее, чем в меньшей степени она является эмпирической. В действительности нужно сперва задаться видом формулы, а затем, пользуясь результатами

опыта, определять значения различных постоянных величин, входящих в нее.

Перед тем как приступить к подбору формулы, полезно нанести опытные данные на график, после чего на глаз, от руки провести через полученные точки наиболее правдоподобную кривую. При этом сразу выявляются те данные, в которых можно подозревать большие ошибки. Очень важно при проведении кривой, кроме экспериментальных точек, использовать общие соображения о том, как должна вести себя кривая при значениях аргумента, весьма близких к нулю, при больших значениях аргумента, проходит ли кривая через начало координат, пересекает ли координатные оси, касается ли их и т. п.

Итак, пусть эта предварительная работа проделана, выбран вид формулы и нужно определить значения входящих в формулу постоянных величин.

Как это сделать?

Рассмотрим наиболее простой пример.

Предположим, что у пропорционально  $x$ , т. е. ищем формулу вида  $y = kx$ . Задача сводится к определению коэффициента  $k$ . Каждый опыт дает определенное значение  $k$ , именно

$$k_n = \frac{y_n}{x_n},$$

где  $x_n, y_n$  — значения величин  $x, y$ , полученные в  $n$ -м опыте. Индекс  $n$  у величины  $k$  показывает, что это — значение, соответствующее  $n$ -му опыту. Из значений  $k_n$  можно образовать среднее, положив

$$\bar{k} = \frac{\sum_{n=1}^p k_n}{p},$$

где  $p$  — общее число опытов. Мы получаем формулу  $y = \bar{k}x$ .

Отметим, что это — самый простой, но не самый лучший способ выбора величины  $k$ . В самом деле, пусть  $x$  есть величина, характеризующая условия опыта, которую мы задаем точно, а  $y$  — результат опыта, причем этот результат содержит в себе некоторую ошибку измерения. Допустим, что и при малых и при больших значениях  $x$  ошибка измерения  $\Delta y$  примерно одинакова. Тогда ошибка в величине  $k_n$ , равная  $\frac{\Delta y_n}{x_n}$ , тем больше, чем меньше  $x_n$ . Следовательно, определяя величину  $k$ , лучше ориентироваться на опыты с большими  $x_n$ .

Поставим задачу о нахождении того значения  $k$ , при котором функция  $y = kx$  наилучшим образом соответствует опытным данным. (Смысл нечеткого выражения «наилучшим образом» станет ясен из дальнейшего.) За меру отклонения функции от экспериментальных данных для  $n$ -го опыта выберем величину  $(y_n - kx_n)^2$ . Почему берется

именно величина  $(y_n - kx_n)^2$ , а не  $y_n - kx_n$ ? Ясно, что оба знака уклонения  $kx_n$  от  $y_n$  нехороши: плохо, если  $k$  таково, что  $y_n < kx_n$ , но также нехорошо, если  $k$  таково, что  $y_n > kx_n$ . Если бы за меру отклонения мы взяли величину  $y_n - kx_n$ , а затем стали находить сумму отклонений в нескольких опытах, то мы могли бы получить весьма малую величину за счет взаимного уничтожения отдельных слагаемых большой величины, но разных знаков. Это, однако, вовсе не говорило бы о том, что взятая функция  $y = kx$  хороша. Если же за меру отклонения взять  $(y_n - kx_n)^2$ , то такого взаимного уничтожения не произойдет, так как все величины  $(y_n - kx_n)^2$  положительны. Отметим, что вместо  $(y_n - kx_n)^2$  в принципе можно было бы взять  $|y_n - kx_n|$ ,  $(y_n - kx_n)^4$  и т. д. Однако при этом дальнейшие вычисления значительно усложнились бы.

В качестве меры общей ошибки  $S$  в описании опытных данных функцией  $y = kx$  возьмем сумму мер отклонений для всех опытов, т. е.

$$S = \sum_{n=1}^p (y_n - kx_n)^2. \quad (6)$$

Метод определения констант, входящих в формулу, из требования, чтобы общее отклонение  $S$  было наименьшим, называется *методом наименьших квадратов*.

Заметим, что если одна величина  $y_n - kx_n = 10$ , т. е. при каком-то одном  $x = x_n$  формула дает ошибку в 10 единиц, то в величину  $S$  это внесет 100 единиц. С другой стороны, наличие 10 ошибок по 1 единице каждая внесет в  $S$  всего 10 единиц. Поэтому ясно, что на величину  $S$  сильнее всего влияют самые большие ошибки, а малые ошибки, даже если они встречаются часто, влияют мало. Метод наименьших квадратов нацелен на уменьшение самых больших отклонений.

Для того чтобы найти  $k = \bar{k}$ , при котором  $S$  наименьшее, решим уравнение  $\frac{dS}{dk} = 0$ . Пользуясь (6), находим

$$\frac{dS}{dk} = 2 \sum_{n=1}^p (y_n - kx_n) (-x_n) = 0,$$

откуда

$$2k \sum_{n=1}^p x_n^2 - 2 \sum_{n=1}^p x_n y_n = 0,$$

что дает

$$k = \bar{k} = \frac{\sum_{n=1}^p x_n y_n}{\sum_{n=1}^p x_n^2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}. \quad (7)$$



Если в каждом опыте получается точно  $y_n = kx_n$ , то из формулы (7) получаем

$$\bar{k} = \frac{x_1 \cdot kx_1 + x_2 \cdot kx_2 + \dots + x_p \cdot kx_p}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2} = k.$$

Если для различных опытов величина  $k_n = \frac{y_n}{x_n}$  различна, то, подставляя в (7) вместо  $y_n$  его значение  $k_n x_n$ , получим

$$\bar{k} = \frac{k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots + k_p x_p^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}. \quad (8)$$

Среди величин  $k_1, k_2, \dots, k_p$ , полученных в различных опытах, есть наибольшая величина  $k_{\max}$  и наименьшая  $k_{\min}$ . Если заменить в правой части (8) все  $k_n$  на  $k_{\max}$ , то дробь только возрастет и мы получим

$$\bar{k} < \frac{k_{\max} x_1^2 + k_{\max} x_2^2 + \dots + k_{\max} x_p^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2} = k_{\max}.$$

Совершенно аналогично доказывается, что  $\bar{k} > k_{\min}$ .

Таким образом, величина  $\bar{k}$ , найденная из условия минимума  $S$ , удовлетворяет неравенствам  $k_{\min} < \bar{k} < k_{\max}$ , т. е. действительно является средней из всех значений  $k_1, k_2, \dots, k_p$ , однако это среднее составляется по более сложному правилу, нежели

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_p}{p}.$$

В формуле (8) каждая величина  $k_n$  входит в числитель с множителем  $x_n^2$ . Этот множитель называют *весом* \*).

Ясно, что чем больше вес  $x_n^2$ , тем сильнее влияет на величину  $\bar{k}$  измерение, соответствующее значению  $x = x_n$ . Это подтверждает высказанную ранее мысль о том, что измерения с большими  $x_n$  важнее для правильного определения  $k$ .

Если нет оснований предполагать, что  $y = 0$  при  $x = 0$ , то наиболее простой является формула  $y = kx + b$ . В этом случае также

\*) Название «вес» происходит от следующей механической аналогии. Представим себе шкалу, на которой откладываются расстояния  $k_1, k_2, \dots, k_p$  и в соответствующих точках шкалы помещаются грузы. Если все эти грузы одинаковые, то центр тяжести такой системы (весом самой шкалы пренебрегаем) находится в точке шкалы  $\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_p}{p}$ . Если же в точку  $k_1$  поме-

стить груз веса  $x_1^2$ , в точку  $k_2$  — груз веса  $x_2^2$ , ..., в точку  $k_p$  — груз веса  $x_p^2$ , то положение центра тяжести дается формулой (8). Таким образом, эта формула соответствует представлению о разной значимости, разным весам различных наблюдений.

можно применить метод наименьших квадратов. Величина  $S$  для этого случая дается формулой

$$S = \sum_{n=1}^p (y_n - kx_n - b)^2. \quad (9)$$

Надо выбрать числа  $k$  и  $b$  так, чтобы величина  $S$  была наименьшей.

Для этого поступим так. Если бы  $b$  было уже найдено, то в правой части (9) можно было бы изменять только  $k$ , поэтому должно было бы быть \*)

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2 \sum_{n=1}^p (y_n - kx_n - b) (-x_n) = 0.$$

С другой стороны, если бы уже было найдено  $k$ , то должно было бы быть

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{n=1}^p (y_n - kx_n - b) = 0.$$

Эти два условия дают нам следующую систему уравнений для определения чисел  $k$  и  $b$ :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^p x_n y_n - k \sum_{n=1}^p x_n^2 - b \sum_{n=1}^p x_n &= 0, \\ \sum_{n=1}^p y_n - k \sum_{n=1}^p x_n - bp &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из системы уравнений (10) нетрудно найти числа  $k$  и  $b$ . С этой целью обозначим для краткости

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^p x_n, \quad \sigma_2 = \sum_{n=1}^p x_n^2, \quad r_0 = \sum_{n=1}^p y_n, \quad r_1 = \sum_{n=1}^p x_n y_n.$$

Тогда систему (10) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 k + \sigma_1 b &= r_1, \\ \sigma_1 k + pb &= r_0. \end{aligned} \right\}$$

Решая ее, получим

$$k = \frac{pr_1 - r_0\sigma_1}{p\sigma_2 - \sigma_1^2}, \quad b = \frac{r_0\sigma_2 - r_1\sigma_1}{p\sigma_2 - \sigma_1^2}.$$

На описанный метод можно смотреть также с иной точки зрения.

---

\*) При рассмотрении функции от нескольких переменных производная по одной из этих переменных при зафиксированных остальных обозначается с помощью буквы  $\partial$ , а не  $d$  (ср., например, ВМ, § 11. 12). Подробнее об этом мы поговорим в гл. IV.

Задавшись формой линейной зависимости

$$y = kx + b$$

между рассматриваемыми величинами  $x$  и  $y$ , мы получаем два неизвестных параметра  $k$  и  $b$ . В результате измерений мы приходим к соотношениям между этими параметрами

$$\left. \begin{aligned} kx_1 + b &= y_1, \\ kx_2 + b &= y_2, \\ \dots \dots \dots \\ kx_p + b &= y_p, \end{aligned} \right\}$$

т. е. к системе из  $p$  уравнений с двумя неизвестными. Такая система при  $p > 2$  является переопределенной, так как в принципе достаточно двух уравнений, чтобы найти эти неизвестные. Однако учитывая, что физические величины  $x$  и  $y$  измеряются с определенной погрешностью, мы получаем, что в случае двух измерений (т. е. при  $p = 2$ ) на значения  $k$  и  $b$  могут существенно влиять случайные ошибки измерений, так что при этом точность результата останется неясной. Поэтому уменьшение числа уравнений, содержащих такие случайные факторы, опасно. Напротив, чем больше измерений, т. е. чем в большей степени система переопределена, тем лучше, так как тогда случайные ошибки отдельных измерений погашают друг друга, и решение, найденное по методу наименьших квадратов, становится более достоверным.

Не представляет труда обобщить метод наименьших квадратов для случая более сложных зависимостей между величинами  $x$  и  $y$ . Следует отметить, однако, что метод наименьших квадратов часто приводит к довольно громоздким вычислениям. В случаях, когда искомые параметры входят в участвующие зависимости нелинейно, метод приводит к системе нелинейных уравнений, и вычислительные трудности особенно возрастают. Поэтому в практической работе зачастую более эффективными оказываются графические методы подбора формул, которые мы рассмотрим в следующем параграфе.

### Упражнения

1. Подберите формулу вида  $y = kx$  методом наименьших квадратов в случае следующих данных опыта:

а)

$x$	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
$y$	0,40	0,50	0,90	1,28	1,60	1,66	2,02	2,40

б)

$x$	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25
$y$	0,16	0,18	0,80	0,60	1,08

в)

$x$	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
$y$	0,69	1,44	2,08	2,74	3,52

Нанесите на график в каждом из трех случаев табличные точки и прямую, полученную по методу наименьших квадратов. (Графики стройте на миллиметровой бумаге.)

2. По данным следующей таблицы подберите числа  $k$  и  $b$  для формулы  $y = kx + b$  методом наименьших квадратов:

$x$	-0,20	0,20	0,40	0,60	0,70	0,80
$y$	0,96	1,40	1,56	1,74	1,92	2,04

3. Пусть даны две точки  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ . Будем по этим данным подбирать числа  $k$  и  $b$  для уравнения прямой  $y = kx + b$  методом наименьших квадратов. Покажите, что при этом получим абсолютно точный результат, т. е. получится уравнение прямой, проходящей через указанные две точки.

## § 4. Графический способ подбора формул

Напомним, что уравнение прямой линии имеет вид  $y = kx + b$ , причем числа  $k$  и  $b$  имеют простой геометрический смысл (см., например, ВМ, § IV.4):  $b$  есть величина отрезка, отсекаемого прямой на оси  $y$ , а  $k$  есть тангенс угла  $\alpha$  наклона прямой к оси  $x$  (рис. 11).

Пусть предполагается, что величины  $y$  и  $x$  связаны линейно, т. е.  $y = kx + b$ . Нанесем экспериментальные точки на график. Наложив на график прозрачную линейку и передвигая ее, нетрудно получить такую прямую, к которой экспериментальные точки лежат ближе всего (рис. 12).

Проведя эту прямую, мы определяем из чертежа  $b$  и  $k = \frac{Y}{X}$ .

Большое преимущество графического способа связано с его наглядностью. Если экспериментальные точки ложатся на прямую, за исключением отдельных выпавших точек, то эти точки наглядно

выделяются и видно, какие точки следует проверить. Если экспериментальные точки в целом не лежат на прямой, то это также видно из графика. В этом случае зависимость между величинами  $x, y$  имеет более сложный вид, нежели  $y = kx + b$ . Кроме этого, при применении графического способа не нужны сравнительно длинные расчеты, связанные с методом наименьших квадратов, в которые всегда может вкратиться вычислительная ошибка.

Прямая линия занимает исключительное положение в графическом подборе формул. Никакая

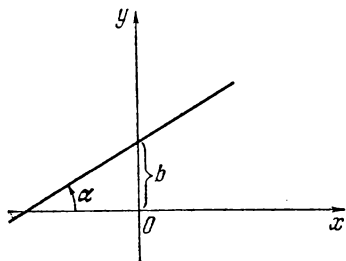


Рис. 11.

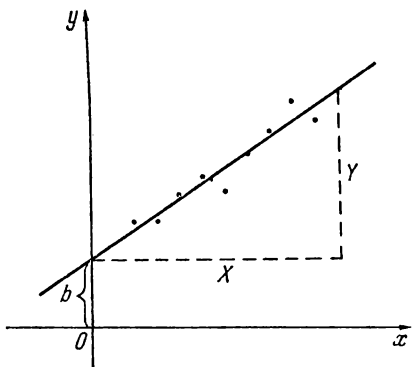


Рис. 12.

другая линия не может быть так просто и вместе с тем так надежно проведена по данным точкам. Всякий, кто в практике лабораторной работы сравнивал определение чисел  $k$  и  $b$  в уравнении прямой по графику с определением их по методу наименьших квадратов, знает, что различие всегда весьма невелико.

Как же подобрать, пользуясь графиком, константы, входящие в формулу, если эта формула имеет более сложный вид, нежели  $y = kx + b$ ?

Рассмотрим пример.

Пусть исследуется зависимость между температурой  $T$  проволоки и силой  $i$  постоянного тока, текущего по этой проволоке. Ясно, что изменение направления тока не меняет величины  $T$ , т. е.  $T(-i) = T(i)$ . Поэтому зависимость вида  $T = ai + b$  не годится. Будем искать формулу вида  $T = ai^2 + b$ . График функции  $T(i)$  есть парабола, а провести на глаз параболу трудно. Поэтому введем новую переменную  $z = i^2$ , тогда  $T = az + b$ , так что в координатах  $z, T$  искомая зависимость изображается прямой линией. При этом значение температуры  $b = T_0$  при отсутствии тока можно считать известным, так что остается определить коэффициент  $a$  при  $i^2$ .

При большой силе тока, когда достигаются высокие температуры, сопротивление проволоки нельзя считать постоянным. Поэтому тепловая мощность (количество тепла, выделяющееся в единицу времени), равная  $W = Ri^2$ , в действительности не просто пропорциональна  $i^2$ ,

так как меняется  $R$ . В уравнении теплового баланса

$$W = Ri^2 = \alpha S(T - T_0),$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи, а  $S$  — поверхность проволоки, при больших температурах коэффициент  $\alpha$  также непостоянен. Однако равенство температур для токов  $i$  и  $-i$  по-прежнему имеет место. Поэтому естественно добавить в формулу  $T = ai^2 + b$ , которая теперь может оказаться неточной, член  $ci^4$  (а не  $ci^3$ ).

Итак, ищем формулу в виде  $T = ci^4 + ai^2 + b$ .

Заметим, что  $T = b$  при  $i = 0$ , так что  $b$  не отличается от температуры окружающей среды, а потому известно (см. выше). Перепишем формулу так:

$$\frac{T-b}{i^2} = ci^2 + a.$$

Вводя новые переменные  $x = i^2$ ,  $y = \frac{T-b}{i^2}$ , получаем  $y = cx + a$ , т. е.  $x$  и  $y$  связаны линейной зависимостью. Построив график в координатах  $x$ ,  $y$ , легко определить числа  $a$  и  $c$ .

Таким образом, общая идея графического метода состоит в том, что надо ввести новые переменные так, чтобы в этих переменных интересующая нас зависимость становилась линейной.

Приведем еще несколько примеров.

Часто встречается такая зависимость между  $x$  и  $y$ , когда заведомо известно, что при  $x = 0$  должно быть  $y = 0$ , но опытные данные на графике не ложатся на прямую. В этом случае может оказаться справедливой формула

$$y = ax + bx^2.$$

Разделим все члены на  $x$ , получим  $\frac{y}{x} = a + bx$ . Положив  $\frac{y}{x} = z$ , получаем линейную зависимость  $z$  от  $x$

$$z = a + bx.$$

Другая формула, которая может оказаться годной для этого случая, это  $y = ax^n$ . Как определить показатель степени  $n$ ? Для этого прологарифмируем обе части формулы:

$$\lg y = n \lg x + \lg a.$$

Вводя новые переменные  $z = \lg y$ ,  $t = \lg x$ , получим линейную зависимость

$$z = \lg a + nt.$$

Закон радиоактивного распада описывается формулой  $n = n_0 e^{-\omega t}$ , где  $n$  — число атомов, еще не распавшихся к моменту времени  $t$ ,  $n_0$  — общее число атомов,  $\omega$  — вероятность распада. Логарифмируя обе части формулы, получим

$$\ln n = \ln n_0 - \omega t.$$

Следовательно, мы получим прямую линию в координатах  $t$ ,  $y = \ln n$ . (Подробнее о радиоактивном распаде см. ВМ, § V. 3.)

При исследовании зависимости какой-либо величины  $x$  от температуры  $T$  очень часто получается формула вида

$$x = Be^{-\frac{A}{kT}}.$$

Такая формула получается в тех случаях\*), когда дают вклад только те молекулы (или электроны), энергия которых больше величины  $A$ ; величина  $k$  — постоянная Больцмана  $\left(k = 1,4 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{град}}\right)$ .

Логарифмируя, получим  $\ln x = \ln B - \frac{A}{k} \frac{1}{T}$ . Зависимость становится линейной, если рассматривать величины  $y = \frac{1}{T}$  и  $z = \ln x$ , действительно,  $z = \ln B - \frac{A}{k} y$ .

Во всех рассмотренных нами примерах мы после выбора вида формулы вводили новые переменные так, чтобы зависимость между этими новыми переменными была линейной. Может, однако, случиться, что в новых переменных экспериментальные точки не будут ложиться на прямую. Это означает, что вид формулы выбран неудачно, следует подбирать формулу другого вида.

Пусть проделан ряд опытов, в которых при значениях аргумента  $x_1, x_2, \dots, x_p$  получены значения функции  $y_1, y_2, \dots, y_p$ . Пусть значения аргумента расположены в порядке возрастания  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ . Определение ожидаемого из опыта значения  $y$  при значении  $x$ , лежащем внутри исследованного промежутка изменения аргумента ( $x_1 < x < x_p$ ), составляет задачу интерполяции (ср. начало § 1).

Интерполяцию легко и просто произвести, если подобрана эмпирическая формула. При этом если формула подобрана хорошо, то интерполяция обычно дает хорошие результаты, редко приводит к большим ошибкам. Значительно труднее другая задача: найти, какое значение  $y$  следует ожидать из опыта при некотором значении  $x$ , лежащем вне исследованного на опыте промежутка изменения аргумента, например при  $x > x_p$ . Определение такого значения по данным опыта составляет задачу экстраполяции.

Решение задачи об экстраполяции в каждом конкретном случае требует глубокого понимания существа изучаемого явления, такую задачу нельзя решать формально, пользуясь подобранной формулой. (Правильно высказалась по этому поводу Кретья Патачкувна в книге «Пи»: «Очень трудно что-либо предвидеть, особенно на будущее».)

---

\*) Несколько таких случаев рассмотрено в ВМ, гл. VII.

Например, если по экспериментальным данным подобрана формула вида  $y = a + bx + cx^2 + px^3$ , причем она очень хорошо описывает результаты опыта, то, как правило, члены  $cx^2$ ,  $px^3$  вводятся в формулу, чтобы описать отклонение экспериментальных точек от прямой в том промежутке изменения  $x$ , где производились измерения. При этом члены  $cx^2$  и  $px^3$  обычно носят характер малых поправок к главному члену  $a + bx$ .

Если же, пользуясь такой формулой, мы будем производить экстраполяцию  $y$  для больших, далеких от исследованных на опыте, значений  $x$ , то члены  $cx^2$  и  $px^3$  начнут играть главную роль, что, однако, может совершенно не соответствовать существу явления. Положение вещей напоминает сказку Андерсена, в которой тень, отделившись от человека, начинает жить самостоятельно, делает карьеру и, наконец, заставляет самого человека служить себе.

Если при неограниченном возрастании  $x$  величина  $y$  приближается к определенному значению  $y_\infty$ , то бывает полезно отыскать это значение. Такая задача называется экстраполяцией на бесконечность. При ее решении часто оказывается целесообразным ввести новую независимую переменную  $z$ , которая оставалась бы конечной при

$x = \infty$ , например  $z = \frac{1}{x}$ . После такого перехода интервал (по  $z$ ), на который производится экстраполяция, будет уже конечным.

Рассмотрим пример.

Пусть в длинном заряде взрывчатого вещества с одного конца при помощи капсулы вызвана детонация (взрыв), которая начинает распространяться по длине заряда. Ясно, что при весьма большой

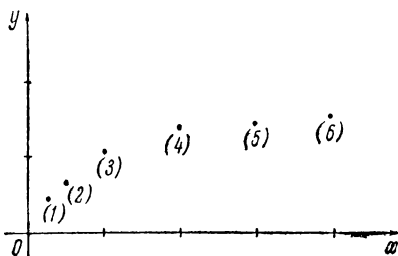


Рис. 13.

длине заряда действие его на какую-либо преграду перестает зависеть от длины заряда. Действительно, когда мы увеличиваем длину достаточно длинного заряда, то мы увеличиваем количество взрывчатого вещества, находящегося далеко от преграды, а потому оказывающего весьма малое действие. Пусть, например, через  $y$  обозначена максимальная толщина стальной стенки, которую разрушает заряд длины  $x$ . На графике рис. 13 нанесены опытные данные. Из рисунка видно, что с ростом  $x$  величина  $y$  приближается к определенному значению  $y_\infty$ . Однако определить по графику это значение  $y_\infty$  нельзя.

Как же найти его? Предположим, что при больших  $x$  формула имеет вид  $y = y_\infty - \frac{a}{x}$ . Введя новую переменную  $z = \frac{1}{x}$ , получаем  $y = y_\infty - a \cdot z$ . Теперь  $y_\infty$  соответствует значению  $z = 0$ . Построив



данные опыта в координатах  $z, y^*$ ), мы можем на глаз определить предполагаемое значение  $y$  при  $z=0$  (рис. 14).

Формула  $y = y_\infty - \frac{a}{x}$  справедлива лишь для достаточно больших  $x$ . При  $x = \frac{a}{y_\infty}$  она дает  $y=0$ , а если  $x < \frac{a}{y_\infty}$ , то получаем

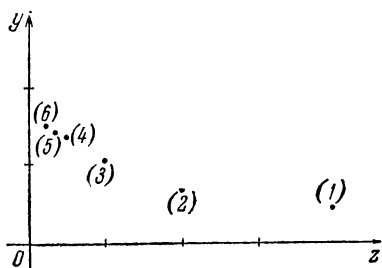


Рис. 14.

даже  $y < 0$ , что совершенно бессмысленно. Поэтому на рис. 14 точки, полученные из опыта, лежат не на прямой, а на кривой, однако в координатах  $z, y$  можно эту кривую экстраполировать на  $z=0$ , что соответствует  $x=\infty$ .

Из физического смысла задачи ясно еще, что должно быть  $y=0$  при  $x=0$ . Наиболее простая формула, отражающая оба известных нам свойства функции  $y$  ( $y=0$  при  $x=0$  и  $y$  неограниченно приближается к значению  $y_\infty$ , если  $x$  неограниченно возрастает), имеет вид

$$y = \frac{y_\infty x}{x+b}. \quad (11)$$

Как определить, пользуясь экспериментальными данными, постоянные  $y_\infty$  и  $b$ ?

Для этого перепишем формулу так:

$$\frac{1}{y} = \frac{x+b}{y_\infty x},$$

или

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{y_\infty} + \frac{b}{y_\infty} \cdot \frac{1}{x}.$$

Поэтому можно надеяться, что если мы будем строить на графике  $\frac{1}{y}$  в зависимости от  $\frac{1}{x}$ , то получим прямую линию и определим  $\frac{1}{y_\infty}$  и  $\frac{b}{y_\infty}$ . Даже если точки будут плохо ложиться на прямую, то все равно экстраполяция по такому графику надежнее, чем по графику рис. 14, так как формула (11) построена с учетом двух (а не одного, как раньше) свойств функции  $y(x)$ .

\*) На графиках рис. 13 и 14 точки, соответствующие друг другу, снабжены одинаковыми номерами.

## Упражнения

1. По данным следующей таблицы подберите формулу вида
- $y = ax^2 + b$
- :

$x$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$y$	1,20	1,10	2,35	3,05	4,40	5,50

Решите задачу двумя способами:

- а) методом наименьших квадратов,  
б) графически.

2. Графическим способом подберите формулу вида
- $y = ax^2 + bx$
- , если результаты опыта таковы:

$x$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$y$	0	1,7	3,1	3,8	3,9	3,8	3,0

3. По данным таблицы

$x$	1	2	3	4
$y$	0,5	1,4	2,5	4

подберите формулу вида  $y = Ax^b$ . (Примените графический способ.)

4. Результаты измерений дали следующее:

$x$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$y$	1,66	1,58	1,50	1,44	1,37	1,30	1,22	1,17

Кроме того, известно следующее:

- а) при неограниченном увеличении  $x$  величина  $y$  приближается к нулю;  
б) при  $x=0$  величина  $y$  имеет вполне определенное значение. Этим условиям удовлетворяют, например, такие простые формулы:

$$y = \frac{1}{B+Cx} \quad \text{и} \quad y = Ae^{-kx}.$$

Подберите значения параметров, входящих в эти формулы. Пользуясь формулами, получите значения  $y$  при  $x=1,25$ ;  $x=3,75$ ;  $x=-1$ ;  $x=-2$ ;  $x=-3$ . Сравните результаты.

5. Результаты опыта дали следующее:

$x$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
$y$	1,6	1,7	2,0	2,3	2,4	2,5

Известно, кроме того, что при неограниченном возрастании  $x$  величина  $y$  приближается к некоторому значению  $y_{\infty}$ . Найдите это предельное значение двумя способами:

а) подбирая формулу вида  $y = A + \frac{B}{x}$ ;

б) подбирая формулу вида  $y = \frac{ax}{x+b}$ .

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1

1. По формуле (2)  $y_{3/2} = 1,45$ ; по формуле (4)  $y_{3/2} = 1,41$ ; по формуле (5)  $y_{3/2} = 1,43$ ; по наиболее точной формуле Бесселя  $y_{3/2} = 1,42$ .

2. Если  $y_i = y|_{x=x_i} = x_i^n$ , а  $\Delta x = h$ , то по формуле бинома Ньютона

$$\delta y_{i+1/2} = \delta y|_{x=x_i+h/2} = (x_i+h)^n - x_i^n = nhx_i^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 x_i^{n-2} + \dots$$

Обозначив  $x_i + h/2 = x'_i$ , получим

$$\delta y|_{x=x'_i} = nh \left( x'_i - \frac{h}{2} \right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 \left( x'_i - \frac{h}{2} \right)^{n-2} + \dots$$

Раскрыв в правой части скобки, мы видим, что в этом примере разности образуют последовательность значений многочлена степени  $n-1$ . То же будет для функции  $y = ax^n$  ( $a = \text{const}$ ), так как при образовании разностей коэффициент  $a$  служит общим множителем. Заметив, что при сложении функций их разности также складываются, мы заключаем, что для любого многочлена степени  $n$  разности образуют последовательность значений некоторого многочлена степени  $n-1$ . Значит, вторые разности образуют последовательность значений многочлена степени  $n-2$  и т. д., а  $n$ -е разности — последовательность значений многочлена нулевой степени, т. е. константы. Поэтому разности  $(n+1)$ -го порядка в этом случае равны нулю.

#### § 2

$y'_{1/2} = 0,50$ ;  $y'_{3/2} = 0,80$ ;  $y'_{5/2} = 1,38$ . По линейной интерполяции  $y'_1 = 0,65$ ;  $y'_2 = 1,09$ . По формуле (4)  $y'_1 = 0,62$ . По формуле (5)  $y'_2 = 1,06$ .

#### § 3

1. а)  $y = 1,18x$ ; б)  $y = 0,78x$ ; в)  $y = 1,75x$ .
2.  $y = 1,03x - 1,19$ .

3. Уравнение прямой имеет вид  $y=kx+b$ . Числа  $k$  и  $b$  определяются из условий  $y=y_1$  при  $x=x_1$  и  $y=y_2$  при  $x=x_2$ . Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} kx_1+b=y_1, \\ kx_2+b=y_2, \end{cases}$$

из которой находим

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, \quad b=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}. \quad (12)$$

Покажем, что такие же значения  $k$  и  $b$  мы получим, применяя метод наименьших квадратов.

В нашем случае

$$S=(y_1-kx_1-b)^2+(y_2-kx_2-b)^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial k} \Big|_{b=\text{пост}} &= -2 [(y_1-kx_1-b)x_1 + (y_2-kx_2-b)x_2], \\ \frac{\partial S}{\partial b} \Big|_{k=\text{пост}} &= -2 [(y_1-kx_1-b) + (y_2-kx_2-b)]. \end{aligned}$$

Приравнивая эти производные нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (y-kx_1-b)x_1 + (y_2-kx_2-b)x_2=0, \\ y_1-kx_1-b + y_2-kx_2-b=0. \end{cases}$$

Решая систему, находим те же значения (12).

Впрочем, совпадение результатов можно вывести и из того простого соображения, что через любые две точки можно провести одну прямую линию.

#### § 4

1. Для применения метода наименьших квадратов составляем сумму.

$$S = \sum_{k=1}^6 (y_k - ax_k^2 - b)^2.$$

Действуя дальше обычным способом, находим  $a=0,48$ ;  $b=1,23$ , т. е. искомая формула

$$y=0,48x^2+1,23.$$

Для того чтобы решить задачу графически, вводим новую переменную  $t=x^2$ , тогда  $y=at+b$ . В координатах  $(t; y)$  получаем прямую линию. Нанеся точки  $(t_k=x_k^2; y_k)$  на график, находим  $a=0,49$ ;  $b=1,35$ , т. е.

$$y=0,49x^2+1,35.$$

2. Полагаем  $\frac{y}{x}=z$ , тогда  $z=ax+b$ . Построив точки в координатах  $(x; z)$ , найдем  $a=-1,02$ ,  $b=4$ , так что  $y=-1,02x^2+4x$ .

3. В этом случае по осям координат надо откладывать соответственно  $\lg x$  и  $\lg y$ . Получим  $A=0,5$ ;  $b=1,5$ ;  $y=0,5x^{1,5}$ .

4. Графическим способом находим  $y = \frac{1}{0,56 + 0,07x}$ ;  $y = 1,74e^{-0,1x}$ . Значения  $y$ , найденные по первой и по второй из этих формул при нескольких указанных значениях, сведены в следующую таблицу:

$x$	Значение $y$ по первой формуле	Значение $y$ по второй формуле
1,25	1,54	1,54
3,75	1,22	1,20
-1	2,01	2,00
-2	2,38	2,12
-3	2,86	2,35

Смысл последнего расчета состоит в следующем: интерполяция, как упоминалось в тексте, редко приводит к большим ошибкам, в нашем случае обе формулы при  $x=1,25$  и при  $x=3,75$  дают весьма близкие результаты; экстраполяция, наоборот, мало надежна. Из таблицы видно, что чем дальше отстоит  $x$  от табличных, тем сильнее разнятся значения  $y$ , полученные по разным формулам. Отметим еще, что при  $x=-8$  первая формула вообще теряет смысл, а при  $x < -8$  первая формула дает  $y < 0$ , а вторая  $y > 0$ .

5. а)  $y_{\infty} = 2,8$ ; б)  $y_{\infty} = 2,9$ .

### ГЛАВА III

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛАХ И РЯДАХ

### § 1. Несобственные интегралы

При обычном определении интеграла (см., например, ВМ, § 1.8) считается, что интервал интегрирования конечен и что подынтегральная функция на нем не обращается в бесконечность. Такие интегралы называются *интегралами в собственном смысле* или, коротко, *собственными*. Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется *несобственным*. Такие интегралы встречаются уже в простых задачах интегрального исчисления (см., например, ВМ, §§ II.16, III.3, VI.2). Здесь мы рассмотрим эти интегралы более подробно.

Рассмотрим сначала интеграл вида

$$I = \int_a^{\infty} f(x) dx, \quad (1)$$

где нижний предел  $a$  и подынтегральная функция  $f(x)$  при  $a \leq x < \infty$  предполагаются конечными. Такой интеграл является несобственным из-за того, что его верхний предел бесконечен; как говорят, он имеет *особенность* на верхнем пределе.

Допустим, что интеграл (1) получился при решении некоторой физической задачи и переменная  $x$  имеет непосредственный физический смысл (длина, время и т. п.). Тогда реально  $x$  изменяется не до бесконечности, а до какого-то очень большого, но конечного предела, который мы обозначим через  $N$ , т. е. взамен (1) надо рассмотреть интеграл

$$I_N = \int_a^N f(x) dx. \quad (2)$$

Может оказаться, что интеграл (2), хотя и зависит от  $N$ , но при достаточно больших  $N$  практически не меняется. Тогда это значение принимается за значение интеграла (1); более точно, тогда

принимается

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx,$$

а интеграл (1) называется *сходящимся*. Из этого предела и равенства

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^N f(x) dx + \int_N^{\infty} f(x) dx$$

видно, что основной вклад в сходящийся интеграл дает его «конечная» («собственная») часть, тогда как вклад особенности при достаточно большом  $N$  как угодно мал. Другими словами, в случае сходимости интеграла (1) можно «реальный» интеграл (2) при большом  $N$ , которое часто бывает точно и не известно, заменять на «предельный» интеграл (1), который обычно проще в теоретических исследованиях.

Если значение интеграла (1) с ростом  $N$  не «устанавливается», а стремится к бесконечности или колеблется, не имея определенного предела, то интеграл (1) называется *расходящимся*. В этом случае значение интеграла (2) при больших  $N$  существенно зависит от  $N$  и заменить (2) на (1) нельзя. Тогда может возникнуть вопрос о более детальной характеристике поведения интеграла (2) при возрастании  $N$ , т. е. о получении *асимптотических формул* для этого интеграла. (Кстати, такой вопрос возникает и для сходящихся интегралов (1), так как установить лишь факт сходимости или расходимости и даже найти численное значение в случае сходимости часто оказывается недостаточным — может понадобиться еще сам закон сходимости.)

Из сказанного следует, что факт сходимости или расходимости интеграла (1) зависит только от поведения функции  $f(x)$  «в особенности интеграла», т. е. при  $x \rightarrow \infty$ . Наиболее часто этот факт распознается при помощи сравнения  $f(x)$  со степенной функцией  $\frac{C}{x^p}$ , от которой интеграл легко берется. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{x_0}^{\infty} \frac{C}{x^p} dx \quad (C = \text{const}), \quad (3)$$

где  $x_0$  — любое положительное число (если взять  $x_0$  отрицательным, то интеграл будет иметь особенность также и при  $x=0$ , где подынтегральная функция обращается в бесконечность). Этот интеграл легко взять:

$$\int_{x_0}^{\infty} Cx^{-p} dx = \left. \frac{Cx^{-p+1}}{-p+1} \right|_{x_0}^{\infty} = -C \frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_{x_0}^{\infty} = \frac{C}{(p-1)x_0^{p-1}} - \frac{C}{(p-1)\infty^{p-1}}. \quad (4)$$

Здесь приходится различать два случая. Именно, если  $p > 1$ , то  $p-1 > 0$ ,  $\infty^{p-1} = \infty$  и последний член в правой части (4) равен

нулю. Значит, в этом случае интеграл (3) сходится. Если же  $p < 1$ , то  $\infty^{p-1} = \frac{1}{\infty^{1-p}} = 0$  и потому последний член в (4) равен бесконечности. Значит, в этом случае интеграл (3) *расходится к бесконечности*, т. е. соответствующий интеграл  $I_N$ , взятый от  $x_0$  до  $N$ , стремится к бесконечности при возрастании  $N$ . Выражение для  $I_N$  получится, если в правую часть (4) подставить  $N$  вместо  $\infty$  (и в других случаях выражение для  $I_N$ , если соответствующий неопределенный интеграл берется, получается весьма просто). Хорошо видно, что в этом выражении для больших  $N$  главным членом при  $p > 1$  будет первый, а при  $p < 1$  — второй.

При  $p = 1$  интеграл (3) равен

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{C}{x} dx = C \ln x \Big|_{x_0}^{\infty} = C \ln \infty - C \ln x_0 = \infty,$$

т. е. интеграл также расходится к бесконечности. Итак, интеграл (3) сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

На основе этого результата мы можем заключить, например, что интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx, \quad (5)$$

имеющий особенность на верхнем пределе, расходится к бесконечности, так как при больших  $x$  подынтегральная функция

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{1}{x^{2/3}} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{-2}}} \quad (6)$$

асимптотически равна  $\frac{1}{x^{2/3}}$ , т. е. в данном случае  $p = \frac{2}{3} < 1$ .

Напротив, интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} dx \quad (7)$$

сходящийся, так как подынтегральная функция асимптотически, при  $x \rightarrow \infty$ , равна  $\frac{1}{x^{3/2}}$ , т. е. в данном случае  $p = \frac{3}{2} > 1$ . Интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (8)$$

также сходящийся, так как подынтегральная функция при  $x \rightarrow \infty$  стремится к нулю быстрее любой степени  $x$ . Во всех этих примерах соответствующие неопределенные интегралы не выражаются через



элементарные функции, так что установить сходимость при помощи вычисления неопределенного интеграла было бы затруднительно.

Нетрудно получить асимптотические выражения трех последних интегралов, взятых от 0 до  $N$ , при увеличении  $N$ . Для расходящегося интеграла вида (1) применяется следующий прием: подбирается функция  $f_1(x)$ , от которой интеграл берется просто, причем асимптотически (при  $x \rightarrow \infty$ ) почти равная  $f(x)$ ; тогда в правой части равенства

$$\int_a^N f(x) dx = \int_a^N f_1(x) dx + \int_a^N [f(x) - f_1(x)] dx$$

первый интеграл (главный член) легко исследуется, а второй может оказаться сходящимся при  $N \rightarrow \infty$  или же к нему можно применить тот же прием. Для интеграла (5) естественно принять  $f_1(x) = x^{-2/3}$ , т. е. написать

$$\begin{aligned} \int_0^N \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} + \int_a^N \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \\ &= C_1 + \int_a^N \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int_a^N \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \\ &= C_1 + 3\sqrt[3]{N} - 3\sqrt[3]{a} + \int_a^N \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь мы перешли от  $\int_0^N$  к  $\int_a^N$ , где  $a$  — какое-либо положительное число (хотя это в данном примере необязательно), чтобы избежать несобственного интеграла  $\int_0^N x^{-2/3} dx$ , имеющего особенность на нижнем пределе. Можно проверить, что последний интеграл в (9) при  $N \rightarrow \infty$  сходящийся и потому при больших  $N$  все выражение (9) имеет асимптотическое представление  $3\sqrt[3]{N} + C$  + бесконечно малая, где  $C$  — некоторая постоянная. Чтобы найти значение постоянной  $C$ , надо воспользоваться равенством

$$C \approx \int_0^N \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} - 3\sqrt[3]{N}$$

для некоторого  $N$ , причем интеграл в правой части подсчитать по одной из формул численного интегрирования.

Аналогично исследуется асимптотическое поведение интегралов (7) и (8). Для сходящегося интеграла часто оказывается полезным преобразование

$$\int_a^N f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx - \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

Для интеграла (7) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^N \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} - \int_N^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} (1+x^{-3})^{-1/2} dx \approx \\ &\approx \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} - \int_N^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = D - \frac{2}{\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

где постоянную  $D$ , равную значению интеграла (7), можно подсчитать, как  $C$  в предыдущем абзаце.

К интегралу (8) применяем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^N e^{-x^2} dx &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_N^{\infty} e^{-x^2} dx = E + \int_N^{\infty} \frac{1}{2x} de^{-x^2} = \\ &= E - \frac{1}{2N} e^{-N^2} + \frac{1}{2} \int_N^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx \approx E - \frac{1}{2N} e^{-N^2}. \end{aligned}$$

Постоянная  $E$ , т. е. значение интеграла (8), как мы увидим в § IV.7, равна  $\sqrt{\pi}/2$ .

В качестве другого примера рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \sin x dx. \quad (10)$$

В данном случае интеграл по конечному промежутку

$$I_N = \int_0^N \sin x dx = -\cos x \Big|_0^N = 1 - \cos N. \quad (11)$$

При возрастании  $N$  значение  $\cos N$  колеблется и не имеет определенного предела. Значит, интеграл (10) расходящийся, причем «колебательным» способом.

Легко проверить, что введение под знак интеграла (10) затухающего множителя  $e^{-\alpha x}$  ( $\alpha = \text{const} > 0$ ) приводит к сходящемуся интегралу

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx.$$

Можно доказать, что сходится и интеграл более общего вида

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin x \, dx,$$

где  $f(x)$  — любая убывающая функция, стремящаяся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

Несобственные интегралы отличного от (1) вида рассматриваются аналогично (1). Например, пусть дан интеграл

$$\int_a^b f(x) \, dx, \quad (12)$$

для которого пределы интегрирования конечны, но подынтегральная функция при  $x \rightarrow a$  обращается в бесконечность, т. е. интеграл имеет особенность при  $x = a$ . Тогда особенность «отрезают», т. е. рассматривают взамен (12) интеграл

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx, \quad (13)$$

где  $\varepsilon$  — малое положительное число. Если при достаточно малом  $\varepsilon$  интеграл (13) практически перестает зависеть от  $\varepsilon$ , то интеграл (12) называют сходящимся и полагают

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx.$$

В этом случае от интеграла (13) (который часто появляется при решении физической задачи, так как все физические величины конечны) можно перейти к более простому интегралу (12), т. е. вкладом особенности в интеграл (12) можно пренебречь. Если же интеграл (13) при малых  $\varepsilon$  существенно зависит от  $\varepsilon$ , т. е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$  он не имеет конечного предела, а стремится к бесконечности или колеблется, не имея определенного предела, то интеграл (12) называется расходящимся; в этом случае переходить от (13) к (12) нельзя.

Факт сходимости или расходимости несобственного интеграла вида (12) обычно устанавливают, сравнивая подынтегральную функцию  $f(x)$  со степенной функцией  $\frac{C}{(x-a)^p}$ , также равной бесконечности при  $x = a$  и легко интегрируемой. Мы предоставляем читателю проверить, что несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{C}{(x-a)^p} \, dx \quad (C = \text{const}) \quad (14)$$

сходится при  $p < 1$  и расходится при  $p \geq 1$ .

Рассмотрим для примера задачу об истечении жидкости из цилиндрического сосуда, в дне которого проделано отверстие площади  $\sigma$  (рис. 15). Высота  $h$  уровня жидкости зависит от времени  $t$ , т. е.  $h = h(t)$ . Если жидкость не вязкая и силами поверхностного натяжения можно пренебречь, то скорость  $v$  истечения жидкости из сосуда с достаточной точностью описывается законом Торричелли

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Поэтому объем, вытекший за время  $dt$ , равен

$$\sigma v dt = \sigma \sqrt{2gh} dt.$$

С другой стороны, тот же объем равен  $-Sdh$  (надо учесть, что  $h$  убывает и потому  $dh < 0$ ). Приравнявая оба выражения, получим, что

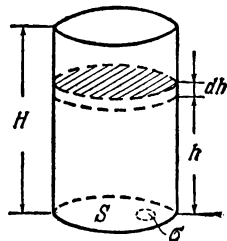


Рис. 15.

$$\sigma \sqrt{2gh} dt = -Sdh, \quad \text{т. е.} \quad dt = -\frac{S}{\sigma \sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Чтобы получить полное время истечения, надо произвести интегрирование:

$$T = -\frac{S}{\sigma \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{S}{\sigma \sqrt{2g}} \frac{h^{1/2}}{\frac{1}{2}} \Big|_H^0 = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (15)$$

Реально истечение происходит не до  $h=0$ , а до  $h=\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторая величина, сравнимая с шероховатостями дна или с толщиной смачивающей пленки, т. е. формулу (15) надо было бы писать в виде

$$T = -\frac{S}{\sigma \sqrt{2g}} \int_H^\varepsilon \frac{dh}{\sqrt{h}}. \quad (16)$$

Однако так как несобственный интеграл (15) получился сходящимся (это показали вычисления (15), да к тому же рассматриваемый интеграл — это интеграл вида (14) при  $p = \frac{1}{2}$ ), то интеграл (16) можно заменить на (15). Как видим, в данном примере  $\varepsilon$  нам не было точно известно, но оно и несущественно, так как для сходящегося интеграла важно только знать, что  $\varepsilon$  мал.

При численном интегрировании (ср. § 1.1) несобственные интегралы требуют особого внимания. Часто заданный интеграл представляют в виде суммы собственного, полученного исключением интервала около особенности из интервала интегрирования, и несобственного, взятого по интервалу около особенности. Первый находят

численно, а во втором применяется разложение в какой-либо ряд или просто подынтегральная функция приближенно заменяется на какую-либо другую функцию (например, степенную), от которой

интеграл взять легко. В качестве примера вычислим  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ . Здесь

подынтегральная функция неограниченно возрастает при приближении  $x$  к 0 и при приближении  $x$  к  $\pi$ . Разобьем промежуток интегрирования на три части: от 0 до  $\frac{\pi}{6}$ , от  $\frac{\pi}{6}$  до  $\frac{5\pi}{6}$  и от  $\frac{5\pi}{6}$  до  $\pi$ . В первом промежутке можно считать, что  $\sin x \approx x$ , так как  $x$  невелико. Поэтому

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \approx \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^{\pi/6} = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}} = 1,45^*).$$

В третьем промежутке, т. е. при  $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$ , воспользуемся формулой  $\sin x = \sin(\pi - x)$ , и так как величина  $\pi - x$  мала, то  $\sin(\pi - x) \approx \pi - x$ . Окончательно в этом промежутке  $\sin x \approx \pi - x$ . Получаем

$$\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \approx \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\pi - x}} = -2\sqrt{\pi - x} \Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}} = 1,45.$$

Интеграл по среднему промежутку подсчитаем по формуле Симпсона, разбивая этот промежуток на две части. Получим

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \approx \frac{\pi}{9} [1,41 + 4 \cdot 1 + 1,41] = 2,38.$$

---

\*) Для большей точности здесь можно применить разложение в ряд

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} &= \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{-1/2} dx = \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right)^{-1/2} dx = \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{160} + \dots \right) dx = \sqrt{\alpha} \left( 2 + \frac{\alpha^2}{30} + \frac{\alpha^4}{720} + \dots \right). \end{aligned}$$

Однако при применяемой степени точности вычислений поправка ничтожна (получится 1,46); полезным является только то, что мы узнаем о степени достоверности полученного результата.

Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \approx 1,45 + 2,38 + 1,45 = 5,28.$$

Точное значение этого интеграла (с двумя десятичными знаками) есть 5,25.

#### Упражнение

Вычислите интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ , проводя вычисления в пределах точности логарифмической линейки.

### § 2. Интегрирование выстроменяющихся функций

При численном интегрировании полезно уметь заранее оценить порядок величины интеграла. Из геометрического смысла интеграла

$$I = \int_a^b y(x) dx$$

сразу вытекает очевидная оценка

$$I < \int_0^b y_{\max} dx = y_{\max} (b - a),$$

где  $y_{\max}$  — наибольшее значение подынтегральной функции  $y(x)$  на промежутке интегрирования. Если эта функция положительна и мало меняется на промежутке интегрирования, то можно принять  $y \approx y_{\max}$ , т. е.

$$I \lesssim y_{\max} (b - a) \quad (17)$$

(эта оценка уже встречалась в ВМ, § II.16).

Отметим сразу же, что оценкой (17), как и дальнейшими оценками этого параграфа, неудобно пользоваться для знакопеременных функций  $y(x)$ . В этом случае промежутки интегрирования можно разбить на несколько частей так, чтобы внутри каждого из полученных промежутков  $y(x)$  сохраняла знак, после чего оценить интегралы по этим промежуткам. Однако суммарная оценка будет удовлетворительной, только если вклад интегралов одного знака существенно превосходит вклад интегралов противоположного знака.

Поэтому мы впредь в этом параграфе будем считать подынтегральную функцию положительной на интервале интегрирования.

Если функция  $y(x)$  на промежутке интегрирования, оставаясь положительной, очень быстро убывает, а  $b$  сравнительно велико, то оценка (17) может привести к большим ошибкам. В самом деле,

пользуясь оценкой (17), мы заменяем функцию ее максимальным значением. Однако если функция изменяется быстро, то ее значения близки к максимальному только в малой части области интегрирования. В качестве примера рассмотрим  $I = \int_0^b e^{-x} dx$  ( $b > 0$ ). Максимальное значение подынтегральной функции на промежутке интегрирования получает при  $x=0$ ; это максимальное значение равно 1. Оценка (17) дает  $I \approx b$ . Однако в данном примере для интеграла легко получить точную формулу:  $I = 1 - e^{-b}$ . Составим таблицу зависимости точного значения величины  $I$  от  $b$ :

$b$	0	0,1	0,2	0,5	1	2	3	5	10
$I$	0	0,095	0,18	0,39	0,63	0,86	0,95	0,993	0,99996

Из таблицы видно, что пока  $b$  мало (при этом функция в области интегрирования изменяется мало), оценка (17) неплоха. Однако если  $b$  велико, то приближение  $I \approx b$  становится очень плохим.

Пусть функция  $y(x)$  на всем промежутке интегрирования быстро убывает. Тогда максимальное значение функции достигается на левом конце промежутка, т. е. при  $x=a$ . (Отметим, что отсюда не следует равенства  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = y'(a) = 0$ ; см. рис. 16.) Так как для быстрозатухающей функции

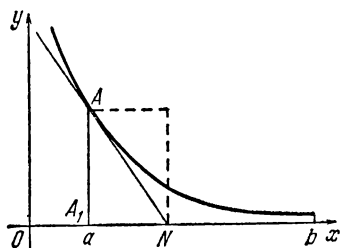


Рис. 16.

интеграл  $I = \int_a^b y dx$  не может

существенно изменяться при увеличении  $b$ , то грубая оценка интеграла  $I$  не должна включать  $b$ , мы как бы полагаем  $b = \infty$ . Естественно считать, что

в этом случае интеграл приближенно равен произведению  $y_{\max} = y(a)$  на некоторую не зависящую от  $b$  длину  $\Delta x$  промежутка интегрирования. Эта длина при заданном  $y(a)$  должна быть тем меньше, чем быстрее убывает функция, т. е. чем больше  $|y'(a)|$ . Величину  $\Delta x$  такой же размерности, что и  $x$ , можно построить, исходя из величин  $y(a)$  и  $|y'(a)|$ , единственным способом

$$\Delta x = \frac{y(a)}{|y'(a)|} m,$$

где  $m$  — безразмерный коэффициент пропорциональности. После этого получаем

$$I \approx y(a) \Delta x = \frac{y^2(a)}{|y'(a)|} m. \quad (18)$$

Если функция  $y(x)$  возрастает на промежутке интегрирования, то она достигает максимума на правом конце промежутка, т. е. при

$x = b$ . В этом случае формула (18) принимает вид

$$I \approx \frac{y^2(b)}{y'(b)} m.$$

Типичным примером быстроменяющейся функции может служить показательная функция  $y = Ce^{-kx}$  ( $C > 0$ ;  $k > 0$ ). Выберем значение  $m$  в формуле (18) из условия, чтобы формула (18) была абсолютно точна для  $\int_a^\infty Ce^{-kx} dx$ .

Так как  $y = Ce^{-kx}$ ,  $y' = -kCe^{-kx}$ , то  $y(a) = Ce^{-ka}$ ,  $|y'(a)| = kCe^{-ka}$ , поэтому формула (18) дает

$$I = m \frac{C^2 e^{-2ka}}{k C e^{-ka}} = m \frac{C e^{-ka}}{k} = \frac{m}{k} y(a).$$

Точное значение рассматриваемого интеграла есть

$$I = \int_a^\infty C e^{-kx} dx = -\frac{C}{k} e^{-kx} \Big|_a^\infty = \frac{1}{k} y(a).$$

Сравнивая результаты, получаем  $\frac{m}{k} y(a) = \frac{1}{k} y(a)$ , откуда  $m = 1$ . Поэтому формула (18) принимает вид

$$I \approx \frac{y^2(a)}{|y'(a)|}. \quad (19)$$

Эта формула в случае бесконечного промежутка для быстроменяющихся функций другого вида, а также в случае конечного промежутка, вообще говоря, не является точной, однако дает неплохие результаты.

Для того чтобы выяснить наглядный геометрический смысл оценки (19), поступим следующим образом. Проведем к кривой  $y = y(x)$  касательную в точке  $A$  (рис. 16) и найдем длину отрезка  $A_1N$ . Уравнение касательной есть  $y - y(a) = y'(a)(x - a)$ ; полагая в нем  $y = 0$ , получим точку пересечения касательной с осью  $x$ . Это дает  $x = a - \frac{y(a)}{y'(a)}$ , или, замечая, что  $y'(a) < 0$ , так как  $y(x)$  — убывающая функция, получаем  $x = a + \frac{y(a)}{|y'(a)|}$ . Поэтому

$$A_1N = a + \frac{y(a)}{|y'(a)|} - a = \frac{y(a)}{|y'(a)|} = \Delta x.$$

Оценка интеграла по формуле (19) соответствует замене площади под кривой  $y = y(x)$  площадью прямоугольника, изображенного на рис. 16.



Пример. Найдем по формуле (19)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8}$ . Здесь  $y = \frac{1}{x^8}$ ,  $y' = -\frac{8}{x^9}$ , поэтому  $y(1) = 1$ ,  $|y'(1)| = 8$ ,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8} \approx \frac{1}{8} = 0,125.$$

Точное значение этого интеграла есть  $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8} = -\frac{1}{7x^7} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{7} = 0,143$ . Ошибка составляет 13%.

Часто встречается другой вид интегралов, у которых подынтегральная функция  $y(x)$  достигает максимума при  $x = x_m$  где-то внутри промежутка интегрирования (рис. 17, а). При этом в точке максимума  $y'(x) = 0$ . Можно разбить интеграл на два интеграла от  $a$  до  $x_m$  и от  $x_m$  до  $b$ . Тогда в каждом из них подынтегральная функция достигает максимума на краю промежутка. Может показаться, что задача сведена к предыдущей. В действительности это не так, разбиение интеграла на два ничего не дает, так как при  $x = x_m$  все равно  $y' = 0$  и оценка (19) неприменима. Значит, это действительно новый случай и надо

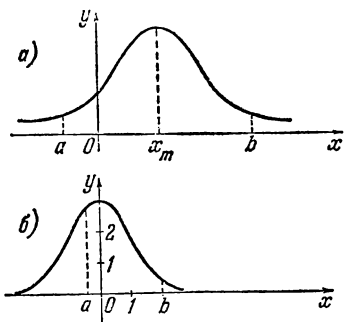


Рис. 17.

по-другому выделять из всего проме-

жутка интегрирования необходимую его часть  $\Delta x$ . Идея заключается в том, что в этом случае величина  $\Delta x$  определяется значением  $y''(x_m)$ , т. е. определяется величиной кривизны в точке максимума. Из чертежа ясно, что чем круче кривая, тем меньше следует брать  $\Delta x$ . Размерность второй производной совпадает с размерностью величины  $\frac{y}{x^2}$ . Поэтому величина той же размерности, что и  $\Delta x$ , получается

из величин  $y(x_m)$  и  $y''(x_m)$  так:  $\Delta x = l \sqrt{\frac{y(x_m)}{|y''(x_m)|}}$  (\*). (Мы пишем

\*) К выражению такого вида для  $\Delta x$  мы можем прийти еще так: разложим  $y(x)$  в ряд Тейлора вблизи максимума, т. е. по степеням  $x - x_m$ , и возьмем два первых члена, которые не обращаются в нуль. Получим  $y(x) = y(x_m) + \frac{1}{2}(x - x_m)^2 \cdot y''(x_m)$ . Найдем значение разности  $x - x_m = \Delta x$ , при которой обращается в нуль это приближенное выражение для  $y(x)$ :

$$y(x_m) + \frac{1}{2}(x - x_m)^2 \cdot y''(x_m) = 0,$$

$|y''(x_m)|$ , а не  $y''(x_m)$ , потому что  $y''(x_m) < 0$ , так как при  $x = x_m$  функция  $y(x)$  имеет максимум.) Величина  $l$  есть безразмерный коэффициент. Для интеграла получаем оценку

$$I \approx y(x_m) \cdot \Delta x = l \cdot y(x_m) \sqrt{\frac{y(x_m)}{|y''(x_m)|}} = l \sqrt{\frac{y^3(x_m)}{|y''(x_m)|}}. \quad (20)$$

Значение коэффициента  $l$  определим из условия, чтобы формула (20)

была абсолютно точна для  $\int_{-\infty}^{+\infty} y dx$ , где

$$y(x) = Ce^{-kx^2}, \quad k > 0, \quad C > 0.$$

(График функции  $y = Ce^{-kx^2}$  для случая  $C = 3$ ,  $k = 0,5$  изображен на рис. 17, б.)

В этом случае  $x_m = 0$ ,  $y(x_m) = C$ ,  $y''(x_m) = -2Ck$ . По формуле (20) находим

$$I = l \sqrt{\frac{C^3}{2Ck}} = \frac{lC}{\sqrt{2k}}. \quad (21)$$

Чтобы найти точное значение интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-kx^2} dx$ , выполним в нем замену переменной по формуле  $z = x\sqrt{k}$ ,  $dz = \sqrt{k} dx$ . Получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-kx^2} dx = \frac{C}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

Величина интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz$  может быть найдена точно: в § IV.7 мы покажем, что этот интеграл равен  $\sqrt{\pi}$ . Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-kx^2} dx = C \sqrt{\frac{\pi}{k}}.$$

Сравнивая эту формулу с (21), находим

$$\frac{lC}{\sqrt{2k}} = C \sqrt{\frac{\pi}{k}},$$

откуда

$$\Delta x = x - x_m = \sqrt{-\frac{2y(x_m)}{y''(x_m)}} = \sqrt{\frac{2y(x_m)}{|y''(x_m)|}}.$$

Соответственно приближенное значение для  $I$  получается равным

$$I \approx \int_{x_m - \Delta x}^{x_m + \Delta x} \left[ y(x_m) + \frac{1}{2} (x - x_m)^2 y''(x_m) \right] dx = \frac{4}{3} y(x_m) \Delta x = \sqrt{\frac{32}{9} \frac{y^3(x_m)}{|y''(x_m)|}}.$$

откуда  $l = \sqrt{2\pi}$ . Формула (20) принимает вид

$$I \approx \sqrt{2\pi \frac{y^3(x_m)}{|y''(x_m)|}}. \quad (22)$$

Таким образом, для двух типов быстроменяющихся функций мы получили две формулы (19) и (22), причем коэффициенты в этих формулах подобраны так, что формулы точны для интегралов по бесконечному промежутку от типичных функций: формула (19) точна для  $\int_a^{\infty} Ce^{-kx} dx$ , а формула (22) — для  $\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-kx^2} dx$ . При другом выборе типичных функций формулы содержали бы другие коэффициенты. Определим, например, значение коэффициента  $l$  из условия, чтобы формула (20) была точна для  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+kx^2} dx$ ,  $C > 0$ ,  $k > 0$ . (Читатель легко убедится сам, что функция  $y = \frac{C}{1+kx^2}$  имеет максимум при  $x_m = 0$ .) Так как  $y = \frac{C}{1+kx^2}$ ,  $y'' = 2Ck \frac{3kx^2 - 1}{(1+kx^2)^3}$ , то (20) дает

$$I = l \sqrt{\frac{C^3}{2Ck}} = \frac{lC}{\sqrt{2k}}.$$

Для того чтобы вычислить интеграл точно, положим  $\sqrt{k}x = z$ ,  $dz = \sqrt{k}dx$ , тогда

$$I = \frac{C}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{C\pi}{\sqrt{k}}.$$

Поэтому  $\frac{lC}{\sqrt{2k}} = \frac{C\pi}{\sqrt{k}}$ , откуда  $l = \pi\sqrt{2}$ . В этом случае мы получаем формулу

$$I \approx \pi \sqrt{\frac{2y^3(x_m)}{|y''(x_m)|}}.$$

Однако предпочтение отдается именно формулам (19) и (22). Причина этого заключается в следующем. Оказывается, что если получать быстроменяющиеся функции путем возведения в степень  $n$  какой-либо данной функции  $f(x)$ , для которой  $|f(x)| < f(x_m)$  при  $x \neq x_m$ , то при достаточно больших  $n$  относительная погрешность формул (19) и (22) становится как угодно малой.

Поясним сказанное двумя примерами.

1. Будем интегрировать последовательные степени функции  $u = \frac{1}{1+x}$  в пределах от  $x=0$  до  $x=\infty$ . Для этого обозначим  $u_n = \frac{1}{(1+x)^n}$ ; это — быстроменяющиеся функции первого типа

с максимумом на краю, причем чем больше показатель степени  $n$ , тем круче спадает функция  $u_n$  при увеличении  $x$  от 0. Найдем  $I^{(n)} =$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^n} \text{ при помощи формулы (19).}$$

Так как  $u_n' = \frac{-n}{(1+x)^{n+1}}$ , то  $|u_n'(0)| = n$ , а потому приближенное значение этого интеграла есть

$$I_{\text{прибл}}^{(n)} = \frac{1}{n}.$$

Точное значение рассматриваемого интеграла есть

$$I_{\text{точн}}^{(n)} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^n} = \frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{n-1}.$$

Отношение

$$\frac{I_{\text{прибл}}^{(n)}}{I_{\text{точн}}^{(n)}} = \frac{n-1}{n}.$$

Так как дробь  $\frac{n-1}{n}$  тем ближе к единице, чем больше  $n$ , то при весьма больших  $n$  получаем

$$\frac{I_{\text{прибл}}^{(n)}}{I_{\text{точн}}^{(n)}} \approx 1,$$

что и утверждалось. При выборе в формуле (18)  $m \neq 1$  значение  $m$  осталось бы в правой части последней формулы, т. е. при больших  $n$  мы получили бы систематическую ошибку.

2. Пусть  $z = \frac{1}{1+x^2}$ , причем  $-\infty < x < \infty$ . Образует быстроменяющиеся функции  $z_n = z^n = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ . Это функции второго типа, с максимумом внутри области (в данном случае  $x_m = 0$ ). Найдем приближенно величину  $I^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ , пользуясь формулой (22).

Получим  $I_{\text{прибл}}^{(n)} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ . Интеграл  $I^{(n)}$  можно вычислить точно, при этом он оказывается равным

$$I_{\text{точн}}^{(n)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \pi^*).$$

\*) Докажите это, интегрируя равенство

$$\left[ \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right]' = -\frac{2n-3}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-2}{(1+x^2)^n}.$$

Отношение

$$\frac{I_{\text{прибл}}^{(n)}}{I_{\text{точн}}^{(n)}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}{\sqrt{\pi n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}. \quad (23)$$

Подсчитаем значения правой части (23) для нескольких значений  $n$ . При  $n=2$  получаем 0,797. При  $n=4$  получаем 0,904; при  $n=6$  получаем 0,938; при  $n=8$  получаем 0,962; наконец, при  $n=10$  получаем 0,978. Таким образом, при увеличении  $n$  значение правой части в формуле (23) приближается к 1\*).

Перейдем к общему случаю. Рассмотрим  $y = [f(x)]^n$ , где функция  $f(x) > 0$  имеет единственную точку максимума. Пусть  $\ln f(x) = \varphi(x)$ , тогда  $f(x) = e^{\varphi(x)}$ . Поэтому

$$y = e^{n\varphi(x)}. \quad (24)$$

Величина интеграла  $I = \int_a^b y dx$  определяется главным образом значениями подинтегральной функции в той области, где  $y$  не слишком сильно отличается от своего максимального значения.

Ясно, что  $y$  достигает максимума одновременно с  $\varphi(x)$ , т. е. при одном и том же значении  $x = x_m$ . Для того чтобы  $y$  уменьшилось в  $e$  раз по сравнению с  $y_{\max}$ , нужно, чтобы  $n\varphi(x)$  было на единицу меньше, чем  $n\varphi(x_m)$ , т. е. чтобы было  $n\varphi(x) = n\varphi(x_m) - 1$ , откуда

$$\varphi(x) = \varphi(x_m) - \frac{1}{n}.$$

Чем больше  $n$ , тем меньше  $\varphi(x)$  отличается от  $\varphi(x_m)$ . Поэтому чем больше  $n$ , тем точнее замена  $\varphi(x)$  первыми двумя не равными нулю членами ее разложения в ряд Тейлора. Записав два члена разложения, получим  $\varphi(x) = \varphi(x_m) + (x - x_m)\varphi'(x_m)$  (для функции, имеющей максимум на границе) либо  $\varphi(x) = \varphi(x_m) + \frac{1}{2}(x - x_m)^2\varphi''(x_m)$  (для функции, имеющей максимум внутри промежутка).

В первом случае, пользуясь формулой (24), находим

$$y = e^{n\varphi(x_m) + n(x - x_m)\varphi'(x_m)} = Ae^{-b(x - x_m)},$$

где положено  $A = e^{n\varphi(x_m)}$ ,  $b = -n\varphi'(x_m) = n|\varphi'(x_m)|$ .

Во втором случае получаем

$$y = e^{n\varphi(x_m) + \frac{1}{2}n(x - x_m)^2\varphi''(x_m)} = Ae^{-c(x - x_m)^2},$$

где положено  $c = -\frac{1}{2}n\varphi''(x_m) = \frac{1}{2}n|\varphi''(x_m)|$ .

Таким образом, функция  $y(x)$  может быть приближенно заменена либо функцией, для которой абсолютно точна формула (19), либо

\*) Более строго это можно доказать с помощью формулы Стирлинга (см. упражнение к § 3).

функцией, для которой абсолютно точна формула (22), притом эта замена тем точнее, чем больше  $n$ .

Будем предполагать для простоты, что  $x_m = 0$ . Тогда для построения быстроменяющейся функции можно было бы от  $f(x)$  перейти не к  $[f(x)]^n$ , а к  $f(nx)$ . Однако при таком переходе обе части формулы (19) или соответственно (22) просто делятся на  $n$ , т. е. относительная ошибка обеих формул не меняется. Это связано с тем, что при указанном переходе относительная доля вклада в интеграл больших и малых значений функции  $f(x)$  сохраняется неизменной (тогда как при переходе от  $f(x)$  к  $[f(x)]^n$  доля малых значений с ростом  $n$  стремится к нулю).

В заключение упомянем о книге А. Б. Мигдала и В. П. Крайнова «Приближенные методы квантовой механики» (Физматгиз, 1966), в которой приведен ряд методов оценок интегралов и других математических выражений.

### Упражнения

1. Найдите величину интеграла  $I = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+e^x}$ , разбив его на сумму двух интегралов:  $I = \int_0^3 \frac{x dx}{1+e^x} + \int_3^{\infty} \frac{x dx}{1+e^x}$ . Первый интеграл вычислите по формуле

Симпсона, а второй по формулам настоящего параграфа. Вычисления ведите в пределах точности логарифмической линейки.

2. Найдите величину интеграла  $I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^2} dx$ , разбив его на сумму двух интегралов:  $I = \int_0^a \sqrt{x} e^{-x^2} dx + \int_a^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^2} dx$ , и находя первый интеграл по

формулам § 1.1, а второй — по формулам § 2. Рассмотрите случаи  $a=1$ ; 2. Вычисления ведите с тремя знаками после запятой.

3. Оцените величину интеграла  $\int_N^{\infty} e^{-x^2} dx$ , рассмотренного на стр. 65.

## § 3. Формула Стирлинга

В качестве интересного примера применения формул § 2 мы сейчас получим удобную формулу для приближенного вычисления величины  $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$  при больших значениях  $n$ . Эта формула будет очень полезна при изучении теории вероятностей. С помощью интегрирования по частям легко установить (см., например,

ВМ, § III.3), что при целом положительном  $n$  справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!.$$

Оценим этот интеграл по способу предыдущего параграфа.

В нашем случае  $y = x^n e^{-x}$ ,  $y' = (nx^{n-1} - x^n) e^{-x}$ . Приравнявая нулю первую производную, получим два значения:  $x=0$  и  $x=n$ . Нетрудно убедиться, что при  $x=n$  функция  $y(x)$  имеет максимум,

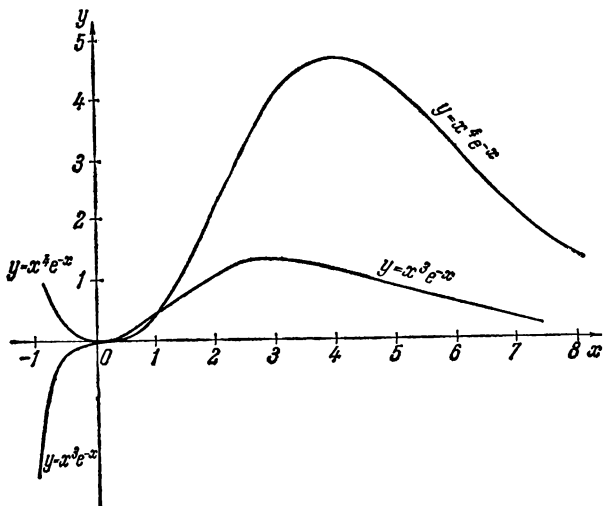


Рис. 18.

а при  $x=0$  она равна нулю. (На рис. 18 изображены графики функции  $y = x^n e^{-x}$  для  $n=3$  и  $n=4$ .) Итак, для вычисления интеграла нужно рассматривать область максимума  $x=n$  функции, т. е. пользоваться формулой (22).

Найдем  $y''$ , получим  $y'' = [n(n-1)x^{n-2} - 2nx^{n-1} + x^n] e^{-x}$ . Следовательно,  $y''(n) = -n^{n-1}e^{-n} = -\frac{1}{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ . Поэтому

$$I \approx \sqrt{\frac{2\pi y^3(n)}{|y''(n)|}} = \sqrt{2\pi \left(\frac{n}{e}\right)^{3n} n \left(\frac{n}{e}\right)^{-n}} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Итак,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Эта формула называется *формулой Стирлинга*. Ее относительная погрешность стремится к нулю с ростом  $n$  (это вытекает из рас-

суждений в § 2, если представить  $x^n e^{-x}$  как  $n^n \left( \frac{x}{n} e^{-\frac{x}{n}} \right)^n$ , однако даже при малых  $n$  она дает очень хорошие результаты, например:

$$\begin{aligned} n=1; n!&=1, & \sqrt{2\pi} \left( \frac{1}{e} \right)^1 &= 0,92, & \text{ошибка } 8\%; \\ n=2; n!&=2, & \sqrt{4\pi} \left( \frac{2}{e} \right)^2 &= 1,92, & \text{» } 4\%; \\ n=3; n!&=6, & \sqrt{6\pi} \left( \frac{3}{e} \right)^3 &= 5,84, & \text{» } 2,7\%; \\ n=4; n!&=24, & \sqrt{8\pi} \left( \frac{4}{e} \right)^4 &= 23,5, & \text{» } 2,1\%; \\ n=5; n!&=120, & \sqrt{10\pi} \left( \frac{5}{e} \right)^5 &= 118, & \text{» } 1,7\%. \end{aligned}$$

### Упражнение

Докажите, что отношение (23) при  $n \rightarrow \infty$  стремится к 1.

У к а з а н и е. Домножьте числитель и знаменатель дроби на ее числитель.

## § 4. Интегрирование быстроколеблющихся функций

При изучении быстро осциллирующих воздействий на физические системы приходится рассматривать интегралы от быстроколеблющихся функций, т. е. функций, которые на конечном интервале интегрирования много раз меняют знак. Такие интегралы имеют свои специфические особенности.

Пусть надо вычислить интеграл

$$I = \int_a^b F(x) dx, \quad (25)$$

где график функции  $F(x)$  имеет вид, изображенный на рис. 19.

Будем сначала считать  $\omega$  — частоту колебаний — постоянной, а амплитуду меняющейся по закону  $y = f(x)$ ; другими словами, будем считать, что интеграл (25) имеет вид

$$I = \int_a^b f(x) \sin(\omega x + \alpha) dx, \quad (26)$$

где  $\omega$  велико.

Из рис. 19 ясно, что при большом  $\omega$  интеграл (26) мал, так как его положительная часть почти нейтрализуется отрицательной. Для

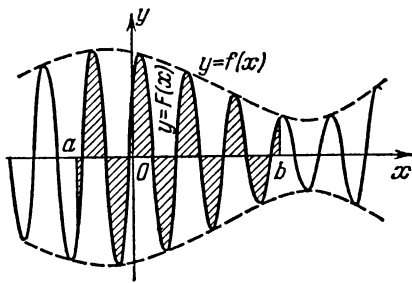


Рис. 19.



более точной оценки произведем интегрирование по частям, что даст

$$I = \frac{1}{\omega} [f(a)\cos(\omega a + \alpha) - f(b)\cos(\omega b + \alpha)] + \frac{1}{\omega} \int_a^b f'(x)\cos(\omega x + \alpha) dx. \quad (27)$$

Полученный интеграл имеет вид (26), а потому весь последний член при большом  $\omega$  имеет порядок малости выше, чем  $1/\omega$ . Отбрасывая этот член, получаем приближенную формулу

$$I \approx \frac{1}{\omega} [f(a)\cos(\omega a + \alpha) - f(b)\cos(\omega b + \alpha)]. \quad (28)$$

Этот результат можно выразить и через подынтегральную функцию  $F(x)$  исходного интеграла (25): так как

$$F'(x) = f'(x)\sin(\omega x + \alpha) + \omega f(x)\cos(\omega x + \alpha) \approx \omega f(x)\cos(\omega x + \alpha),$$

то можно написать также

$$I \approx \frac{1}{\omega^2} [F'(a) - F'(b)] = -\frac{1}{\omega^2} F'(x) \Big|_a^b. \quad (29)$$

Для дальнейшего уточнения можно в правой части (27) произвести еще одно интегрирование по частям; после отбрасывания полученного интеграла мы придем к приближенной формуле

$$I \approx \frac{1}{\omega} [f(a)\cos(\omega a + \alpha) - f(b)\cos(\omega b + \alpha)] + \\ + \frac{1}{\omega^2} [f'(b)\sin(\omega b + \alpha) - f'(a)\sin(\omega a + \alpha)]. \quad (30)$$

Здесь также можно написать формулу, аналогичную (29). Для этого надо из выражений для  $F'(x)$  и  $F'''(x)$  вычислить  $f(x)\cos(\omega x + \alpha)$  и  $\frac{1}{\omega} f'(x)\sin(\omega x + \alpha)$  с точностью до членов порядка  $\frac{1}{\omega^2}$  и результат подставить в (30). Пропуская выкладки, которые мы предоставляем читателю, напомним окончательную формулу:

$$I \approx -\frac{1}{\omega^2} \left[ 2F'(x) + \frac{1}{\omega^2} F'''(x) \right] \Big|_a^b.$$

Эта формула, как и (30), верна с точностью до членов порядка  $\frac{1}{\omega^3}$ .

По описанной схеме можно производить и дальнейшее уточнение асимптотических формул для  $I$ ; однако получающиеся формулы будут все более громоздкими и все менее удобными для практического применения. На практике чаще всего пользуются формулами (28) или (29). Интересно, что во всех этих формулах участвуют значения функций  $f$  или  $F$  и их производных только на концах интервала интегрирования; впрочем, это находится в согласии с полученными в § 1.2 приближенными формулами для знакопередающихся сумм.

(Отметим, что в предыдущих формулах надо было считать, что функция  $f(x)$  и ее производные рассматриваемых порядков внутри интервала интегрирования непрерывны. Если  $f(x)$  имеет там конечный скачок при  $x=c$ , то надо перейти к сумме интегралов от  $a$  до  $c$  и от  $c$  до  $b$ , после чего к каждому из этих интегралов применить указанные преобразования, в результате чего точка  $x=c$  даст свой вклад в асимптотические формулы. Особенно существен этот вклад в важном случае, когда  $a=-\infty$ ,  $b=\infty$  и  $f(x)$  при  $x=\pm\infty$  обращается в нуль вместе со всеми своими производными, так как тогда правые части формул (28) и (30) равны нулю. Более глубоко этот вопрос будет освещен в § XIV.4.)

Рассмотрим в качестве примера интеграл  $I = \int_0^b e^{-x} \sin \omega x \, dx$ . Его

точное значение равно

$$I_{\text{точн}} = \frac{\omega}{1+\omega^2} - \frac{e^{-b}}{1+\omega^2} (\sin \omega b + \omega \cos \omega b).$$

Формула (28) дает приближенное значение

$$I_{(28)} = \frac{1}{\omega} (1 - e^{-b} \cos \omega b);$$

формула (29)—значение

$$I_{(29)} = \frac{1}{\omega^2} [\omega - e^{-b} (\omega \cos \omega b - \sin \omega b)].$$

Обе приближенные формулы имеют погрешность порядка  $1/\omega^2$ .

Рассмотрим теперь случай, когда быстроколеблющаяся функция  $F(x)$  под знаком интеграла (25) имеет график, как на рис. 20, т. е. меняет как свою амплитуду, так и частоту. В этом случае интеграл (25) часто бывает возможно записать в виде

$$I = \int_a^b f(x) \sin(\omega \varphi(x) + \alpha) \, dx,$$

(31)

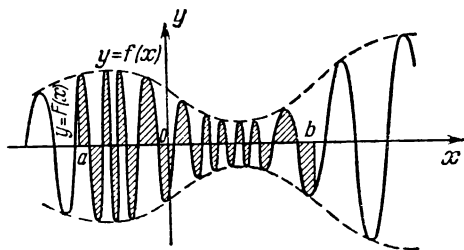


Рис. 20.

где  $\varphi(x)$  — возрастающая (но уже не с постоянной скоростью!) функция.

Интеграл (31) можно привести к виду (26) с помощью замены переменной интегрирования  $\varphi(x) = s$ . Если обозначить через  $x = g(s)$  обратную функцию, мы получим

$$I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(g(s)) g'(s) \sin(\omega s + \alpha) \, ds.$$

Применение приближенной формулы (28) дает

$$I \approx -\frac{1}{\omega} [f(g(s)) g'(s) \cos(\omega s + \alpha)] \Big|_{s=\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \\ = -\frac{1}{\omega} \left[ \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \cos(\omega \varphi(x) + \alpha) \right] \Big|_{x=a}^b \quad (32)$$

(при этом мы воспользовались формулой  $g'(s) = 1/\varphi'(x)$  для производной обратной функции). Если  $\varphi(x) \equiv x$ , то формула (32) переходит в (28). Видоизмененная формула (29), которую мы предлагаем вывести читателю, приобретает вид

$$I \approx -\frac{F'(x)}{\omega^2 [\varphi'(x)]^2} \Big|_a^b.$$

### Упражнения

1. Примените формулы (28), (29) и (30) к интегралу  $\int_{-a}^a \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx$ .

2. Напишите аналог формулы (30) для интеграла (31).

3. Вычислите интеграл  $I = \int_1^2 \frac{\sin \omega x}{x} dx$  при  $\omega = 1$  и  $\omega = 10$  по приближен-

ным формулам (28), (29) и (30). Сравните полученные значения с точными, найденными по таблицам интегрального синуса.

## § 5. Числовые ряды

*Числовым рядом* называется «бесконечная сумма» чисел

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots *). \quad (33)$$

Конечно, это не совсем «настоящая» сумма, так как реально можно сложить лишь конечное количество чисел, это — сумма «с особенностью», аналогичной особенности для несобственных интегралов, рассмотренных в § 1. Поэтому и подход к понятию суммы ряда (33) аналогичен тому, который был применен в § 1. Именно, сначала особенность как бы отрезают, т. е. рассматривают *частные суммы* ряда (33)

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n. \quad (34)$$

Если теперь увеличивать  $n$ , т. е. «исчерпывать особенность», и следить за поведением частной суммы (34), то могут представиться два случая:

1) частная сумма может приближаться к определенному конечному пределу  $S$ , так что для больших  $n$  она практически просто

---

\*) Такие ряды встречались в ВМ, начиная с § II.17. Здесь мы рассмотрим эти ряды более систематично. В этом параграфе используются результаты § 1.2.

равна  $S$ . В этом случае ряд (33) называется *сходящимся*, а сумма его полагается равной  $S$ . Таким образом, в случае сходимости можно от частной суммы с большим номером переходить к полной сумме ряда и обратно, т. е. вклад особенности в полную сумму ряда не является существенным, он как угодно мал при большом  $n$ ;

2) частная сумма может стремиться к бесконечности или может колебаться, не имея определенного предела. В этом случае ряд (33) называется *расходящимся*.

Простейший пример сходящегося ряда дает сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n + \dots (|q| < 1). \quad (35)$$

В данном примере, как известно,

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q},$$

и так как при больших  $n$  степень  $q^n$  можно пренебречь, то в пределе получаем сумму ряда (35)

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Ряд  $1 + 1 + 1 + \dots$  — это пример ряда, расходящегося к бесконечности, а ряд  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  — это пример ряда, расходящегося «колебательным образом», так как его частные суммы последовательно равны  $1, 0, 1, 0, 1, \dots$  и не имеют определенного предела.

Так как у сходящегося ряда частные суммы с большими номерами почти одинаковы, то его члены с большими номерами почти равны нулю; более точно: если ряд (33) сходится, то его «общий член»  $a_n$  с возрастанием номера стремится к нулю. Однако и у расходящегося ряда общий член может стремиться к нулю: например, так будет для расходящегося ряда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

(То, что этот ряд расходится, можно показать так:  $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .) Следовательно, только по этому признаку нельзя

установить сходимость ряда. Тем не менее, если зависимость общего члена  $a_n$  от номера  $n$  нам известна и имеет не очень сложный вид, то сходимость или расходимость ряда (33) обычно бывает нетрудно установить на основании других признаков, которые мы вскоре укажем. Если же такой простой зависимости установить не

удаётся, то просто вычисляют члены один за другим, и если они выходят за пределы принятой точности вычисления, причем нет основания ожидать, что дальнейшие члены дадут в сумму существенный вклад, то все дальнейшие члены отбрасывают, ряд объявляют сходящимся, а его сумму равной частной сумме вычисленных членов.

Первый признак сходимости ряда (33), так называемый *признак Даламбера*, основан на аналогии с суммой бесконечной геометрической прогрессии (35). Для «чистой» прогрессии (35) отношение каждого последующего члена к предыдущему есть величина постоянная (равная знаменателю  $q$  прогрессии). Допустим теперь, что для ряда (33) отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

последующего члена к предыдущему уже не постоянно, но стремится к некоторому пределу  $q$  с возрастанием номера. Тогда для больших  $n$  это отношение приблизительно равно  $q$  и, как и ряд (35), ряд (33) сходится, если  $|q| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , ряд (33) расходится, если  $|q| > 1$ . И только если  $|q| = 1$ , то по признаку Даламбера нельзя установить, сходится ли ряд (33), так что приходится применять другие признаки.

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{a}{1^p} + \frac{a^2}{2^p} + \frac{a^3}{3^p} + \dots + \frac{a^n}{n^p} + \dots \quad (36)$$

Применяя признак Даламбера, найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a^{n+1}}{(n+1)^p} : \frac{a^n}{n^p} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p} = a.$$

Таким образом, при  $|a| < 1$  ряд (36) сходится со скоростью геометрической прогрессии, а при  $|a| > 1$  — расходится; при  $a = \pm 1$  признак Даламбера к ряду (36) неприменим.

Рассмотрим теперь более сильный *интегральный признак Коши*, применимый к ряду с положительными членами. Допустим, что известно выражение общего члена  $a_n$  ряда (33) в виде функции от номера  $n$ , т. е.  $a_n = f(n)$ , причем функция  $f(n)$  положительна и убывает с ростом  $n$ . Тогда в силу формулы (I.9) в качестве приближенного значения для частной суммы (34) можно принять

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) \approx \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(n). \quad (37)$$

Таким образом, если интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \quad (38)$$

сходится, то правая часть (37) при  $n \rightarrow \infty$  остается конечной, т. е. ряд (33) сходится. Если же интеграл (38) расходится к бесконечности, то и ряд (33) расходится.

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots, \quad (39)$$

который получается из ряда (36) при  $a=1$ , когда признак Даламбера не действует. Чтобы применить интегральный признак Коши, надо рассмотреть интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

Этот интеграл был рассмотрен в § 1 (формула (3)), где мы показали, что он сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ . Значит, и ряд (39) сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ . В частности, при  $p=1$  получаем так называемый *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty.$$

Что касается рядов с членами произвольного знака, то здесь часто применяется *признак Лейбница*, согласно которому ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots \quad (40)$$

(все  $a_i$  считаются положительными, так что знаки двух соседних слагаемых противоположны) сходится, если

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots \rightarrow 0. \quad (41)$$

В самом деле, если на некоторой вспомогательной оси изобразить (рис. 21) частные суммы ряда (32),

то из условия (41) вытекает, что переход от  $S_1$  к  $S_2$ , от  $S_2$  к  $S_3$ , от  $S_3$  к  $S_4$  и т. д. имеет вид затухающих колебаний, т. е. эти частные суммы стремятся к определенному пределу.

Таким образом, например, ряд

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots \quad (42)$$

сходится при любом  $p > 0$ .

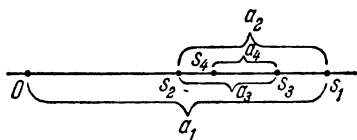


Рис. 21.

Если, как в предыдущем признаке, члены ряда (40) имеют вид  $f(n)$ , то приближенное значение его суммы можно подсчитать по методам § 1.2. О способах уточнения этого значения будет сказано ниже.

Сходящиеся ряды с членами произвольного знака (не обязательно знакопеременяющиеся, как (40)), бывают двух типов:

1) может оказаться, что сходятся как «положительная часть» исходного ряда (т. е. ряд, составленный из одних положительных членов исходного ряда), так и его «отрицательная часть». Тогда исходный ряд называется *абсолютно сходящимся*, так как сходятся и ряд, составленный из абсолютных величин его членов;

2) может оказаться, что и положительная и отрицательная части исходного ряда расходятся к бесконечности, но сам ряд сходится из-за компенсации этих бесконечностей. Такой ряд называется *неабсолютно сходящимся*, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Например, вспоминая о ряде (39), мы заключаем, что ряд (42) при  $p > 1$  абсолютно сходящийся, а при  $0 < p \leq 1$  неабсолютно сходящийся.

Со сходящимися рядами можно производить такие же действия, как и с конечными суммами, так как практически сумма сходящегося ряда просто равна его частной сумме с достаточно большим номером. Не совсем очевидное осложнение возникает при перестановке членов сходящегося ряда. Именно, на сумме абсолютно сходящегося ряда такая перестановка не сказывается, но неабсолютно сходящийся ряд может после перестановки членов изменить свою сумму или даже стать расходящимся, так как такая перестановка может изменить или даже нарушить «компенсацию бесконечностей», о которой было сказано выше. Рассмотрим, например, сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots \quad (43)$$

и переставим в нем члены так, чтобы за двумя положительными следовал один отрицательный:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots \quad (44)$$

Частная сумма  $S_{3n}$  с номером  $3n$  этого ряда состоит из группы положительных слагаемых

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$$

и группы отрицательных слагаемых

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Но первая сумма превосходит

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n-2}} + \frac{1}{\sqrt{4n}},$$

и потому общая сумма

$$\begin{aligned} S_{3n} &> \frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n-2}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right). \end{aligned}$$

В силу оценки (I.11) правая часть приближенно равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{n+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \sqrt{2} \left( \sqrt{2n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n+\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \sqrt{2n} \left( \sqrt{2+\frac{1}{2n}} - \sqrt{1+\frac{1}{2n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Итак, из двух рядов (43) и (44), различающихся лишь порядком членов, первый сходится, а второй расходится к бесконечности.

Если мы хотим, как это часто делают на практике, заменить сумму ряда на частную сумму нескольких его первых членов, то для этого ряд должен не просто сходиться, а быстро сходиться, чтобы, взяв небольшое число членов, мы почти исчерпали полную сумму, получив ее с хорошей точностью. Для медленно сходящихся рядов (ими, в частности, обычно оказываются неабсолютно сходящиеся ряды) приходится остаток ряда не отбрасывать, а оценивать по методам § I.2.

Как для сходящихся, так и для расходящихся рядов бывает существенно найти асимптотический закон изменения частной суммы в процессе увеличения ее номера. Это можно сделать с помощью методов § I.2, т. е. с помощью применения формул (I.9), (I.11), (I.14) или (I.15), хотя при этом получается определенная ошибка. Ограничимся для простоты рядами с положительными членами. Обычно частная сумма ряда имеет вид

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+nh),$$

где число членов возрастает за счет увеличения  $n$ , а величина  $h$  остается неизменной. Так, например, из суммы  $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  получается сумма

$$S_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$



или

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}.$$

В таком случае, как правило, абсолютная величина ошибки не уменьшается с увеличением числа членов суммы.

Рассмотрим примеры.

1.  $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ . Согласно (I.11) получим

$$S_n \approx \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}. \text{ По формуле (I.9) находим}$$

$$S_n \approx \int_1^n \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} = 1,5 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} = 1,5 - \frac{2n-1}{2n^2}.$$

Известно, что при неограниченном увеличении  $n$  значение  $S_n$  неограниченно приближается к числу  $S = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,665$ . (Здесь мы не доказываем этого факта.) Для весьма больших  $n$  формула (I.11) дает  $S_n = 2$  (ошибка 20%), формула (I.9) дает  $S_n = 1,5$  (ошибка 10%).

Отметим, что в этом случае легко уточнить расчет. Причина довольно значительной ошибки заключается в том, что первые члены суммы изменяются быстро, следовательно, на промежутке интегрирования, соответствующем расстоянию между двумя последовательными членами суммы, функция  $f(x)$  изменяется слишком неравномерно, а поэтому формула трапеций, на которой был основан вывод формул (I.9) и (I.11), дает плохой результат.

Поэтому можно найти сумму нескольких первых членов непосредственным сложением, а к оставшейся сумме применить приближенные формулы. В нашем примере найдем сначала сумму первых трех членов непосредственно:

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = 1 + 0,25 + 0,111 = 1,361.$$

Пусть

$$S'_{n-3} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

По формуле (I.11) находим  $S'_{n-3} \approx 0,286 - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ , по формуле (I.9)

находим  $S'_{n-3} \approx 0,281 - \frac{2n-1}{2n^2}$ . Поэтому

$$S_n \approx 1,647 - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

по (I.11) и

$$S_n \approx 1,642 - \frac{2n-1}{2n^2}$$

по (I.9). При неограниченном увеличении  $n$  формула (I.11) дает  $S \approx 1,647$ , формула (I.9) дает  $S \approx 1,642$ . В каждом случае ошибка меньше 2%.

2. Рассмотрим сумму убывающей геометрической прогрессии

$$S_n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^{n-1}},$$

где  $z > 1$ . Точная формула, как известно, такова:

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{z^n}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z - \frac{1}{z^{n-1}}}{z - 1},$$

откуда при неограниченном росте  $n$  находим  $S = \frac{z}{z-1}$ . По формуле (I.11) получаем

$$S_n \approx \int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{dx}{z^x} = \int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} e^{-x \ln z} dx = \frac{1}{\ln z} \left[ e^{\frac{1}{2} \ln z} - e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right) \ln z} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{z}}{\ln z} \left( 1 - \frac{1}{z^n} \right).$$

При неограниченном росте  $n$  находим  $S \approx \frac{\sqrt{z}}{\ln z}$ . Из приведенной ниже таблицы видно, что при  $z$ , близком к единице, обе формулы дают близкие результаты:

$z$	1,2	1,5	2,0	3,0	6,0	20,0
$\frac{z}{z-1}$	6,00	3,00	2,00	1,5	1,20	1,05
$\frac{\sqrt{z}}{\ln z}$	6,00	3,01	2,04	1,57	1,36	1,49

Если же  $z \gg 1$ , то соседние члены прогрессии сильно отличаются и поэтому приближенная формула дает плохие результаты.

В некоторых случаях сумма может неограниченно возрастать при увеличении числа членов, несмотря на то, что члены суммы неограниченно уменьшаются (это случаи расходимости соответствующих бесконечных рядов).

Рассмотрим примеры.

$$1. S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

По формуле (I.11) получаем

$$S_n \approx \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{n+\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

По формуле (I.9) получаем

$$S_n \approx \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} - 1,5 + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

При больших  $n$  получаем из (I.11)

$$S_n \approx 2\sqrt{n} - 1,41,$$

а из (I.9)  $S_n \approx 2\sqrt{n} - 1,50$ . (При этом мы отбрасываем член, пропорциональный  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .)

Более точная формула (она получается непосредственным сложением нескольких первых членов) такова:

$$S_n \approx 2\sqrt{n} - 1,466.$$

2. Во многих вопросах встречается сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

При больших  $n$ , пользуясь формулой (I.11), находим  $S_n \approx \ln n + \ln 2 = \ln n + 0,69$ , а пользуясь (I.9), находим  $S_n \approx \ln n + 0,50$ . Предел разности  $S_n - \ln n$  при неограниченном увеличении  $n$  обозначается буквой  $C$  и называется *постоянной Эйлера*. Таким образом, можно написать формулу  $S_n = \ln n + C + \alpha_n$ , где  $\alpha_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому асимптотически точная формула имеет вид  $S_n \approx \ln n + C$ . Мы получили весьма грубые приближенные значения для постоянной Эйлера, однако при помощи формул (I.9) и (I.11) можно получить более точное значение  $C$ , суммируя непосредственно несколько первых членов. Оказывается, что  $C = 0,5772\dots$

Теперь рассмотрим суммы, члены которых растут с увеличением  $n$ . Величина такой суммы неограниченно возрастает с увеличением числа членов, т. е. с ростом  $n$ . При увеличении  $n$  возможны два случая.

1. Ошибка приближенных формул (I.9) и (I.11) с увеличением  $n$  уменьшается (по абсолютной величине) или хотя и увеличивается, но медленнее, чем сама сумма, так что относительная ошибка уменьшается. Этот случай получается, если члены суммы возрастают медленнее геометрической прогрессии, например, как степени.

2. Относительная ошибка (а тем более и абсолютная) с увеличением  $n$  не уменьшается.

Второй случай получается тогда, когда члены суммы возрастают в геометрической прогрессии, т. е. когда сумма имеет вид  $S_n = a + ay + ay^2 + ay^3 + \dots + ay^{n-1}$ , где  $|y| > 1$ , а также если члены суммы растут быстрее прогрессии, например  $S_n = y + y^4 + y^9 + \dots + y^{n^2}$ . В этом случае последний член составляет основную часть всей суммы. Например, для случая суммы  $S_n = y + y^4 + y^9 + \dots + y^{n^2}$  мы приводим таблицу значений величины  $\frac{S_n}{y^{n^2}}$  при  $y = 2$ :

$n$	1	2	3	4	5
$2^{n^2}$	2	16	512	65 536	33 500 000
$S_n$	2	18	530	66 066	33 600 000
$\frac{S_n}{2^{n^2}}$	1	1,12	1,03	1,01	1,003

Из таблицы видно, что при больших  $n$  величина всей суммы практически определяется величиной одного последнего члена.

Аналогичная картина имеет место и для возрастающей геометрической прогрессии.

Действительно, в формуле

$$S_n = 1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1} \quad (|z| > 1)$$

пренебрежем единицей по сравнению с  $z^n$ , тогда получим

$$S_n \approx \frac{z^n}{z - 1}.$$

Поэтому

$$\frac{S_n}{z^{n-1}} \approx \frac{z^n}{z^{n-1}(z-1)} = \frac{z}{z-1} = \text{const}$$

(при достаточно больших  $n$ ). Значит, в этом случае доля вклада последнего члена приближается к постоянному числу, а при больших  $|z|$  эта доля близка к 1. Ясно, что в этом случае нет надобности в формулах суммирования. Действительно, для того чтобы получить величину суммы с хорошей степенью точности, достаточно найти сумму нескольких последних членов.

Формулы суммирования полезны тогда, когда отношение суммы к последнему члену возрастает с увеличением  $n$ . Тогда формула дает возможность сократить вычисления при больших  $n$ . При этом всегда осуществляется случай 1, т. е. относительная ошибка формул (I.9) и (I.11) обязательно уменьшается. Приведем пример.

Из элементарной алгебры известна формула

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Применим к сумме  $S_n$  приближенную формулу (I.11). Получим

$$S_n \approx S'_n = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \bigg|_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{4}.$$

Абсолютная ошибка равна  $S'_n - S_n = \frac{n}{12}$  и, следовательно, растет с увеличением  $n$ . Относительная ошибка

$$\frac{S'_n - S_n}{S_n} = \frac{n}{12 \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right)} \approx \frac{n}{12 \frac{n^3}{3}} = \frac{1}{4n^2}.$$

Она быстро уменьшается с увеличением  $n$ .

Рассмотрим сумму

$$S_n^{(p)} = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p \quad (p > -1).$$

Применив формулу (I.10), мы получим

$$S_n^{(p)} \approx \int_1^n x^p dx = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

Таким образом, при больших  $n$  справедлива простая, хотя и грубая формула

$$S_n^{(p)} \approx \frac{n^{p+1}}{p+1} *).$$

### Упражнения

1. Уточните значение постоянной Эйлера  $C$  (см. стр. 90), найдя непосредственно сумму пяти первых членов, десяти первых членов.

2. Пусть дана сумма

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

такая, что

$$0 < u_1 < u_2 < u_3 < \dots < u_n.$$

Образует сумму

$$\sigma_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n} + \frac{u_{n-2}}{u_n} + \dots + \frac{u_1}{u_n}.$$

Ясно, что члены этой суммы убывают. Как ведет себя  $\sigma_n$  с увеличением  $n$ , если  $S_n$  есть возрастающая сумма первого типа; второго типа?

---

\*) В случае, когда  $p$  — целое положительное, элементарная алгебра позволяет написать точную формулу для  $S_n^{(p)}$  (в частности, мы пользовались такой формулой для  $p=2$ ). Однако при больших  $p$  формулы становятся громоздкими, поэтому приведенная грубая формула может оказаться полезной и для целых положительных  $p$ .

### § 6. Интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_a^b f(x, \lambda) dx, \quad (45)$$

где под знак интеграла, помимо переменной интегрирования  $x$ , входит *параметр* (произвольная постоянная)  $\lambda$ , т. е. величина, которая в процессе интегрирования считается постоянной, но вообще может принимать различные значения. Тогда и результат интегрирования, вообще говоря, зависит от  $\lambda$ , т. е.  $I = I(\lambda)$ . Такие интегралы часто встречаются в приложениях, когда интегрируемая функция включает в себя какие-либо массы, размеры и т. п., которые в процессе интегрирования являются постоянными. Приведем простые примеры:

$$\int_0^1 (x^2 + \lambda x) dx = \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{2}; \quad \int_0^1 \sin \alpha x dx = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha};$$

$$\int_0^1 (s+1) x^s dx = 1 \quad (s > -1).$$

При рассмотрении собственных интегралов имеют место те же свойства, что и при рассмотрении конечных сумм функций. Так, мы знаем, что производная от суммы функций равна сумме производных. Подобным образом производная от интеграла (45) по параметру равна

интегралу от производной по этому параметру: 
$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx;$$

здесь под знаком интеграла стоит производная от функции  $f(x, \lambda)$ , по  $\lambda$ , взятая при фиксированном  $x$ . Аналогичное правило выполняется при интегрировании по параметру:

$$\int_a^b I(\lambda) d\lambda = \int_a^b \left( \int_a^b f(x, \lambda) d\lambda \right) dx.$$

Для проверки этих простых правил надо было бы выписать их для интегральных сумм, а затем перейти в пределе от сумм к интегралам, однако мы не станем здесь этим подробно заниматься.

Для несобственных интегралов, зависящих от параметров, могут возникнуть осложнения, связанные прежде всего с возможностью их расходимости. Наиболее просто обстоят дела для «правильно сходящихся» несобственных интегралов; так, интеграл вида

$$I(\lambda) = \int_a^{\infty} f(x, \lambda) dx, \quad (46)$$

где сама функция  $f$  конечна, называется *правильно сходящимся*, если он *мажорируется* сходящимся интегралом, не зависящим от параметра, т. е. если  $|f(x, \lambda)| \leq F(x)$ , где  $\int_a^\infty F(x) dx < \infty$ . Например, интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin \lambda x}{x^2} dx$$

правильно сходящийся, так как

$$\left| \frac{\sin \lambda x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 < \infty.$$

Свойства правильно сходящихся интегралов такие же, как собственных интегралов\*).

При изучении неправильно сходящихся, а также расходящихся интегралов вида (40) часто поступают следующим образом: отрезают особенность, т. е. переходят к собственному интегралу

$$I_N(\lambda) = \int_a^N f(x, \lambda) dx,$$

после чего рассматривают асимптотическое поведение этого интеграла при  $N \rightarrow \infty$ . Этим бывает возможно оправдать действия над несобственными и даже расходящимися интегралами.

Очень важно, что результат выполнения различных действий — вычитания, дифференцирования по параметру и т. д. — над расходящимися интегралами может оказаться конечной величиной, в частности, может выражаться через сходящиеся интегралы (может случиться и обратное). Рассмотрим, например, расходящийся интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{x+\lambda} dx = \infty \quad (\lambda > 0).$$

После дифференцирования по параметру мы приходим к сходящемуся интегралу

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{x+\lambda} \right) dx = \int_0^\infty -\frac{1}{(x+\lambda)^2} dx = \frac{1}{x+\lambda} \Big|_{x=0}^\infty = -\frac{1}{\lambda}.$$

---

\*) Здесь требование правильной сходимости можно заменить на несколько менее ограничительное требование равномерной сходимости, которое означает

$$\text{что } \max_{\lambda} \left| \int_N^\infty f(x, \lambda) dx \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Чтобы разобраться в смысле полученного равенства,отрежем особенность, что даст

$$I_N(\lambda) = \int_0^N \frac{1}{x+\lambda} dx = \ln(x+\lambda) \Big|_{x=0}^N = \ln(N+\lambda) - \ln \lambda.$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{dI_N}{d\lambda} = \frac{1}{N+\lambda} - \frac{1}{\lambda}.$$

Если теперь  $N \rightarrow \infty$ , то  $I_N(\lambda) \rightarrow \infty$ , а  $\frac{dI_N}{d\lambda} \rightarrow -\frac{1}{\lambda}$ , т. е. мы приходим к полученному выше результату. Аналогичный смысл (проверьте!) имеет равенство

$$I(\lambda_1) - I(\lambda_2) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{x+\lambda_1} - \frac{1}{x+\lambda_2} \right] dx = \ln \lambda_2 - \ln \lambda_1^*).$$

Поясним еще на примере осложнение, которое может получиться для неправильно сходящихся интегралов. Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx.$$

Можно проверить (см. упражнение 2), что при  $\lambda = 1$  он сходится и равен  $\frac{\pi}{2}$ . Отсюда с помощью подстановки  $\lambda x = s$  при  $\lambda > 0$  сразу следует, что

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s} \frac{ds}{\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2}.$$

В то же время при  $\lambda = 0$  получается  $I = 0$ , а при  $\lambda < 0$ , вынося  $-1$  за знак интеграла, получаем, что  $I = -\pi/2$ . Итак, в данном примере  $I(\lambda)$  при  $\lambda = 0$  имеет скачок. Это может показаться странным, так как при малом изменении  $\lambda$  подынтегральная функция меняется как угодно мало. Однако малое изменение подынтегральной функции на бесконечном интервале может привести к немалому изменению интеграла! На рис. 22 показаны разрывный график  $I(\lambda)$  и

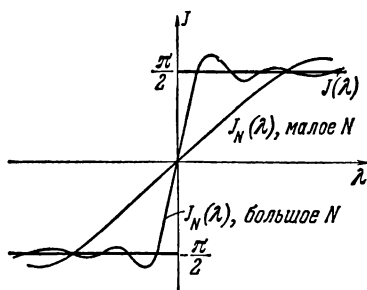


Рис. 22.

\*) Начиная с пятидесятых годов XX века физики, развивая квантовую электродинамику, широко пользуются несовершенной теорией, которая содержит расходящиеся интегралы; при этом вычисляют величины типа производных и разностей этих интегралов. Такие величины оказываются конечными и великолепно согласуются с опытом, который является высшим критерием истины.



графики

$$I_N(\lambda) = \int_0^N \frac{\sin \lambda x}{x} dx$$

при различных  $N$ . Хотя эти последние и не имеют разрыва, но при большом  $N$  переход от  $-\frac{\pi}{2}$  к  $\frac{\pi}{2}$  совершается на малом интервале  $\lambda$ , причем чем больше  $N$ , тем этот интервал меньше. В пределе, при  $N = \infty$ , этот переход осуществляется на бесконечно малом интервале  $\lambda$ , т. е. появляется разрыв.

К функциям

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx \quad \text{и} \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda} = \int_0^{\infty} \cos \lambda x dx$$

(в других обозначениях) мы еще вернемся в § VI.3 в связи с теорией разрывных функций и в § XIV.2 в связи с преобразованием Фурье.

При рассмотрении рядов, члены которых зависят от параметра, возникают в точности те же вопросы, что и при рассмотрении несобственных интегралов, зависящих от параметра. Получающиеся здесь свойства совершенно аналогичны, и потому мы не будем их здесь приводить.

### Упражнения

1. Исходя из интеграла  $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$  ( $\lambda > 0$ ), получите с помощью дифференцирования по параметру при  $\lambda = 1$  значение интеграла  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$  (ср. § 3),

а с помощью интегрирования по параметру — значение интеграла  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} dx$  (отметим, что в последнем примере неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции).

2. Исходя из интеграла  $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx$  ( $\lambda > 0$ ), интегрируя по параметру в пределах от  $\alpha$  до  $\beta$ , а затем полагая  $\beta \rightarrow \infty$ , получите формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctg \alpha \quad (\alpha > 0). \quad (47)$$

(Значение этого интеграла при  $\alpha = 0$  упоминалось в тексте.)

## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

## § 1

Непосредственно применять способ трапеций или Симпсона нельзя, так как подынтегральная функция обращается в бесконечность при  $x=0$ . Поэтому разобьем промежуток интегрирования на два: от  $x=0$  до  $x=\frac{\pi}{6}$  и от  $x=\frac{\pi}{6}$  до  $x=\frac{\pi}{2}$ . При  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$  справедливо соотношение  $\sin x \approx x$ , поэтому

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} \approx \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 1,5 \cdot 0,65 = 0,98.$$

Интеграл  $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$  подсчитаем по формуле Симпсона. Разбив промежуток на две части, получим  $I_2 \approx 1,13$ . Отсюда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} \approx 0,98 + 1,13 = 2,11.$$

## § 2.

1. Значение первого из этих интегралов было получено (см. задачу 2 упражнений к § I. 1). Найдем  $\int_3^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}$ . Подынтегральная функция есть  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ , поэтому  $f'(x) = \frac{e^x(1-x)+1}{(e^x+1)^2}$ . Так как  $f'(3) \neq 0$ , то применяем формулу (19). Получаем

$$\int_3^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} \approx 0,23, \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} \approx 0,63 + 0,23 = 0,86.$$

Отметим для сравнения, что точное значение искомого интеграла (с двумя знаками после запятой) есть 0,82.

2. 0,67; 0,59. (Точнее значение с тремя знаками после запятой есть 0,612.)

3. Здесь  $y = e^{-x^2}$ ,  $y' = -2xe^{-x^2}$ ,  $a = N$ ; по формуле (19) получаем, что

$$\int_N^{\infty} e^{-x^2} dx \approx (e^{-N^2})^2 : 2Ne^{-N^2} = \frac{1}{2N} e^{-N^2},$$

как и было указано на стр. 65.

## § 3

Рассматривая дробь  $D$  после указанного преобразования равна

$$\frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)]^2}{\sqrt{\pi n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n-3)(2n-2)} = \frac{[2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)]^2}{\sqrt{\pi n} (2n-2)!} = \frac{2^{2n-2} [(n-1)!]^2}{\sqrt{\pi n} (2n-2)!}.$$

Применяя формулу Стирлинга, получаем при больших  $n$

$$D \approx \frac{2^{2n-2} \left[ \sqrt{2\pi(n-1)} \left( \frac{n-1}{e} \right)^{n-1} \right]^2}{\sqrt{\pi n} \sqrt{2\pi(2n-2)} \left( \frac{2n-2}{e} \right)^{2n-2}} =$$

$$= \frac{2^{2n-2} 2\pi (n-1) (n-1)^{2n-2} e^{-(2n-2)}}{2\pi \sqrt{n(n-1)} 2^{2n-2} (n-1)^{2n-2} e^{-(2n-2)}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \approx 1.$$

#### § 4

$$1. I_{(28)} = \frac{2 \sin \omega a}{\omega (1+a^2)}; \quad I_{(29)} = I_{(28)} + \frac{4a \cos \omega a}{\omega^2 (1+a^2)^2}; \quad I_{(30)} = I_{(28)} - \frac{4a \cos \omega a}{\omega^2 (1+a^2)^2}.$$

$$2. I \approx I_{(32)} + \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{1}{\varphi'(x)} \left( \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \right)' \sin(\omega \varphi(x) + \alpha) \right] \Big|_{x=a}^b.$$

3. При  $\omega=1$  точное значение  $I = \text{si } 2\omega - \text{si } \omega = 0,66$ ; приближенные значения:  $I_{(28)} = 0,75$ ,  $I_{(29)} = 0,13$ ,  $I_{(30)} = 1,36$ ; как видим, точность совершенно неудовлетворительная. При  $\omega=10$  точное значение  $I = -0,110$ , приближенные значения:  $I_{(28)} = -0,104$ ,  $I_{(29)} = -0,115$ ,  $I_{(30)} = -0,112$ , точность порядка нескольких процентов.

#### § 5

$$1. S_n = S_5 + \bar{S}_{n-5}, \text{ где } \bar{S}_{n-5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n}. \text{ Применяя формулу (I.9),}$$

получим  $\bar{S}_{n-5} \approx \int_6^n \frac{dx}{x} - \frac{1}{12} + \frac{1}{2n} \approx \ln n - \ln 6 + 0,083$ . Так как

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 2,283,$$

то

$$S_n \approx \ln n - \ln 6 + 0,083 + 2,283 = \ln n + 0,575,$$

откуда  $C = 0,575$ . Суммируя 10 первых членов, получим  $C = 0,576$ .

2. В первом случае  $\sigma_n$  неограниченно увеличивается при неограниченном увеличении  $n$ , во втором случае  $\sigma_n$  неограниченно приближается к 1.

#### § 6

1. Имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0). \quad (48)$$

Этот интеграл правильно сходится на любом промежутке  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ , где

$0 < \alpha < \beta < \infty$ , так как на таком промежутке  $e^{-\lambda x} \leq e^{-\alpha x}$ , а  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx < \infty$ .

Дифференцируя по параметру  $\lambda$ , получаем последовательно

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} (-x)e^{-\lambda x} dx &= (-1)\lambda^{-2}; & \int_0^{\infty} (-x)^2 e^{-\lambda x} dx &= (-1)(-2)\lambda^{-3}; \dots; \\ \int_0^{\infty} (-x)^n e^{-\lambda x} dx &= (-1)(-2) \dots (-n)\lambda^{-(n+1)}.\end{aligned}$$

Полагая  $\lambda=1$  и сокращая на  $(-1)^n$ , получаем

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!.$$

Интегрируя формулу (48) по параметру от 1 до  $\lambda$ , получаем

$$\int_0^{\infty} \left( \int_1^{\lambda} e^{-\lambda x} d\lambda \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} dx = \ln \lambda.$$

## 2. Интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx = \frac{1}{\lambda^2 + 1} \quad (\lambda > 0)$$

вычисляется элементарно, с помощью неопределенного интеграла. Как и в задаче 1, интеграл правильно сходится на любом интервале  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$  ( $0 < \alpha < \beta < \infty$ ). Интегрируя по  $\lambda$  от  $\alpha$  до  $\beta$ , получаем

$$\int_0^{\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \frac{\sin x}{x} dx = \arctg \beta - \arctg \alpha.$$

Переходя к пределу при  $\beta \rightarrow \infty$ , получаем отсюда формулу (47). При  $\alpha=0$  эта формула дает

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Следует отметить, что формула (47) выведена нами при  $\alpha > 0$  и справедливость ее при  $\alpha=0$  требует специального обоснования, на котором мы здесь не будем останавливаться.

## Г Л А В А IV

### ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

До сих пор мы рассматривали только функции одной независимой переменной; функции нескольких переменных встречались у нас только эпизодически (см., например, ВМ, § II.12). Теория функций, зависящих от нескольких независимых переменных, содержит много новых моментов. При этом почти все принципиально новые положения проявляются уже на примере функции двух переменных:

$$z = f(x, y).$$

Для простоты мы будем, как правило, рассматривать именно этот случай.

Само понятие функции двух переменных достаточно просто: величина  $z$  задается какой-то формулой или таблицей так, что каждой паре значений  $x$  и  $y$  соответствует определенное значение  $z$ .

#### § 1. Частные производные

В случае функции одной переменной  $g = g(x)$  малое изменение  $dx$  переменной  $x$  приводило к малому изменению функции  $g$ , причем

$$g(x + dx) - g(x) = g'(x) dx.$$

В этой формуле, правая часть которой обозначается через  $dg$ , мы пренебрегаем членами порядка  $(dx)^2$ , так как  $dx$  есть весьма малая величина. В случае функции двух переменных изменение функции происходит в результате изменения обеих переменных  $x$  и  $y$  и равно

$$f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

Покажем\*), что это изменение состоит из двух частей, причем одна часть пропорциональна  $dx$ , а другая пропорциональна  $dy$ , т. е.

$$f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = a dx + b dy. \quad (1)$$

При этом мы пренебрегаем членами порядка  $(dx)^2$ ,  $(dy)^2$ ,  $dx \cdot dy$ , так как  $dx$  и  $dy$  — весьма малые величины.

---

\*) Здесь мы с некоторыми изменениями повторяем рассуждение § II.12 ВМ.

Запишем левую часть (1) так:

$$f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = f(x+dx, y+dy) - \\ - f(x+dx, y) + f(x+dx, y) - f(x, y).$$

Рассмотрим разность двух последних членов  $f(x+dx, y) - f(x, y)$ . При каждом конкретном, закреплённом  $y$  эта разность, с точностью до членов порядка  $(dx)^2$ , есть дифференциал функции, зависящей только от  $x$ :

$$f(x+dx, y) - f(x, y) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_y dx,$$

где  $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_y$  обозначает производную функции  $f(x, y)$ , вычисленную в предположении, что  $y$  постоянно. Такая производная называется *частной производной* функции  $f(x, y)$  по  $x$  при постоянном  $y$ ; ее можно обозначить и так:  $f'_x(x, y)$ . Аналогично, с точностью до членов порядка  $(dy)^2$ ,

$$f(x+dx, y+dy) - f(x+dx, y) = \left. \frac{\partial f(x+dx, y)}{\partial y} \right|_{x+dx} dy,$$

где  $\left. \frac{\partial f(x+dx, y)}{\partial y} \right|_{x+dx}$  есть частная производная по  $y$  при постоянном первом аргументе, равном  $x+dx$ . Ясно, что величина

$$\left. \frac{\partial f(x+dx, y)}{\partial y} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_x$$

тем меньше, чем меньше  $dx$ , точнее,

$$\left. \frac{\partial f(x+dx, y)}{\partial y} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_x = \alpha dx,$$

где величина  $\alpha$  ограничена. Левая часть (1) при указанных упрощениях равна

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_y dx + \left[ \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_x + \alpha dx \right] dy = \\ = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_y dx + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_x dy + \alpha dx dy.$$

Окончательно, учитывая, что членом  $\alpha dx dy$  можно пренебречь, получаем, что с точностью до величин порядка  $(dx)^2$ ,  $(dy)^2$  и  $dx dy$  левая часть (1) равна сумме, которая обозначается через  $df$  и называется *полным дифференциалом* функции  $f$ :

$$df = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_y dx + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_x dy. \quad (2)$$

Из сравнения с (1) находим

$$a = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_y = f'_x(x, y), \quad b = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_x = f'_y(x, y).$$

Если по смыслу ясно, какая величина считается постоянной при вычислении частной производной, то ее не указывают и вместо  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y$  пишут короче:  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Однако поскольку в задаче в целом переменными являются  $x$  и  $y$ , то производную пишем с круглыми  $\partial$ , чтобы отличить ее от обычной производной\*). Из сказанного следует, что величину  $\frac{\partial f}{\partial x}$  следует находить так, как будто бы  $y$  в выражении  $f(x, y)$  не изменяется. Точно так же  $\frac{\partial f}{\partial y}$  находим, считая, что изменяется только  $y$ , а  $x$  остается постоянной. Например, если

$$f(x, y) = x^2 y^3 + x e^y, \quad (3)$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 + x e^y.$$

Чтобы представить формулу (2) более наглядно, рассмотрим «плоскость независимых переменных», т. е. плоскость  $x, y$ . Каждая

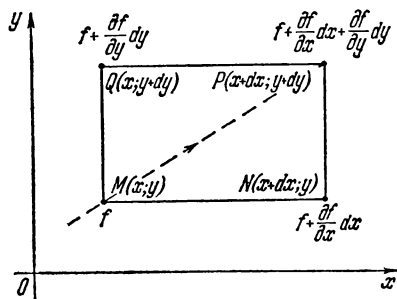


Рис. 23.

точка  $M$  на этой плоскости имеет определенные координаты  $x, y$  и потому этой точке отвечает определенное значение функции  $f(x, y)$ ; можно считать, что функция в каждой точке плоскости принимает определенное значение. Если мы дадим малое приращение только переменной  $x$ , или только  $y$ , или обоим сразу, то мы получим на плоскости  $x, y$  точки малого прямоугольника  $MNPQ$ , изображенного в увеличенном размере на рис. 23. Внутри

прямоугольника обозначены координаты его вершин, а вне его выписаны значения функции (с отброшенными малыми второго порядка) в соответствующих вершинах; под  $f$  понимается значение  $f(x, y)$ .

Формула, аналогичная (2), справедлива для любого числа независимых переменных, а не только для двух, например  $df(x, y, z, u) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial u} du$ . При этом  $\frac{\partial f}{\partial x}$  вычисляется в предполо-

\*) В формуле  $\frac{d}{dx}(e^{kx}) = ke^{kx}$  мы также, по существу, имеем дело с частной производной, вычисленной при постоянном  $k$ . Однако здесь нет надобности употреблять знак частной производной, потому что  $k$  оставалось постоянным в ходе всего рассмотрения задачи.

жении, что  $y, z, u$  постоянные,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  вычисляется в предположении, что  $x, z, u$  постоянные, и т. д.

Покажем на примере, что величина частной производной существенно зависит от того, как выбраны другие, закрепленные переменные. Из физики известно, что энергия конденсатора  $W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$ , где  $q = C\varphi$ ; здесь  $C$  — емкость конденсатора,  $\varphi$  — разность потенциалов на его обкладках и  $q$  — количество электричества, т. е. заряд. Рассматривая зависимость  $W = W(C, \varphi)$ , получим  $\left. \frac{\partial W}{\partial C} \right|_{\varphi} = -\frac{\varphi^2}{2} = -\frac{W}{C}$ . Рассматривая зависимость  $W = W(C, q)$ , получим  $\left. \frac{\partial W}{\partial C} \right|_q = -\frac{q^2}{2C^2} = -\frac{W}{C}$ . Поэтому  $\left. \frac{\partial W}{\partial C} \right|_{\varphi} = -\left. \frac{\partial W}{\partial C} \right|_q$ .

До сих пор мы считали переменные  $x$  и  $y$  изменяющимися совершенно независимо одна от другой. Пусть теперь они сами зависят от некоторой переменной  $t$ , т. е.

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (4)$$

Эти равенства «параметрически» задают на плоскости  $x, y$  некоторую линию, причем параметром служит  $t$  (см., например, ВМ, § IV.8). Параметр  $t$  может иметь различный физический смысл, однако удобнее всего его рассматривать как время, т. е. считать, что рассматривается траектория точки, движущейся в плоскости  $x, y$ . Тогда  $z = f(x, y) = f(x(t), y(t))$ , так что в действительности  $z$  есть функция одной переменной  $t$ , только заданная сложным образом. Найдем ее производную  $\frac{dz}{dt}$  (полную производную вдоль линии (4))<sup>\*</sup>. Так как из (2) и (4) получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt,$$

то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

В частности, если  $z = f(x, y)$ , где  $y = y(x)$ , то  $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$ . Мы видим, что значение  $\frac{dz}{dx}$  полной производной вдоль линии при данных  $x, y$  зависит не только от вида функции  $f$ , но и от  $\frac{dy}{dx}$ , т. е. от наклона линии в данной точке к оси  $x$ .

Обе последние формулы легко понять с помощью рис. 23. Если точка за время  $dt$  перешла из положения  $M$  в  $P$  вдоль пунктирной

<sup>\*</sup> Советуем читателю повторить вывод формулы для производной сложной функции одной переменной (см., например, ВМ, § II.3).



линии, то скорость изменения функции равна

$$\frac{df}{dt} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Для получения второй формулы надо  $df$  относить не к  $dt$ , а к  $dx$ .

Рассмотрим для примера случай, когда некоторая величина  $u$ , например давление или температура в потоке газа, определена в каждый момент времени  $t$  в каждой точке  $(x; y; z)$  пространства. Тогда эта величина  $u$  будет функцией четырех переменных  $x, y, z, t$ , т. е.  $u = u(x, y, z, t)$ . Пусть, далее, задан закон движения  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  некоторой частицы  $M$ . Если рассматривать значение  $u$  в  $M$  по мере движения, то это значение будет представлять собой сложную функцию времени:

$$u = u(x(t), y(t), z(t), t).$$

Скорость изменения этого значения  $u$ , т. е. скорость изменения величины  $u$  «вдоль траектории», равна, в силу формулы для производной сложной функции,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5)$$

Если величина  $u$  не зависит явно от  $t$  (тогда говорят, что «поле  $u$  стационарное»), то  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , и справа остаются только первые три слагаемых; таким образом, они дают скорость изменения  $u$ , полученную только за счет перехода точки  $M$  вдоль траектории от одних значений  $u$  к другим (например, если  $u$  — температура, то за счет перехода из менее нагретой части пространства в более нагретую и т. п.). Эта скорость называется *переносной (конвективной)*. Последнее слагаемое дает скорость изменения поля в неподвижной точке, полученную из-за нестационарности поля; эта скорость называется *местной (локальной)*. В общем случае действуют оба указанных фактора, и скорость изменения поля вдоль траектории складывается из переносной и местной скоростей изменения поля.

Вернемся к случаю функции  $z = f(x, y)$  от двух независимых переменных. Ясно, что частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  этой функции сами зависят от  $x$  и  $y$ . Поэтому можно находить их частные производные. Эти частные производные называются *частными производными второго порядка*, их частные производные — *частными производными третьего порядка* и т. д. Можно образовать следующие частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

или, в других обозначениях,

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Производные  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  называются *смешанными*.

Так, в примере (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (2xy^3 + e^y) = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^3 + e^y) = 6xy^2 + e^y, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 + xe^y) = 6xy^2 + e^y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 + xe^y) = 6x^2y + xe^y. \end{aligned}$$

Мы видим, что в этом примере  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ , т. е. смешанные производные не зависят от того, в каком порядке производится дифференцирование.

Покажем, что и в общем случае смешанные производные равны. Для этого заметим, что согласно определению производной (см. § II.2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0+k}} - \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0-k}}}{2k}$$

(с любой точностью), если только  $k$  достаточно мало\*). Точно так же

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0+k}} &= \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0-h, y_0+k)}{2h}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0-k}} &= \frac{f(x_0+h, y_0-k) - f(x_0-h, y_0-k)}{2h}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу для смешанной производной, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} &= \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0-h, y_0+k)}{4hk} - \\ &\quad - \frac{f(x_0+h, y_0-k) - f(x_0-h, y_0-k)}{4hk}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь таким же образом получим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0+h \\ y=y_0}} - \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0-h \\ y=y_0}}}{2h},$$

---

\*) Точная формулировка: производная есть предел, к которому стремится правая часть при  $k$ , стремящемся к нулю. Аналогичные формулировки относятся к следующим формулам.

где

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0+h \\ y=y_0}} = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0-k)}{2k},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0-h \\ y=y_0}} = \frac{f(x_0-h, y_0+k) - f(x_0-h, y_0-k)}{2k}.$$

Окончательно находим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} &= \\ &= \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0-k)}{4hk} - \frac{f(x_0-h, y_0+k) - f(x_0-h, y_0-k)}{4hk}. \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), видим, что

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}},$$

а так как точка  $(x_0; y_0)$  совершенно произвольная, то эти производные равны при всех значениях  $x$  и  $y$ .

Подобным образом для производных любого порядка от функции любого числа переменных существенно только то, сколько раз по какой переменной производится дифференцирование, но не то, в каком порядке это делается.

Чтобы лучше уяснить смысл смешанной производной, найдите в плоскости независимых переменных те четыре точки, к которым относятся значения функции, входящие в правые части формул (6) и (7). Сравните (6) и (7) с аналогичными выражениями для  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

#### Упражнения

1.  $z = x^2 + y^2$ . Найдите  $\frac{\partial z}{\partial x}$  при  $x=1, y=1$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  при  $x=2, y=0,5$ .

Найдите частные производные следующих функций:

2.  $z = e^{-(x^2+y^2)}$ . 3.  $z = xe^y + ye^x$ . 4.  $z = x \sin y$ . 5.  $z = \sin(xy)$ .  
6.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Найдите полные производные следующих функций:

7.  $z = x^2 - y^2, x = t + \frac{1}{t}, y = t + \sqrt{t}$ .

8.  $z = e^{x-y}, x = \sin t, y = t^2$ .

9.  $z = x^3 + 3xy^2, x = t^2, y = e^{-t}$ .

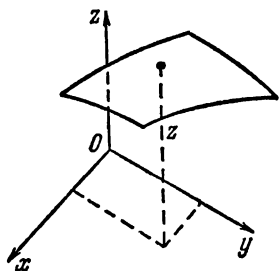
10. Найдите  $\frac{dz}{dx}$ , если  $z = \ln(x + e^y), y = x^2$ .

11. Для всех функций задач 2—6 проверьте равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

## § 2. Геометрический смысл функции двух переменных

Функцию двух переменных  $z = f(x, y)$  удобно представлять себе геометрически как уравнение поверхности  $z = f(x, y)$ , где  $z$  есть высота, а  $x$  и  $y$  — координаты точки в горизонтальной плоскости (рис. 24). Однако изображать на плоском рисунке поверхность трудно. Поэтому для того, чтобы представить функцию двух переменных графически, можно построить серию кривых, представляющих собой сечения поверхности  $z = f(x, y)$  плоскостями, параллельными плоскости  $xOz$ . Такие плоскости перпендикулярны оси  $y$ ; на



[Рис. 24.

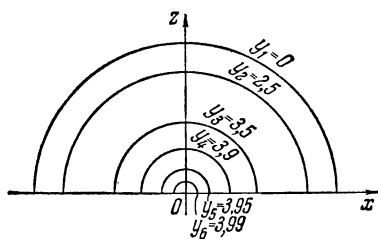


Рис. 25.

каждой плоскости координата  $y$  имеет постоянное значение. Пересечение данной плоскости с поверхностью  $z = f(x, y)$  дает кривую  $z = f(x, y = \text{const})$ . Для наглядности удобно нанести несколько таких кривых на одном чертеже в координатах  $x, z$ . При этом мы получим семейство кривых. Например, на рис. 25 построено несколько кривых такого семейства для полусферы  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ . Около каждой кривой должно быть надписано значение  $y = y_n$ , которому соответствует эта кривая. Если дано семейство кривых, соответствующих  $y = \text{const}$  в плоскости  $x, z$ , то производная  $\frac{\partial z}{\partial x}$  геометрически означает, так же как  $\frac{dz}{dx}$  в случае одной переменной, тангенс угла наклона касательной к оси  $x$ . Производную  $\frac{\partial z}{\partial y}$  можно найти, составляя отношение  $\frac{z_{n+1}(x) - z_n(x)}{y_{n+1} - y_n}$ ; при этом нужны две соседние кривые.

Понятно, что функцию  $z = f(x, y)$  можно изобразить графически так же, если строить графики зависимости  $z(y)$  для  $x = \text{const}$  в плоскости  $y, z$ .

Принципиально другой способ описания функции  $z = f(x, y)$  получается, если построить сечения поверхности  $z = f(x, y)$  горизонтальными плоскостями  $z = \text{const}$ , а затем нанести полученные кривые (так называемые *линии уровня*) на плоскость  $x, y$ . Этот способ

применяется на географических картах для изображения рельефа местности. На рис. 26 показан пример такого изображения для функции  $z = x^2 - y^2$ . Каждая кривая соответствует определенному постоянному значению  $z$ .

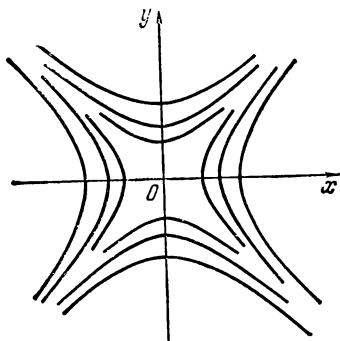


Рис. 26.

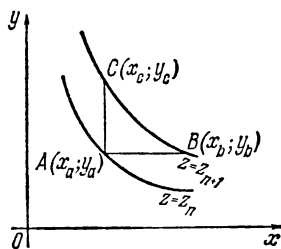


Рис. 27.

Как находить производные на графике такого типа? Часть графика показана в увеличенном масштабе на рис. 27. Ясно, что если линии уровня проведены достаточно густо, то с любой точностью

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z_{n+1} - z_n}{x_b - x_a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z_{n+1} - z_n}{y_c - y_a}.$$

Чем ближе одна к другой расположены линии с различными значениями  $z$ , тем больше частные производные. (Предполагается, что эти линии проведены через равные промежутки по  $z$ .)

### Упражнения

Постройте семейство кривых, соответствующих  $y = \text{const}$ , для следующих функций:

1.  $z = xy$ . 2.  $z = x^2 - y^2$ . 3.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
4. Постройте семейство кривых, соответствующих  $z = \text{const}$ , для функции  $z = x^2 - y^3$ .

## § 3. Неявные функции

Применение понятий теории функций нескольких переменных часто оказывается полезным и при исследовании функций одного переменного. (Это применение было показано уже в ВМ, § II.12, однако сейчас мы остановимся на нем более подробно.) Такая функция обычно задается с помощью «явной» формулы, например  $y = ax^2$  или  $y = be^{ax}$  и т. п., в которой непосредственно указано, как надо вычислять значение  $y$ , отвечающее данному  $x$ . Такие формулы наиболее приспособлены к выполнению математических действий.

Другой возможный способ задания зависимости  $y$  от  $x$  — так называемое  *неявное задание*, при помощи зависимости

$$f(x, y) = 0, \quad (8)$$

например

$$c^3 + y^3 + 3axy = 0 \quad (9)$$

или

$$(x + y)^3 - b^2(x - y) = 0 \quad (10)$$

и т. д.

В этом случае для нахождения  $y$  при данном  $x$  необходимо решить относительно  $y$  уравнение (8). Решение уравнения иногда имеет вид гораздо более сложный, чем формула (8). Так, в приведенном примере (9)

$$y = \sqrt[3]{-\frac{c^3}{2} + \sqrt{\frac{c^6}{4} + a^3x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{c^3}{2} - \sqrt{\frac{c^6}{4} + a^3x^3}}.$$

Часто решение вообще не может быть написано в виде формулы и уравнение (8) можно решать только численно.

Тем не менее и здесь бывают случаи, когда для исследования рассматриваемой функциональной зависимости достаточно привлекать только функции одного переменного. Именно так будет в случае, когда уравнение решено или легко решается относительно  $x$ , т. е. когда его можно записать в виде

$$x = \varphi(y), \quad (11)$$

а также в случае, когда уравнение можно разрешить в «параметрической форме», о которой будет сказано немного позже. Так, в примере (9)  $y$  выражается через  $x$  весьма сложно, но легко можно найти

$$x = -\frac{c^3 + y^3}{3ay}.$$

Тогда, задаваясь различными значениями  $y$ , легко найти соответствующие значения  $x$ . Результат можно записать в виде таблицы и изобразить на графике в координатах  $x, y$ . (Для случая  $a = 1$ ,

Таблица 4

$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$
-4,0	-5,08	-0,5	1,91	1,5	-1,42
-3,0	-2,66	-0,25	3,98	2,0	-1,83
-2,0	-0,83	0,25	-4,02	2,5	-2,48
-1,5	-0,084	0,5	-2,02	3,0	-3,34
-1,0	-0,67	1,0	-1,33	4,0	-5,58

$c = 1,44$  см. таблицу 4 и график рис. 28.) Построив кривую, мы можем найти  $y$  по заданному  $x$ . Для этого (рис. 28) проводим вертикаль, соответствующую нужному  $x$ , и находим интересующее нас значение  $y$  \*). Если имеется таблица значений  $x$  для некото-

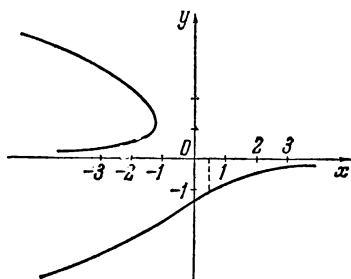


Рис. 28.

рых значений  $y$ , то величину  $y$ , соответствующую значению  $x$ , не имеющемуся в таблице, можно найти хотя бы с помощью линейной интерполяции (ср. § II.1).

Для этого по таблице отыскиваем две пары чисел  $(y_1, x_1)$  и  $(y_2, x_2)$  такие, что  $x_1 < x < x_2$ . Будем считать, что при изменении  $x$  от  $x_1$  до  $x_2$  график функции мало отличается от прямой линии  $y = kx + b$ .

Числа  $k$  и  $b$  легко определить, пользуясь тем, что  $y = y_1$  при  $x = x_1$

и  $y = y_2$  при  $x = x_2$ . Действительно,  $y_1 = kx_1 + b$ ,  $y_2 = kx_2 + b$ . Отсюда  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ,  $b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$ . Поэтому

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Значения  $y$  для всех  $x$ , расположенных между  $x_1$  и  $x_2$ , можно подсчитать по полученной формуле. Эта формула для  $y$  тем точнее, чем ближе числа  $x_1$  и  $x_2$ , а также  $y_1$  и  $y_2$ , т. е. чем ближе одна к другой расположены точки в таблице.

Как в таком случае найти производную  $\frac{dy}{dx}$ ? Для этого нет необходимости решать уравнение и находить  $y = f(x)$ . Если функция задана в виде  $x = \varphi(y)$ , то  $dx = \frac{d\varphi}{dy} dy$ , откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Единственный недостаток этого выражения заключается в том, что производная получается заданной как функция  $y$ . Поэтому если нужно найти  $\frac{dy}{dx}$  при данном  $x$ , то нам сперва придется находить  $y$ , соответствующее данному  $x$ , а уже после этого подставлять

\*) Из рис. 28 видно, что некоторым значениям  $x$  соответствует одно значение  $y$ , некоторым значениям  $x$  соответствуют три значения  $y$ , а одному значению  $x$  соответствуют два значения  $y$ . Это объясняется тем, что уравнение третьей степени может иметь один, два или три вещественных различных корня (если корней два, то один из них двойной, он соответствует касанию прямой  $x = \text{const}$  и кривой).

найденное  $y$  в выражение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

На первый взгляд может показаться, что проще определять производную численно, как в § II.2. Действительно, если мы умеем определять  $y$  при данном  $x$ , то мы можем найти еще и  $y(x + \Delta x)$ , соответствующее величине  $x + \Delta x$ , после чего приближенное значение производной определяем хотя бы по формуле

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

В действительности такой способ гораздо хуже: в этом случае нам пришлось бы находить  $y$  для двух различных значений  $x$ , т. е. два раза решать уравнение (11). При этом величину  $y$  надо определять с высокой степенью точности, потому что нам нужна разность близких значений  $y$  и малая ошибка в каждом из  $y$  дает большую относительную ошибку в их разности. В выражении для производной в знаменателе стоит малая величина  $\Delta x$  и поэтому даже малая ошибка в числителе может привести к большой ошибке в производной. Следовательно, лучше пользоваться формулой

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Отметим, что формула для второй производной имеет более сложный вид. Не следует думать, что

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\frac{d^2x}{dy^2}} = \frac{1}{\frac{d^2\varphi}{dy^2}}.$$

В самом деле, эта формула неправильна даже по размерности:  $d^2y/dx^2$  имеет размерность  $y/x^2$ , а  $1/\frac{d^2\varphi}{dy^2}$  имеет размерность  $y^2/x$ . Правильная формула получается так:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{\varphi'(y)} \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\varphi'(y)} \right) = - \frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3} = - \frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left[ \frac{dx}{dy} \right]^3}.$$

Легко проверить размерность этого выражения: она такая же, как размерность отношения  $\frac{x/y^2}{(x/y)^3} = \frac{y}{x^2}$ , что и должно быть.

При рассмотрении неявной функциональной зависимости (8) может представиться более общий случай, когда обе переменные  $x$  и  $y$  оказывается возможным выразить в виде функции одной и той же вспомогательной переменной  $t$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t). \end{aligned} \right\}$$



Так, если в примере (10) обозначить

$$x + y = t, \quad (12)$$

то из (10) получаем  $x - y = t^3/b^2$ , откуда, привлекая (12), находим

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{t}{2} + \frac{t^3}{2b^2}, \\ y &= \frac{t}{2} - \frac{t^3}{2b^2}. \end{aligned} \right\}$$

Такой способ задания функции называется *параметрическим*, а переменная  $t$  называется *параметром*. Этот способ может получиться и без связи с зависимостями вида (8); он рассматривается в началах курса высшей математики (см., например, ВМ, §§ II.3, IV.8, VI.14). Там же показывается, как находить производную от такой функции: запишем  $dx$  в виде  $dx = \frac{dx}{dt} dt = x'(t) dt$ , аналогично  $dy = \frac{dy}{dt} dt = y'(t) dt$ , откуда  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ .

Найдем вторую производную  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

Для этого воспользуемся соотношением

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Поэтому

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right) \frac{dt}{dx},$$

откуда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = \frac{y''(t)}{[x'(t)]^3} - \frac{y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3},$$

где штрихи обозначают производные по  $t$ .

В общем случае неявного задания функция  $f(x, y)$  может быть такой, что уравнение (8) не разрешимо ни в форме (11), ни в параметрической форме. Рассмотрим, например, зависимость  $y$  от  $x$ , заданную при помощи формулы

$$y^5 + xy + x^5 - 7 = 0. \quad (13)$$

(Геометрически эта формула задает кривую в плоскости  $x, y$ .) Получить отсюда выражение  $y = f(x)$  невозможно. Чтобы найти производную  $\frac{dy}{dx}$ , приравняем производные от обеих частей равенства (13), считая в нем  $y$  функцией от  $x$ ,  $y = y(x)$ , определенной из этого равенства. При таком истолковании оно является тождеством и потому допускает дифференцирование:

$$5y^4y' + (1 \cdot y + x \cdot y') + 5x^4 = 0.$$

Отсюда находим

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y+5x^4}{5y^4+x}. \quad (14)$$

Подчеркнем, что в правой части  $x$  и  $y$  не являются независимыми, а связаны друг с другом соотношением (13), так что независимая переменная только одна. Для того чтобы найти  $y'$  при данном  $x$  надо, численно решая (13), найти  $y$  при данном  $x$  и подставить это  $y$  в (14).

Перейдем теперь к общему случаю неявной функции нескольких, например двух, переменных.

Если  $z$  задано как функция от  $x$  и  $y$ , то, решая уравнение  $z = f(x, y)$  относительно  $x$ , можно получить зависимость  $x$  от  $y$  и  $z$ :  $x = \varphi(y, z)$ , а решая уравнение  $z = f(x, y)$  относительно  $y$ , можно найти  $y = \psi(x, z)$ . Однако независимо от того, решили мы или нет уравнение  $z = f(x, y)$  относительно  $x$ , это уравнение дает зависимость величины  $x$  от величин  $y$  и  $z$ , т. е. определяет  $x$  как функцию  $y$  и  $z$ . Такое задание функции  $x$  называется неявным.

Производные  $\frac{\partial x}{\partial y}$  и  $\frac{\partial x}{\partial z}$  можно найти, и не выражая  $x$  в явном виде. Покажем, как это сделать. Из соотношения  $z = f(x, y)$  находим  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ , откуда

$$dx = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} dz - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-1} dy. \quad (15)$$

С другой стороны, если  $x = \varphi(y, z)$ , то

$$dx = \frac{\partial x}{\partial z} dz + \frac{\partial x}{\partial y} dy. \quad (16)$$

Сравнивая выражения (15) и (16), находим

$$\frac{\partial x}{\partial z} \Big|_y = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_y}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_x}{\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_y}. \quad (18)$$

Формула (17) представляется вполне естественной. В формуле (18) есть удивительный знак минус. Убедимся в справедливости этой формулы еще из геометрических соображений.

Рассмотрим рис. 26 и 27. На этих рисунках нанесены кривые  $z = \text{const}$ , так что  $\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z$  есть взятая обычным образом производная  $\frac{dx}{dy}$  вдоль этих кривых. Поэтому

$$\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z = \frac{dx}{dy} = \frac{x_b - x_c}{y_b - y_c}.$$

Замечая, что  $y_b = y_a$ ,  $x_c = x_a$ , находим

$$\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z = \frac{x_b - x_a}{y_a - y_c}.$$

Вспоминая значения  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , находим, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big/ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x_b - x_a}{y_c - y_a} = - \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z.$$

Формулу (18) можно записать так:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_y = - \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_x.$$

Замечая, что  $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_x = 1 / \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_x$ , получаем  $\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_y = -1$ . Последняя формула, как и формула (18), показывает, что в отличие от случая сложной функции одного переменного здесь нельзя сокращать  $\partial x$ ,  $\partial y$ ,  $\partial z$  в числителе и знаменателе. Дело заключается в том, что три частных производные в этой формуле вычисляются в различных условиях (при постоянном  $z$  первая, при постоянном  $x$  вторая и при постоянном  $y$  третья).

В § 1 мы видели, что значение частной производной  $\frac{\partial W}{\partial C}$  зависит от того, какой аргумент считается постоянным при ее вычислении. Уже это показывает, что с  $\partial W$  и  $\partial C$  нельзя обращаться как с числами и сокращать их с  $\partial W$  и  $\partial C$  в других формулах, не глядя на то, при каких условиях вычисляются соответствующие частные производные.

Покажем вычисление производных от неявных функций на примере. Пусть  $z = x^2 + px + y^2 + qy + kxy$ .

Найдем производные  $\frac{\partial x}{\partial z}$  и  $\frac{\partial x}{\partial y}$ . Для того чтобы выразить  $x$  через  $y$  и  $z$ , нужно решить квадратное уравнение. В этом нет принципиальных трудностей, однако получится громоздкое выражение с корнями. Так как  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + p + ky$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + q + kx$ , то по формулам (17) и (18) находим

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2x + p + ky}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{2y + q + kx}{2x + p + ky}.$$

Для того чтобы определить значения  $\frac{\partial x}{\partial z}$  и  $\frac{\partial x}{\partial y}$  при конкретных данных  $y$  и  $z$ , надо знать численное значение  $x$  при этих  $y$  и  $z$ , но можно не иметь аналитического выражения  $x = \psi(y, z)$ . Ясно, что найти численно решение уравнения  $z = f(x, y)$  относительно  $x$  при определенных значениях  $y$  и  $z$  гораздо проще, чем построить общую формулу  $x = \psi(y, z)$ . Кроме того, в случае уравнения выше чет-

вертой степени, а также в случае, когда в уравнение входят трансцендентные функции, построение общей формулы зачастую оказывается невозможным.

Наиболее общим способом неявного задания функции двух переменных является задание ее с помощью соотношения вида  $F(x, y, z)=0$ . Мы представляем читателю, дифференцируя это соотношение, получить выражения для частных производных  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x}$  и т. д. и применить результат к рассмотренному выше соотношению  $z=f(x, y)$ , переписав его в виде  $z-f(x, y)=0$ .

Изложенные приемы удобно применять и в случае функции одного переменного, заданной неявно, с помощью уравнения вида (8). Для этого надо рассмотреть функцию двух переменных  $z=f(x, y)$ , другими словами, рассмотреть соотношение (8) как уравнение нулевой, т. е. отвечающей значению  $f=0$ , линии уровня функции  $z=f(x, y)$ . Тем самым задача о вычислении  $\frac{dy}{dx}$  сводится к только что разобранной задаче о вычислении  $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{z=\text{const}}$ . Так, в примере (13) надо обозначить

$$z = y^5 + xy + x^5.$$

Тогда по формуле (18)

$$\frac{dy}{dx} = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_z = - \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_y / \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_x = - \frac{y + 5x^4}{5y^4 + x},$$

т. е. мы вновь приходим к формуле (14).

### Упражнения

1. Найти  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для следующих функций, заданных параметрически:  
а)  $x = \frac{1}{2}t$ ,  $y = t^2 + t$ ; б)  $x = 2 \sin^3 t$ ,  $y = 2 \cos^3 t$ ; в)  $x = \cos t + t \sin t$ ,  $y = \sin t - t \cos t$ .
2.  $x = \sin t$ ,  $y = \cos 2t$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$  при  $x = \frac{1}{2}$ .
3.  $z = x^3 + y^3 + xy$ . Найти  $\frac{\partial x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial z}$  при  $y=0$ ,  $z=1$ .
4.  $z = x^5 + xy^2 + y^5$ . Найти  $\frac{\partial x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial z}$ .
5.  $x^2 + y^2 - 4x - 10y = -4$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .
6.  $x^4y + xy^4 - x^2y^2 - 1 = 0$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .

## § 4. Радиолампа

Интересным примером функции двух переменных является сила тока  $j$ , проходящего через анод лампы с тремя электродами (рис. 29).

На поток электронов, попадающих на анод, влияют потенциал сетки  $u_C$  и потенциал самого анода (катод заземлен, так что его потенциал равен нулю). Таким образом, мы имеем дело с функцией двух переменных  $j = j(u_C, u_A)$ . На графике принято изображать семейство кривых в координатах  $u_C, j$  с постоянными значениями  $u_A$  на каждой кривой. На рис. 30 приведен пример такого семейства кривых для лампы 6С1Ж. Ток  $j$  дан в миллиамперах, напряжения  $u_C$  и  $u_A$  — в вольтах.

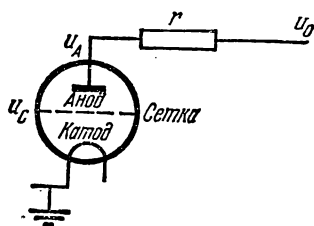


Рис. 29.

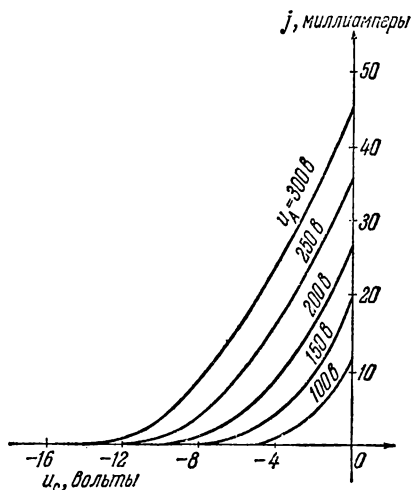


Рис. 30.

Производная  $\left. \frac{\partial j}{\partial u_C} \right|_{u_A}$  пропорциональна тангенсу угла наклона касательных к кривым рис. 30. Фактически в довольно большом промежутке изменения  $u_C$  эти кривые мало отличаются от прямых. Наклон их в этом промежутке называется *крутизной характеристики лампы* и обозначается через  $S$ , так что  $S = \frac{\partial j}{\partial u_C}$ . Величину  $S$  выражают в миллиамперах на вольт.

Образуем  $\left. \frac{\partial j}{\partial u_A} \right|_{u_C}$ . Обратная ей величина, т. е.

$$R = \frac{1}{\left. \frac{\partial j}{\partial u_A} \right|_{u_C}} = \left. \frac{\partial u_A}{\partial j} \right|_{u_C},$$

носит название *внутреннего сопротивления лампы*. Смысл этого названия легко понять: если бы в схеме вместо лампы стояло

постоянное сопротивление  $R_1$ , то по закону Ома  $j = \frac{u_A}{R_1}$ , откуда

$$\frac{\partial j}{\partial u_A} = \frac{1}{R_1},$$

или

$$R_1 = \frac{1}{\frac{\partial j}{\partial u_A}}.$$

Когда ток выражен в миллиамперах, а потенциал — в вольтах, то  $R$  получается в килоомах. Наконец, для характеристики лампы важнейшее значение имеет величина  $\left. \frac{\partial u_A}{\partial u_C} \right|_j$ . Это — безразмерная отрицательная величина. Число  $\mu = - \left. \frac{\partial u_A}{\partial u_C} \right|_j$  называется *коэффициентом усиления лампы*. Согласно формуле (18)

$$\mu = \frac{\partial j}{\partial u_C} \bigg|_{u_A} \left( \frac{\partial j}{\partial u_A} \bigg|_{u_C} \right)^{-1} = S \cdot R.$$

Найдем соотношение между изменением потенциала на сетке и изменением потенциала анода. Рассматривая  $u_A$  как функцию переменных  $u_C$  и  $j$ , находим

$$du_A = \frac{\partial u_A}{\partial j} \bigg|_{u_C} dj + \frac{\partial u_A}{\partial u_C} \bigg|_j du_C, \text{ откуда } du_A = R dj - \mu du_C.$$

Если поддерживать все время анодный ток постоянным, то  $dj = 0$  и, следовательно,  $du_A = -\mu du_C$ . Таким образом, изменение потенциала на аноде в  $\mu$  раз больше изменения потенциала на сетке. Поэтому можно сказать, что лампа в  $\mu$  раз увеличивает, усиливает изменение напряжения на сетке. Отсюда и название для  $\mu$  — коэффициент усиления.

Соотношение  $\frac{du_A}{du_C} = -\mu$  относится к идеальному случаю, когда ток  $j$  не изменяется. В действительности изменение  $u_C$ , как правило, вызывает некоторое изменение тока; при этом изменение  $u_A$  оказывается меньше, чем в случае  $j = \text{const}$ . Рассмотрим схему рис. 29, где в цепь анода последовательно включено сопротивление  $r$  и подано постоянное напряжение  $u_0$ . Тогда по закону Ома

$$j = \frac{u_0 - u_A}{r} = j(u_A, u_C),$$

где в правой части стоит функция, рассмотренная в начале параграфа. Возьмем полный дифференциал от правой и от левой частей этого равенства (считая  $u_0$ ,  $r$  постоянными)

$$-\frac{1}{r} du_A = \frac{\partial j}{\partial u_A} du_A + \frac{\partial j}{\partial u_C} du_C,$$

или

$$-\frac{1}{r} du_A = \frac{1}{R} du_A + S du_C,$$

откуда

$$du_A = -\frac{S \cdot R r}{r+R} du_C = -\mu \frac{r}{r+R} du_C.$$

Из этой формулы видно, что в схеме рис. 29 абсолютная величина отношения  $\frac{du_A}{du_C}$  меньше  $\mu$ , так как  $\frac{r}{r+R} < 1$ . Если  $r \gg R$ , то ток  $j$  почти постоянен и  $\left| \frac{du_A}{du_C} \right|$  весьма близко к  $\mu$ . Однако для того чтобы пропускать данный ток через большое сопротивление  $r$ , необходимо высокое напряжение  $u_0$ . При этом на сопротивлении  $r$  бесполезно превращается в тепло значительная электрическая мощность. Оказывается, что во всех случаях, кроме задачи усиления постоянного или медленно меняющегося напряжения, выгоднее вместо сопротивления  $r$  ставить катушку индуктивности.

Факты, изложенные в этом параграфе, показывают, что точная математическая формулировка законов работы лампы связана с функциями двух переменных, а основные величины, характеризующие лампу,—это частные производные.

#### Упражнение

С помощью рис. 30 найти значения  $S$ ,  $R$  и  $\mu$  для лампы 6С1Ж.

### § 5. Огибающая семейства линий

В качестве другого примера применения частных производных рассмотрим задачу о разыскании огибающей однопараметрического семейства линий. Разберем эту задачу на типичном примере.

Рассмотрим совокупность траекторий снарядов, выпущенных из одной точки (из начала координат) с одной и той же начальной скоростью  $v_0$ , но под различными углами  $\varphi$ , которые могут принимать значения от 0 до  $180^\circ$  (рис. 31).

Каждая траектория представляет собой кривую в плоскости  $x$ ,  $y$ , т. е. характеризуется определенной зависимостью  $y(x)$ . Выписав зависимости  $x=x(t)$  и  $y=y(t)$ , без учета сопротивления воздуха, и исключая из них  $t$ , легко найти (см., например, ВМ, § VI.14) зависимость  $y$  от  $x$ :

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2. \quad (19)$$

При каждом конкретном значении  $\varphi$  получается определенная кривая. Рассматривая различные значения параметра  $\varphi$ , мы получим семейство кривых. Мы можем считать, что высота траектории снаряда  $y$

есть функция двух переменных: горизонтального расстояния  $x$  и угла бросания  $\varphi$ , т. е.  $y = y(x, \varphi)$ . Тогда отдельные траектории дают зависимость  $y$  от  $x$  при постоянном  $\varphi$ . (Семейство траекторий изображено на рис. 31.) Рассматривая семейство траекторий, легко заметить, что траектории заполняют одну часть плоскости  $x, y$ , а в другую часть плоскости они не попадают. Таким образом, есть непоражаемая зона, в которую при данной начальной скорости снаряда нельзя попасть ни при каком угле бросания.

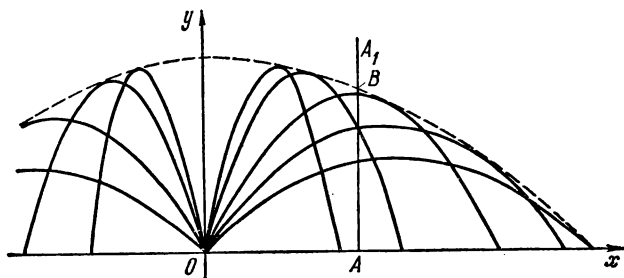


Рис. 31.

Постараемся определить границу зоны поражения. (Эта граница нанесена пунктиром на рис. 31.) Каждая точка границы является одновременно точкой на какой-то траектории, потому что иначе границы нельзя было бы достичь. Отметим, что на части границы, которая изображена на рис. 31, каждая точка является точкой траектории, соответствующей углу бросания  $\varphi \geq 45^\circ$ . (Можно показать, что при  $\varphi = 45^\circ$  достигается наибольшая дальность бросания. Траектории, которые соответствуют  $\varphi < 45^\circ$ , соприкасаются, — как это будет видно из дальнейшего, — с границей зоны поражения ниже оси  $x$ . Эта часть границы представляет практический интерес, если стрельба ведется по цели, расположенной ниже орудия.) Вместе с тем траектория не может пересекать границу, а должна касаться ее. Если бы траектория пересекла границу, то она вышла бы за пределы границы, а это противоречит тому, что граница отделяет поражаемую зону от непоражаемой.

Граница области, заполненной семейством кривых, касающихся этой границы, носит название *оггибающей* семейства кривых. Найдем уравнение оггибающей семейства траекторий. Для этого проведем вертикальную линию  $AA_1$  и найдем ту точку  $B$ , в которой эта вертикальная линия пересекается оггибающей. Проводя вертикальную линию, мы взяли определенное значение  $x$ . Точка  $B$  соответствует наибольшей высоте  $y$ , на которой может находиться снаряд, пролетая горизонтальное расстояние  $x$  при каком бы то ни было угле бросания  $\varphi$ . Поэтому надо найти максимум  $y(\varphi)$  при данном



закрепленном  $x$ . Мы получаем условие

$$\left. \frac{\partial y(x, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_x = 0. \quad (20)$$

Условие (20) дает нам уравнение, связывающее между собой  $x$  и  $\varphi$ . Для каждого значения  $x$  есть свое значение  $\varphi$ , определяемое из уравнения (20), так что получаем  $\varphi = \varphi(x)$ . Подставляя  $\varphi = \varphi(x)$  в уравнение семейства (19), найдем уравнение огибающей.

Прделаем необходимые выкладки. Для удобства введем вместо переменной  $\varphi$  переменную  $\theta = \operatorname{tg} \varphi$ . Замечая, что по известной формуле тригонометрии  $\frac{1}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 = \theta^2 + 1$ , перепишем уравнение (19) в виде

$$y = \theta x - \frac{g}{2v_0^2} (\theta^2 + 1) x^2.$$

Наконец, вводя обозначение  $\frac{v_0^2}{g} = l$  (величина  $l$ , как будет видно из (22), есть максимальная горизонтальная дальность стрельбы), получим

$$y = \theta x - \frac{x^2}{2l} (\theta^2 + 1), \quad (21)$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = x - \frac{x^2}{l} \theta.$$

Условие (20) \*) дает  $\theta = \frac{l}{x}$ . Подставляя это значение в (21), получим уравнение огибающей

$$y = \frac{l}{2} - \frac{x^2}{2l}. \quad (22)$$

Советуем читателю проделать весь вывод, не переходя к переменной  $\theta$ .

#### Упражнение

Снаряд вылетает из орудия со скоростью  $v_0 = 100$  м/сек. Можно ли из этого орудия поразить цель, находящуюся на горизонтальном удалении 500 м от орудия на высоте 300 м; на высоте 500 м?

### § 6. Ряд Тейлора и задачи на экстремум

Степенной ряд Тейлора, хорошо известный для функций одного переменного, оказывается полезным и для функций нескольких переменных. Напомним (см., например, ВМ, § II.17), что для функций

---

\*) При замене переменной по формуле  $\varphi = \varphi(\theta)$  получаем  $\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ , так что,  $\frac{\partial y}{\partial \theta} \neq \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ . Однако условие  $\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0$  совпадает с условием  $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$ .

одного переменного этот ряд имеет вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (23)$$

Рассмотрим теперь функцию  $f(x, y)$  двух переменных. Пусть  $x$  близок к постоянному значению  $a$ , а  $y$  — к постоянному значению  $b$ . Тогда наиболее грубая приближенная формула, формула «нулевого приближения», не учитывающая изменения  $x$  и  $y$ , имеет вид

$$f(x, y) = f(a, b).$$

Более точная формула «первого приближения», учитывающая члены первого порядка малости, такова:

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x-a) + B(y-b), \quad (24)$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые числовые коэффициенты. Чтобы их найти, возьмем частные производные от обеих частей равенства (24) по  $x$ :

$$f'_x(x, y) = A$$

(первое и третье слагаемые в правой части (24) не зависят от  $x$ , и потому их частные производные по  $x$  равны нулю). Так как коэффициент  $A$  должен быть постоянным, то отсюда получаем  $A = f'_x(a, b)$ . Подобным образом, дифференцируя (24) по  $y$ , находим  $B = f'_y(a, b)$ , т. е. (24) на самом деле имеет вид

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b). \quad (25)$$

(Выведите эту формулу непосредственно из результатов § 1.)

Еще более точная формула «второго приближения», учитывающая также и члены второго порядка малости, имеет вид

$$f(x, y) = f(a, b) + [A(x-a) + B(y-b)] + \\ + [C(x-a)^2 + D(x-a)(y-b) + E(y-b)^2], \quad (26)$$

где  $A, B, C, D, E$  — некоторые числовые коэффициенты. Чтобы их найти, вычислим частные производные первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= A + 2C(x-a) + D(y-b), \\ f'_y(x, y) &= B + D(x-a) + 2E(y-b), \\ f''_{xx}(x, y) &= 2C, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = D, \quad f''_{yy}(x, y) = 2E. \end{aligned}$$

Полагая в этих равенствах  $x = a, y = b$ , получим

$$\begin{aligned} A &= f'_x(a, b), \quad B = f'_y(a, b), \quad C = \frac{1}{2}f''_{xx}(a, b), \quad D = f''_{xy}(a, b), \\ E &= \frac{1}{2}f''_{yy}(a, b). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (26), получаем окончательно формулу

второго приближения

$$f(x, y) = f(a, b) + [f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)] + \\ + \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a, b)(y-b)^2]. \quad (27)$$

Хотя мы выводили эту формулу независимо от (25), но мы видим, что в правой части получилась та же линейная часть, что в (25), и, кроме того, появились поправки второго порядка малости. Мы предоставляем читателю вывести аналогичным образом формулу

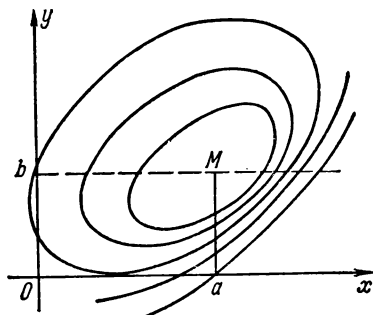


Рис. 32.

третьего приближения (впрочем, эта формула применяется редко); в ней к правой части (27) добавятся еще поправки третьего порядка малости.

(Для контроля примем, что функция  $f$  не зависит от  $y$ ; тогда в правых частях (25) и (27) все частные производные, в которых участвует дифференцирование по  $y$ , отпадут, и мы получим частные суммы ряда (23) для функции одного переменного.)

Как и для функций одного переменного, формулами (25) и (27) наиболее удобно пользоваться, если  $|x-a|$  и  $|y-b|$  очень малы; если же эти разности велики, то формулы перестают быть справедливыми и могут привести к ошибочным выводам. Соответствующие формулы для функций от более чем двух независимых переменных имеют аналогичный вид, и мы не станем на них останавливаться.

Полученные формулы можно применить, в частности, для исследования точек экстремума функции  $f(x, y)$ . Допустим, что эта функция имеет экстремум (максимум или минимум) при  $x=a$ ,  $y=b$ . Примерное расположение линий уровня функции  $f$  в плоскости аргументов вблизи точки  $M$  экстремума показано на рис. 32. Тогда ясно, что если положить  $y=b$ , а изменять только  $x$ , то получающаяся функция  $f(x, b)$  от одного переменного  $x$  имеет при  $x=a$  экстремум. Геометрически это означает, что если следовать вдоль прямой, изображенной на рис. 32 штрихами, то в точке  $M$  мы будем иметь экстремум. Но тогда, как известно из дифференциального исчисления функций одного переменного, производная в точке экстремума должна равняться нулю

$$\left[ \frac{d}{dx} f(x, b) \right] \Big|_{x=a} = 0.$$

Здесь в квадратных скобках стоит производная по  $x$  при зафиксированном значении  $y=b$ , т. е. это — частная производная по  $x$ .

Аналогично рассматривается случай зафиксированного  $x=a$  и изменяющегося  $y$ . Мы приходим к необходимым условиям экстремума функции двух переменных:

$$f'_x(a, b) = 0, \quad f'_y(a, b) = 0. \quad (28)$$

(Аналогичным рассуждением мы пользовались в § II.3 при рассмотрении метода наименьших квадратов.)

Как известно, для функции  $f(x)$  одного переменного необходимое условие  $f'(a) = 0$  экстремума является «почти достаточным»: например, если  $f''(a) \neq 0$ , то в точке  $x=a$  обязательно будет экстремум — максимум при  $f''(a) < 0$ , минимум при  $f''(a) > 0$ . Можно было бы ожидать, что и для функции двух переменных при выполнении условия (28) экстремум в точке  $(a; b)$  обязательно будет, если в ней частные производные второго порядка отличны от нуля. Но это не так: достаточное условие оказывается более сложным.

Рассмотрим сначала примеры. Пусть

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Условие (28) дает  $2x = 0$ ,  $2y = 0$ , т. е. точкой, «подозреваемой» на экстремум, служит начало координат. И в самом деле, здесь в начале координат будет минимум, так как там  $z = 0$ , а в остальных точках  $z > 0$ . Что касается частных производных второго порядка, то в данном примере они постоянны, причем  $f''_{xx} = 2$ ,  $f''_{xy} = 0$ ,  $f''_{yy} = 2$ . Подобным образом легко проверить, что функция

$$z = Ax^2 + Cy^2 \quad (29)$$

имеет при  $A > 0$ ,  $C > 0$  в начале координат минимум, а при  $A < 0$ ,  $C < 0$  — максимум.

Совершенно новая картина будет, если в выражении (29)  $A$  и  $C$  разных знаков, например, если рассматривается функция

$$z = x^2 - y^2.$$

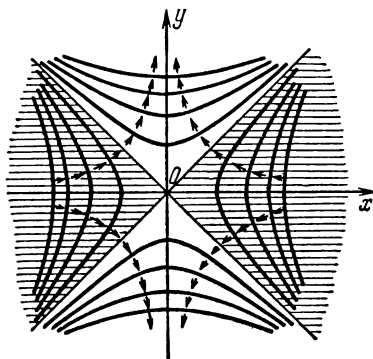


Рис. 33.

Соответствующие линии уровня показаны на рис. 33, причем часть плоскости, где  $z > 0$ , на рисунке заштрихована; маленькие стрелочки указывают направление понижения уровня, т. е. для географической карты — направление стока воды. При  $y = 0$  получаем  $z = x^2$ , т. е. от начала координат вдоль оси  $x$  функция в обе стороны возрастает, а в самом начале имеет минимум. Если же  $x = 0$ , то  $z = -y^2$ , т. е. вдоль оси  $y$  функция в обе стороны убывает, а в самом начале имеет максимум. Если рассмотреть другие прямые, проходящие через начало координат, то вдоль одних из них функция имеет в начале

максимум, а вдоль других — минимум. Такой случай называется *минимакс*, и здесь экстремума в начале координат не будет, хотя необходимые условия (28) выполняются и частные производные второго порядка не все равны нулю. В географии минимакс — это *седловина*, которая наблюдается, например, в точке перевала через горный хребет; другой пример — это просто седло. Так, на седло, отвечающее рис. 33, можно сесть, свесив ноги вдоль оси  $y$  и глядя вдоль оси  $x$ ; при этом спереди и сзади, вдоль оси  $x$ , седло поднимается.

Аналогичный минимакс имеет место для функции  $z = xy$  в начале координат; соответствующая картина линий уровня изображена на рис. 26. (Где на рис. 26  $z > 0$  и где  $z < 0$ ?)

Рассмотрим теперь общий случай. Если выполнены необходимые условия (28), то формула (27) приобретает вид

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a, b)(y-b)^2]. \quad (30)$$

Конечно, при выводе этой формулы мы пренебрегаем членами третьего порядка малости, но при исследовании экстремума нужно находиться вблизи значений  $x = a$ ,  $y = b$ , а там эти члены менее существенны, чем выписанные члены второго порядка малости. Обозначим для краткости

$$f''_{xx}(a, b) = A, \quad f''_{xy}(a, b) = B, \quad f''_{yy}(a, b) = C, \\ x - a = \xi, \quad y - b = \eta.$$

Тогда формула (30) показывает, что все зависит от поведения *квадратичной формы* (т. е. однородного многочлена второй степени)  $P(\xi, \eta) = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$ , так как приближенно, вблизи значений  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{2} P(\xi, \eta)$ . Если она положительна при всех  $\xi, \eta$  (например, имеет вид  $\xi^2 + \eta^2$ ), то  $f(x, y) > f(a, b)$  вблизи точки  $(a; b)$  и тем самым в этой точке функция  $f$  имеет минимум. Если эта форма отрицательна, то функция  $f$  в точке  $(a; b)$  имеет максимум. Если же эта форма может принимать значения обоих знаков (например, имеет вид  $\xi^2 - \eta^2$ ), то в точке  $(a; b)$  будет минимакс, т. е. экстремума не будет.

Как же узнать по коэффициентам  $A, B, C$ , какой из этих случаев имеет место? Для этого напомним

$$P(\xi, \eta) = \eta^2 \left[ A \left( \frac{\xi}{\eta} \right)^2 + 2B \frac{\xi}{\eta} + C \right] = \eta^2 (At^2 + 2Bt + C), \quad (31)$$

где через  $t$  мы обозначили  $\xi/\eta$ . Из элементарной математики известно, что если дискриминант

$$B^2 - AC > 0, \quad (32)$$

то многочлен, стоящий в скобках имеет два вещественных нуля, при переходе через которые он меняет знак. Значит, это — случай минимакса. Если же

$$B^2 - AC < 0, \quad (33)$$

то указанный многочлен имеет мнимые нули и потому знака не меняет (многочлен может изменить знак, только пройдя через нуль). Значит, это — случай экстремума. Чтобы узнать, какой именно знак имеет правая часть (31), положим  $t = 0$ . Мы видим, что если дополнительно к (33) будет  $C > 0$ , то правая часть (31) положительна при всех  $t$  и потому в силу предыдущего абзаца функция  $f$  имеет в точке  $(a; b)$  минимум. Если же дополнительно к (33) будет  $C < 0$ , то функция  $f$  имеет максимум. (Проверьте выполнение всех этих условий на разобранных выше примерах.)

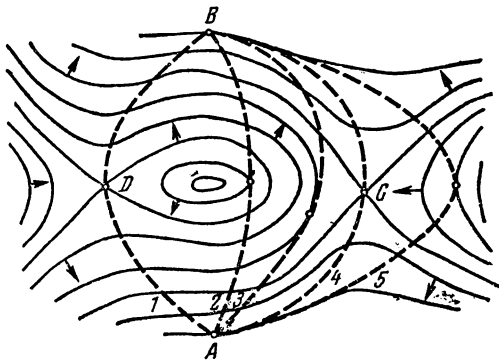


Рис. 34.

Точки минимакса имеют большое значение при решении важного класса задач, который мы продемонстрируем на наглядном примере. Пусть в холмистой местности, линии уровня которой показаны на рис. 34, расположены две деревни A и B, и пусть требуется соединить их дорогой. Это можно сделать многими способами, и несколько вариантов показано на рис. 34 пунктиром. (Там же в нескольких точках указано направление стока воды, чтобы наглядней представить рельеф.) Следуя по любой дороге  $(l)$  из A в B, нам приходится сначала набирать высоту до точки, показанной на рис. 34, после чего начинается спуск. Если такой набор высоты вызывает трудности, то естественно потребовать, чтобы он был минимально возможным. Для более точной формулировки этого требования обозначим через  $z(M)$  высоту местности в любой точке M плана. Тогда упомянутый набор высоты вдоль линии  $(l)$  равен  $\max_{M \text{ на } (l)} z(M) - z(A)$ ,

где под  $\max_{M \text{ на } (l)} z(M)$  понимается наибольшее значение высоты  $z$  вдоль линии  $(l)$ . Но значение  $z(A)$  для всех сравниваемых линий одинаково; таким образом, требуется среди всех линий  $(l)$ , соединяющих A с B, найти линию, вдоль которой  $\max_{M \text{ на } (l)} z(M)$  минимален, т. е. линию, реализующую  $\min_{(l)} \max_{M \text{ на } (l)} z(M)$ . Ясно, что искомая линия должна пройти че-

рез точку перевала C, которая как раз и является точкой минимакса

для функции  $z(M)$ . Правда, имеется еще одна точка перевала  $D$ , но она лежит выше и поэтому менее выгодна. (Проверьте, что если линии уровня на рис. 34 проведены через 100 м, то промежуточный набор высоты вдоль изображенных дорог соответственно равен 500, 600, 300, 200 и 400 м.)

На различии между случаями (32) и (33) основана классификация точек произвольной поверхности в пространстве. Пусть задана некоторая поверхность  $(S)$  и  $N$ —любая ее точка. Выберем систему координат так, чтобы оси  $x$  и  $y$  были параллельны касательной плоскости  $(P)$  к  $(S)$  в точке  $N$ . Тогда вблизи  $N$  поверхность  $(S)$  можно представить уравнением  $z=f(x, y)$ , причем в точке  $N$  в силу выбора осей выполняются равенства (28), где  $a, b$ —значения координат  $x, y$  в точке  $N$ , так что  $N=(a; b; f(a, b))$ . При этом в зависимости от того, выполняется ли неравенство (33) или (32), точка  $N$  называется *эллиптической* или *гиперболической точкой* поверхности  $(S)$ . В первом случае поверхность  $(S)$  вблизи  $N$  выпукла и расположена по одну сторону от  $(P)$ . Во втором случае поверхность  $(S)$  вблизи  $N$  имеет седлообразный характер и расположена по обе стороны от  $(P)$ ; касательная плоскость  $(P)$  пересекает  $(S)$  по двум линиям, пересекающимся в точке  $N$ .

Можно доказать, что условия (32) и (33) не нарушаются при повороте осей координат в пространстве. Поэтому если уравнение поверхности  $(S)$  задано в виде  $z=f(x, y)$ , то для выяснения типа какой-нибудь точки этой поверхности нет надобности выбирать новые оси координат, чтобы удовлетворить условию (28). Надо просто проверить выполнение условия (32) или (33) в исходной системе координат  $x, y, z$ .

Бывают поверхности, например сфера, эллипсоид, параболоид вращения и т. д., у которых все точки эллиптические; такие поверхности выпуклы в целом. Бывают поверхности, например поверхность с уравнением  $z=x^2-y^2$ , отвечающая рис. 33, у которых все точки гиперболические. Однако бывают и поверхности, обладающие точками обоих типов; такой является, например, поверхность *тора*, т. е. бублика идеальной формы. В этом случае куски, заполненные эллиптическими точками, от кусков, заполненных гиперболическими точками, отделяются линиями, в точках которых  $B^2-AC=0$ ; такие точки называются *параболическими*. На торе это точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна оси тора, они заполняют две окружности. (Подумайте, где находятся линии параболических точек на поверхности Вашего тела.) Впрочем бывают и поверхности, например цилиндрические или конические, сплошь заполненные параболическими точками.

Ясно, что тип точки поверхности не меняется при любом перемещении этой поверхности в пространстве, т. е. указанная классификация точек поверхности является геометрически инвариантной. В отличие от этого понятие самой высокой или самой низкой точки

поверхности, существенное при изучении экстремумов, не является инвариантно связанным с самой поверхностью, так как при повороте поверхности ее самая высокая точка перестает быть таковой.

Аналогичным образом точки графика  $(L)$  функции  $y = \varphi(x)$ , отвечающие ее экстремальным значениям, не связаны с линией инвариантно (в отличие, например, от точек перегиба этой линии). Не инвариантны в этом смысле также точки линии с уравнением  $f(x, y) = 0$ , в которых  $\frac{dy}{dx} = 0$  или  $\frac{dy}{dx} = \infty$ .

Наши рассуждения можно применить к исследованию строения линии  $(L)$  с уравнением  $f(x, y) = 0$  на плоскости  $x, y$  в окрестности некоторой точки  $N(a; b)$  этой линии. Для этого полезно рассмотреть вспомогательную поверхность  $(S)$  с уравнением  $z = f(x, y)$ , так что  $(L)$  получается в результате пересечения  $(S)$  с плоскостью  $(P): z = 0$ . При этом линия  $(L)$  оказывается включенной в семейство линий с уравнением  $f(x, y) = C$  при различных значениях  $C$ , т. е. линий уровня функции  $f$ , получающихся в результате пересечения  $(S)$  плоскостями  $z = C$ , параллельными  $(P)$ . Если  $f'_x(a, b) \neq 0$  или  $f'_y(a, b) \neq 0$  — тогда  $N$  называется *обыкновенной точкой* линии  $(L)$ , — то  $(P)$  не касается  $(S)$  в точке  $(a; b; 0)$ , а потому  $(L)$  вблизи  $N$  имеет вид гладкой дуги. Если же  $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ , то  $N$  называется *особой точкой* линии  $(L)$  и тогда  $(L)$  состоит из точек, общих для поверхности  $(S)$  и плоскости  $(P)$ , касательной к  $(S)$ . Из предыдущего вытекает, что если выполнено неравенство (33), то  $N$  является *изолированной точкой* линии  $(L)$ , т. е. в некоторой окрестности  $N$  нет других точек линии  $(L)$ . Если выполнено неравенство (32), то  $N$  является *точкой самопересечения* линии  $(L)$ , т. е. в некоторой окрестности  $N$  линия  $(L)$  состоит из двух дуг, пересекающихся в  $N$ . Если же  $B^2 - AC = 0$ , то строение линии  $(L)$  в окрестности  $N$  может быть существенно сложнее. (В качестве примера постройте с помощью перехода к полярным координатам линии  $x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2$  и  $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2$ ; чем является начало координат для каждой из них?)

#### Упражнение

Исследуйте на экстремум функции:

- а)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y - 1$ ;      б)  $f(x, y) = x^2 + 3xy - 2y + 2$ ;  
в)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2z$ .

### § 7. Кратные интегралы

Начнем с примера. Рассмотрим тело  $(\Omega)$ , плотность  $\rho$  г/см<sup>3</sup> которого известна, но неоднородна, т. е. в разных точках различна, и предположим, что нам требуется подсчитать массу  $m$  этого тела. Аналогичная задача для линейного распределения массы, как известно, решается с помощью обычных интегралов: если масса распределена



вдоль отрезка  $a, b$  с линейной плотностью  $\alpha$  г/см, то

$$m = \int_a^b \alpha(x) dx.$$

Пространственный случай исследуется совершенно аналогично линейному. Для этого разобьем мысленно  $(\Omega)$  на объемчики  $(\Delta\Omega_1), (\Delta\Omega_2), \dots, (\Delta\Omega_n)$  и выберем в каждом по одной точке, соответственно  $M_1, M_2, \dots, M_n$  (рис. 35, где картину надо представлять себе пространственной; нумерация объемчиков производится в произвольном порядке). Если объемчики достаточно малые, то в каждом из них плотность можно считать постоянной. Тогда массу  $m_{(\Delta\Omega_1)}$  первого объемчика можно подсчитать как произведение плотности на численное значение объема, т. е.  $\rho(M_1) \Delta\Omega_1$ , масса второго объемчика находится аналогично и т. д. В целом получаем

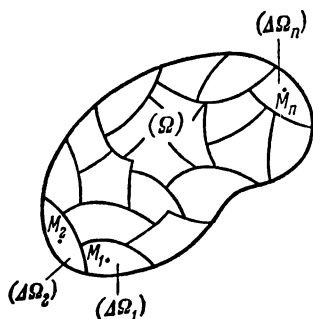


Рис. 35.

$$m_{(\Omega)} \approx \rho(M_1) \Delta\Omega_1 + \rho(M_2) \Delta\Omega_2 + \dots + \rho(M_n) \Delta\Omega_n = \sum_{k=1}^n \rho(M_k) \Delta\Omega_k,$$

где под  $\Delta\Omega_k$  понимается численное значение объема  $(\Delta\Omega_k)$  (в  $\text{см}^3$ ).

Это равенство — приближенное, так как плотность внутри объемчиков все же не постоянная; однако оно тем точнее, чем мельче разбиение, и в пределе, при безграничном измельчении рассматриваемого разбиения, получаем точное равенство

$$m_{(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \rho(M_k) \Delta\Omega_k. \quad (34)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно заключить, что если в теле  $(\Omega)$  распределен заряд с плотностью  $\sigma$ , то сам заряд  $q$  можно подсчитать по формуле

$$q_{(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sigma(M_k) \Delta\Omega_k \quad (35)$$

при таком же смысле обозначений.

Единообразие формул (34) и (35) дает основание для общего определения понятия объемного интеграла.

Пусть задана конечная часть пространства или, как говорят иначе, конечная область  $(\Omega)$  и на ней (т. е. в каждой ее точке  $M$ ) задана функция  $u = f(M)$ , принимающая конечные значения. (В нашем первом примере областью служило тело  $(\Omega)$ , а функцией — его

плотность, которая в каждой точке принимает свое значение.) Тогда для составления интегральной суммы область  $(\Omega)$  разбивается на объемчики  $(\Delta\Omega_1)$ ,  $(\Delta\Omega_2)$ , ...,  $(\Delta\Omega_n)$  и в каждом произвольно выбирается точка соответственно  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Затем составляется сумма

$$\sum_{k=1}^n u_k \Delta\Omega_k = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k, \quad (36)$$

где под  $\Delta\Omega_k$  понимается численное значение объемчика  $(\Delta\Omega_k)$ . Эта *интегральная сумма* обладает высокой степенью произвола: ее значение зависит как от способа разбиения области  $(\Omega)$  на объемчики  $(\Delta\Omega_k)$ , так и от выбора точек  $M_k$  внутри каждого объемчика. Однако при измельчении разбиения области  $(\Omega)$  произвол в составлении суммы почти не влияет на значение этой суммы и в пределе совсем не сказывается. Предел интегральной суммы при бесконечном измельчении разбиения области  $(\Omega)$  называется *интегралом (объемным)* от функции  $f$  по области  $(\Omega)$ :

$$\int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \int_{(\Omega)} f(M) \, d\Omega = \lim \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k. \quad (37)$$

Таким образом, формулы (34) и (35) можно записать так

$$m_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \rho \, d\Omega, \quad q_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \sigma \, d\Omega.$$

Произведение  $\rho \, d\Omega$ , отвечающее бесконечно малому объему («элементу объема»)  $(d\Omega)$ , называется *элементом (дифференциалом) массы* и обозначается

$$dm = \rho \, d\Omega, \quad (38)$$

где  $\rho$  — это плотность в какой-либо из точек  $(d\Omega)$ . При составлении этого выражения можно отбрасывать малые высшего порядка (получающиеся из-за того, что плотность даже в малом объеме переменна), так что оно оказывается прямо пропорциональным объему  $d\Omega$ . Суммируя все элементы (38) по объему  $(\Omega)$ , получаем полную массу

$$m_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} dm = \int_{(\Omega)} \rho \, d\Omega.$$

Основные свойства объемных интегралов аналогичны соответствующим свойствам «простых» интегралов.

Интеграл от суммы равен сумме интегралов, т. е.

$$\int_{(\Omega)} (u_1 \pm u_2) \, d\Omega = \int_{(\Omega)} u_1 \, d\Omega \pm \int_{(\Omega)} u_2 \, d\Omega.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е.

$$\int_{(\Omega)} Cu \, d\Omega = C \int_{(\Omega)} u \, d\Omega \quad (C = \text{const}).$$

При любом разбиении области  $(\Omega)$  на части, скажем,  $(\Omega_1)$  и  $(\Omega_2)$ , будет

$$\int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \int_{(\Omega_1)} u \, d\Omega + \int_{(\Omega_2)} u \, d\Omega.$$

Интеграл от единицы равен объему области интегрирования, т. е.

$$\int_{(\Omega)} d\Omega = \Omega.$$

Если рассматриваемые переменные размерны, то размерность интеграла равна произведению размерности интегрируемой величины на размерность объема:

$$\left[ \int_{(\Omega)} u \, d\Omega \right] = [u] \cdot [\Omega],$$

где квадратными скобками обозначена размерность величины.

Пример:  $[\rho] = \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$ ;  $\left[ \int \rho \, d\Omega \right] = \text{г} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{см}^3 = \text{г} = [m]$ .

*Среднее значение* («среднее интегральное», «среднее арифметическое») функции  $u(M)$  по области  $(\Omega)$  вводится как постоянная  $\bar{u}$ , интеграл от которой по области  $(\Omega)$  равен интегралу от функции  $u$  по этой области. Таким образом,

$$\int_{(\Omega)} \bar{u} \, d\Omega = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega,$$

откуда

$$\int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \bar{u} \Omega \quad \text{и} \quad \bar{u} = \frac{1}{\Omega} \int_{(\Omega)} u \, d\Omega.$$

Как и для «простых» интегралов, выводится, что  $\min_{(\Omega)} u \leq \bar{u} \leq \max_{(\Omega)} u$ .

В начале этого параграфа мы рассматривали понятие плотности как непосредственно ясное и выразили через плотность массу с помощью интегрирования. Обратно, можно исходить из массы и выразить через нее плотность. Для этого надо составить отношение

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m_{(\Delta\Omega)}}{\Delta\Omega}$$

массы, отвечающей малой области  $(\Delta\Omega)$ , к объему этой области. Это отношение есть средняя плотность в области  $(\Delta\Omega)$ ; чтобы получить плотность в некоторой точке  $M$ , надо заставить  $(\Delta\Omega)$  безгранично

стягиваться к этой точке и взять предел указанного отношения

$$\rho(M) = \lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \frac{m(\Delta\Omega)}{\Delta\Omega} = \frac{dm}{d\Omega}. \quad (39)$$

Этот процесс аналогичен дифференцированию.

Если учитывать дискретное, молекулярное строение вещества, то в формуле (39) объем  $(\Delta\Omega)$  нельзя даже мысленно безгранично стягивать в точку. Взамен этой формулы надо написать

$$\rho(M) = \frac{m(\Delta\Omega)}{\Delta\Omega},$$

где  $(\Delta\Omega)$  — «практически бесконечно малая область», содержащая точку  $M$ , т. е. область, достаточно малая по сравнению с размерами макроскопических тел и в то же время достаточно большая по сравнению с молекулярными размерами. Здесь мы как бы переходим от дискретной картины материального тела к его непрерывной модели, плотность которой получается в результате осреднения, т. е. вычисления средней плотности исходной картины по объемам указанных «практически бесконечно малых» размеров.

Впредь при рассмотрении сплошной среды мы будем, отвлекаясь от дискретного строения материи, считать, что такой переход к непрерывной модели среды и ее плотности уже совершен.

Может оказаться, что одно из измерений части пространства, занятой массой или зарядом, значительно меньше двух других измерений (например, толщина значительно меньше длины и ширины); тогда можно принять, что масса или заряд распределены по поверхности. Аналогично, если два из измерений этой части значительно меньше третьего, то можно принять, что масса или заряд распределены по линии. В этом случае формулы (34) и (35) останутся в силе, если под плотностью понимать поверхностную (т. е. отнесенную к единице площади) или линейную (т. е. отнесенную к единице длины) плотность, а под  $\Delta\Omega_k$  понимать соответственно площадь или длину частички  $(\Delta\Omega_k)$ . В общем случае говорят, что  $\Delta\Omega_k$  есть *мера* области  $(\Delta\Omega_k)$ , понимая под этим объем, площадь или длину в зависимости от того, рассматриваются объемные, поверхностные или линейные области.

Определение интеграла по поверхности (плоской или кривой), а также интеграла по линии дается совершенно аналогично интегралу по объему, т. е. по формуле (37); конечно, при этом взамен объема частички надо взять ее площадь или длину. Объемные и поверхностные интегралы называются *кратными* по причинам, которые будут ясны позже, причем поверхностные интегралы называются *двойными*, а объемные — *тройными*. Интеграл по линии называется *криволинейным* интегралом. Свойства у всех этих интегралов также совершенно аналогичные; они будут широко применяться в нашем курсе при изложении теории векторного поля (гл. X и XI).

Кратные интегралы вычисляются с помощью обычных интегралов. Рассмотрим, например, двойной интеграл

$$I = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega,$$

распространенный по области  $(\Omega)$  в плоскости. Чтобы перейти к обычным интегралам, надо на этой плоскости ввести координаты, например декартовы координаты  $x, y$  (рис. 36). Тогда функцию  $u$  можно рассматривать как функцию от  $x, y$ , т. е. получим

$$I = \int_{(\Omega)} u(x, y) \, d\Omega.$$

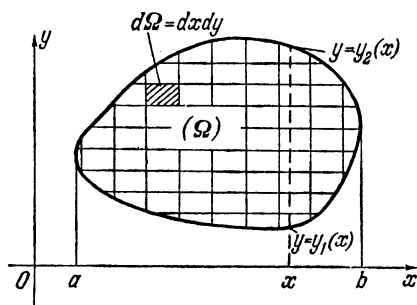


Рис. 36.

Так как при определении интеграла разбиение области  $(\Omega)$  можно выбирать произвольно, то возьмем разбиение прямыми  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , которое и отвечает интегрированию в декартовых координатах. Тогда все частички  $(\Delta\Omega)$  будут представлять собой прямоугольники со сторонами  $dx$  и  $dy$ , так что  $d\Omega = dx \, dy$ , т. е.

$$I = \iint_{(\Omega)} u(x, y) \, dx \, dy.$$

Здесь написаны два знака интеграла, так как суммирование естественно проводить в два этапа: например, сначала провести суммирование по всем прямоугольникам из какого-либо столбца, отвечающего некоторому фиксированному  $x$ , а затем просуммировать результаты по всем  $x$ . Первое суммирование даст

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} u(x, y) \, dy = \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} u(x, y) \, dy \right) dx,$$

где  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  (см. рис. 36) — координаты нижней и верхней точек области  $(\Omega)$  при данном  $x$ . После второго суммирования получим окончательно

$$I = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} u(x, y) \, dy \right) dx$$

или, как чаще пишут,

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} u(x, y) \, dy. \quad (40)$$

Итак, вычисление двойного интеграла сводится к двукратному обычному интегрированию.

Сначала надо вычислить *внутренний* интеграл

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} u(x, y) dy.$$

После интегрирования и подстановки пределов получится результат, вообще говоря, зависящий от  $x$  (так как  $x$  в процессе этого интегрирования считается постоянным), т. е. получится некоторая функция  $f(x)$ . Ее надо проинтегрировать по  $x$ , что даст окончательный результат:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Можно было производить интегрирование в другом порядке: первое (*внутреннее*) по  $x$ , а второе (*внешнее*) по  $y$ . Результат получится тот же, хотя при практическом вычислении один способ может оказаться более трудным, а другой — более легким.

Наиболее просто расставлять пределы интегрирования, если область ( $\Omega$ ) представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат: тогда не только пределы внешнего интеграла, но и пределы внутреннего интеграла будут постоянными. Если же, кроме того, подынтегральная функция представляет собой произведение функции, зависящей только от  $x$ , на функцию, зависящую только от  $y$ , то и весь двойной интеграл можно разложить в произведение двух обычных («однократных») интегралов

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_c^d [f(x) \varphi(y)] dy = \\ = \int_a^b f(x) dx \left( \int_c^d \varphi(y) dy \right) = \int_c^d \varphi(y) dy \cdot \int_a^b f(x) dx. \end{aligned} \quad (41)$$

Вычислим для примера массу плоской пластинки, изображенной на рис. 37, поверхностная плотность которой изменяется по закону

$$\sigma = \rho_0 (h + \alpha x + \beta y), \quad (42)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  — некоторые постоянные коэффициенты. Такой закон получится, если пластинка однородная, но снизу ограничена координатной плоскостью  $x$ ,  $y$ , а сверху — другой плоскостью с уравнением  $z = h + \alpha x + \beta y$ , скошенной относительно первой. Тогда поверхностная плотность в любой точке  $(x; y)$  получится в результате умножения плотности материала пластинки  $\rho_0$  на высоту  $z$  пластинки

в данной точке, т. е. мы приходим к формуле (42). (Заодно мы видим, что массу, распределенную по плоскости, можно получить просто в результате проектирования на эту плоскость массы, распределенной по объему.)

Согласно формуле (40) получим

$$m = \int_{(\Omega)} \sigma d\Omega = \iint_{(\Omega)} \sigma(x, y) dx dy = \int_0^a dx \int_0^b \rho_0 (h + \alpha x + \beta y) dy.$$

Внутреннее интегрирование производится по  $y$  при зафиксированных  $x$ , т. е. вдоль параллельных отрезков, показанных на рис. 37. Вычислим внутренний интеграл:

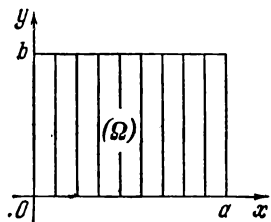


Рис. 37.

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^b \rho_0 (h + \alpha x + \beta y) dy = \\ &= \rho_0 \left[ (h + \alpha x) y + \frac{\beta y^2}{2} \right]_{y=0}^b = \\ &= \rho_0 \left[ (h + \alpha x) b + \frac{\beta b^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Теперь остается этот результат, зависящий от  $x$ , проинтегрировать по  $x$ :

$$\begin{aligned} m &= \int_0^a \tau(x) dx = \int_0^a \rho_0 \left[ (h + \alpha x) b + \frac{\beta b^2}{2} \right] dx = \\ &= \rho_0 \left( hbx + \alpha b \frac{x^2}{2} + \frac{\beta b^2}{2} x \right) \Big|_{x=0}^a = \rho_0 \left( abh + \frac{\alpha a^2 b}{2} + \frac{\beta ab^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Физический смысл проведенных вычислений состоит в том, что мы как бы проектируем пластинку на ось  $x$ , в результате чего получается масса, распределенная по линии, именно материальный отрезок с линейной плотностью

$$\tau(x) = \int_a^b \sigma(x, y) dy$$

(это — внутренний интеграл). При этом хорошо виден смысл линейной плотности: это — масса пластинки, приходящаяся на единицу длины, так что на интервал от  $x$  до  $x + dx$  приходится масса пластинки  $dm = \tau(x) dx$ . Интегрируя этот результат по отрезку оси  $x$ , получаем массу пластинки. (Проверьте найденное выражение для массы, произведя интегрирование в противоположном порядке — сначала по  $x$ , затем по  $y$ , а также разложив выражение (42) на три

слагаемых и применив к каждому из соответствующих интегралов формулу (41)).

Допустим теперь, что пластинка имеет треугольный вид, изображенный на рис. 38, а поверхностная плотность ее изменяется по

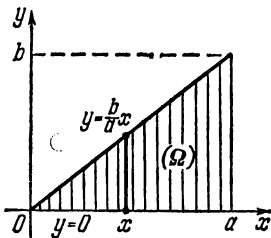


Рис. 38.

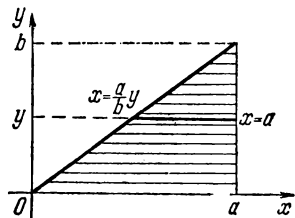


Рис. 39.

тому же закону (42). При этом внутреннее интегрирование производится при фиксированном  $x$  по  $y$  от  $y=0$  до  $y = bx/a$  (см. рис. 38). Поэтому вычисления идут так:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^a dx \int_0^{bx/a} \rho_0 (h + \alpha x + \beta y) dy = \\ &= \int_0^a \rho_0 \left( h \frac{b}{a} x + \alpha \frac{b}{a} x^2 + \beta \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{2} \right) dx = \rho_0 \left( \frac{ab}{2} h + \alpha \frac{a^2 b}{3} + \beta \frac{ab^2}{6} \right). \end{aligned}$$

Для контроля произведем интегрирование в другом порядке. Если внутреннее интегрирование проводить по  $x$  при фиксированном  $y$ , то пределами интегрирования будут служить (рис. 39)  $x = ay/b$  и  $x = a$ , откуда

$$\begin{aligned} m &= \int_0^b dy \int_{ay/b}^a \rho_0 (h + \alpha x + \beta y) dx = \\ &= \int_0^b \rho_0 \left[ h \left( a - \frac{a}{b} y \right) + \frac{\alpha}{2} \left( a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 \right) + \beta y \left( a - \frac{a}{b} y \right) \right] dy = \\ &= \rho_0 \left( abh - \frac{a}{b} \frac{b^2}{2} h + \frac{\alpha a^2}{2} b - \frac{\alpha a^2}{2b^2} \frac{b^3}{3} + \beta a \frac{b^2}{2} - \frac{\beta a}{b} \frac{b^3}{3} \right) = \\ &= \rho_0 \left( \frac{ab}{2} h + \frac{\alpha a^2 b}{3} + \frac{\beta ab^2}{6} \right). \end{aligned}$$

Получился тот же результат.

Аналогично вычисляются интегралы и другого вида. Всегда нужно выразить  $d\Omega$  через дифференциалы координат, расставить пределы в соответствии с этими координатами, а затем вычислять получающиеся интегралы по обычным правилам интегрального исчисления. При этом интегралы по площади получаются двукратными, а интегралы по объему — трехкратными, с тремя знаками интеграла.



Если после перехода к координатам подынтегральная функция окажется не зависящей от одной из координат, то интегрирование по этой координате выполняется тривиально, и мы сразу переходим от двойного интеграла к однократному, а от тройного — к двойному или даже к однократному. Например, площадь фигуры ( $\Omega$ ), изображенной на рис. 36, можно найти как двойной интеграл от единицы (см. свойства интеграла):

$$\Omega = \int_{(\Omega)} d\Omega = \iint_{(\Omega)} dx dy.$$

Для перехода к однократному интегралу расставим пределы

$$\Omega = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

Мы пришли к формуле очевидной, если вспомнить геометрический смысл определенного интеграла. Подобным образом при вычислении объема мы можем от тройного интеграла немедленно перейти к двойному. Мы, в сущности, это и делали, когда вычисляли массу пластинки.

В качестве примера приложения двойных интегралов вычислим интеграл

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

о котором говорилось в § III.2. Для этого надо рассмотреть вспомогательный интеграл

$$I = \int_{(\Omega)} e^{-x^2-y^2} d\Omega,$$

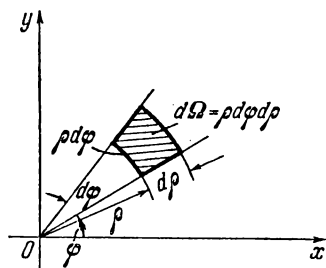


Рис. 40.

где ( $\Omega$ ) — полная плоскость  $x, y$ . Расставляя пределы в координатах  $x, y$ , когда  $d\Omega = dx dy$ , получим, учитывая формулу (41),

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = K^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, тот же интеграл  $I$  можно вычислить с помощью полярных координат  $\rho, \varphi$ . Тогда плоскость ( $\Omega$ ) более естественно разбивать на частички с помощью окружностей  $\rho = \text{const}$  и лучей  $\varphi = \text{const}$ . Площадь полученных частичек (на рис. 40 изображена одна из них) равна, как это видно из рис. 40,  $d\Omega = \rho d\varphi d\rho$ . Так

как  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , то получаем (продумайте расстановку пределов)

$$I = \iint_{(\Omega)} e^{-\rho^2} \rho \, d\varphi \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = \\ = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{e^{-\rho^2}}{-2} \Big|_0^{\infty} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

Приравнивая найденные результаты, получаем, что

$$K = \sqrt{\pi}, \quad \text{т. е.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

### Упражнения

1. Вычислите интеграл от функции  $x \sin xy$  по прямоугольнику  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ .
2. Вычислите среднее значение функции  $u = e^{xy}$  в квадрате  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

У к а з а н и е. Для второго интегрирования проведите разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора.

$$3. \text{ Вычислите интеграл } I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{y^2} dy.$$

У к а з а н и е. Измените порядок интегрирования.

## § 8. Многомерное пространство и число степеней свободы

Подобно тому как для функции двух переменных мы в § 2 рассматривали «плоскость аргументов», так и для функции трех переменных можно рассматривать «пространство аргументов». Эти понятия очень наглядны, поэтому желательно сохранить представление о пространстве аргументов и для случая функций любого числа независимых переменных, даже большего трех. Это делается следующим образом. Пусть, например, рассматривается функция четырех переменных  $u = f(x, y, z, t)$ . Тогда условно говорят, что каждый набор значений  $x, y, z, t$  определяет «точку» в «четырехмерном пространстве аргументов»  $x, y, z, t$ . Такой точке и такому пространству не дается наглядного геометрического истолкования. Строго говоря, точка — это не что иное, как набор значений  $x, y, z, t$ , а пространство — совокупность всевозможных таких наборов. Так, набор  $(-8; 0; 2; 1,3)$  — это одна такая точка, набор  $(0; 0; 0; 0)$  — другая точка («начало координат») и т. п. Теперь можно говорить, что функция  $f$  определена во всем четырехмерном пространстве  $x, y, z, t$  или в его части («области»).

Для функции  $z = f(x, y)$  двух переменных «пространство аргументов» представляет собой плоскость  $x, y$ , а пространство аргументов и функции, в котором расположен график функции, — обычное

трехмерное пространство  $x, y, z$ ; в этом случае графиком служит двумерная поверхность в трехмерном пространстве. Подобно этому «график» функции  $u=f(x, y, z, t)$  уже требует пятимерного пространства аргументов и функции  $x, y, z, t, u$ : для нахождения точек этого графика надо придавать  $x, y, z, t$  произвольные значения и находить соответствующие значения  $u$ . Например, проверьте, что график функции  $u=xz-2y^2t$  проходит через точки  $(1; 1; 2; 0; 2)$ ,  $(-1; 2; 0; -2; 16)$  и т. д. Таким образом, зависимость  $u=f(x, y, z, t)$  определяет четырехмерную поверхность в пятимерном пространстве.

С этой терминологией непосредственно связано понятие числа *степеней свободы*. Известно, что положение точки в (обычном) пространстве можно охарактеризовать декартовыми координатами  $x, y, z$ . Имеются и другие системы координат, но для всех них общим является то, что положение точки в пространстве определяется тремя координатами (тогда как положение точки на плоскости определяется двумя координатами, а на линии — одной). Этот факт выражают словами: при выборе точки в физическом пространстве или, что то же, при движении точки в пространстве имеется три степени свободы. При выборе точки на плоскости, а также на любой поверхности, имеется две степени свободы, а на линии — одна. Другими словами, пространство трехмерно, тогда как поверхности двумерны, а линии одномерны.

В общем случае понятие о числе степеней свободы вводится так. Пусть имеется некоторая совокупность объектов (в предыдущем примере — совокупность всех точек в пространстве), каждый из которых может быть охарактеризован указанием численных значений некоторых непрерывных параметров (в предыдущем примере — координат). Пусть эти параметры являются:

1) независимыми, т. е. могут принимать произвольные значения: например, если зафиксировать все параметры, кроме одного, то этот один можно еще произвольно менять, быть может, в некоторых пределах;

2) существенными, т. е. при любом изменении параметров рассматриваемый объект фактически меняется. Тогда, если таких параметров  $k$ , то говорят, что при выборе объекта из рассматриваемой совокупности имеется  $k$  степеней свободы, а сама совокупность называется (обобщенным)  *$k$ -мерным пространством* или  *$k$ -мерным многообразием*. Сами параметры называются (обобщенными) *координатами* в этом пространстве; как и в случае обычных координат в обычном пространстве, их можно выбирать различными способами, как это окажется удобнее в том или ином исследовании. Таким образом, многомерное пространство получает конкретное истолкование.

Например, в физике систематически рассматривается совокупность «событий», каждое из которых характеризуется ответами на вопросы

«где»? и «когда»? На первый вопрос можно ответить указанием декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а на второй — указанием момента времени  $t$ . Эти параметры независимы (их можно произвольно менять) и существенны (при их изменении событие заменяется на другое событие). Таким образом, пространство событий — четырехмерное, и обобщенными координатами в нем могут служить  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ .

В качестве другого примера рассмотрим последовательность (систему) зубчатых колес, из которых каждое последующее зацеплено с предыдущим. Здесь имеется всего лишь одна степень свободы, причем за обобщенную координату можно принять угол поворота первого колеса, так как задание этого угла полностью определяет положение и остальных колес. (Сколько степеней свободы было бы, если бы колеса не были зацеплены?)

Подсчитаем, сколько степеней свободы имеет отрезок данной длины  $l$  при движении на плоскости. Каждый такой отрезок полностью определяется координатами  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$  его концов; эти координаты можно принять за параметры, определяющие положение отрезка. Эти параметры, очевидно, существенные, однако они не являются независимыми, а связаны соотношением

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l$$

(почему?). Таким образом, только три параметра можно считать независимыми, а четвертый выражается через них из этого соотношения. Значит, отрезок данной длины при движении на плоскости имеет три степени свободы.

В общем случае, если параметров  $n$  и они существенные, но связаны  $m$  независимыми уравнениями (т. е. такими уравнениями, из которых ни одно не вытекает из остальных), то  $n - m$  параметров можно принять за независимые, а остальные  $m$  будут через них выражаться, т. е. будет  $n - m$  степеней свободы.

Подсчитаем, наконец, число степеней свободы при выборе бесконечной прямой на плоскости. Можно рассуждать так: выберем произвольно две точки  $A$  и  $B$  на плоскости (каждая имеет по две координаты) и проведем через них прямую  $P$ , которая будет определяться, таким образом, четырьмя параметрами. Так как эти параметры независимые, то, казалось бы, получается четыре степени свободы. Однако такое рассуждение неверно, так как при изменении этих параметров (координат) точки  $A$  и  $B$  будут, правда, меняться, но прямая  $P$  может при этом оставаться неизменной; значит, требование существенности параметров не выполняется. Так как прямая  $P$  не меняется, если точка  $A$  скользит по ней (одна степень свободы) или точка  $B$  скользит по ней (еще одна степень свободы), то при нашем подсчете получилось две лишние степени свободы и на самом деле число степеней свободы равно  $4 - 2 = 2$ . За независимые и существенные параметры можно взять, например, коэффициенты  $k$  и  $b$  в уравнении  $y = kx + b$ ; правда, прямые, параллельные оси  $y$ , не

описываются такими уравнениями, но эти особые случаи не могут сказаться при подсчете числа степеней свободы.

Число степеней свободы бесконечной прямой в плоскости оказалось равным числу степеней свободы точки на плоскости. Таким образом, прямые на плоскости можно сопоставить точкам на этой или другой плоскости. Наиболее удобно это сделать так: последнее уравнение разделить на  $b$  и записать его в виде

$$\alpha x + \beta y = 1, \quad (43)$$

после чего прямой с этим уравнением сопоставить точку с координатами  $(\alpha; \beta)$ . При этом естественно рассмотреть две плоскости: с координатами  $x, y$  и с координатами  $\alpha, \beta$  (рис. 41). Так, прямой

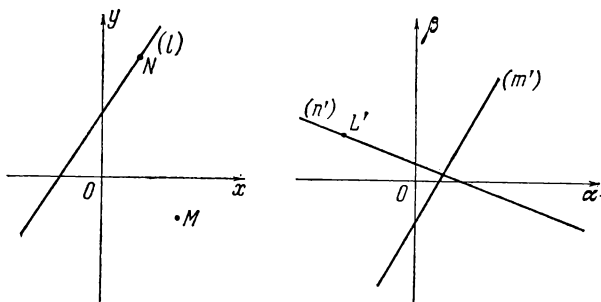


Рис. 41.

$(l) y = 2x + 1$ , т. е.  $-2x + y = 1$ , отвечает точка  $L'$  плоскости  $\alpha, \beta$  с координатами  $(-2; 1)$ . Эта же формула (43) сопоставляет точке  $(x; y)$  первой плоскости прямую с уравнением (43) второй плоскости; например, точке  $M(2; -1)$  отвечает прямая  $(m')$  с уравнением  $2\alpha - \beta = 1$ , точке  $N(1; 3)$  — прямая  $(n')$  с уравнением  $\alpha + 3\beta = 1$  (см. рис. 41). Нетрудно доказать и в общем виде, что если в первой плоскости некоторая прямая  $(l)$  проходит через какую-то точку  $N$ , то во второй плоскости прямая  $(n')$ , соответствующая точке  $N$ , пройдет через точку  $L'$ , отвечающую прямой  $(l)$ . Тем самым из любого утверждения, относящегося к произвольной комбинации точек и прямых на плоскости, вытекает «двойственное» утверждение, в котором прямые заменены точками, а точки — прямыми. Имеется специальная область геометрии — так называемая «проективная» геометрия, в которой детально изучаются подобные утверждения, а также и соотношение двойственности. Следует заметить, что уравнения прямых, проходящих через начало координат, нельзя записать в виде (43), т. е. таким прямым не соответствуют при указанном способе соответствия никакие точки, а самому началу координат не соответствует никакая прямая. Поэтому в проективной геометрии вводятся «беско-

нечно удаленные точки» и «бесконечно удаленная прямая» плоскости, после чего указанное соответствие уже не имеет исключений. Мы не будем здесь останавливаться на этом.

### Упражнение

Сколько степеней свободы имеет при движении в пространстве:

- отрезок данной длины?
- треугольник с заданными сторонами, т. е. «жесткий» треугольник?
- абсолютно твердое тело с закрепленной точкой?
- свободное абсолютно твердое тело?

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1

- $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ , поэтому  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1, y=1} = 2$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=2, y=0.5} = 1$ .
- $\frac{\partial z}{\partial x} = -2xz - (x^2 + y^2)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2ye^{-(x^2 + y^2)}$ .
- $\frac{\partial z}{\partial x} = e^y + ye^x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y + e^x$ .
- $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y$ .
- $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy)$ .
- $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .
- $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} - 2y \frac{dy}{dt}$ . Замечая, что  $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$ ,  $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}$ , находим  $\frac{dz}{dt} = 2 \left( t + \frac{1}{t} \right) \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) - 2 \left( t + \sqrt{t} \right) \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) = - \left( \frac{2}{t^3} + 3\sqrt{t} + 1 \right)$ .
- $\frac{dz}{dt} = e^{x-y} \cdot (\cos t - 2t)$ .
- $\frac{dz}{dt} = 6(x^2 + y^2)t - 6xye^{-t}$ . 10.  $\frac{dz}{dx} = \frac{1 + 2xe^y}{x + e^y}$ .

#### § 2

- Семейство прямых, проходящих через начало координат.
- $z = x^2 - c^2$ , семейство парабол (рис. 42).
- Семейство гипербол, расположенных в верхней полуплоскости (рис. 43).
- Семейство гипербол (рис. 33).

#### § 3

- а)  $\frac{dy}{dx} = \frac{(2t+1)dt}{\frac{1}{2}dt} = 4t + 2$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(4t+2)}{dx} =$   

$$= \frac{d(4t+2)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 4 \frac{dt}{dx}.$$

Заметим, что  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ , поэтому  $\frac{dt}{dx} = 2$ , так что  $\frac{d^2y}{dx^2} = 8$ .

$$б) \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{6 \sin^4 t \cos t}.$$

$$в) \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{t \cos^3 t}.$$

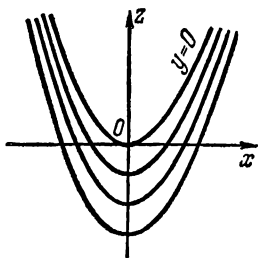


Рис. 42.

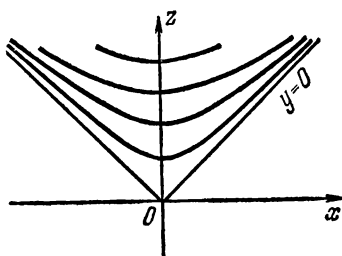


Рис. 43.

2.  $\frac{dy}{dx} = -4 \sin t$ ; значение  $t$ , соответствующее значению  $x = \frac{1}{2}$ , получается из уравнения  $\frac{1}{2} = \sin t$ . Откуда  $t = \frac{\pi}{6}$ ;  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2$ . Другое значение  $t = 2\pi - \frac{\pi}{6}$  дает  $\frac{dy}{dx} = 2$ .

3.  $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{3x^2 + y}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{3y^2 + x}{3x^2 + y}$ . Полагая  $y=0$ ,  $z=1$  в формуле  $y=x^3 + y^3 + xy$ , получим  $x^3=1$ , откуда  $x=1$ . Поэтому

$$\frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{\substack{y=0 \\ z=1}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_{\substack{y=0 \\ z=1}} = -\frac{1}{3}.$$

$$4. \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{5x^4 + y^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{2xy + 5y^4}{5x^4 + y^2}.$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y-5}.$$

$$6. \frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2 - y^4 - 4x^3y}{x^4 + 4xy^3 - 2x^2y}.$$

#### § 4

$S = 4,5$  миллиампер/вольт;  $R = 6,7$  килоом;  $\mu = 30$ .

#### § 5

Так как  $l = \frac{v_0^2}{g}$ , то в интересующем нас случае  $l = 1020$ . Уравнение огибающей имеет вид  $y = 510 - \frac{x^2}{2040}$ . При  $x = 500$  м находим  $y = 390$  м. Следовательно, цель на высоте 300 м поразить можно, а на высоте 500 м нельзя.

## § 6

Функция имеет: а) минимум в точке  $x=0$ ,  $y=-2$ ; б) минимакс в точке  $x=\frac{2}{3}$ ,  $y=-\frac{4}{9}$ ; в) минимакс в точке  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=1$ .

## § 7

$$1. \int_0^1 dx \int_0^\pi x \sin xy \, dy = \int_0^1 dx (-\cos xy) \Big|_{y=0}^{\pi} = \\ = \int_0^1 (1 - \cos \pi x) dx = \left( x - \frac{\sin \pi x}{\pi} \right) \Big|_0^1 = 1.$$

Отметим, что при интегрировании в другом порядке (сначала по  $x$ , потом по  $y$ ) пришлось бы применить интегрирование по частям.

2. Так как площадь квадрата равна 1, то

$$\bar{u} = \int_0^1 dx \int_0^1 e^{xy} dy = \int_0^1 dx \left( \frac{e^{xy}}{x} \right) \Big|_{y=0}^1 = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \\ = \int_0^1 \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots - 1 \right) dx = \\ = \int_0^1 \left( \frac{1}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \dots \right) dx = \\ = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 24} + \frac{1}{5 \cdot 120} + \dots = 1,318.$$

3. Во внутреннем интеграле интегрирование по  $y$  проводится от  $y=x$  до  $y=1$ ; поэтому весь двойной интеграл распространен по треугольнику, показанному на рис. 44. Меняя порядок интегрирования, получим

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx = \int_0^1 e^{y^2} y \, dy = \\ = \frac{e^{y^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2} = 0,859.$$

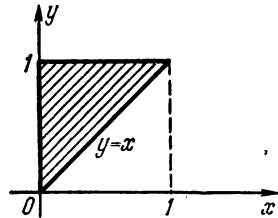


Рис. 44.

Интересно, что в данном примере интегрирование в исходном порядке нельзя было выполнить с помощью элементарных функций, а после перемены порядка интегрирование совершенно элементарно.

## § 8

а) 5; б) 6; в) 3; г) 6.



## ГЛАВА V

### ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

#### § 1. Простейшие свойства комплексных чисел

В курсе алгебры вводится *мнимая единица*, которая обозначается через  $i$ . Эта величина определяется условием  $i^2 = -1$ .

Величины вида  $x + iy$  (где  $x$  и  $y$  вещественные числа) называются *комплексными числами*. Они получаются прежде при решении алгебраических уравнений: уже сама мнимая единица, очевидно, есть корень квадратного уравнения  $x^2 = -1$ .

Если говорить только о вещественных корнях, то квадратное уравнение в зависимости от его коэффициентов либо имеет два корня, либо не имеет ни одного. Если же рассматривать все корни, вещественные и мнимые, то квадратное уравнение имеет всегда два корня. Точно так же уравнение третьей степени имеет всегда три корня и т. д. Таким образом, рассмотрение комплексных чисел позволяет установить общую теорему о числе корней алгебраического уравнения. При этом мы производим алгебраические действия с комплексными величинами. Рассматривая более сложные функции комплексных величин (например, возведение в комплексную степень), удастся получить много важных и красивых результатов. Целый ряд соотношений между вещественными величинами удобно получать, используя по пути комплексные величины\*). Именно поэтому комплексные величины так важны для физики и других естественных наук, несмотря на то, что любое измерение, результат любого опыта выражаются *вещественным* числом.

Напомним некоторые свойства комплексных чисел, известные из школьного курса алгебры.

Комплексное число  $z = x + iy$  можно изображать точкой на плоскости (рис. 45). При этом по оси абсцисс откладывают величину  $x$  (т. е. *вещественную часть*), а по оси ординат — величину  $y$  (она называется *мнимой частью* числа  $z$ ; иногда мнимой частью числа  $z$  называют все произведение  $iy$ , что может показаться более естественным, однако оказывается, что удобнее придерживаться именно дан-

---

\*) Выдающийся французский математик Ж. Адамар (1865—1963) сказал: «Наиболее короткий и наилучший путь между двумя истинами в вещественной области часто проходит через мнимую область».

ного выше определения.) Каждому  $z$  отвечает определенная точка плоскости. Вместо того чтобы говорить о точке  $z$ , можно говорить о векторе\*)  $z$ , т. е. о направленном отрезке, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с точкой  $z$ . Положение точки на плоскости можно характеризовать ее расстоянием от начала координат  $r$  и углом  $\varphi$  между вектором  $z$  и осью  $x$ , т. е. можно говорить о длине вектора  $z$  (она называется *модулем* комплексного числа и обозначается  $|z|$ ) и о направлении вектора  $z$ , которое характеризуется углом  $\varphi$ . Угол  $\varphi$  называется *аргументом* комплексного числа. Он отсчитывается от положительной части оси  $x$  против часовой стрелки. Для вещественного положительного числа  $\varphi = 0$ , для чисто мнимого числа  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (например, для числа  $2i$ ) или  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$  (например, для числа  $-2i$ ).

Как видно из рис. 45,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , так что можно выразить  $z$  через  $r$  и  $\varphi$ :

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

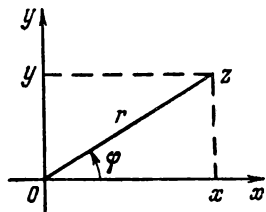


Рис. 45.

Запись  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется *тригонометрической формой комплексного числа*. Отметим еще, что, зная  $x$  и  $y$ , нетрудно (см. рис. 45) найти  $r$  и  $\varphi$  по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Алгебраические действия с комплексными числами производятся по обычным правилам алгебры с учетом соотношения  $i^2 = -1$ . Полезно остановиться на геометрической картине алгебраических действий. При сложении двух чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$ :

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Легко убедиться, что на плоскости число  $z$  изображается вектором, который получается из векторов  $z_1$  и  $z_2$  путем сложения по правилу параллелограмма, т. е. так же, как получается, например, равнодействующая двух сил (рис. 46).

Произведение комплексного числа  $z$  на положительное вещественное число  $k$ ,  $z_1 = kz$ , представляет собой вектор, направленный туда же, куда направлен вектор  $z$ , но его модуль (длина) равен  $kr$ , где  $r$  — модуль числа  $z$ . Если же  $k$  — отрицательное вещественное число, то вектор  $kz$  имеет модуль  $|k|r$ , но направлен противоположно вектору  $z$ . Легко построить также произведение  $z_1$  комплексного числа  $z = x + iy$  на мнимую единицу  $i$ . Именно,  $z_1 = i(x + iy) = -y + ix$ .

\*) Подробно теория векторов будет излагаться в гл. IX. Здесь нам достаточны простейшие сведения о них, известные из школьного курса физики.

Из чертежа (рис. 47, где мы для наглядности вместо  $x$ ,  $y$  употребили соответственно буквы  $a$ ,  $b$ ) легко убедиться, что вектор  $z_1$  перпендикулярен вектору  $z$ . Он повернут относительно вектора  $z$  на прямой угол в направлении против часовой стрелки. Модуль  $z_1$  равен модулю  $z$ .

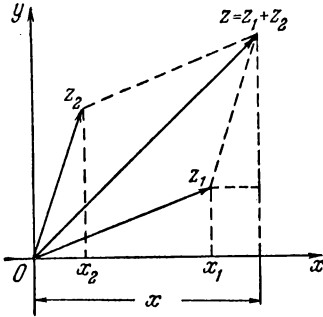


Рис. 46.

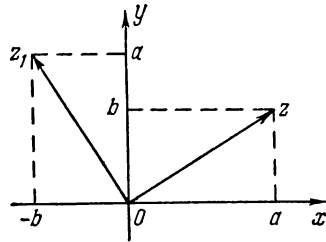


Рис. 47.

Произведение комплексных чисел находится по простой формуле

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \\ = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

В алгебре очень просто доказывают (прделайте это!), используя формулы для синуса и косинуса суммы, что если

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

то

$$z = z_1z_2 = r_1r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)],$$

так что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Мы получим этот результат другим путем в § 3.

Отметим в заключение, что комплексные числа нельзя соединять друг с другом знаком неравенства: одно комплексное число не может быть больше или меньше другого. Могло бы показаться естественным считать  $z_1 > z_2$ , если  $|z_1| > |z_2|$ , т. е. сравнивать комплексные числа по их модулям. Но тогда бы пришлось считать, например,  $-3 > -1$ , т. е. мы вступили бы в противоречие со сравнением вещественных чисел.

### Упражнение

Запишите в тригонометрической форме числа  $1 - i$ ;  $3 + 4i$ ;  $-2i$ ;  $-3$ ;  $1$ ;  $0$ .

## § 2. Сопряженные комплексные числа

Два комплексных числа, отличающихся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*. Будем число, сопряженное к комплексному числу  $z$ , обозначать через  $z^*$ . Тогда если  $z = x + iy$ , то  $z^* = x - iy$ . В частности, для вещественных чисел и только для них справедливо соотношение  $A^* = A$ , так как в этом случае мнимая часть равна нулю. Для чисто мнимых чисел (т. е. чисел с равной нулю вещественной частью) и только для них справедливо соотношение  $A^* = -A$ .

Пусть даны два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Сложив их, мы получим

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Образует теперь сумму сопряженных чисел

$$z_1^* + z_2^* = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2).$$

Мы получили комплексное число, являющееся сопряженным по отношению к сумме  $z_1 + z_2$ .

Таким образом, если  $z_1 + z_2 = w$ , то  $z_1^* + z_2^* = w^*$ , т. е. если слагаемые в сумме заменить на сопряженные, то и сумма заменится на сопряженную.

Покажем, что аналогичное свойство справедливо и для произведения комплексных чисел, т. е.

$$\text{если } z_1 z_2 = w, \text{ то } z_1^* z_2^* = w^*. \quad (1)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \\ z_1^* z_2^* &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Сравнивая два последних равенства, мы убеждаемся в справедливости (1).

Полагая в (1)  $z_1 = z_2$ , получим, что если  $z_1^2 = w$ , то  $(z_1^*)^2 = w^*$ , т. е. при возведении в квадрат сопряженных чисел результаты также получатся сопряженными. Ясно, что это справедливо для любых целых положительных степеней. В самом деле, пусть, например,  $z^3 = w$ . Запишем это так:  $z^2 z = w$ . Согласно (1) отсюда следует, что  $(z^2)^* z^* = w^*$ , но  $(z^2)^* = (z^*)^2$ , так что  $(z^*)^3 = w^*$ . Итак, из равенства  $z^3 = w$  следует  $(z^*)^3 = w^*$ .

Нетрудно установить, что если  $\frac{z_1}{z_2} = w$ , то  $\frac{z_1^*}{z_2^*} = w^*$  (см. упражнение 1). Объединяя все эти результаты, мы получаем следующее общее положение.

Пусть над комплексными числами  $z_1, z_2, \dots, z_n$  произведено некоторое число арифметических действий (сложений, умножений, делений, возведений в целую степень), причем результат оказался

равным  $w$ . Тогда если эти же действия (и в этом же порядке) произвести над числами  $z_1^*$ ,  $z_2^*$ , ...,  $z_n^*$ , то результат будет равен  $w^*$ . Другими словами, если в равенстве, содержащем комплексные числа, все комплексные числа заменить сопряженными, то опять получим верное равенство. Можно показать, что это правило остается справедливым и для неарифметических действий (извлечение корня, логарифмирование и т. д.). Отсюда следует, что любое соотношение между комплексными числами остается справедливым, если мы всюду в нем заменим  $i$  на  $-i$ , так как при этом мы просто переходим от равенства комплексных чисел к равенству сопряженных комплексных чисел. Таким образом, числа  $i$  и  $-i$ , по существу, неразличимы\*). (Впрочем, сказанное, конечно, не означает, что  $2 + 3i = 2 - 3i$ !)

Рассмотрим квадратное уравнение с вещественными коэффициентами

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (2)$$

Пусть  $z_0 = x_0 + iy_0$  — корень этого уравнения. Тогда

$$az_0^2 + bz_0 + c = 0.$$

Заменяя в этом равенстве все числа на сопряженные и вспоминая, что  $a^* = a$ ,  $b^* = b$ ,  $c^* = c$ , так как  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — вещественные числа, получим

$$a(z_0^*)^2 + bz_0^* + c = 0^* = 0,$$

т. е.  $z_0^*$  также есть корень этого квадратного уравнения. Следовательно, если квадратное уравнение с вещественными коэффициентами имеет мнимые (т. е. не вещественные\*\*) корни, то эти корни — сопряженные комплексные числа. Этот факт, впрочем, сразу же следует из формулы для корней квадратного уравнения. Уравнение (2) имеет корни

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Корни получаются мнимые, если  $b^2 - 4ac < 0$ , причем

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad z_2 = -\frac{b}{2a} - i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

т. е. это — сопряженные комплексные числа.

Ценность изложенного здесь приема состоит в том, что он годится не только для квадратного уравнения, но и для уравнения

\*) К этому результату можно придти прямо, если заметить, что  $(-i)^2 = -1$ , как и  $i^2 = -1$ : отсюда и следует, что  $-i$  и  $i$  имеют одинаковые свойства.

\*\*) Не следует путать понятия *мнимый* (т. е. не вещественный) и *чисто мнимый* (т. е. с равной нулю вещественной частью).

любой степени. Действительно, пусть уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (3)$$

с вещественными коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_n$  имеет мнимый корень  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Тогда

$$a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} z_0 + a_n = 0.$$

Заменяя в этом равенстве все числа на сопряженные и учитывая, что  $a_0^* = a_0, a_1^* = a_1, \dots, a_n^* = a_n$ , получим

$$a_0 (z_0^*)^n + a_1 (z_0^*)^{n-1} + \dots + a_{n-1} z_0^* + a_n = 0^* = 0.$$

Поэтому  $z_0^* = x_0 - iy_0$  также есть корень уравнения (3). Следовательно, у вещественного многочлена (т. е. многочлена с вещественными коэффициентами) мнимые корни могут встречаться только сопряженными парами: если есть корень  $x_0 + iy_0$ , то есть и корень  $x_0 - iy_0$ .

Из сказанного, в частности, вытекает, что вещественный многочлен может иметь лишь четное число мнимых корней. В высшей алгебре доказывается, что многочлен степени  $n$  имеет ровно  $n$  корней. Поэтому вещественный многочлен нечетной степени обязательно имеет хотя бы один вещественный корень. (Докажите это иначе, рассмотрев поведение графика многочлена  $P(x)$  нечетной степени при больших  $|x|$ .) Многочлен четной степени может и не иметь вещественных корней.

Из школьного курса алгебры известно, что если уравнение (3) имеет корни  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , то многочлен, стоящий слева в (3), разлагается на множители следующим образом:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n). \quad (4)$$

Поэтому если  $x_0 + iy_0$  есть корень многочлена, то в разложение этого многочлена на множители входит комплексный множитель  $(z - x_0 - iy_0)$ . Так как в этом случае многочлен также имеет корень  $x_0 - iy_0$ , то в его разложение входит множитель  $(z - x_0 + iy_0)$ . Чтобы в записи (4) не иметь дела с мнимыми числами, эти два множителя удобно объединить в один

$$(z - x_0 - iy_0)(z - x_0 + iy_0) = z^2 - 2x_0 z + x_0^2 + y_0^2.$$

Вместо двух множителей с мнимыми коэффициентами мы получаем один множитель с вещественными коэффициентами, но со второй степенью переменного  $z$ . Таким образом, из основной теоремы алгебры (правда, мы ее не доказали, а приняли на веру) следует, что любой вещественный многочлен раскладывается на вещественные множители, содержащие переменную  $z$  в первой и второй степенях — но не в более высокой степени.

## Упражнения

1. Покажите, что если  $\frac{z_1}{z_2} = w$ , то  $\frac{z_1^*}{z_2^*} = w^*$ .
2. Найдите все корни многочлена  $z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 2z - 10$ , если известно, что один из его корней равен  $2 - i$ .
3. Покажите, что  $z^{**} = z$ .
4. Пусть  $z = x + iy$ . Найдите  $z \cdot z^*$ .

## § 3. Возведение в мнимую степень. Формула Эйлера

Перейдем к важнейшему вопросу о том, что означает возведение в мнимую степень.

Как подойти к этому вопросу? Проследим, как в алгебре решался более простой вопрос об отрицательных и дробных степенях. Непосредственно и наглядно дается только определение целых положительных степеней:

$$a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad \dots, \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

На примере целых положительных степеней устанавливаются правила:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ (если } n > m), \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Далее считают, что эти правила остаются справедливыми для любых показателей степени, а не только для целых и положительных. Отсюда следует определение того, что собой представляют дробные и отрицательные степени. Например, из формулы  $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$  следует, что  $a^{\frac{1}{n}}$  есть число, которое, будучи возведено в степень  $n$ , дает  $a$ , т. е.  $a^{\frac{1}{n}}$  есть  $\sqrt[n]{a}$ . Точно так же получается  $a^0 = 1$ ,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

Определить таким путем, что представляет собой  $a^i$ , не удастся. Попробуем это сделать с помощью того, что мы знаем о производной показательной функции, т. е. с помощью средств высшей математики. Наиболее просто и удобно, без лишних коэффициентов, выглядят формулы дифференцирования для  $e^t$ ,  $e^{kt}$ :

$$\frac{de^t}{dt} = e^t, \quad \frac{de^{kt}}{dt} = k e^{kt} *).$$

Эти формулы и являются исходными для определения возведения

\*) Именно условие, чтобы формулы имели такой простой вид, и определяет число  $e$  (см., например, ВМ<sub>1</sub> § II.8).

в мнимую степень:

$$\frac{de^{it}}{dt} = ie^{it}.$$

Положим  $e^{it} = z(t)$ , тогда  $\frac{dz}{dt} = iz$ . Соотношение между  $z$  и  $dz$  показано на рис. 48. Так как  $dz = iz dt$ , то, при вещественных  $t$  и  $dt$ ,  $dz$  перпендикулярно  $z$ . Значит, изменение  $z = e^{it}$  при увеличении  $t$  на величину  $dt$  геометрически сводится к повороту вектора  $z$  на угол  $d\varphi$ . Из рисунка видно, что так как  $dz$  перпендикулярно  $z$ , то

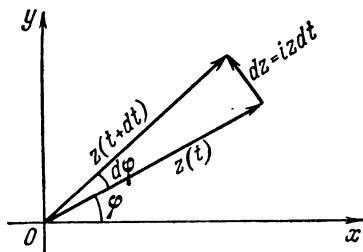


Рис. 48.

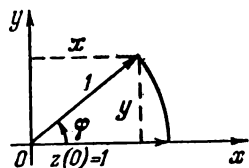


Рис. 49.

$d\varphi$  равно отношению длины отрезка  $dz$  (равной  $r dt$ ) к длине отрезка  $z$  (равной  $r$ ). Поэтому  $d\varphi = dt$ . Конечно, при этом углы ( $\varphi$ ,  $d\varphi$  и т. д.) должны быть выражены в естественных единицах, т. е. радианах, а не градусах.

При  $t=0$  будет  $e^{it}|_{t=0} = e^0 = 1$ , т. е.  $z(0)$  есть горизонтальный вектор, длина которого равна единице. Поскольку изменению  $t$  на  $dt$  соответствует поворот вектора  $z$  на  $d\varphi = dt$ , то изменению  $t$  от 0 до данного значения  $t_1$  соответствует поворот на угол  $\varphi = t_1$ .

Таким образом,  $z = e^{i\varphi}$  есть вектор, получающийся из  $z(0) = 1$  поворотом на угол  $\varphi$ . Положим  $z = e^{i\varphi} = x + iy$ . Из рис. 49 ясно, что  $x = 1 \cdot \cos \varphi = \cos \varphi$ ,  $y = 1 \cdot \sin \varphi = \sin \varphi$ . Поэтому

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (5)$$

Это — формула Эйлера. Легко проверить, что при этом  $\frac{d}{d\varphi}(e^{i\varphi}) = ie^{i\varphi}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}(e^{i\varphi}) &= \frac{d}{d\varphi}(\cos \varphi) + i \frac{d}{d\varphi}(\sin \varphi) = -\sin \varphi + i \cos \varphi = \\ &= ii \sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) = ie^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Формула Эйлера была получена другим способом в ВМ, § II.18, на основе разложения ее левой и правой частей в ряд Тейлора. Но само определение функций  $e^t$ ,  $e^{kt}$  в ВМ было основано на выражении производной от экспоненциальной функции; значит в принципе оба доказательства имеют одну и ту же основу.



С помощью формулы Эйлера произвольное комплексное число  $z$  с модулем  $r$  и аргументом  $\varphi$  можно записать так:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}.$$

Запись  $z = r e^{i\varphi}$  называется *показательной формой комплексного числа*. При этом правило сложения аргументов при умножении комплексных чисел становится простым следствием сложения показателей при умножении степеней. В самом деле, пусть  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ . Тогда

$$z = z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r e^{i\varphi},$$

где  $r = r_1 r_2$ ,  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .

Из формулы Эйлера легко получить формулы для синуса и косинуса суммы. Действительно,  $e^{i(\varphi + \psi)} = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi + \psi)} &= e^{i\varphi} e^{i\psi} = (\cos \varphi + i \sin \varphi) (\cos \psi + i \sin \psi) = \\ &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi). \end{aligned}$$

Сравнивая вещественные и мнимые части в двух выражениях для  $e^{i(\varphi + \psi)}$ , получаем

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi, \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Конечно, в этом простом случае мы получили хорошо известные формулы, которые легко доказываются в тригонометрии без применения комплексных чисел. Однако если нужно выразить, например,  $\cos 5\varphi$  и  $\sin 5\varphi$  через  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ , то применение формулы Эйлера практически удобнее обычных тригонометрических преобразований.

Делается это так:

$$(e^{i\varphi})^5 = e^{i5\varphi} = \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi.$$

С другой стороны,

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

поэтому

$$\begin{aligned} (e^{i\varphi})^5 &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \\ &= \cos^5 \varphi + i 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - i 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \\ &\quad + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi^*). \end{aligned}$$

(Мы выполнили возведение в степень по формуле бинома Ньютона.)

---

\*) Заменяв в этом рассуждении показатель 5 на любое целое число  $n$ , мы придем к тождеству  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ , называемому *формулой Муавра*.

Сравнивая вещественные и мнимые части, находим

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi,$$

$$\sin 5\varphi = \sin^5 \varphi - 10 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + 5 \sin \varphi \cos^4 \varphi.$$

Приведем еще один пример применения формулы Эйлера. Пусть требуется найти  $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ . Рассмотрим равенство

$$\int e^{(a+ib)x} \, dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + C, \quad (6)$$

где  $C = C_1 + iC_2$ . Заметим, что по формуле Эйлера

$$\int e^{(a+ib)x} \, dx = \int e^{ax} \cos bx \, dx + i \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Чтобы отделить в правой части (6) вещественную часть от мнимой, проделаем следующие преобразования:

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx),$$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Перемножая, получаем, что частное в правой части (6) равно

$$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + i \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

Равенство (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx \, dx + i \int e^{ax} \sin bx \, dx = \\ = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + i \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C. \end{aligned}$$

Сравнивая вещественные и мнимые части, находим

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2+b^2} + C_1,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2+b^2} + C_2.$$

### Упражнения

1. Запишите в показательной форме следующие числа:

а)  $1+i$ ; б)  $1-i$ ; в)  $-1$ ; г)  $3i$ .

2. Пользуясь формулой Эйлера, найдите:

а)  $(1+i)^{10}$ ; б)  $\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9$ .

3. Выразите  $\cos 3\varphi$ ,  $\sin 4\varphi$  через  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ .

4. Докажите формулы

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

### § 4. Логарифмы и корни

Замечательно, что при мнимых показателях показательная функция становится периодической. В самом деле, из формулы Эйлера следует, что  $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ , поэтому  $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}e^{2\pi i} = e^{it}$ , т. е. функция  $z(t) = e^{it}$  имеет период  $2\pi$ .

Периодические свойства степени проступают уже на следующих простых примерах:

1.  $(-1)^0 = 1$ ;  $(-1)^1 = -1$ ;  $(-1)^2 = 1$ ;  
 $(-1)^3 = -1$ ; ...;  $(-1)^{2n+g} = (-1)^g$ .
2.  $i^0 = 1$ ;  $i^1 = i$ ;  $i^2 = -1$ ;  $i^3 = -i$ ;  $i^4 = 1$ ;  $i^5 = i$ ;  
 $i^6 = -1$ ; ...;  $i^{4n+s} = i^s$ .

Из этих примеров мы заключаем, что  $(-1)^g$  как функция  $g$  имеет период 2, а  $i^s$  как функция  $s$  имеет период 4.

Покажем, что периодичность этих функций есть следствие периодичности функции  $e^{it}$ . Действительно, пользуясь формулой Эйлера, запишем  $-1$  в показательной форме; получим  $-1 = e^{\pi i}$ . Поэтому  $(-1)^g = e^{i\pi g}$ , где  $g$ —любое число. Определим период функции  $e^{i\pi g}$  при вещественном  $g$ . Если  $G$ —ее период, то  $e^{i\pi(g+G)} = e^{i\pi g}$ . Для этого должно быть  $e^{i\pi G} = 1$ , откуда  $\pi G = 2\pi$ ,  $G = 2$ . Аналогично  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ , поэтому  $i^s = e^{i\frac{\pi s}{2}}$ . Период функции  $e^{i\frac{\pi s}{2}}$  равен 4.

Периодичность показательной функции приводит к интересным следствиям для логарифма. Логарифмом комплексного числа  $z$  называется такое комплексное число  $w$ , что  $e^w = z$ .

Пусть  $z = re^{i\varphi}$ . Запишем число  $r$  в виде  $r = e^{\rho}$ , где  $\rho$  есть логарифм (натуральный) положительного числа  $r$ . Тогда  $z = e^{\rho + i\varphi}$ , поэтому

$$w = \ln z = \rho + i\varphi = \ln r + i\varphi.$$

Но мы уже знаем, что  $e^{2\pi k i} = 1$ , если  $k$ —целое число; поэтому мы можем написать  $z = e^{\rho + i\varphi + 2\pi k i}$ , откуда  $\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ .

Таким образом, логарифм комплексного числа имеет бесчисленное множество значений. Это положение похоже на соотношение между тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями. Например, так как  $\operatorname{tg} \varphi$  имеет период, равный  $\pi$ , т. е.  $\operatorname{tg}(\varphi + k\pi) = \operatorname{tg} \varphi$ , если  $k$ —целое, то  $\operatorname{Arctg} x$  имеет бесчисленное множество значений. Действительно, если  $\varphi = \operatorname{arctg} x$ —одно из значений арктангенса, то и  $\varphi + k\pi$  также есть значение арктангенса ( $k$ —целое).

Периодичность показательной функции приводит к важным следствиям и при извлечении корня, т. е. при возведении в дробную степень.

Пусть  $z = re^{i\varphi}$ ; как мы видели, можно написать  $z = re^{i\varphi + 2\pi ki}$ . Тогда

$$z^n = r^n e^{(i\varphi + 2\pi ki)n} = r^n e^{in\varphi} e^{2\pi k n i} = c e^{2\pi k n i}, \quad (7).$$

где через  $c$  обозначено  $r^n e^{in\varphi}$ . Если  $n$  целое, то  $e^{2\pi k n i} = 1$ , поэтому получается лишь одно значение  $z^n$ , именно число  $c$ . Таким образом, возведение в целую степень есть действие однозначное. Положение меняется, если  $n$  дробное,  $n = \frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q > 0$  — взаимно простые (не имеющие общих делителей, кроме единицы) целые числа. Тогда  $e^{2\pi k n i}$  может быть отличным от 1 и по формуле (7) мы получаем новые значения  $z^n$ , отличные от  $c$ . При этом можно доказать, что общее число различных значений  $z^n$  равно  $q$ .

Рассмотрим пример. Найдём все значения  $1^{1/3} = \sqrt[3]{1}$ . Так как  $1 = e^{2\pi ki}$ , то  $1^{1/3} = e^{\frac{2\pi ki}{3}}$ . Положив в последнем равенстве  $k=0$ , получим  $1^{1/3} = 1$ , положив  $k=1$ , получим

$$1^{1/3} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

положив  $k=2$ , получим

$$1^{1/3} = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, мы получили три значения  $\sqrt[3]{1}$ . (Проверьте с помощью непосредственного возведения в степень, что  $\left(-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ .)

Легко убедиться, что, полагая  $k=3, 4, \dots$  или  $k=-1, -2, \dots$ , мы не получим новых значений корня.

Если  $n$  — целое число, то корни уравнения  $x^n = 1$  суть  $n$  чисел вида

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \text{ где } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

При этом, подставляя  $k=0$ , получим  $x_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$ , т. е. общеизвестное значение. На плоскости числа  $x_k$  изображаются точками, расположенными в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в круг радиуса 1. Действительно, модуль любого из

чисел  $x_k$  равен  $r_k = \sqrt{\cos^2 \frac{2k\pi}{n} + \sin^2 \frac{2k\pi}{n}} = 1$ , аргумент числа  $x_0$  равен нулю, а при увеличении  $k$  на единицу аргумент увеличивается на  $\frac{2\pi}{n}$ . На рис. 50 показаны корни уравнения  $x^5 = 1$ .

На примере простейшего уравнения степени  $n$  ( $n$  — целое положительное)  $x^n = 1$  мы убедились, что общее число вещественных и мнимых корней равно  $n$ . В действительности (здесь мы не сможем дать доказательства этой теоремы) *любое алгебраическое уравнение степени  $n$  имеет  $n$  комплексных корней*, причем некоторые из них могут быть вещественными, так как всегда считается, что вещественные числа — это частный случай комплексных. Число различных корней может оказаться меньшим  $n$ , так как корни могут совпадать друг с другом («кратные корни»). Например, уравнение четвертой степени

$$(x-1)^3(x+1)=0$$

имеет трехкратный корень  $x_{1,2,3}=1$  и простой корень  $x_4=-1$ , а всего четыре корня.

В заключение этого параграфа проследим, как в процессе усложнения математических действий развивается понятие числа. Исходным является класс (совокупность) целых положительных (натуральных) чисел. Если пользоваться только такими числами, то всегда выполнимо сложение, так как ре-

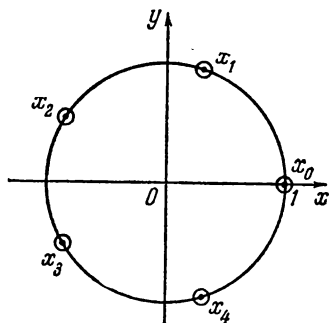


Рис. 50.

зультат сложения двух натуральных чисел есть снова натуральное число, но не всегда выполнимо вычитание. Для того чтобы вычитание было всегда возможным, приходится рассматривать целые отрицательные числа и нуль.

Рассмотрим следующую пару действий — умножение и деление. Результат умножения двух целых чисел есть целое число, однако действие деления целых чисел не всегда выполнимо в целых числах. Для того чтобы всегда было выполнимо деление, нужно ввести новые числа — дроби. Целые и дробные числа вместе составляют класс рациональных чисел. Но хорошо известно, что пределом последовательности рациональных чисел может служить число не рациональное, т. е. иррациональное (они подразделяются на «алгебраические» и «трансцендентные», на чем мы здесь не будем останавливаться). Рациональные и иррациональные числа вместе образуют класс вещественных чисел, в котором операция предельного перехода всегда выполнима. Однако в последнем классе не всегда выполнимы алгебраические действия: например, можно извлекать корни любой степени из положительных чисел, но нельзя извлекать корни четных степеней (в частности, квадратные) из отрицательных чисел.

Извлечение квадратного корня из отрицательного числа становится возможным только с введением комплексных чисел. Замечательно, что введение комплексных чисел является последним расширением числовой системы. Действительно, если мы располагаем

комплексными числами, то мы можем извлекать корни любой степени не только из отрицательных, но и из любых комплексных чисел. Результатами являются некоторые комплексные числа. Однако в математике имеются и другие действия, выполнить которые невозможно, если ограничиваться лишь вещественными числами. Так, при возведении положительного числа в любую вещественную степень получается всегда положительное число, так что нет логарифмов отрицательных чисел. Еще одна невыполнимая операция — не существует вещественного числа  $\varphi$  такого, например, что  $\cos \varphi = 2$ . Возникает вопрос: может быть, для того чтобы находить логарифмы отрицательных чисел, потребуется введение какой-то новой «мнимой единицы», отличной от  $i$ , которую мы ввели, чтобы иметь возможность извлекать корни четной степени из отрицательных чисел? Не потребуется ли для решения уравнения  $\cos \varphi = 2$  еще какой-то, третьей «мнимой единицы»? Оказывается, что это не так: с введением комплексных чисел мы получаем возможность находить логарифмы как отрицательных, так и комплексных чисел (см. выше), решать уравнения вида  $\cos \varphi = k$ , где  $k$  — любое число (см. ниже, упражнение 4), и т. д. Таким образом, любые действия над комплексными числами выполнимы, в результате этих действий опять получаются комплексные числа, так что введения каких-то новых чисел больше не требуется.

### Упражнения

1. Найдите логарифмы следующих чисел:

а)  $-1$ ; б)  $i$ ; в)  $-i$ ; г)  $1+i$ .

2. Найдите все значения  $\sqrt[3]{-1}$ . 3. Найдите все значения  $\sqrt[6]{1}$ .

В задачах 2 и 3 получите значения корней и в тригонометрической и в алгебраической формах. Проверьте найденные значения корней возведением в соответствующую степень по формуле бинома Ньютона.

4. Решите уравнение  $\cos \varphi = 2$ . Укажите все решения.

5. Укажите все решения уравнения  $\sin \varphi = 2$ .

У к а з а н и е. В задачах 4—5 воспользуйтесь формулами, выражающими синус и косинус через показательную функцию. (См. упражнение 4 к § 3.)

## § 5. Описание гармонических колебаний с помощью показательной функции от мнимого аргумента

Зная, что показательная функция периодична для мнимых показателей, можно пользоваться ею при решении задач на колебания из механики и теории электрических цепей.

Рассмотрим, например, *гармонические колебания* (т. е. колебания, происходящие по синусоидальному закону) электрического тока в цепи, при которых сила тока изменяется по закону

$$j = j_0 \sin(\omega t + \alpha); \quad (8)$$

здесь  $j_0$  — амплитуда колебаний (наибольшая сила тока),  $\omega$  — частота и  $\alpha$  — начальная фаза (значение фазы, т. е.  $\omega t + \alpha$ , при  $t=0$ ). Оказывается удобным наряду с (8) ввести понятие *комплексной силы тока*:

$$J = j_0 e^{i(\omega t + \alpha)}, \quad (9)$$

для которой «настоящая» сила тока (8) служит мнимой частью, так как в силу формулы Эйлера (5)

$$j_0 e^{i(\omega t + \alpha)} = j_0 \cos(\omega t + \alpha) + i j_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

Комплексная сила тока (9) изображается в комплексной плоскости вектором (рис. 51) длины  $j_0$ , образующим с положительным направлением вещественной оси угол  $\omega t + \alpha$ ;

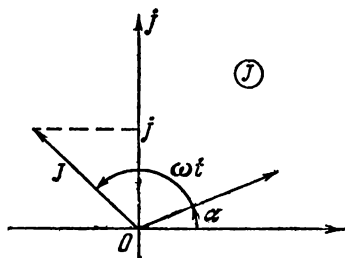


Рис. 51.

таким образом, этот вектор при  $t=0$  имеет наклон  $\alpha$ , а при увеличении  $t$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Сила тока (8) получается в результате проектирования конца вектора  $J$  на мнимую ось. (Если бы сила тока изменялась, взамен (8), по закону  $j = j_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , то она была бы вещественной частью комплексной силы тока (9) и получалась в результате проектирования  $J$  на вещественную ось.)

Выражение (9) представляет собой пример комплексной функции от вещественной независимой переменной. В общем случае любую такую функцию можно записать в форме

$$f(t) = g(t) + ih(t),$$

где  $g(t)$  и  $h(t)$  — обычные вещественные функции от вещественной независимой переменной. Такие комплексные функции обладают следующими очевидными свойствами:

если комплексные функции складываются, то их вещественные и мнимые части также складываются;

если комплексная функция умножается на вещественную постоянную или вещественную функцию, то вещественная и мнимая части получают тот же множитель;

если комплексную функцию продифференцировать или проинтегрировать, то над ее вещественной и мнимой частями произведутся те же действия.

Эти свойства дают возможность, вместо того чтобы производить указанные действия над вещественной или мнимой частью, осуществить эти действия над всей комплексной функцией, а от результата взять вещественную или соответственно мнимую часть. Замечательно, что такой переход к комплексным величинам с обратным переходом к требуемым вещественным величинам может оказаться проще и на-

гляднее, чем непосредственные действия над вещественными величинами.

Рассмотрим, например, наложение колебаний, происходящих с одинаковой частотой. Пусть надо сложить токи

$$j = j_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + j_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Мы видели, что соответствующие комплексные токи  $J_1$  и  $J_2$  изображаются в плоскости комплексного переменного векторами, равномерно вращающимися с угловой скоростью  $\omega$ . А в § 1 мы показали, что такие векторы складываются по правилу параллелограмма. Значит, и суммарный комплексный ток  $J$  будет равномерно вращаться с угловой скоростью  $\omega$ , т. е. его можно записать в виде (9), где  $j_0$  и  $\alpha$  легко получить геометрически. На рис. 52 показано положение вращающегося параллелограмма в момент  $t=0$ , которое только и нужно для определения  $j_0$  и  $\alpha$ . Эти параметры можно получить с помощью геометрического построения, как на рис. 52, но можно найти и аналитически. Для нахождения  $j_0$  можно применить теорему косинусов к треугольнику  $OAB$ , что дает

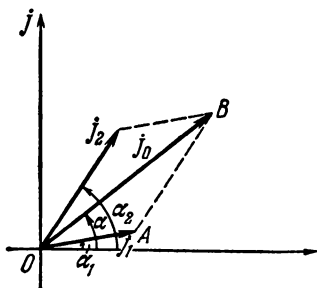


Рис. 52.

$$\begin{aligned} j_0^2 &= OB^2 = AO^2 + AB^2 - 2AO \cdot AB \cos(\widehat{AO, AB}) = \\ &= j_1^2 + j_2^2 - 2j_1 j_2 \cos[180^\circ - (\alpha_2 - \alpha_1)] = j_1^2 + j_2^2 + 2j_1 j_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned}$$

Для нахождения  $\alpha$  заметим, что проекции вектора  $J$  на оси координат равны соответственно

$$j_1 \cos \alpha_1 + j_2 \cos \alpha_2 \quad \text{и} \quad j_1 \sin \alpha_1 + j_2 \sin \alpha_2,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{j_1 \sin \alpha_1 + j_2 \sin \alpha_2}{j_1 \cos \alpha_1 + j_2 \cos \alpha_2}.$$

Аналогичные результаты получаются при наложении любого числа колебаний, происходящих с одинаковой частотой. В то же время ясно, что при наложении колебаний, происходящих с разной частотой, суммарный ток будет иметь сложный вид и уже не будет изменяться по гармоническому закону.

Еще более наглядным является дифференцирование комплексного тока. Из (9) получаем

$$\frac{dJ}{dt} = j_0 e^{i(\omega t + \alpha)} i\omega = i\omega J. \quad (10)$$

В силу § 1 такое умножение сводится к растяжению вектора  $J$  в  $\omega$  раз и повороту его на  $90^\circ$  против часовой стрелки. Значит,



вектор  $\frac{dJ}{dt}$  также равномерно вращается со скоростью  $\omega$ . Аналогично, отбрасывая произвольную постоянную, получаем

$$\int J dt = j_0 \frac{e^{i(\omega t + \alpha)}}{i\omega} = \frac{J}{i\omega} = -i \frac{J}{\omega}, \quad (11)$$

т. е. этот вектор получается из  $J$  сжатием в  $\omega$  раз и поворотом его на  $90^\circ$  в отрицательном направлении. Положение этих векторов в момент  $t=0$  показано на рис. 53 (на так называемой *фазовой диаграмме*).

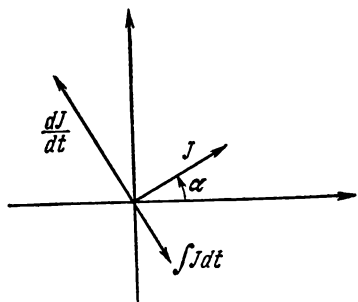


Рис. 53.

Эти результаты можно применить к расчету колебаний в электрическом контуре, содержащем любые комбинации сопротивлений, индуктивностей и емкостей. При этом используется показанная на рис. 54 связь между падением напряжения на элементе цепи и силой тока в нем. (Соответствующие формулы выводятся в курсах теории электричества; см. также ВМ, § VIII.1.) Кроме того,

применяются *законы Кирхгофа*, согласно которым алгебраическая сумма всех токов, подходящих к любой точке цепи, равна нулю;

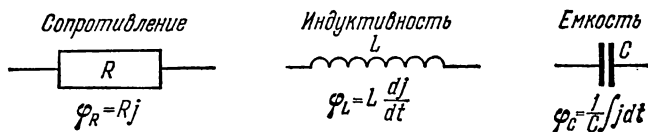


Рис. 54.

алгебраическая сумма падений напряжений на любой последовательности элементов, образующих замкнутую цепь, равна нулю. Об этих законах приходится вспоминать для сложных разветвленных цепей, так как для простых цепей они ничего не дают сверх очевидных исходных соотношений.

Рассмотрим, например,  $R, L$ -цепь, показанную на рис. 55, к которой подключен источник напряжения, изменяющегося по гармоническому закону

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \beta). \quad (12)$$

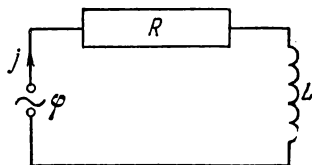


Рис. 55.

При этом в цепи возникает ток, меняющийся по гармоническому закону (8), однако  $j_0$  и  $\alpha$  нам заранее не известны. Приравняв  $\varphi$  сумме падений напряжений на  $R$  и  $L$  на основе формул рис. 54,

получаем (здесь мы в неявной форме пользуемся обоими законами Кирхгофа)

$$RJ + L \frac{dj}{dt} = \varphi.$$

Переходя к комплексному току (9) и комплексному напряжению

$$\Phi = \varphi_0 e^{i(\omega t + \beta)},$$

получаем

$$RJ + L \frac{dJ}{dt} = \Phi \quad (18)$$

или, пользуясь (10),

$$RJ + i\omega LJ = \Phi, \quad (14)$$

откуда

$$J = \frac{\Phi}{R + i\omega L} = \frac{\varphi_0 e^{i\beta}}{R + i\omega L} e^{i\omega t}.$$

Мы видим, что индуктивность  $L$  можно истолковать как некое сопротивление, численно равное  $i\omega L$ ; это значение называется *кажущимся сопротивлением*, или *импедансом*, элемента  $L$ . Теперь остается от последнего выражения взять мнимую часть, чтобы получить искомую силу тока. Однако еще проще записать коэффициент  $\frac{\varphi_0 e^{i\beta}}{R + i\omega L}$  в показательной форме  $j_0 e^{i\alpha}$ , что сразу даст искомые значения  $j_0$  и  $\alpha$ . Отсюда видим, что

$$\begin{aligned} j_0 &= \left| \frac{\varphi_0 e^{i\beta}}{R + i\omega L} \right| = \frac{\varphi_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \alpha = \arg \frac{\varphi_0 e^{i\beta}}{R + i\omega L} = \\ &= \beta + \arg \frac{1}{R + i\omega L} = \beta + \arg \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \beta + \arg (R - i\omega L) \end{aligned}$$

(здесь мы пользуемся тем, что аргумент  $\arg$  комплексного числа не меняется при умножении этого числа на вещественное положительное число). Следовательно, фаза тока в  $R, L$ -цепи запаздывает по сравнению с фазой источника напряжения, что, конечно, объясняется наличием индуктивности.

Искомую силу тока можно получить и с помощью геометрического построения, показанного на рис. 56. Допустим на минуту, что нам был задан ток (8), тогда как напряжение (12) является искомым. Тогда нетрудно построить вектор  $J|_{t=0} = j_0 e^{i\alpha}$ , а с ним и взаимно перпендикулярные векторы  $RJ|_{t=0}$  и  $i\omega LJ|_{t=0}$ . Но в силу равенства (14) вектор  $\Phi|_{t=0} = \varphi_0 e^{i\beta}$  служит диагональю прямоугольника, построенного на двух последних векторах, т. е. и последний вектор легко построить.

Вернемся теперь к исходной задаче об отыскании тока по напряжению. Изобразим вектор  $\Phi|_{t=0} = \varphi_0 e^{i\beta}$  внешнего комплексного напряжения в момент  $t=0$  (его модуль  $\varphi_0$  и аргумент  $\beta$  нам заданы).

Этот вектор должен служить диагональю прямоугольника, построенного на векторах  $RJ|_{t=0}$  и  $i\omega LJ|_{t=0}$ , однако вектор  $J|_{t=0}$  нам не дан и является искомым. Но этот прямоугольник подобен прямоугольнику, построенному на векторах  $R$  и  $i\omega L$  (меньший прямоугольник на рис. 56). Значит, нужно проделать следующее: построить этот последний прямоугольник; затем подобно увеличить или уменьшить его так, чтобы его диагональ стала равной  $\Phi_0$ ; затем повернуть его

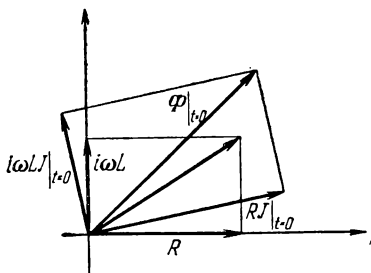


Рис. 56.

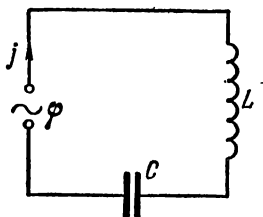


Рис. 57.

так, чтобы его диагональ совпала с вектором  $\Phi|_{t=0}$ , тогда он примет положение большого прямоугольника рис. 56; наконец, сторону  $RJ|_{t=0}$  разделить на  $R$ , что даст  $J|_{t=0}$ .

Рассмотрим еще  $L, C$ -цепь, показанную на рис. 57. Здесь взамен (13) получаем

$$L \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C} \int J dt = \Phi,$$

откуда, пользуясь (10) и (11), находим, что

$$i\omega LJ - i \frac{J}{\omega C} = \Phi,$$

т. е.

$$J = \frac{\Phi}{i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = -i \frac{\omega \Phi_0}{L \left( \omega^2 - \frac{1}{LC} \right)} e^{i\beta} e^{i\omega t}. \quad (15)$$

(Таким образом, кажущимся сопротивлением, или импедансом, емкости служит величина  $-\frac{i}{\omega C}$ .) Здесь возможны различные случаи. Если частота  $\omega$  внешнего источника напряжения достаточно велика, более точно, если  $\omega^2 > \frac{1}{LC}$ , то скобка, стоящая в знаменателе, положительна. Представив  $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ , мы можем записать

$$J = \frac{\omega \Phi_0}{L \left( \omega^2 - \frac{1}{LC} \right)} e^{i \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right)} e^{i\omega t}.$$

Таким образом, в цепи устанавливается ток с амплитудой

$$j_0 = \frac{\omega \Phi_0}{L \left( \omega^2 - \frac{1}{LC} \right)}$$

и фазой, запаздывающей на  $90^\circ$  по сравнению с источником напряжения. Если частота  $\omega$  мала, т. е.  $\omega^2 < \frac{1}{LC}$ , то аналогично проверяется, что фаза устанавливающегося тока на  $90^\circ$  опережает фазу внешнего напряжения. Особый интерес представляет промежуточный случай, когда

$$\omega^2 = \frac{1}{LC},$$

т. е.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (16)$$

и решение (15) непригодно, так как в правой части появляется нуль в знаменателе. В этом случае при любых  $j_0$  и  $\alpha$  выражение (9) удовлетворяет соотношению

$$L \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C} \int J dt = i\omega LJ - i \frac{J}{\omega C} = \frac{iL}{\omega} \left( \omega^2 - \frac{1}{LC} \right) J = 0,$$

т. е. в цепи без внешнего источника напряжений (накоротко замкнутой) возможны незатухающие гармонические колебания по закону (8). Такие колебания, происходящие при отсутствии внешнего воздействия, называются *собственными*, или *свободными*. Таким образом, если частота внешнего напряжения удовлетворяет соотношению (16), то она равна частоте собственных незатухающих колебаний в цепи. Из физики известно, что при этих условиях возникает резонанс и взамен периодических, гармонических колебаний, которые мы здесь только и рассматриваем, возникают колебания с возрастающей амплитудой. Случай резонанса будет разобран в гл. VII.

Следует отметить, что с помощью описанного метода можно получить только ток, который устанавливается в цепи по прошествии некоторого «переходного периода». Переходный процесс описывается также по методам гл. VII.

### Упражнения

1. Рассмотрите цепь, в которой последовательно включены сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ . Что будет в частном случае, когда  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ ?

2. Рассмотрите цепь, в которой сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$  включены параллельно.

## § 6. Производная функции комплексного переменного

Переменная  $w = f(z)$  называется функцией комплексного числа  $z$ , если каждому значению  $z$  отвечает определенное значение  $f(z)$ . Так как  $z = x + iy$ , где  $x$  — вещественная часть,  $y$  — мнимая часть, то задание  $z$  означает задание двух вещественных чисел  $x$  и  $y$ . При этом  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , где  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  — вещественные функции. Каждому  $z$  соответствуют определенные  $x$  и  $y$ , а значит, определенные  $u$  и  $v$  и, следовательно, определенная величина  $f(z)$ . Однако мы будем теперь рассматривать как функцию  $f(z)$  не всякое выражение  $u(x, y) + iv(x, y)$ , а лишь такую величину, которая зависит от  $z$  по таким формулам, как, например,  $f(z) = 1 + z^2$ ,  $f(z) = z$ ,  $f(z) = e^z$ ,  $f(z) = \sin z$  и т.д. Эти формулы могут содержать алгебраические действия над  $z$  или неалгебраические, но такие, которые можно выразить с помощью степенных рядов Тейлора от  $z$ , например,  $e^z$ ,  $\sin z$  и т.д.

Таким образом, мы рассматриваем формулы, в которые входит именно  $z$ , но не его вещественная или мнимая часть в отдельности. (С этой точки зрения, например,  $z^* = x - iy$  или  $|z|$  не рассматриваются здесь как функции  $z$ , хотя, зная  $z$ , легко найти  $z^*$  и  $|z|$ .) При таком определении  $f(z)$  у всех функций  $f(z)$  есть одно общее свойство: по обычным правилам дифференцирования функций можно найти производную

$$f'(z) = \frac{df}{dz}.$$

Функция  $f(z)$ , имеющая производную, называется *аналитической функцией*. Мы, следовательно, рассматриваем только аналитические функции.

Для функций, заданных простыми формулами, вычисление производных ничуть не сложнее, чем для функций от вещественного переменного. Рассмотрим, например, функцию  $w = z^2$ . Придавая  $z$  приращение  $\Delta z$ , получим приращение функции

$$\Delta w = (z + \Delta z)^2 - z^2 = 2z \Delta z + (\Delta z)^2,$$

откуда, переходя к дифференциалам и отбрасывая малые высшего порядка (по модулю), получаем

$$dw = 2z dz, \quad \frac{dw}{dz} = 2z, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d(z^2)}{dz} = 2z.$$

Как видим, при этих вычислениях несущественно, принимает независимая переменная комплексные или только вещественные значения.

Однако в общем случае комплексной переменной существование производной совсем не так очевидно и просто, как в случае вещественной переменной. В самом деле,  $z = x + iy$  и можно дать приращение  $dz$ , меняя  $x$  и  $y$  одновременно:  $dz = dx + i dy$ ; можно дать при-

ращение  $dz$ , меняя только  $x$ :  $dz = dx$ ; а можно, меняя только  $y$ :  $dz = i dy$ . Если производная  $f'(z)$  существует, то это означает, что при различных способах изменения  $z$  соответствующие изменения  $f$  таковы, что  $\frac{df}{dz}$  при этом одинаковы.

Запишем  $f(z)$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Пусть изменяется только  $x$ , тогда  $dz = dx$  и

$$\frac{df}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если же изменяется только  $y$ , то  $dz = i dy$ , поэтому

$$\frac{df}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} dy}{i dy} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy}{i dy} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Приравнявая два выражения для производной, полученных различными способами, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

а значит,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (17)$$

Эти формулы называются *условиями Коши—Римана*. Итак, у аналитической функции  $f(z)$  вещественная и мнимая части связаны определенными соотношениями.

Рассмотрим пример. Пусть

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy.$$

Здесь  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Таким образом, условия Коши—Римана (17) выполняются.

Рассмотрим пример противоположного характера. Пусть  $f(z) = z^* = x - iy$ , где  $z = x + iy$ . Выше мы отмечали, что хотя такая  $f(z)$  и может быть в каком-то смысле названа функцией от  $z$  (каждому  $z$  отвечает вполне определенное  $z^*$ ), но это не аналитическая функция. Действительно, в этом случае  $u = x$ ,  $v = -y$ , поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1;$$

первое из условий Коши—Римана не выполнено.

#### Упражнение

Проверьте условие Коши—Римана для функции  $f(z) = z^3$ .

### § 7. Гармонические функции

Вернемся к аналитическим функциям. Возьмем производные по  $x$  от первого равенства (17) и по  $y$  от второго равенства (17). Получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (18)$$

Аналогично, дифференцируя первое равенство (17) по  $y$ , а второе по  $x$ , получим  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ . Уравнение (18) называется *уравнением Лапласа*. Задаваясь различными  $f(z)$ , можно получить различные решения этого уравнения, которые называются также *гармоническими функциями*.

Итак, в качестве вещественной и мнимой частей аналитической функции могут быть взяты не какие угодно функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , а только гармонические функции. Кроме того, эти функции должны быть связаны друг с другом соотношениями (17); такие функции называются *сопряженными гармоническими функциями*. Можно проверить, что если одна из двух сопряженных функций уже выбрана, то в силу этих соотношений вторая определена полностью, с точностью до произвольного постоянного слагаемого. В самом деле, пусть функция  $v$  выбрана и соотношениям (17) удовлетворяют две функции:  $u = u_1$  и  $u = u_2$ . Тогда  $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$ , так как обе эти производные равны  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . Поэтому  $\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x} = 0$ , т. е.  $u_1 - u_2$  не зависит от  $x$ . Аналогично получаем, что  $\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial y} = 0$ , т. е. разность  $u_1 - u_2$  не зависит и от  $y$ , а потому является постоянной.

Уравнение Лапласа имеет большое значение в математической физике. Например, электростатический потенциал в пространстве между длинными проводниками, вытянутыми перпендикулярно плоскости  $x, y$ , является функцией только  $x, y$  и удовлетворяет уравнению (18). В тех точках плоскости  $x, y$ , где она протыкается проводниками, уравнение Лапласа для потенциала нарушается. В частности, там, где плоскость пересекает проводник, сечение которого имеет бесконечно малый диаметр, потенциал имеет особенность (обращается в бесконечность). Таким образом, более точно надо сказать, что потенциал является гармонической функцией в той части плоскости, где нет зарядов. Подробнее об этом будет сказано в § X.5.

Связь между  $u$  и  $v$  имеет простой геометрический смысл. Действительно, построим линию  $u(x, y) = \text{const}$ . Так как  $\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$ ,

то тангенс угла наклона этой линии к оси  $x$  равен

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{u=\text{const}} = - \frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Подобным образом тангенс угла наклона линии  $v(x, y) = \text{const}$  к оси  $x$  равен

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{v=\text{const}} = - \frac{\partial v}{\partial x} / \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пользуясь условиями Коши—Римана, получаем

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y} / \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}. \quad (19)$$

Мы получили условие перпендикулярности касательных к линиям  $u(x, y) = \text{const}$  и  $v(x, y) = \text{const}$  \*).

Таким образом, взяв любую аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , мы получим два семейства кривых, пересекающихся в каждой точке под прямым углом. Для приведенного выше примера  $f(z) = z^2$  эти кривые показаны на рис. 58.

Если  $u$  — электростатический потенциал, то  $u(x, y) = \text{const}$  — это линии постоянного потенциала, а  $v(x, y) = \text{const}$  — линии напряженности («силовые линии») поля; в каждой точке линия напряженности направлена по нормали к линии  $u(x, y) = \text{const}$ , проходящей через эту точку.

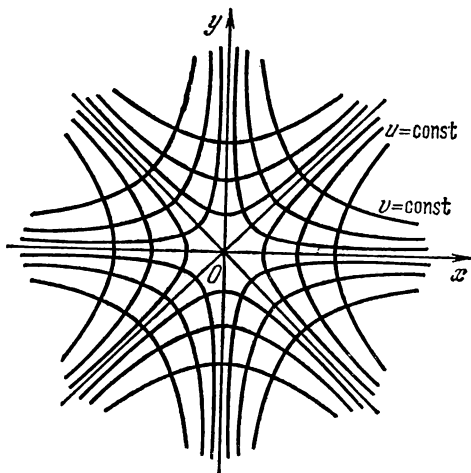


Рис. 58.

### Упражнения

1. Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Зная, что  $u(x, y) = x + x^2 - y^2$ , определите  $v(x, y)$ , если известно, что  $f(0) = 0$ .
2. Известно, что  $v(x, y) = -2xy$ ,  $f(0) = 1$ . Определите  $u(x, y)$ .

\*) Для перпендикулярности должно быть  $\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$ , т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} (\alpha_1 \pm 90^\circ) = - \operatorname{ctg} \alpha_1 = - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Это и есть условие (19).



### § 8. Интеграл от функции комплексного переменного

Дадим определение интеграла от комплексной функции  $f(z)$ . Возьмем две точки—начальную  $z_{\text{нач}}$  и конечную  $z_{\text{кон}}$ —на плоскости и соединим их какой-нибудь линией ( $l$ ) (рис. 59). Разобьем эту линию на  $p$  малых участков и граничные точки занумеруем так:

$$z_{\text{нач}} = z_0; z_1; \dots; z_{\text{кон}} = z_p.$$

Составим сумму

$$S = \sum_{j=1}^p f(\xi_j) \cdot (z_j - z_{j-1}), \quad (20)$$

где точка  $\xi_j$  произвольно выбрана на участке линии ( $l$ ) между  $z_{j-1}$  и  $z_j$ . Обращаем внимание читателя на то, что значения функции  $f(\xi_j)$  и величины  $z_j - z_{j-1}$ —это комплексные числа, поэтому

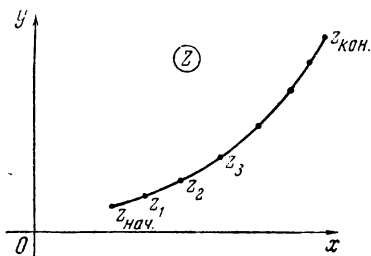


Рис. 59.

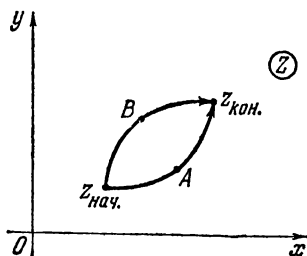


Рис. 60.

при составлении суммы (20) мы производим действия с комплексными числами, и результат, т. е. величина  $S$ ,—также комплексное число.

Интегралом мы будем называть сумму  $S$  при условии, что линия ( $l$ ) разбита на столь мелкие участки, что дальнейшее их размельчение практически не изменяет величину суммы  $S$  (более точно, предел суммы при бесконечном размельчении этой линии). Интеграл будем обозначать так:

$$I = \int_{z_{\text{нач}}}^{z_{\text{кон}}} f(z) dz.$$

Из определения следует, что интеграл множится на  $-1$  при изменении направления интегрирования. Действительно, при перемене направления все разности  $z_j - z_{j-1}$ , а потому и сумма (20) множатся на  $-1$ .

Возникает следующий вопрос. Ясно, что точки  $z_{\text{нач}}$  и  $z_{\text{кон}}$  можно соединить различными способами (рис. 60). При этом, составляя сумму (20) для различных линий, соединяющих точки  $z_{\text{нач}}$  и  $z_{\text{кон}}$ , мы будем иметь дело с различными значениями  $f(\xi_j)$  и  $z_j - z_{j-1}$ .

Зависит ли интеграл  $I$  от выбора пути или он зависит только от начальной ( $z_{\text{нач}}$ ) и конечной ( $z_{\text{кон}}$ ) точек?

Оказывается, что если  $f(z)$  — аналитическая функция и если в области, ограниченной различными путями,  $f(z)$  нигде не обращается в бесконечность, то интеграл не зависит от выбора пути\*).

Для доказательства обозначим замкнутый контур  $z_{\text{нач}}Az_{\text{кон}}Bz_{\text{нач}}$  буквой  $(L)$ , а интеграл  $\oint_{(L)} f(z) dz$  буквой  $I$  (символом  $\oint$  обозначается интеграл по замкнутому контуру). Так как

$$\begin{aligned} I &= \int_{z_{\text{нач}}Az_{\text{кон}}} f(z) dz + \int_{z_{\text{кон}}Bz_{\text{нач}}} f(z) dz = \\ &= \int_{z_{\text{нач}}Az_{\text{кон}}} f(z) dz - \int_{z_{\text{нач}}Bz_{\text{кон}}} f(z) dz, \end{aligned}$$

то достаточно проверить, что  $I=0$ . Обратно, если интегралы от  $f(z)$  по контурам  $z_{\text{нач}}Az_{\text{кон}}$  и  $z_{\text{нач}}Bz_{\text{кон}}$  равны, то  $I=0$ . Значит, независимость интеграла аналитической функции от пути интегрирования равносильна следующему утверждению, известному под названием *теоремы Коши*: интеграл, взятый по замкнутому контуру от функции, аналитической всюду внутри этого контура и на нем, равен нулю.

Для доказательства теоремы Коши разобьем часть плоскости, ограниченную замкнутым контуром  $(L)$ , на маленькие квадратики с контурами  $(L_k)$  и будем каждый из этих контуров проходить против стрелки часов, т. е. в том же направлении, в котором обходится  $(L)$ . (На рис. 61 показан один из контуров.) Тогда

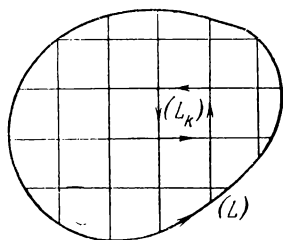


Рис. 61.

$$\oint_{(L)} f(z) dz = \sum_k \oint_{(L_k)} f(z) dz, \quad (21)$$

так как в правой части все интегралы, взятые по внутренним сторонам квадратиков, взаимно уничтожаются. Если внутри  $(L_k)$  выбрать какую-либо точку  $z_k$ , то на  $(L_k)$  будет

$$\frac{f(z) - f(z_k)}{z - z_k} = \frac{\Delta f}{\Delta z} \approx f'(z_k), \text{ то есть } \frac{f(z) - f(z_k)}{z - z_k} = f'(z_k) + \alpha,$$

\*) Кроме условия, чтобы  $f(z)$  не обращалось в бесконечность, нужно еще, чтобы  $f(z)$  была однозначной функцией, или, во всяком случае, чтобы при переходе от одного пути к другому мы все время пользовались одной ветвью функции  $f(z)$  (см. конец этого параграфа).

где  $\alpha$  — бесконечно малая, имеющая порядок длины  $h$  стороны квадрата. Отсюда

$$\oint_{(L_k)} f(z) dz = \oint_{(L_k)} [f(z_k) + f'(z_k)(z - z_k) + \alpha(z - z_k)] dz.$$

Интеграл от первых двух слагаемых берется легко и, так как интегрирование производится по замкнутому контуру, равен нулю. Значит, остается лишь интеграл от третьего слагаемого, который имеет порядок  $h^3$ , так как длина контура интегрирования имеет порядок  $h$  и множитель  $z - z_k$  имеет тот же порядок. Но в правой части выражения (21) число слагаемых в сумме имеет порядок  $\frac{1}{h^2}$ , и тем самым вся сумма имеет порядок  $h$ . Значит, при бесконечном измельчении квадратиков, когда  $h \rightarrow 0$ , правая часть стремится к нулю; но она должна равняться постоянной левой части, т. е. эта постоянная равна нулю, что и требовалось доказать.

Позже мы сможем с помощью методов векторного анализа дать другое доказательство этой важной теоремы (см. упражнение 2 к § XI.7).

Таким образом, величина  $\int_{z_{\text{нач}}}^z f(z) dz$  при закреплённом  $z_{\text{нач}}$  зависит только от конечной точки  $z$  пути, т. е. является функцией от  $z$ . Обозначим эту функцию через  $\Phi(z)$ , тогда  $\int_{z_{\text{нач}}}^z f(z) dz = \Phi(z)$ .

Найдем производную этой функции

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \frac{\Phi(z+dz) - \Phi(z)}{dz} = \frac{\int_{z_{\text{нач}}}^{z+dz} f(z) dz - \int_{z_{\text{нач}}}^z f(z) dz}{dz} = \frac{\int_z^{z+dz} f(z) dz}{dz}.$$

Рассмотрим  $\int_z^{z+dz} f(z) dz$ . Так как числа  $z$  и  $z+dz$  весьма близки, а  $f(z)$  — непрерывная функция, то при изменении  $z$  в этих пределах  $f(z)$  не успеет заметно измениться. Поэтому  $\int_z^{z+dz} f(z) dz \approx f(z)(z+dz - z) = f(z) dz$ , причем это равенство можно сделать сколь угодно точным за счет уменьшения  $dz$ . Следовательно,

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \frac{f(z) dz}{dz} = f(z). \quad (22)$$

Формула (22) показывает, что зависимость между подынтегральной функцией  $f(z)$  и интегралом  $\Phi(z)$  остается такой же, как и в случае функции вещественного переменного.

Покажем еще, что сохраняется обычная формула для вычисления интеграла

$$\int_{z_{\text{нач}}}^{z_{\text{кон}}} f(z) dz = \Phi(z_{\text{кон}}) - \Phi(z_{\text{нач}}), \quad (23)$$

где  $\Phi(z)$  — любая функция, удовлетворяющая соотношению (22).

Действительно, теперь уже  $\int_{z_{\text{нач}}}^z f(z) dz = \Phi(z) + C$ , где  $C$  — постоянная. Полагая в этом равенстве  $z = z_{\text{нач}}$ , получим  $0 = \Phi(z_{\text{нач}}) + C$ , откуда  $C = -\Phi(z_{\text{нач}})$ . Поэтому  $\int_{z_{\text{нач}}}^z f(z) dz = \Phi(z) - \Phi(z_{\text{нач}})$ .

Положив здесь  $z = z_{\text{кон}}$ , мы получим (23). Формулы (22) и (23) показывают, что все правила нахождения интегралов, известные для обычных, вещественных интегралов (см., например, ВМ, гл. II), применимы и к интегралам от комплексных функций.

В теории аналитических функций часто встречаются многозначные функции. Рассмотрим, например, функцию  $w = \sqrt{z}$ . В § 4 мы показали, что эта функция имеет два значения: если  $z = re^{i\varphi}$ , то

$$w_1 = \sqrt{r} e^{i \frac{\varphi}{2}}, \quad w_2 = \sqrt{r} e^{i \left( \frac{\varphi}{2} + \pi \right)}.$$

Если выбрать какое-либо одно значение, как говорят, одну ветвь этой функции, то мы столкнемся со следующим интересным свойством. Пусть  $z$  обойдет точку  $z = 0$  в положительном направлении \*) и подойдет к исходному положению. Тогда к  $\varphi$  прибавится  $2\pi$ , а потому значение  $w_1$  перейдет в

$$\sqrt{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi}{2}} = \sqrt{r} e^{i \left( \frac{\varphi}{2} + \pi \right)} = w_2;$$

подобным образом  $w_2$  перейдет при этом в

$$\sqrt{r} e^{i \left( \frac{\varphi + 2\pi}{2} + \pi \right)} = \sqrt{r} e^{i \frac{\varphi}{2}} \cdot e^{2\pi i} = \sqrt{r} e^{i \frac{\varphi}{2}} \cdot 1 = w_1.$$

Таким образом, две ветви функции  $w = \sqrt{z}$  при обходе точки  $z = 0$  непрерывно переходят одна в другую, а если обойти точку  $z = 0$  два раза, то мы вернемся к исходной ветви.

Точка  $z = z_0$ , при обходе которой одна ветвь многозначной функции сменяет другую, называется *точкой ветвления*. Таким образом,

\*) Мы считаем направление обхода положительным, если точка  $z = 0$  при обходе все время остается слева.

для функции  $w = \sqrt[n]{z}$  точка  $z = 0$  служит точкой ветвления второго порядка (так как здесь имеются две ветви). Другой точкой ветвления для этой функции принято считать «бесконечную точку»  $z = \infty$ . В точке ветвления могут чередоваться и более двух ветвей: например, функция  $w = \sqrt[n]{z}$  имеет  $n$  ветвей, которые непрерывно сменяют одна другую в круговом порядке при обходе точки ветвления  $z = 0$ .

Другой важный пример многозначной функции дает функция  $w = \ln z$ . В § 4 мы видели, что эта функция имеет бесконечное число значений:  $w_k = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Если точка  $z$  обходит начало координат и к  $\varphi$  прибавляется  $2\pi$ , то значение  $w_0$  переходит в  $w_1$ , значение  $w_1$  — в  $w_2$  и т. д. Если опять обходить начало, то мы будем переходить к новым и новым ветвям и никогда не вернемся к исходной ветви. Такая точка ветвления называется точкой ветвления бесконечного порядка.

Чтобы можно было рассматривать одну ветвь независимо от другой, нужно каким-то способом запретить точке  $z$  обходить точки ветвления рассматриваемой функции. Обычно для этого в плоскости проводятся одна или несколько линий, «разрезов», соединяющих точки ветвления, и эти разрезы запрещается пересекать. Например, при рассмотрении функции  $w = \sqrt{z}$  можно провести разрез вдоль вещественной положительной полуоси от точки  $z = 0$  до бесконечности. Если точка  $z$  меняется произвольно в плоскости вне этого разреза, то она не может обойти точку ветвления  $z = 0$  и потому одна ветвь не может сменить другую. После проведения такого разреза каждая ветвь может считаться однозначной аналитической функцией (хотя вдоль разреза ветвь имеет разрыв, она на разных «берегах» разреза принимает различные значения); в частности, к такой ветви можно применить теорему Коши.

Впредь мы будем в качестве подынтегральных функций рассматривать только однозначные аналитические функции. Впрочем, в § 9 мы увидим, что это не спасет нас от необходимости рассматривать неоднозначные функции, появляющиеся в результате интегрирования.

### Упражнение

Найдите интегралы по верхней и нижней полуокружностям с центром в точке  $z = 0$ , идущим из  $z = -1$  в  $z = 1$ , от функций: а)  $z^2$ ; б)  $\frac{1}{z}$ ; в)  $\sqrt{z}$  (для ветви, равной  $i$  при  $z = -1$ ). Объясните совпадение результатов в случае а) и несовпадение в случаях б) и в).

## § 9. Вычеты

Итак, если интеграл не зависит от пути, то интеграл по замкнутому контуру равен нулю. Выше говорилось, что интеграл не зависит от пути, если подынтегральная функция не обращается

в бесконечность. Рассмотрим пример, в котором подынтегральная функция обращается в бесконечность.

Пусть  $I = \oint_C \frac{dz}{z}$ . Здесь  $f(z) = \frac{1}{z}$  обращается в бесконечность при  $z = 0$ . Вычислим интеграл по замкнутому пути, обходящему в положительном направлении (т. е. против хода стрелки часов) точку  $z = 0$ , например по окружности (C) радиуса  $r$  с центром в начале координат (рис. 62). На такой окружности  $z = re^{i\varphi}$ , где  $r$  — радиус окружности, а переменная  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . Тогда  $dz = re^{i\varphi} i d\varphi$  и  $\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_C \frac{re^{i\varphi} i d\varphi}{re^{i\varphi}} = 2\pi i$ . Интеграл по замкнутому кругу оказался не равным нулю.

Мы знаем, что  $\int \frac{dz}{z} = \ln z$ . Неравенство нулю интеграла  $\oint \frac{dz}{z}$  по замкнутому контуру находится в замечательном соответствии с неоднозначностью функции  $\ln z$ . Рассмотрим пример  $I = \int_1^2 \frac{dz}{z}$ . Идя от  $z = 1$  к  $z = 2$

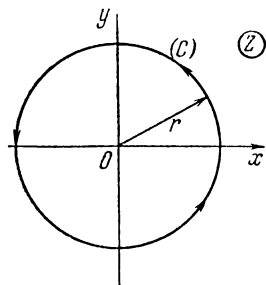


Рис. 62.

по кратчайшему пути (рис. 63, а), найдем  $I = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0,69$ . Выбрав более длинный путь: сначала один круг вокруг начала координат, а потом к цели (рис. 63, б), получим  $I_1 = 2\pi i + 0,69$ . Если сделать  $n$  оборотов вокруг начала координат, то получим  $I_n = 2\pi i \cdot n + 0,69$ .

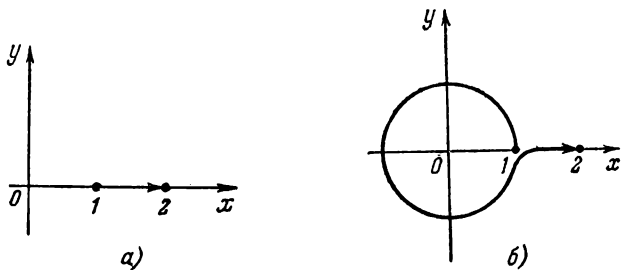


Рис. 63.

В § 4 мы выяснили, что, действительно, величины  $2\pi i \cdot n + 0,69$  при всех целых  $n$  служат логарифмами числа 2, так как  $e^{2\pi i \cdot n} = 1$ . Таким образом, неоднозначность логарифма есть результат возможности разного выбора пути, с разным числом обходов вокруг точки  $z = 0$ , где  $\frac{1}{z}$  обращается в бесконечность.

Величина интеграла зависит от того, сколько раз и в каком направлении мы сделали обход вокруг начала координат, но не

зависит от того, по какому пути производился этот обход. Докажем последнее утверждение. Для этого постараемся найти  $I_A = \oint \frac{dz}{z}$  по какому-нибудь пути  $ABA$  (рис. 64, а). Рассмотрим интеграл  $I_0 = \oint \frac{dz}{z}$  по пути, изображенному на рис. 64, б. Этот путь состоит из пути  $ABA$ , двух близких прямых  $AC$  и  $CA$  и окружности радиуса  $OC$

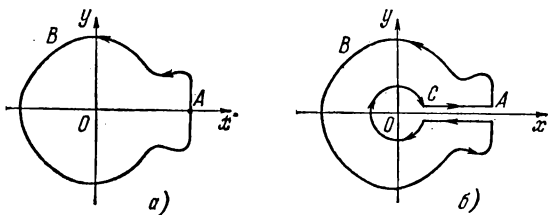


Рис. 64.

с центром в начале координат.  $I_0 = 0$ , так как это — интеграл по замкнутому контуру, внутри которого  $\frac{1}{z}$  нигде не обращается в бесконечность.

Интеграл  $I_0$  складывается из  $I_A$ , двух взаимно уничтожающихся интегралов  $\int_C^A \frac{dz}{z}$  и  $\int_A^C \frac{dz}{z}$  и интеграла по окружности радиуса  $OC$ . Так как по окружности интегрирование происходит в направлении, противоположном направлению отсчета углов, то соответствующий интеграл равен  $-2\pi i$ . Поэтому  $I_0 = 0 = I_A - 2\pi i$  или  $I_A = 2\pi i$ , т. е. величина  $I_A$  совпадает с величиной интеграла по окружности любого радиуса.

Аналогичными способами удастся сводить интегралы по неудобным для расчета линиям к интегралам по маленьким окружностям вокруг точек, обращающих подынтегральную функцию в бесконечность. При этом не следует думать, что интеграл обязательно окажется отличным от нуля. Например, у интеграла

$$\oint \frac{1}{z^m} dz \quad (m = 2, 3, 4, \dots) \quad (24)$$

подынтегральная функция имеет особенность (обращается в бесконечность) при  $z = 0$ . Однако этот интеграл равен нулю по любому замкнутому контуру, как не охватывающему, так и охватывающему эту точку (но не проходящему через нее!). В самом деле, в данном примере неопределенный интеграл равен  $\frac{z^{-m+1}}{-m+1} + C$ , т. е. представ-

ляет собой однозначную функцию; а приращение однозначной функции по замкнутому контуру равно нулю. (Почему?)

Интеграл (24) по окружности  $|z|=r$  при любом  $m$  можно подчитать также следующим образом. Положим  $z=re^{i\varphi}$ ; тогда после простых преобразований интеграл примет вид

$$ir^{1-m} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)\varphi} d\varphi.$$

Непосредственное вычисление показывает, что он равен нулю при любом целом  $m \neq 1$ . Случай нецелого  $m$  мы исключили, так как тогда подынтегральная функция неоднозначна.

Рассмотрим еще один пример. Пусть надо вычислить интеграл

$$\oint \frac{\cos z}{z^3} dz \quad (25)$$

по замкнутому контуру, обходящему в положительном направлении начало координат  $z=0$ , которое в этом примере является особой точкой для подынтегральной функции, так как там эта функция обращается в бесконечность.

Вспомнив разложение функции  $\cos z$  вокруг точки  $z=0$  в степенной ряд Тейлора,

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots,$$

можем написать

$$\frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \dots \quad (26)$$

В этом примере при  $z \rightarrow 0$  подынтегральная функция стремится к бесконечности со скоростью  $\frac{1}{|z|^3}$ ; такая особая точка называется *полюсом третьего порядка*.

Чтобы вычислить интеграл (25), произведем почленное интегрирование ряда (26). Неопределенный интеграл от любого члена, кроме второго, даст однозначную функцию (степень с целым показателем), и потому соответствующий интеграл по замкнутому контуру равен нулю. (В частности, равен нулю интеграл от первого, главного члена разложения (26).) Что касается интеграла от второго члена, то в силу предыдущего он равен

$$\oint \left( -\frac{1}{2!z} \right) dz = -\frac{1}{2} \oint \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2} 2\pi i = -\pi i.$$

Значит, в этом примере и весь интеграл (25) равен  $-\pi i$ .

Рассмотрим теперь полюс общего вида. Если (однозначная!) функция  $f(z)$  имеет в некоторой точке  $z=a$  полюс порядка  $n$ , то вокруг



этой точки она разлагается в так называемый *ряд Лорана*

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{-n}(z-a)^{-n} + c_{-n+1}(z-a)^{-n+1} + \dots \\ &\dots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \\ &\dots = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \\ &\quad + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

по целым положительным и отрицательным степеням  $z-a$ , начиная с  $n$ -й степени. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\oint f(z) dz \quad (28)$$

по контуру, обходящему точку  $z=a$  в положительном направлении и не содержащему, кроме этой точки, внутри себя других особых точек. Как было сказано, от заданного интеграла можно перейти к интегралу по маленькой окружности с центром в точке  $a$ , а вблизи этой точки можно пользоваться разложением (27). Аналогично последнему примеру, после интегрирования по замкнутому контуру интегралы от всех членов окажутся равными нулю, за исключением  $\oint \frac{c_{-1}}{z-a} dz = 2\pi i c_{-1}$ . Этому значению равен и весь интеграл (28).

Коэффициент  $c_{-1}$  при  $(-1)$ -й степени  $z-a$  в разложении Лорана имеет специальное название: *вычет* функции  $f(z)$  в точке  $a$ ; таким образом, интеграл (28) равен

$$2\pi i \text{ Выч}_{z=a} f(z). \quad (29)$$

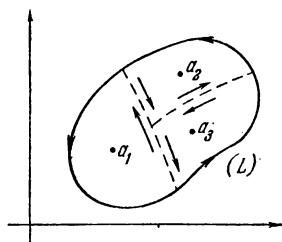


Рис. 65.

Пусть теперь требуется вычислить интеграл вида (28) по некоторому контуру  $(L)$  (рис. 65), причем подынтегральная функция  $f(z)$  является однозначной и аналитической всюду на контуре  $(L)$  и внутри него, за исключением некоторого числа особых точек. (На рис. 65 имеются три такие точки:  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ .) Проведем вспомогательные линии (на рис. 65 они показаны пунктиром) так, чтобы область, ограниченная контуром  $(L)$ , разбилась на части, в каждой из которых расположено по одной особой точке. Обозначим контуры этих частей, проходимые в положительном направлении, через  $(L_1)$ ,  $(L_2)$  и  $(L_3)$ . Тогда легко проверить, что

$$\oint_{(L)} f(z) dz = \oint_{(L_1)} f(z) dz + \oint_{(L_2)} f(z) dz + \oint_{(L_3)} f(z) dz, \quad (30)$$

так как в правой части интегралы, взятые по вспомогательным линиям, взаимно уничтожаются. Каждый из контуров  $(L_1)$ ,  $(L_2)$ ,  $(L_3)$  содержит внутри себя только одну особую точку, поэтому каждый из интегралов в правой части (30) вычисляется по формуле (29), и

мы получаем

$$\oint_{(L)} f(z) dz = 2\pi i \text{Выч}_{z=a_1} f(z) + 2\pi i \text{Выч}_{z=a_2} f(z) + 2\pi i \text{Выч}_{z=a_3} f(z) = \\ = 2\pi i [\text{Выч}_{z=a_1} f(z) + \text{Выч}_{z=a_2} f(z) + \text{Выч}_{z=a_3} f(z)]. \quad (31)$$

Итак, интеграл (28) равен произведению  $2\pi i$  на сумму вычетов подынтегральной функции во всех особых точках, расположенных внутри контура интегрирования.

Покажем, как вычисляется вычет для наиболее важного случая полюса первого порядка. Такой полюс обычно получается, если подынтегральная функция  $f(z)$  представляет собой отношение двух конечных функций:  $f(z) = g(z)/h(z)$ , причем в некоторой точке  $z = a$  числитель отличен от нуля, а знаменатель имеет нуль первого порядка, т. е. разложение знаменателя по степеням  $z - a$  начинается с члена первой степени. Записав разложение числителя и знаменателя в ряд Тейлора вокруг точки  $z = a$ , получим

$$f(z) = \frac{g(a) + g'(a)(z-a) + \frac{g''(a)}{2}(z-a)^2 + \dots}{h'(a)(z-a) + \frac{h''(a)}{2}(z-a)^2 + \dots}.$$

Вблизи точки  $z = a$  правую часть можно заменить на  $\frac{g(a)}{h'(a)(z-a)}$ . Поэтому вычет, т. е. коэффициент при  $(z-a)^{-1}$ , в данном случае равен

$$\text{Выч}_{z=a} f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}. \quad (32)$$

Рассмотрим пример. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \oint_{(L)} \frac{z+1}{(z-1)\sin z} dz,$$

где  $(L)$  — окружность радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 66). В этом примере неопределенный интеграл не выра-

жается через элементарные функции; однако интеграл по замкнутому контуру мы найдем без труда! Для этого заметим, что подынтегральная функция имеет особенности там, где ее знаменатель обращается в нуль, т. е. при  $z = 1$  и  $z = k\pi$  ( $k$  — любое целое). Из этих точек, изображенных на рис. 66, внутрь  $(L)$  попадают только две:  $z = 0$  и  $z = 1$ . Поэтому в силу формулы (31)

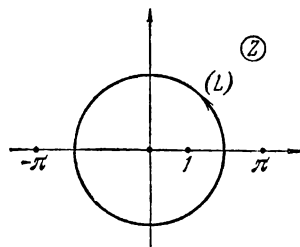


Рис. 66.

$$I = 2\pi i [\text{Выч}_{z=0} f(z) + \text{Выч}_{z=1} f(z)]. \quad (33)$$

Так как в каждой из этих точек знаменатель имеет нуль первого порядка, а числитель отличен от нуля, то мы имеем два полюса

первого порядка и вычеты в них можно подсчитать по формуле (32). В данном примере

$$g(z) = z + 1, \quad h(z) = (z-1) \sin z, \quad h'(z) = \sin z + (z-1) \cos z,$$

откуда  $\text{Выч}_{z=0} f(z) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{1}{-1} = -1$ ,  $\text{Выч}_{z=1} f(z) = \frac{g(1)}{h'(1)} = \frac{2}{\sin 1}$ . Подставляя в (33), получаем

$$I = 2\pi i \left( -1 + \frac{2}{\sin 1} \right) = 8,65i.$$

Теория вычетов применяется также при вычислении некоторых вещественных интегралов с помощью искусственного сведения их к комплексным. Рассмотрим, например, интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx \quad (\omega > 0). \quad (34)$$

Здесь неопределенный интеграл также не выражается через элементарные функции, так что вычисление  $I_1$  по стандартному методу невозможно. Для вычисления  $I_1$  заметим сначала, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{1+x^2} dx = 0, \quad (35)$$

как интеграл от любой нечетной подынтегральной функции в симметричных относительно нуля пределах. Из (34) и (35) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x + i \sin \omega x}{1+x^2} dx = I_1. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь вспомогательный интеграл

$$I_R = \oint_{(L_R)} \frac{e^{i\omega z}}{1+z^2} dz, \quad (37)$$

где контур  $(L_R)$  состоит из полуокружности и ее диаметра, изображенных на рис. 67. Так как подынтегральная функция имеет полюсы первого порядка в точках  $z = \pm i$ , из которых внутри  $(L_R)$  содержится только одна, то по формулам (31) и (32) получаем

$$I_R = 2\pi i \text{Выч}_{z=i} \frac{e^{i\omega z}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{e^{i\omega i}}{2i} = \pi e^{-\omega}.$$

С другой стороны, интеграл (37) можно представить в виде суммы интеграла по отрезку вещественной оси, равного

$$\int_{-R}^R \frac{e^{i\omega x}}{1+x^2} dx, \quad (38)$$

и интеграла по полуокружности, которую мы обозначим через  $(L'_R)$ . Оценим этот последний интеграл. Из определения интеграла легко вывести оценку

$$\left| \int_{(L)} f(z) dz \right| \leq \max_{(L)} |f(z)| \cdot \text{длину } (L);$$

поэтому

$$\left| \int_{(L'_R)} \frac{e^{i\omega z}}{1+z^2} dz \right| \leq \max_{(L'_R)} \left| \frac{e^{i\omega z}}{1+z^2} \right| \cdot \pi R. \quad (39)$$

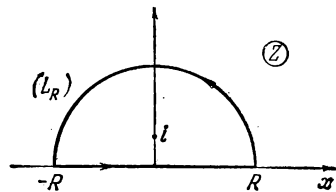


Рис. 67.

Представив  $z = x + iy$  и заметив, что  $y \geq 0$  на  $(L'_R)$ , получим на  $(L'_R)$ , что  $|e^{i\omega z}| = |e^{i\omega(x+iy)}| = |e^{i\omega x}| |e^{-\omega y}| = e^{-\omega y} \leq 1$ . С другой стороны, на  $(L'_R)$  имеем

$$|1 + z^2| = |z^2 \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)| = R^2 \left|1 + \frac{1}{z^2}\right| \approx R^2$$

(при больших  $R = |z|$ ). Значит, правая, а с ней и левая части (39) при  $R \rightarrow \infty$  стремятся к нулю как  $\frac{1}{R^2} R = \frac{1}{R}$ .

Подводя итог, мы видим, что  $I_R = \pi e^{-\omega}$  можно представить в виде суммы интеграла (38) (который в пределе, при  $R \rightarrow \infty$ , стремится к (36), т. е. к  $I_1$ ) и интеграла по  $(L'_R)$ , стремящегося к нулю. Переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , получаем, что  $I_1 = \pi e^{-\omega}$ , т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx = \pi e^{-\omega}. \quad (40)$$

Последняя формула совершенно неочевидна, и ее получение без привлечения комплексных чисел весьма затруднительно и требует большого искусства. При помощи свойств интегралов от комплексных функций удастся находить многие интегралы такого рода от вещественных функций стандартными приемами, требующими лишь аккуратности.

На практике рассмотренный интеграл получается в задаче о возбуждении колебаний в системе с собственной частотой  $\omega$  при действии силы, меняющейся со временем по закону  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ . Полученный результат дает закон уменьшения амплитуды возбуждаемых колебаний при увеличении собственной частоты  $\omega$  системы (см. § VII.5).

На формулу (40) интересно взглянуть с точки зрения результатов § III.4. Это как раз случай, когда функция  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  обращается в нуль вместе со всеми производными на концах  $x = \pm \infty$  интервала интегрирования. Так как все эти производные не имеют разрывов, то из § III.4 следует, что интеграл  $I_1(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени  $\omega$ ; однако точную скорость этого стремления нам удалось получить, только

применяя теорию вычетов. Мерой негладкости функции  $f(x)$ , определяющей эту скорость, здесь служит расстояние от полюса этой функции, продолженной в комплексную плоскость, до мнимой оси.

Конечно, короткий параграф не мог, к сожалению, научить читателя пользоваться техникой интегрирования комплексных функций; но мы надеемся, что он все же помог читателю ощутить красоту теории функций комплексного переменного.

### Упражнения

1. Вычислите интеграл  $\oint_{(L)} \frac{dz}{e^z - 1}$  по окружности  $(L)$  радиуса 4 с центром в точке  $3i$ .

2. Вычислите интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$ .

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1.

$\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ ;  $5(\cos \varphi + i \sin \varphi) \left( \varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right)$ ;  $2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$ ;  $3(\cos \pi + i \sin \pi)$ ;  $1(\cos 0 + i \sin 0)$ ;  $0(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ( $\varphi$  — любое).

#### § 2.

1. Если  $\frac{z_1}{z_2} = w$ , то  $z_1 = z_2 w$ , откуда  $z_1^* = (z_2 w)^* = z_2^* w^*$ , т. е.  $w^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$ .

2. Так как второй корень равен  $2+i$ , то левая часть должна делиться на  $[z - (2-i)][z - (2+i)] = z^2 - 4z + 5$ . Произведя деление и решив остающееся квадратное уравнение, находим  $z_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}$ .

3. Если  $z = x + iy$ , то  $z^* = x - iy = x + i(-y)$ , а  $z^{**} = x - i(-y) = x + iy = z$ .

4.  $zz^* = x^2 + y^2 = |z|^2$ . Интересно, что вещественность произведения  $zz^*$  можно доказать и не переходя к вещественной и мнимой частям, на основании свойств сопряженных чисел:  $(zz^*)^* = z^* z^{**} = z^* z = zz^*$ , а число, равное своему сопряженному, обязательно вещественное.

#### § 3.

1. а)  $1+i = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$ ; б)  $1-i = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{4}}$ ; в)  $-1 = e^{i\pi}$ ; г)  $3i = 3e^{i \frac{\pi}{2}}$ .

2. а) Прежде всего запишем число  $1+i$  в показательной форме, получим  $1+i = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$ , откуда  $(1+i)^{16} = \left( \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \right)^{16} = (\sqrt{2})^{16} \cdot e^{i \frac{\pi}{4} \cdot 16} = 2^8 \cdot e^{i 4\pi} = 2^8 = 256$ ; б)  $-1$ .

3.  $\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$ ;  $\sin 4\varphi = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi$ .

4. В формуле Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  заменим  $\varphi$  на  $-\varphi$ , получим  $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ . Складывая эти две формулы почленно, получим  $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$ , откуда  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ . Почленным вычитанием получим вторую формулу.

## § 4.

1. а)  $\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi)$ ; б)  $\ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ; в)  $\ln(-i) = i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ;  
г)  $\ln(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ .

2. Так как  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ , то общий вид чисел  $x_k$  таких, что  $x_k^3 = -1$ , есть

$$x_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Поэтому

$$x_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$x_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3. 1; \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; -1; -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. На основании упражнения 4 к § 3 приходим к уравнению  $\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = 2$ . Отсюда после легких преобразований получаем  $e^{2i\varphi} - 4e^{i\varphi} + 1 = 0$ .

Это — квадратное уравнение относительно  $e^{i\varphi}$ ; решая его, находим  $e^{i\varphi} = 2 \pm \sqrt{3}$ . Отсюда  $i\varphi = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$  ( $k$  — любое целое). Деля на  $i$  и заметив, что  $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$  и потому  $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$ , получаем окончательный ответ:  $\varphi = \pm \ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi = \pm 1,317i + 2k\pi$ . Все эти решения мнимые.

5. Аналогично находим  $\varphi = \pm \ln(2 + \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

## § 5.

1.  $J = \frac{\varphi_0 e^{i\beta}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} e^{i\omega t}$ . Таким образом, получаются те же формулы,

что для разобранных в тексте случая  $R, L$ -цепи, однако вместо  $\omega L$  надо подставить  $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ . В частном случае, когда  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ , будет  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ , т. е. индуктивность и емкость как бы взаимно уничтожаются.

2.  $J = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}\right) \varphi_0 e^{i\beta} e^{i\omega t}$ . Отсюда  $j_0 = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \varphi_0$ ,  $\alpha = \beta + \arg(R + i\omega L) - \frac{\pi}{2}$  при том же смысле обозначений, что в тексте.

## § 6.

$f(z) = (x + iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$ , откуда  $u = x^3 - 3xy^2$ ,  $v = 3x^2y - y^3$ ;  
 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$ ;  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$ .

## § 7.

1. Из условия  $u = x + x^2 - y^2$  находим  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2x$ .

Пользуясь первым из условий Коши—Римана, получаем  $\frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 2x$ . Для того, чтобы отсюда найти  $v$ , достаточно проинтегрировать это равенство по  $y$ , считая  $x$  постоянным. Получим

$$v(x, y) = y + 2xy + \varphi(x) *).$$

Теперь находим  $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x)$ . Но согласно второму из условий Коши—Римана

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ . Так как  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ , то получаем  $2y + \varphi'(x) = 2y$ , откуда  $\varphi'(x) = 0$ , т. е.  $\varphi(x) \equiv C$ , где  $C$  — постоянная. Следовательно,  $v(x, y) = y + 2xy + C$ .

Для определения  $C$  воспользуемся условием  $f(0) = 0$ , оно означает, что  $u = 0$ ,  $v = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Итак,  $v = 0$  при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , поэтому  $C = 0$ ,  $v(x, y) = y + 2xy$ .

2.  $u(x, y) = -x^2 + y^2 + 1$ .

## § 8.

а)  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ; б)  $-\pi i$ ,  $\pi i$ ; в)  $\frac{2}{3}(1 + i)$ ,  $\frac{2}{3}(-1 + i)$  (сначала пишется результат для верхней полуокружности, потом для нижней). В случае а) подынтегральная функция аналитична всюду и потому интеграл не зависит от пути интегрирования. В случае б) подынтегральная функция обращается при  $z = 0$  в бесконечность, а в случае в) она имеет там точку ветвления.

## § 9.

1. Подынтегральная функция имеет внутри  $(L)$  два полюса первого порядка:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 2\pi i$ . Поэтому интеграл равен

$$2\pi i \left( \text{Выч}_{z=0} \frac{1}{e^z - 1} + \text{Выч}_{z=2\pi i} \frac{1}{e^z - 1} \right) = 2\pi i \left( \frac{1}{e^0} + \frac{1}{e^{2\pi i}} \right) = 4\pi i.$$

2. Подобно примеру (34), рассматриваемый интеграл равен интегралу от функции  $f(z) = \frac{1}{1 + z^6}$  по контуру  $(L_R)$  рис. 67 при большом  $R$ . Но  $f(z)$  имеет

внутри  $(L_R)$  три простых полюса:  $z_1 = \frac{\sqrt[6]{3}}{2} + i \frac{1}{2}$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = -\frac{\sqrt[6]{3}}{2} + i \frac{1}{2}$ .

Поэтому интеграл равен

$$2\pi i \left( \frac{1}{6z_1^5} + \frac{1}{6z_2^5} + \frac{1}{6z_3^5} \right) = \frac{2\pi i}{6} \left( \frac{z_1}{z_1^6} + \frac{z_2}{z_2^6} + \frac{z_3}{z_3^6} \right) = -\frac{\pi i}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{2}{3}\pi.$$

В этом примере неопределенный интеграл выражается через элементарные функции, однако приведенный способ вычисления гораздо проще.

\*) Так как при интегрировании  $x$  постоянно, то роль постоянной интегрирования может играть любая функция  $\varphi$ , зависящая только от одного переменного  $x$ .

## ГЛАВА VI

### ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА \*)

#### § 1. Дельта-функция Дирака $\delta(x)$

Возьмем функцию  $y = \Phi_1(x)$  имеющую максимум при  $x=0$ , быстроубывающую в обе стороны от  $x=0$ , и притом такую, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(x) dx = 1.$$

Эти условия отнюдь не определяют вид функции  $\Phi_1(x)$ ; можно придумать много функций, удовлетворяющих всем поставленным выше требованиям, например:

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad (1)$$

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} **). \quad (2)$$

Числовой множитель обеспечивает равенство интеграла единице. Графики этих функций приведены на рис. 68. Произведем над линией

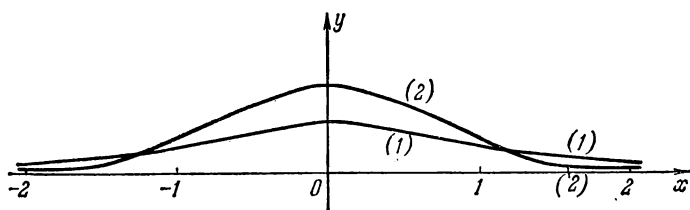


Рис. 68.

$y = \Phi_1(x)$  следующее преобразование: увеличим ее высоту в  $m$  раз и одновременно уменьшим ее ширину во столько же раз. Напомним

---

\*) Эта глава, хотя и написана независимо, непосредственно перекликается с Добавлением к ВМ.

\*\*) Можно доказать, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , см. § IV.7.



(см., например, ВМ, § IV.7), что если увеличить высоту линии  $y = \Phi_1(x)$  в  $m$  раз, то ее уравнение приобретает вид  $y = m\Phi_1(x)$ , а если уменьшить ширину в  $m$  раз, то уравнение станет таким:  $y = \Phi_1(mx)$ . Значит, после обоих преобразований уравнение кривой будет  $y = \Phi_m(x) = m\Phi_1(mx)$ . Например, из (1) получим  $\Phi_m(x) = \frac{m}{\pi} \frac{1}{1+(mx)^2}$ . Ясно, что площадь, заключенная между графиком и осью  $x$ , при растяжении кверху увеличится в  $m$  раз, а при сжатии с боков уменьшится во столько же раз, т. е. в конечном счете останется без изменения. Впрочем, это легко доказать и с помощью интегрирования после замены переменной интегрирования  $mx = s$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} m\Phi_1(mx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(mx) d(mx) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(x) dx. \end{aligned}$$

Какой вид имеет преобразованная функция при очень больших  $m$ , или, выражаясь точнее, в пределе, при неограниченном возрастании  $m$ ? При любом фиксированном  $x \neq 0$  величина  $y = m\Phi_1(mx)$  будет неограниченно приближаться к нулю при неограниченном росте  $m$ , потому что уменьшение  $\Phi_1(mx)$  при увеличении  $m$  происходит быстрее, чем рост множителя  $m$ . Для этого надо, чтобы  $\Phi_1(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  стремилась к нулю быстрее, чем  $\frac{1}{x}$  (это и означает, что функция быстроубывающая\*). Так, например, в выражении  $\Phi_m(x) = \frac{m}{\pi} \frac{1}{1+(mx)^2}$  при данном  $x \neq 0$  и при достаточно большом  $m$  будет  $(mx)^2 \gg 1$  и, следовательно,  $\Phi_m(x) \approx \frac{m}{\pi} \frac{1}{m^2 x^2} = \frac{1}{\pi m x^2}$ , т. е. неограниченно убывает при возрастании  $m$ . Еще быстрее убывает при росте  $m$  величина  $\Phi_m(x)$ , полученная из формулы (2). Действительно, в этом случае  $\Phi_m(x) = \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-(mx)^2}$ , а известно, что показательная функция с отрицательным показателем убывает быстрее любой степени  $m$  (см., например, ВМ, § II.21).

Пусть теперь  $x = 0$ . Тогда  $\Phi_1(mx) = \Phi_1(0)$  постоянна при любом  $m$ , а поэтому  $\Phi_m(0) = m\Phi_1(0)$  неограниченно увеличивается с ростом  $m$ .

Следовательно, неограниченно увеличивая  $m$ , мы получаем функцию со следующими свойствами:

- 1) функция равна нулю при всех  $x < 0$  и при всех  $x > 0$ ;
- 2) функция бесконечна при  $x = 0$ ;

---

\*) Такая скорость убывания автоматически следует из сходимости интеграла (см. § III.1).

3) интеграл от этой функции, взятый в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , равен 1.

Функция, обладающая этими свойствами, называется *дельта-функцией Дирака* и обозначается через  $\delta(x)$  \*). Функция  $\delta(x)$  необычайно удобна и широко применяется сейчас в физике.

Мы пришли к понятию  $\delta(x)$ , рассматривая обычные хорошо известные функции и преобразуя их определенным образом. Замечательно, однако, что для применения  $\delta(x)$  достаточно знать три ее свойства, которые мы перечислили выше, и совершенно не требуется знать, из какой именно функции  $\left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \text{ или } \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \text{ или еще какой-нибудь}\right)$  получена функция  $\delta(x)$ . Грубо говоря, дельта-функция—это функция, принимающая на узком участке большие значения, причем эти значения согласованы с шириной участка так, что выполняется условие 3). (Отсюда следует, в частности, что размерность  $[\delta(x)] = 1/[x]$ .)

Из свойств  $\delta(x)$  следует основное соотношение

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (3)$$

В самом деле,  $\delta(x) = 0$  при всех  $x \neq 0$ , поэтому

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) f(x) dx,$$

где  $\varepsilon$ —малая величина. В последнем интеграле промежуток интегрирования мал (его длина равна  $2\varepsilon$ ), поэтому на нем  $f(x) \approx f(0)$ , следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) f(0) dx = f(0) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0). \end{aligned}$$

Итак, формула (3) следует из трех свойств  $\delta(x)$ . Справедливо и обратное утверждение: если определить  $\delta(x)$  как функцию, для которой выполняется соотношение (3) при любой  $f(x)$ , то отсюда следуют все три свойства  $\delta(x)$ . Не останавливаясь на детальном доказательстве этого факта, покажем, например, что из (3) следует первое свойство:  $\delta(x) = 0$  при  $x \neq 0$ .

\*) Поль Адриан Морис Дира́к, именем которого названа функция, крупнейший английский физик-теоретик, предсказавший в 1929 году существование античастиц—позитрона, антипротона и других, которые позже были открыты экспериментально.

Действительно, из формулы (3) ясно, что величина интеграла не зависит от поведения функции  $f(x)$  при  $x \neq 0$ , а зависит только от  $f(0)$ . Это означает, что  $f(x)$  входит под знак интеграла с множителем, равным нулю при  $x \neq 0$ , т. е.  $\delta(x) = 0$  при  $x \neq 0$ .

Заметим, что  $\delta(x-a)$  отлично от нуля (и притом бесконечно) только при  $x=a$ . Рассуждая, как при выводе формулы (3), получаем формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a). \quad (4)$$

Отметим еще некоторые интересные формулы для дельта-функции. Прежде всего

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a = \text{const} \neq 0).$$

В самом деле, функция  $|a| \delta(ax)$  удовлетворяет всем трем свойствам, определяющим дельта-функцию. Чуть-чуть менее очевидное третье свойство проверяется с помощью подстановки  $ax = x_1$  так:

$$\begin{aligned} a > 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |a| \delta(ax) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) a dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1) dx_1 = 1, \\ a < 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |a| \delta(ax) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) a dx = \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} \delta(x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1) dx_1 = 1. \end{aligned}$$

Еще одно свойство:

$$\delta(\varphi(x)) = \frac{1}{|\varphi'(x_0)|} \delta(x-x_0),$$

если  $\varphi(x)$  обращается в нуль лишь при  $x=x_0$ . Это свойство следует из предыдущего, так как вблизи  $x=x_0$  с точностью до малых высшего порядка можно написать

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) = \varphi'(x_0)(x-x_0).$$

Наконец,

$$f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a),$$

что сразу вытекает из равенства функции  $\delta(x-a)$  нулю при  $x \neq a$ .

С помощью  $\delta$ -функции чрезвычайно удобно записывать многие физические соотношения. Рассмотрим, например, тонкий стержень, на котором в нескольких отдельных местах помещены грузы. Пусть размеры грузов весьма малы по сравнению с длиной стержня, а их массы того же порядка, что и масса стержня. Тогда при решении задач (определение полной массы, определение положения равновесия

и т. п.) приходится рассматривать и массы грузов (их называют сосредоточенными массами) и массу стержня (распределенная масса). Пусть плотность стержня есть  $\rho_p(x)$  \*). Тогда масса стержня, начало которого помещено в начало координат, а конец в точку  $x=l$ ,

$$\text{равна } m_p = \int_0^l \rho_p(x) dx.$$

Пусть в точке  $x=a$  стержня находится груз  $m_a$ . Тогда полная масса стержня и груза равна

$$m = m_a + \int_0^l \rho_p(x) dx.$$

С помощью  $\delta$ -функции можно представить сосредоточенную массу как массу, распределенную с плотностью  $\rho_c(x) = m_a \delta(x-a)$ . Действительно, последняя формула означает, что плотность отлична от нуля лишь в малой окрестности точки  $x=a$ , причем

$$\int_0^l \rho_c(x) dx = m_a \int_0^l \delta(x-a) dx = m_a.$$

Таким образом, введя функцию  $\rho_c(x)$ , мы можем сосредоточенную массу записать в форме, которая по виду совпадает с формой записи для распределенной массы.

Положим теперь

$$\rho(x) = \rho_p(x) + \rho_c(x) = \rho_p(x) + m_a \delta(x-a).$$

Тогда полная масса равна

$$m = \int_0^l \rho(x) dx.$$

Таким образом, полную массу можно не писать как сумму членов разного вида; она записывается при помощи интеграла, т. е. так же, как распределенная масса. Различный характер распределенной и сосредоточенной масс сказывается лишь на виде функции  $\rho(x)$ . Благодаря этому мы можем единообразно записывать все те соотношения, которые были нами получены раньше лишь для распределенной массы.

Так, например, масса, находящаяся между точками  $x=b$  и  $x=c$  стержня, равна  $\int_b^c \rho(x) dx$ . Никаких оговорок о том, что  $b > a$ , или  $b < a$  и т. п. не требуется: функция  $\rho(x)$  содержит  $\delta(x-a)$ , а

---

\*) Индексы «р» и «с» будут обозначать «распределенный» и «сосредоточенный».

интегрирование функции  $\delta(x-a)$  автоматически добавит к массе стержня массу груза, если только груз расположен между точками  $x=b$  и  $x=c$ .

Точно так же положение центра тяжести стержня дается форму-

$$\text{лой } x_c = \frac{\int_0^l x \rho(x) dx}{\int_0^l \rho(x) dx}, \text{ независимо от того, имеется на стержне сосре-}$$

доточенная масса или нет.

Случай нескольких сосредоточенных масс рассматривается буквально так же.

Рассмотрим еще пример. В механике наряду с действием сил, плавно изменяющихся с течением времени, приходится рассматривать резкий удар, столкновение тел. При ударе на тело действует кратковременная, но очень большая сила. В большинстве случаев детальное изучение зависимости силы от времени на протяжении короткого момента, в течение которого длится удар, не представляет интереса (см., например, ВМ, § VI.5). Достаточно знать импульс силы, т. е.  $I_y = \int F dt$ . Тогда силу при ударе можно записать так:  $F(t) = I_y \times \delta(t-t_y)$ , где  $t_y$  — момент удара,  $I_y$  — импульс удара. Эта запись показывает, что сила отлична от нуля лишь в момент удара, а импульс этой силы равен  $I_y$ .

Отметим в заключение, что дельта-функция рассматривается лишь для вещественных значений независимой переменной.

### Упражнения

1. Вычислите  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x-3) dx$ .
2. Упростите выражения:
  - а)  $(x^2+3)\delta(x+5)$ ; б)  $\delta(2x-8)$ ; в)  $\delta(x^2+x-2)$ .

## § 2. Функция Грина

Рассмотрим сначала пример. Пусть тонкая гибкая нить длины  $l$  натянута вдоль оси  $x$  постоянной силой  $F$ . В системе, изображенной на рис. 69, такое натяжение осуществляется при помощи блока и груза. Пусть на нить действует перпендикулярно оси  $x$  сила, распределенная с плотностью  $f(x)$ , т. е. на малый участок нити между точками  $x$  и  $x+dx$  действует сила  $f(x)dx$ , а на всю нить действует

сила  $\int_0^l f(x) dx$ . Найдём форму  $y(x)$ , которую при этом примет нить;

здесь функция  $y(x)$  — это отклонение той точки нити, которая в первоначальном состоянии находилась в точке  $x$  оси  $x$ .

Мы будем считать, что натяжение  $F$  нити гораздо больше всей силы, действующей на нить, так что отклонение нити мало. Тогда можно пользоваться законом линейности, согласно которому при наложении нескольких нагрузок соответствующие прогибы также складываются.

Допустим сначала, что приложенная нагрузка имеет специальный вид, а именно, представляет собой единичную сосредоточенную

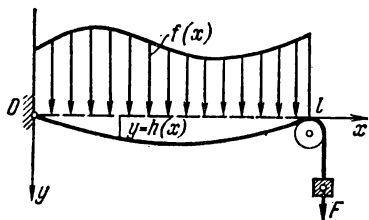


Рис. 69.

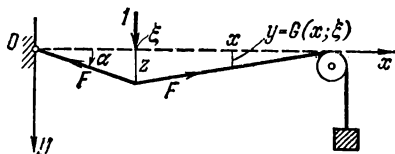


Рис. 70.

нагрузку, приложенную в некоторой точке воздействия  $\xi$  оси  $x$ , и обозначим через  $y = G(x; \xi)$  соответствующий прогиб в любой точке наблюдения  $x$  (рис. 70). Эта функция  $G(x; \xi)$  называется *функцией влияния* или *функцией Грина* (по имени английского математика Дж. Грина (1793—1841)) рассматриваемой задачи. Мы сейчас покажем, что если она известна, то легко найти прогиб и от воздействия произвольной нагрузки с плотностью  $f(x)$ .

В самом деле, рассмотрим нагрузку, приходящуюся на участок оси от точки  $\xi$  до точки  $\xi + d\xi$ . Эта нагрузка равна  $f(\xi) d\xi$ ; поэтому прогиб от нее в точке  $x$  равен  $G(x; \xi) f(\xi) d\xi$ , так как из закона линейности вытекает, что если внешнюю нагрузку умножить на постоянный множитель, то и прогиб умножится на тот же множитель. Складывая такие бесконечно малые прогибы от всех элементов нагрузки от  $\xi = 0$  до  $\xi = l$ , получаем суммарный прогиб (см. рис. 69)

$$y = h(x) = \int_0^l G(x; \xi) f(\xi) d\xi. \quad (5)$$

В рассматриваемом примере нетрудно выписать функцию  $G(x; \xi)$  в явном виде. В самом деле, найдем составляющие сил натяжения нити вдоль оси  $y$ . Слева от точки  $\xi$  она равна (см. рис. 70)

$$-F \sin \alpha = -F \frac{z}{\xi},$$

где  $z$  — отклонение точки  $\xi$ , нам заранее не заданное; отметим, что при этом выводе мы воспользовались малостью отклонений и поэтому

при подсчете синуса заменили гипотенузу треугольника на его больший катет. Аналогично получаем составляющую силы натяжения справа от  $\xi$

$$-F \frac{z}{l-\xi}.$$

Если под действием заданной силы нить находится в равновесии, то это означает, что сумма всех сил, действующих на нить, т. е. сумма сил натяжения и заданной силы, равна нулю. Поэтому равна нулю и сумма составляющих этих сил по оси  $y$ . Так как в нашем случае заданная сила равна 1 и действует вдоль оси  $y$ , то на основании предыдущего получаем

$$1 - F \frac{z}{\xi} - F \frac{z}{l-\xi} = 0,$$

откуда находим  $z = \frac{\xi(l-\xi)}{Fl}$ . Если  $z$  известно, то отклонение любой точки нити найти легко, пользуясь тем, что нить имеет форму ломаной. Получим

$$y(x) = z \frac{x}{\xi}, \quad \text{если } x < \xi,$$

$$y(x) = z \frac{l-x}{l-\xi}, \quad \text{если } x > \xi,$$

Подставляя сюда найденное значение  $z$  и вспоминая, что форма отклонения при единичной сосредоточенной нагрузке дает функцию Грина, получаем в данной задаче

$$G(x; \xi) = \begin{cases} \frac{1}{Fl} x(l-\xi), & \text{если } x < \xi, \\ \frac{1}{Fl} \xi(l-x), & \text{если } x > \xi. \end{cases}$$

Найденное выражение для функции Грина можно подставить в формулу (5) для прогиба от произвольной нагрузки. Так как  $G(x; \xi)$  при  $\xi < x$  и при  $\xi > x$  записывается с помощью различных формул, то интеграл разбиваем на два:

$$\begin{aligned} y = h(x) &= \int_0^x G(x; \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^l G(x; \xi) f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{l-x}{Fl} \int_0^x \xi f(\xi) d\xi + \frac{x}{Fl} \int_x^l (l-\xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Тот же результат можно получить, выписав дифференциальное уравнение для функции  $y(x)$  и решив его. Однако замечательно, что нам удалось найти решение задачи, даже не выписывая самого дифференциального уравнения. Нам достаточно было знать, что действует закон линейности.

Перейдем теперь к общей схеме построения функции влияния. Пусть внешнее воздействие на какой-либо объект описывается функцией  $f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ; в приведенном примере это и была функция  $f(x)$ ), а результат этого воздействия — функцией  $F(x)$  (в приведенном примере это была функция  $h(x)$ ). Можно себе представить, что каждой заданной функции  $f$  отвечает новая функция  $F$ , т. е. получается, что каждая функция  $f$  по какому-то определенному закону преобразуется в новую функцию  $F$ . Такой закон преобразования функций — *преобразов* в функции-образы в математике называется *оператором*. Например, хорошо известен оператор дифференцирования  $D$ , действующий по закону  $Df = f'$ , т. е.  $D(\sin x) = \cos x$ ,  $D(x^3) = 3x^2$  и т. д. Здесь  $\sin x$  — прообраз, который преобразуется оператором  $D$  в образ  $\cos x$  и т. д. Понятие оператора аналогично понятию функции, но если функция давала закон преобразования чисел (значений независимой переменной) в числа (значения зависимой переменной), то оператор преобразует функции в функции.

Обозначим оператор перехода от функции внешнего воздействия  $f(x)$  к функции «отклику»  $F(x)$  через  $L$ , так что  $F = Lf$ . Мы предположим, что действует закон *линейности* или *принцип суперпозиции*: при сложении внешних воздействий их результаты также складываются; этот закон часто выполняется с достаточной точностью, когда внешние воздействия не слишком велики. Его можно записать в форме

$$L(f_1 + f_2) = Lf_1 + Lf_2. \quad (6)$$

Оператор, обладающий таким свойством, называется *линейным*. (Проверьте, что, например, оператор дифференцирования является линейным.) Из этого свойства можно вывести, что при умножении внешнего воздействия на константу его результат умножится на ту же константу, т. е.

$$L(Cf) = CLf \quad (C = \text{const}). \quad (7)$$

Мы не будем этого доказывать. (Попробуйте это обосновать, считая сначала  $C$  целым положительным, затем полагая  $C = \frac{1}{n}$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ), далее полагая  $C = \frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — целые положительные, затем для  $C = 0$  и, наконец, считая  $C$  отрицательным.)

В примере, разобранным в начале этого параграфа, мы под  $G(x; \xi)$  понимали результат воздействия единичной силы, сосредоточенной в некоторой точке  $\xi$ , т. е., другими словами (см. § 1), распределенной с плотностью  $\delta(x - \xi)$ . Так и в общем случае мы обозначим через  $G(x; \xi)$  результат внешнего воздействия, описываемого дельта-функцией с особенностью в некоторой фиксированной точке  $\xi$ , т. е. функцией  $\delta(x - \xi)$ . Таким образом,

$$G(x; \xi) = L[\delta(x - \xi)].$$



Как же с помощью этой функции Грина  $G(x; \xi)$  выразить результат преобразования любой заданной функции  $f(x)$ ? Для этого представим функцию  $f$  в виде суммы «столбчатых» функций (рис. 71), каждая из которых сосредоточена лишь в одной точке  $\xi$ , а вне бесконечно малой окрестности этой точки она равна нулю. Поэтому такая столбчатая функция пропорциональна дельта-функции  $\delta(x - \xi)$ , а так как интеграл от столбчатой функции равен  $f(\xi) d\xi$ , то она просто равна  $[f(\xi) d\xi] \delta(x - \xi)$ . Таким образом, мы получаем представление

$$f(x) = \sum [f(\xi) d\xi] \delta(x - \xi).$$

Строго говоря, при бесконечно малых  $d\xi$  здесь надо писать не знак суммы, а знак интеграла, так что это, по существу, формула (4) в другой записи; однако закон линейности для сумм в пределе переносится и на интегралы.

Каждая столбчатая функция в силу свойства (7) преобразуется в

$$L[f(\xi) d\xi] \delta(x - \xi) = [f(\xi) d\xi] L[\delta(x - \xi)] = f(\xi) G(x; \xi) d\xi.$$

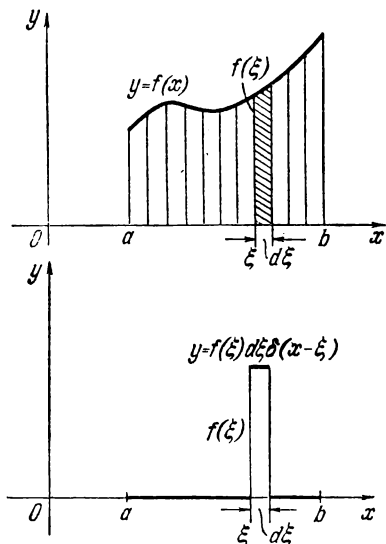


Рис. 71.

Поэтому сумма таких функций в силу свойства (6) преобразуется в

$$L[\sum [f(\xi) d\xi] \delta(x - \xi)] = \sum L[f(\xi) d\xi] \delta(x - \xi) = \sum f(\xi) G(x; \xi) d\xi.$$

При бесконечно малых  $d\xi$  эта сумма является интегралом, т. е. окончательно

$$F(x) = L[f(x)] = \int_a^b G(x; \xi) f(\xi) d\xi \quad (8)$$

(сравните с формулой (5)).

Функцию влияния можно в более простых случаях подсчитать теоретически, как в разобранном выше примере, а в более сложных задачах определить экспериментально, произведя необходимые замеры, например измеряя деформацию системы под действием сосредоточенной силы. При этом возможность применения принципа суперпозиции или, как говорят, линейность рассматриваемой системы либо следует из общетеоретических принципов, либо также может быть проверена экспериментально. После того как функция Грина найдена и линейность системы установлена, решение задачи пишется по формуле (8) для любого внешнего воздействия  $f$ .

Таким образом, иногда даже самые общие представления о свойствах физических систем указывают путь решения конкретных задач.

Отметим в заключение, что функции-образы  $Lf$  не обязаны быть определенными на том же интервале, что функции-прообразы  $f$ ; более того, независимые переменные  $x$  и  $\xi$  в формуле (8) могут иметь разный физический смысл. Независимая переменная  $\xi$  может играть роль времени; тогда функция влияния описывает результат воздействия «единичного импульса», подействовавшего в момент  $\xi$ .

#### Упражнение

Напишите функцию влияния для операторов: а)  $Lf = 2f(x)$ ; б)  $Lf = \sin x \cdot f(x)$ ; в)  $Lf = f(x+1)$ ; г)  $Lf = f(x^2)$ .

### § 3. Функции, связанные с дельта-функцией

При помощи  $\delta$ -функции легко записываются некоторые другие функции, имеющие большое значение. Важным примером может служить *единичная функция*  $e(x)$  (другое обозначение  $\vartheta(x)$ ):

$$e(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx. \quad (9)$$

Ясно, что при  $x < 0$  получаем  $e(x) = 0$ , а при  $x > 0$  получаем  $e(x) = 1$ . Таким образом,  $e(x)$  — это разрывная функция, испытывающая скачок при  $x = 0$ . Ее график («ступенька») изображен на рис. 72,

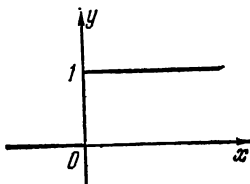


Рис. 72.

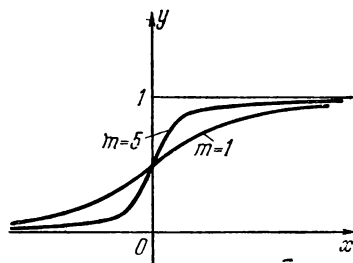


Рис. 73.

она получается при внезапном подключении какого-либо постоянного воздействия, например, напряжения в электрическую цепь (при этом независимая переменная играет роль времени).

Равенство (9) можно получить также с помощью приближенных представлений дельта-функции. В § 1 мы видели, что одним из таких представлений служит функция  $\frac{1}{\pi} \frac{m}{1+(mx)^2}$  при большом  $m$ . Однако

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi} \frac{m}{1+(mx)^2} dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} mx \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} mx + \frac{1}{2}.$$

График этого интеграла при  $m=1$  и  $m=5$  показан на рис. 73. В пределе, при  $m \rightarrow \infty$ , из интеграла получаем  $e(x)$ , т. е. приходим к равенству (9).

Тот же результат можно получить с помощью столбчатой функции, график которой изображен на рис. 74, а (из нее также в пределе, при  $N \rightarrow \infty$ , получается дельта-функция). График интеграла от нее показан на рис. 74, б. В пределе, при  $N \rightarrow \infty$ , и здесь получаем равенство (9).

Равенство (9) можно продемонстрировать на следующем физическом примере. Рассмотрим прямолинейное движение массы  $m$  под действием переменной силы  $F(t)$ , направленной вдоль этой же прямой. Записав выражение второго закона Ньютона и проведя интегрирование, получим равенство (см., например, ВМ, § VI.4)

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t F(t) dt$$

(мы приняли, что начальная скорость при  $t = -\infty$  равна нулю). Пусть сила имеет характер удара:

$F(t) = I_y \delta(t - t_y)$  (см. конец § 1). Интегрируя, получим

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t I_y \delta(t - t_y) dt = \frac{I_y}{m} e(t - t_y),$$

т. е. скорость  $v$  равна нулю до удара и равна  $\frac{I_y}{m}$  после удара.

Вернемся к математике. Если продифференцировать равенство (9), то получится, что

$$e'(x) = \delta(x). \quad (10)$$

Это равенство также можно показать на только что разобранных примерах. Так, в качестве приближенного представления функции  $e(x)$  можно взять функцию, изображенную на рис. 74, б, производная которой показана на рис. 74, а; в пределе, при  $N \rightarrow \infty$ , мы приходим к равенству (10).

Мы в нашем изложении исходили из дельта-функции и пришли к единичной функции с помощью интегрирования. Можно было пойти и по обратному пути: исходить из функции  $e(x)$  и получить функцию  $\delta(x)$  с помощью дифференцирования. Таким образом, дельта-функция

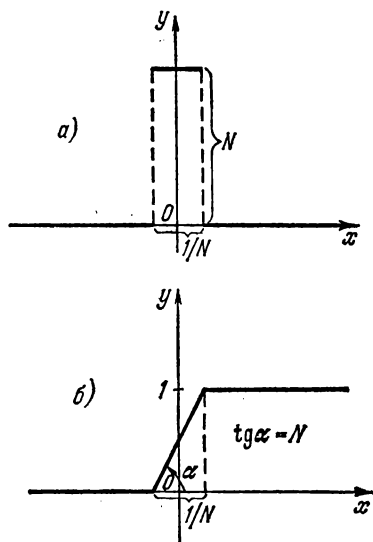


Рис. 74.

получается при дифференцировании разрывной функции  $e(x)$ . Подобно этому при дифференцировании любой разрывной функции появляются дельта-слагаемые.

Рассмотрим, например, функцию  $f(x)$ , заданную двумя формулами:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x^2 + 2, & \text{если } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

График этой функции, имеющий разрыв при  $x=1$ , показан жирными линиями на рис. 75. Было бы ошибочно приравнять  $f'(x)$  просто функции  $\varphi(x)$ , полученной дифференцированием обеих формул:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 2x, & \text{если } 1 < x < \infty. \end{cases} \quad (11)$$

В самом деле, если мы проинтегрируем последнюю функцию, например, от значения  $x=0$ , то мы получим

$$\text{при } 0 < x < 1: \int_0^x \varphi(x) dx = \int_0^x 3x^2 dx = x^3,$$

$$\text{при } x > 1: \int_0^x \varphi(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx +$$

$$+ \int_1^x \varphi(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^x 2x dx = x^3 \Big|_0^1 + x^2 \Big|_1^x = x^2.$$

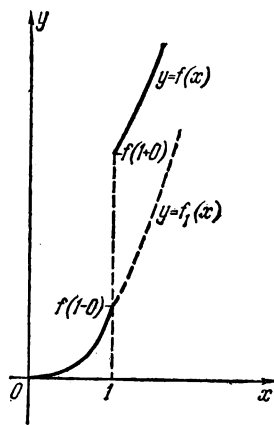


Рис. 75.

Таким образом, получается не  $f(x)$ , а непрерывная функция  $f_1(x)$ , график которой при  $x > 1$  показан на рис. 75 пунктиром. Чтобы из  $f_1(x)$  получить  $f(x)$ , надо к первой функции прибавить «ступеньку» с разрывом при  $x=1$ , равным разрыву функции  $f(x)$ , т. е. равным

$$f(1+0) - f(1-0) = (1^2 + 2) - 1^3 = 2^*).$$

Таким образом,  $f(x) = f_1(x) + 2e(x-1)$ , откуда окончательно

$$f'(x) = f'_1(x) + 2e'(x-1) = \varphi(x) + 2\delta(x-1),$$

где  $\varphi(x)$  задана формулами (11).

С функцией  $e(x)$  тесно связана функция  $\text{sign } x^{**})$ , которую можно определить так:

$$\text{sign } x = \frac{x}{|x|}.$$

\*) Запись  $f(1-0)$  — это условное, но удобное обозначение для предела значения  $f(1-\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\varepsilon > 0$ ); аналогично расшифровывается запись  $f(1+0)$ .

\*\*)  $\text{sign}$  — первые буквы латинского слова  $\text{signum}$  (знак).

Она равна  $-1$  при  $x < 0$  и  $+1$  при  $x > 0$ ; таким образом, она показывает знак числа  $x$ . Легко убедиться в правильности соотношения

$$\operatorname{sign} x = 2e(x) - 1.$$

При интегрировании функции  $e(x)$  получается уже непрерывная функция, график которой изображен на рис. 76, так как

$$\int_{-\infty}^x e(x) dx \begin{cases} \text{при } x < 0 \text{ равен } \int_{-\infty}^x 0 dx = 0, \\ \text{при } x > 0 \text{ равен } \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x 1 dx = x. \end{cases}$$

(Проверьте, что эта функция равна  $\frac{x+|x|}{2}$ .)

Дельта-функцию можно не только интегрировать, но и дифференцировать; ее производная  $\delta'(x)$  имеет еще более «острую» особенность, чем  $\delta(x)$ , причем принимает значения обоих знаков. Так, если исходить из приближенного представления функции  $\delta(x)$  в виде

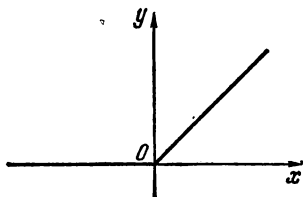


Рис. 76.

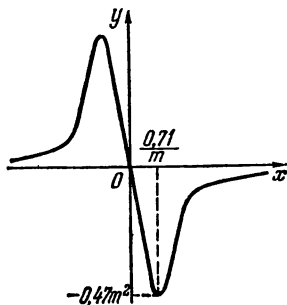


Рис. 77.

$\frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-(mx)^2}$  при большом  $m$  (см. § 1), то мы получаем приближенное представление  $\delta'(x)$  в виде функции

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-(mx)^2} \right] = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} m^3 x e^{-(mx)^2},$$

график которой показан на рис. 77. Эта функция принимает экстремальные значения при  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}m} = \pm \frac{0,71}{m}$ , равные по абсолютной величине  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} m^2 = 0,47m^2$ . (Проверьте.) Эти значения пропорциональны уже  $m^2$ , а не  $m$ , как при представлении функции  $\delta(x)$ .

Можно исходить из приближенного представления функции  $\delta(x)$  в виде треугольника, показанного на рис. 78, а, при большом  $M$ ;

тогда функция  $\delta'(x)$  будет приближенно представлена графиком, показанным на рис. 78, б.

Если  $\delta$ -функция описывает плотность единичного заряда, расположенного в начале координат (ср. § 1), то  $\delta'(x)$  описывает плотность «диполя», расположенного там же. Такой диполь получается, если разместить заряды  $q$  и  $-q$  соответственно в точках  $x=0$  и  $x=l$ , а затем, оставляя  $p=ql$  (момент диполя) без изменения, устремить  $l$  к нулю, а  $q$  к бесконечности, так что в пределе получатся два равных бесконечно больших заряда про-

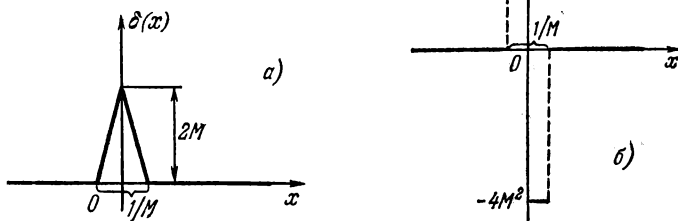


Рис. 78.

тивоположного знака на бесконечно близком расстоянии. До перехода к пределу плотность заряда имеет вид

$$q\delta(x) - q\delta(x-l) = p \frac{\delta(x-l) - \delta(x)}{-l};$$

поэтому после перехода к пределу при  $l \rightarrow 0$  плотность заряда равна  $p\delta'(x)$ .

Интегралы с участием  $\delta'(x)$  вычисляются с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x-a) dx &= f(x) \delta(x-a) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x-a) dx = -f'(a). \end{aligned} \quad (12)$$

Дельта-функцию можно рассматривать также на плоскости и в пространстве. Например, в пространстве под функцией  $\delta(x, y, z)$  надо понимать функцию, равную нулю всюду вне начала координат  $(0; 0; 0)$ , равную бесконечности в начале и притом такую, что интеграл от нее по всему пространству равен единице. Легко проверить, что этим условиям, в частности, удовлетворяет функция

$$\delta(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Таким образом, массу  $m$ , сосредоточенную в точке  $(a; b; c)$ , можно рассматривать как массу, распределенную в пространстве с плотностью

$$\rho(x, y, z) = m \delta(x-a) \delta(y-b) \delta(z-c).$$

### Упражнения

1. Найдите  $|x|'$ ;  $|x|^n$ .

2. Найдите  $\left[ \left( 1 + e^{\frac{1}{x}} \right)^{-1} \right]'$ .

3. Убедитесь в справедливости формулы (12) непосредственно, воспользовавшись разложением функции  $f(x)$  в ряд по степеням  $x-a$  и приближенным представлением функции  $\delta'(x)$  в виде, показанном на рис. 78, б.

## § 4. Понятие об интеграле Стильеса

С дельта-функцией непосредственно связано одно полезное расширение понятия интеграла. Рассмотрим сначала пример. Пусть на отрезке  $(l)$  оси  $x$  с концами  $a, b$  расположена некоторая масса  $m$  и требуется определить силу, с которой эта масса притягивает единичную точечную массу  $m_0$ , расположенную в точке  $x=c$ , левее  $(l)$ , той же оси. Ответ очень простой. Так как по закону Ньютона масса  $dm$ , расположенная в точке  $x$ , притягивает  $m_0$  с силой  $dF = \kappa \frac{m_0 dm}{(x-c)^2}$  (здесь коэффициент пропорциональности  $\kappa$  — так называемая гравитационная постоянная), то общая сила равна

$$F = \int_{(l)} \kappa \frac{m_0 dm}{(x-c)^2} = \kappa m_0 \int_{(l)} \frac{1}{(x-c)^2} dm. \quad (13)$$

Если масса  $m$  распределена вдоль  $(l)$  так, что она в каждой точке  $x$  имеет конечную плотность  $\rho = \rho(x)$ , то  $dm = \rho(x) dx$  и от интеграла (13) можно перейти к обычному интегралу

$$\kappa m_0 \int_a^b \frac{\rho(x)}{(x-c)^2} dx.$$

Однако, как было указано в § 1, масса  $m$  может содержать часть, сосредоточенную в отдельных точках. Тогда интеграл (13) можно понимать как *интеграл по мере  $m$* . Под этим понимается, что каждой части  $(\Delta l)$  отрезка  $(l)$  (в том числе, и каждой точке этого отрезка) отвечает его «мера» (в данном примере масса)  $m(\Delta l)$ , причем выполняется закон сложения: мера целого равна сумме мер частей. Интеграл по мере (он также называется *интегралом Стильеса*) в общем случае имеет вид

$$\int_{(e)} f(x) d\mu \quad (14)$$

и равен, по определению, пределу

$$\lim \sum_{k=1}^n f(x_k) \mu(\Delta I_k),$$

составленному в точности по тому же правилу, как для обычного интеграла (см., например, ВМ, § 1.8), однако взамен длины частей  $(\Delta I_k)$  основного интервала  $(I)$  берется их мера  $\mu(\Delta I_k)$ . Если в качестве меры взять обычную длину, то мы приходим к обычному определению интеграла, т. е. интеграл Стильтьеса является обобщением этого обычного интеграла \*).

Если заданная мера имеет конечную плотность  $\rho = \frac{d\mu}{dx}$ , то от интеграла Стильтьеса (14) можно перейти к обычному интегралу

$$\int_{(I)} f(x) d\mu = \int_a^b f(x) \rho(x) dx. \quad (15)$$

Если же имеются точки с отличной от нуля мерой, то, как мы видели в § 1, плотность  $\rho(x)$  будет иметь дельтообразные слагаемые. Допуская такие слагаемые, мы можем совершить переход (15) и в этом случае.

#### Упражнение

Часто мера на оси  $x$  задается с помощью вспомогательной функции  $g(x)$  по правилу: мера интервала  $\alpha \leq x \leq \beta$  равна  $g(\beta+0) - g(\alpha-0)$  (или просто  $g(\beta) - g(\alpha)$ , если функция  $g(x)$  непрерывная). Тогда вместо интеграла (14)

пишут  $\int_{(I)} f(x) dg(x)$ , а формула (15) приобретает вид  $\int_{(I)} f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx$ .

Найдите  $\int_0^1 x^3 d(x^2)$ ;  $\int_{-1}^1 \sin x de(x)$ ;  $\int_{-0}^1 \cos x de(x)$ .

#### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

##### § 1

1.  $3^2 = 9$ .

2. а)  $[( - 5)^2 + 3] \delta(x + 5) = 28\delta(x + 5)$ ; б)  $\delta(2x - 8) = \delta(2(x - 4)) = \frac{1}{2} \delta(x - 4)$ ; в) многочлен  $P(x) = x^2 + x - 2$  имеет нули  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ , причем  $P'(x_1) = 3$ ,  $P'(x_2) = -3$ . Отсюда  $\delta(x^2 + x - 2) = \frac{1}{3} \delta(x - 1) + \frac{1}{3} \delta(x + 2)$ .

##### § 2

а)  $2\delta(x - \xi)$ ; б)  $\sin x \cdot \delta(x - \xi) = \sin \xi \cdot \delta(x - \xi)$ ; в)  $\delta(x - \xi + 1)$ ; г)  $\delta(x^2 - \xi) = \begin{cases} 0 & (\xi < 0), \\ \frac{1}{2\sqrt{\xi}} [\delta(x - \sqrt{\xi}) + \delta(x + \sqrt{\xi})] & (\xi > 0). \end{cases}$

\*) Чтобы отличать обычный интеграл от интеграла Стильтьеса, его иногда называют *интегралом Римана*.



## § 3

1.  $\text{sign } x$ ;  $2\delta(x)$ .2.  $\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^{-2} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} x^{-2}} - \delta(x)$ .

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x-a) dx \approx \int_{a-\frac{1}{2M}}^a f(x) 4M^2 dx - \int_a^{a+\frac{1}{2M}} f(x) 4M^2 dx \approx \\
 & \approx 4M^2 \left\{ \int_{a-\frac{1}{2M}}^a [f(a) + f'(a)(x-a)] dx - \int_a^{a+\frac{1}{2M}} [f(a) + f'(a)(x-a)] dx \right\} = \\
 & = 4M^2 \left\{ \left[ f(a) \frac{1}{2M} - \frac{f'(a)}{2} \frac{1}{4M^2} \right] - \left[ f(a) \frac{1}{2M} + \frac{f'(a)}{2} \frac{1}{4M^2} \right] \right\} = -f'(a).
 \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $M \rightarrow \infty$ , получаем точное равенство (12).

## § 4

 $\frac{2}{5}$ ; 0; 1.

## ГЛАВА VII

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшие дифференциальные уравнения, возникающие при рассмотрении различных физических процессов, например вытекания воды из сосуда, радиоактивного распада, движения материальной точки, решаются уже в основах интегрального исчисления (см., например, ВМ, гл. V, VI и VII). Здесь мы познакомим читателя с некоторыми общими понятиями, относящимися к дифференциальным уравнениям, и рассмотрим отдельные классы уравнений, которые нетрудно решить. Некоторые дальнейшие сведения о дифференциальных уравнениях содержатся в следующей главе.

Дифференциальные уравнения с одной независимой переменной называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями*. Если независимых переменных две или больше, то в дифференциальное уравнение входят частные производные по этим переменным. Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями с частными производными*.

В этой и следующей главах мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения. Нам потребуются результаты §§ VI.1—2 и формула Эйлера из § V.3.

#### § 1. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка

*Дифференциальным уравнением первого порядка* называется соотношение вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

где  $y$  — неизвестная функция  $x$ . В дальнейшем мы будем считать это уравнение разрешенным относительно производной, т. е. имеющим вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1)$$

Оказывается, что, даже не отыскивая решения  $y(x)$  аналитически,

в виде формулы, можно составить представление об общей картине этих решений на основе геометрического смысла уравнения (1). В этом параграфе мы рассмотрим, как это делается.

Вспомним геометрический смысл производной  $\frac{dy}{dx}$ . В плоскости  $x, y$  для кривой  $y = y(x)$  величина  $\frac{dy}{dx}$  равна тангенсу угла наклона касательной к кривой.

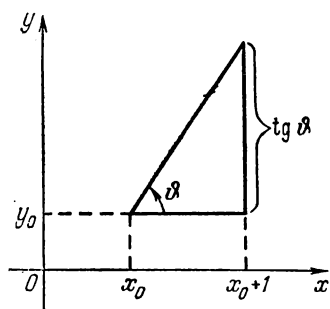


Рис. 79.

Следовательно, зная зависимость  $\frac{dy}{dx}$  от переменных  $x, y$ , выраженную уравнением (1), можно найти направление касательной к кривой, являющейся графиком решения (1), причем это направление можно определить для любой точки плоскости. Отметим, что график решения дифференциального уравнения называется *интегральной линией* этого уравнения.

Направление касательной можно показать на чертеже, проведя через любую данную точку  $(x; y)$  маленький отрезок прямой под углом  $\varphi$ , удовлетворяющим условию  $\operatorname{tg} \varphi = f(x, y)^*$ .

Так, например, пусть  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ , тогда  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Составим таблицу:

$x$	$y$	$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$	$x$	$y$	$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$
-1	-1	2	0	1	1
-1	0	1	1	-1	2
-1	1	2	1	0	1
0	-1	1	1	1	2
0	0	0			

На рис. 80 показаны направления касательных в каждой из девяти точек, приведенных в таблице. Если на чертеже увеличивать число точек, в которых проведено направление касательной, то на глаз видно, как вырисовывается совокупность кривых, удовлетворяющих дифференциальному уравнению. (См. рис. 81, соответствующие

\*) При построении нет надобности находить угол  $\varphi$  и строить его. Гораздо быстрее найти нужное направление, откладывая по оси  $x$  отрезок длины 1, а по оси  $y$  отрезок длины  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$  (рис. 79).

щий уравнению  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ .) Ясно, что уравнение имеет бесконечное количество интегральных линий и через каждую точку  $(x_0; y_0)$  плоскости проходит одна такая линия. Таким образом, чтобы выделить из всех решений уравнения (1) какое-то одно определенное частное (т. е. конкретное) решение, надо задать дополнительное условие:

$$\text{при некотором } x = x_0 \text{ задано значение } y = y_0. \quad (2)$$

Это условие называется *начальным условием*, так как если независимой переменной служит время, то условие (2) означает задание искомой функции в начальный момент времени.

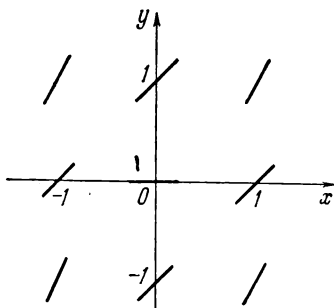


Рис. 80.

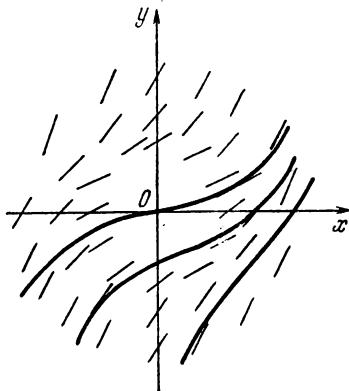


Рис. 81.

Хотя в начальном условии (2) задаются два параметра  $x_0$  и  $y_0$ , но на самом деле при выборе частного решения уравнения (1) имеется лишь одна степень свободы. Действительно, точка  $(x_0; y_0)$  может перемещаться вдоль определяемой ею интегральной линии, отчего эта линия, конечно, не меняется. При таком перемещении имеется одна степень свободы, которая, таким образом, для выбора интегральной линии является лишней, т. е. на самом деле при таком выборе имеется  $2 - 1 = 1$  степень свободы (см. аналогичное рассуждение в § IV.8). Чтобы указать существенный параметр при этом выборе, можно зафиксировать  $x_0$  и провести вертикальную прямую  $x = x_0$ , тогда различные интегральные кривые пересекут ее на различной высоте. Это означает, что различные кривые соответствуют различным значениям  $y(x_0) = y_0$ .

Для того чтобы провести большое количество отрезков, дающих направление касательной, удобно воспользоваться следующим приемом. Построим на чертеже линии  $f(x, y) = C$  для нескольких значений постоянной  $C$ . В каждой точке такой линии, согласно (1), величина  $\operatorname{tg} \theta$  постоянна и равна  $C$ . Таким образом, все интересующие

нас отрезки, показывающие направление касательной\*) в любой точке линии  $f(x, y) = C$ , параллельны.

Линии  $f(x, y) = C$  называются *изоклинами*. В частности, линия  $f(x, y) = 0$  называется *изоклиной нулей*; в каждой точке этой линии касательная к интегральным кривым уравнения (1) горизонтальна. Линия, в точках которой касательные вертикальны, называется *изоклиной бесконечностей*. Например, для уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x-y-1}$  изоклина бесконечностей есть прямая  $x-y=1$ .

На рис. 81 наглядно видно, что интегральные кривые не пересекаются одна с другой, во всяком случае под ненулевым углом. Действительно, уравнение (1) показывает, что при данных  $x$  и  $y$  есть только одно определенное значение величины  $\frac{dy}{dx}$ , т. е. через данную точку кривая может проходить только под одним определенным наклоном. Более подробное исследование показывает, что различные интегральные кривые не могут и соприкоснуться друг с другом в какой-либо точке, если в ней правая часть уравнения (1) и ее частная производная по  $y$  принимают конечные значения. Таким образом, условие (2) действительно определяет единственное решение уравнения (1).

### Упражнения

1. Найдите изоклины уравнения  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ .
2. Найдите уравнение геометрического места точек перегиба интегральных кривых общего уравнения (1); уравнения  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ .

## § 2. Интегрируемые типы уравнений первого порядка

Рассмотрим несколько видов дифференциальных уравнений, решения которых получить нетрудно.

**I. Уравнения с разделяющимися переменными.** Так называются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) \cdot \psi(x)**). \quad (3)$$

В этом уравнении правая часть  $\varphi(y) \cdot \psi(x)$  есть произведение двух функций, одна из которых зависит только от  $y$ , а другая только от  $x$ .

\*) Следует помнить, что речь идет о касательных к интегральным линиям дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , а не о касательных к самой линии  $f(x, y) = C$ .

\*\*) Уравнения такого вида встречаются, например, в задаче о радиоактивном распаде и в задаче о вытекании воды из сосуда (см. ВМ, гл. V).

Перепишем уравнение так:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = \psi(x) dx.$$

Проинтегрируем правую и левую части последнего равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int \psi(x) dx + C \quad (4)$$

(мы пишем лишь одну произвольную постоянную, так как обе постоянные, получающиеся при вычислении интегралов, можно объединить в одну). Из этого общего решения уравнения (3) получаем его частные решения, придавая  $C$  всевозможные значения. Мы видим, что в общем решении уравнения (1) присутствует одна произвольная постоянная, что находится в соответствии с наличием одной степени свободы при выборе частного решения (§ 1).

Если дополнительно задано начальное условие (2), то легко найти  $C$ . Для этого запишем для краткости формулу (4) в виде

$$\Phi(y) = \Psi(x) + C.$$

Полагая здесь  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , получим

$$\Phi(y_0) = \Psi(x_0) + C,$$

откуда

$$C = \Phi(y_0) - \Psi(x_0)$$

и окончательно

$$\Phi(y) = \Psi(x) + \Phi(y_0) - \Psi(x_0),$$

т. е.

$$\Phi(y) - \Phi(y_0) = \Psi(x) - \Psi(x_0).$$

Найденное частное решение можно также записать в виде

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_{x_0}^x \psi(x) dx.$$

Непосредственно ясно, что это решение удовлетворяет условию (2). Выполнив фактически интегрирование, получим искомое решение.

**II. Линейные однородные уравнения.** Линейным однородным уравнением первого порядка называется уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x) y. \quad (5)$$

Оно представляет собой частный случай уравнения (3), но мы останавливаемся на нем особо из-за его большой важности. Проводя в (5) разделение переменных и интегрируя, получим

$$\frac{dy}{y} = f(x) dx, \quad \ln y = \int_a^x f(x) dx + \ln C;$$

в правой части мы записали произвольную постоянную в форме  $\ln C$  для удобства дальнейших выкладок. Отсюда находим  $y$

$$y = Ce^{\int_a^x f(x) dx}, \quad (6)$$

где  $a$  — какое-либо фиксированное значение  $x$ . Формула (6) дает общее решение уравнения (5).

Обозначим для краткости

$$y_1(x) = e^{\int_a^x f(x) dx}. \quad (7)$$

Так как эта функция получается из (6) при  $C=1$ , то она представляет собой частное решение уравнения (5). Формулу (6) можно записать в виде

$$y = Cy_1(x). \quad (8)$$

Легко и непосредственно проверить, что если  $y_1(x)$  представляет собой какое-то частное решение уравнения (5), то и функция (8) при любом постоянном  $C$  также удовлетворяет уравнению (5):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(Cy_1)}{dx} = C \frac{dy_1}{dx} = Cf(x)y_1 = f(x)y.$$

Таким образом, чтобы получить общее решение уравнения (5), надо взять какое-либо одно его частное решение и умножить это частное решение на произвольную постоянную. Полагая, в частности,  $C=0$ , мы видим, что одно из частных решений уравнения (5) представляет собой тождественный нуль; конечно, это нулевое решение непригодно для построения общего решения.

**III. Линейные неоднородные уравнения.** Линейное неоднородное уравнение первого порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x) *). \quad (9)$$

Будем искать то решение уравнения (9), которое обращается в нуль при некотором значении  $x=x_0$ . При зафиксированной функции  $f(x)$  это решение  $y(x)$  определяется выбором функции  $g(x)$ , т. е.  $g(x)$  можно истолковывать как некое внешнее воздействие, а  $y(x)$  — как

\*) Такое уравнение встречается, например, в задаче о радиоактивном семействе (см. ВМ, гл. V). В этой задаче независимой переменной  $x$  служит время, а функцией  $y$  — количество данного радиоактивного вещества в системе, так что искомое решение  $y(x)$  описывает закон изменения этого количества во времени. Коэффициент  $f(x)$  равен отрицательной постоянной, абсолютная величина которой представляет собой вероятность распада данного вещества в единицу времени, а свободный член  $g(x)$  равен скорости ввода этого вещества в рассматриваемую систему.

его результат (другими словами, закон, по которому функции  $g(x)$  сопоставляется решение  $y(x)$ , является оператором, см. § VI.2). Легко проверить, что при этом имеет место принцип суперпозиции, т. е. если функции  $g(x)$  складываются, то и соответствующие решения складываются. В самом деле, если

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x) y_1 + g_1(x), \quad \frac{dy_2}{dx} = f(x) y_2 + g_2(x),$$

причем  $y_1(x_0) = 0$ ,  $y_2(x_0) = 0$ , то функция  $y = y_1(x) + y_2(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x) y + [g_1(x) + g_2(x)]$$

и условию  $y(x_0) = 0$  (почему?).

На основании § VI.2 решение уравнения (9) можно получить с помощью построения соответствующей функции влияния  $G(x; \xi)$ , которая служит решением уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x) y + \delta(x - \xi) \quad (10)$$

при любом фиксированном  $\xi$ . Будем считать, что  $\xi > x_0$ ; тогда при  $x_0 < x < \xi$  уравнение (10) превращается в (5), т. е. решение имеет вид (8), но так как ищется решение, для которого  $y(x_0) = 0$ , то  $C = 0$ , т. е.  $y(x) \equiv 0$ . Если, далее, проинтегрировать уравнение (10) от  $x = \xi - 0$  до  $x = \xi + 0$ , то мы получим

$$y(\xi + 0) - y(\xi - 0) = \int_{\xi-0}^{\xi+0} f(x) y dx + \int_{\xi-0}^{\xi+0} \delta(x - \xi) dx = 0 + 1 = 1$$

(так как решение  $y$  остается конечным, то интеграл от первого слагаемого в правой части (10) по бесконечно малому промежутку бесконечно мал и им можно пренебречь). Но согласно только что доказанному  $y(\xi - 0) = 0$ ; отсюда

$$y(\xi + 0) = 1. \quad (11)$$

Однако при  $x > \xi$  уравнение (10) также превращается в (5) и потому имеет решение (8); условие (11) дает

$$1 = C y_1(\xi), \quad \text{т. е.} \quad C = \frac{1}{y_1(\xi)} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{y_1(\xi)} y_1(x).$$

Итак, в данной задаче функция Грина имеет вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x_0 < x < \xi), \\ \frac{y_1(x)}{y_1(\xi)} & (x > \xi). \end{cases}$$

График функции  $G(x; \xi)$  при фиксированном  $\xi$  показан на рис. 82 жирной линией, имеющей разрыв при  $x = \xi$ .



Теперь можно написать искомое решение уравнения (9) при любой функции  $g(x)$  на основе соответствующим образом преобразованной общей формулы (VI.8):

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{x_0}^{\infty} G(x; \xi) g(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x G(x; \xi) g(\xi) d\xi + \int_x^{\infty} G(x; \xi) g(\xi) d\xi = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{y_1(x)}{y_1(\xi)} g(\xi) d\xi, \quad (12) \end{aligned}$$

где функция  $y_1(x)$  дается формулой (7). Аналогично можно проверить, что та же окончательная формула (12) справедлива и при  $x < x_0$ . Отметим, что в се правой части можно вынести  $y_1(x)$  (но не  $y_1(\xi)$ !) из-под знака интеграла.

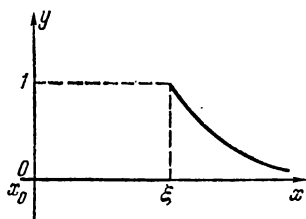


Рис. 82.

Особенно часто пользуются последней формулой при  $x_0 = -\infty$ , что физически наиболее естественно. Тогда решение (12) обладает тем свойством, что если функция  $g(x)$  тождественно равна нулю до некоторого  $x$ , то и решение тождественно равно нулю до этого  $x$ . Таким образом, в этом случае формула (12) дает в каком-то смысле «чистый» результат воздействия функции  $g(x)$ .

Формула (12) дает частное решение уравнения (9)—именно то, которое при  $x = x_0$  обращается в нуль. Чтобы получить общее решение уравнения (9), заметим, что разность двух любых решений этого уравнения удовлетворяет соответствующему однородному уравнению (5): если

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x) y_1 + g(x), \quad \frac{dy_2}{dx} = f(x) y_2 + g(x),$$

то

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dx} = f(x) (y_1 - y_2)$$

(почему?). Значит, эта разность должна иметь вид (8), где  $C$  произвольно. Итак, общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Выбирая в качестве этого частного решения найденное нами решение (12), получаем общее решение уравнения (9) в форме

$$y = \int_{x_0}^x \frac{y_1(x)}{y_1(\xi)} g(\xi) d\xi + C y_1(x). \quad (13)$$

Если нас интересует частное решение, удовлетворяющее условию (2), то, подставляя в (13)  $x = x_0$ , находим

$$y_0 = 0 + C y_1(x_0), \quad \text{т. е.} \quad C = \frac{y_0}{y_1(x_0)},$$

и окончательно получаем искомое решение

$$y = \int_{x_0}^x \frac{y_1(\xi)}{y_1(x_0)} g(\xi) d\xi + y_0 \frac{y_1(x)}{y_1(x_0)}.$$

К тем же результатам можно прийти другим путем, с помощью более быстрого, но искусственного способа «вариации произвольной постоянной». Выдающийся французский математик и механик Лагранж предложил, исходя из формулы (8), искать решение уравнения (9) в форме

$$y = u(x) y_1(x), \quad (14)$$

где  $u(x)$  — некоторая неизвестная функция, а  $y_1(x)$  имеет прежний смысл (7). Подставляя (14) в (9), получаем

$$u y_1' + u' y_1 = f(x) u y_1 + g(x).$$

Но так как  $y_1$  представляет собой решение однородного уравнения, то первые слагаемые слева и справа взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$u' y_1(x) = g(x), \quad \text{откуда} \quad u' = \frac{g(x)}{y_1(x)}, \quad u(x) = \int_{x_0}^x \frac{g(\xi)}{y_1(\xi)} d\xi + C$$

(в последнем интеграле мы заменили обозначение переменной интегрирования на  $\xi$ , чтобы отличить его от верхнего предела). Подставляя полученный результат в (14), приходим к формуле (13).

**IV. Простые случаи линейных уравнений.** Имеются случаи, когда решение линейного уравнения выглядит особенно просто. Так будет, в частности, если коэффициент  $f(x)$  постоянный:

$$f(x) \equiv p = \text{const.}$$

Тогда однородное уравнение (5) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = py$$

и общее решение

$$y = C e^{px}, \quad (15)$$

что можно получить из формул (7) и (8), приняв для простоты  $a = 0$ , но легко получить и непосредственно с помощью разделения переменных или простой подстановкой.

Соответствующее неоднородное уравнение особенно просто решается, если свободный член, т. е.  $g(x)$ , представляет собой постоянную или экспоненту (показательную функцию). Рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{dy}{dx} = py + A \quad (A = \text{const}). \quad (16)$$

Как мы знаем, для получения его общего решения надо найти какое-либо его частное решение, а затем сложить результат с общим решением (15) соответствующего однородного уравнения. Однако частное решение уравнения (16) легко разыскать в форме  $y = B = \text{const}$ . Подставляя в (16), получаем

$$0 = pB + A, \quad \text{т. е.} \quad B = -\frac{A}{p}.$$

Итак, общее решение уравнения (16) имеет вид

$$y = -\frac{A}{p} + Ce^{px}.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{dy}{dx} = py + Ae^{kx}. \quad (17)$$

Производная от показательной функции пропорциональна самой функции; поэтому естественно искать частное решение уравнения (17) в форме

$$y = Be^{kx}, \quad (18)$$

так как тогда после подстановки в (17) все члены будут подобными, и возникает надежда добиться равенства с помощью подбора  $B$ . Проделаем это:

$$Bke^{kx} = pBe^{kx} + Ae^{kx}.$$

Отсюда легко находим  $B = \frac{A}{k-p}$ . Подставляя в (18), получаем частное решение уравнения (17), а после добавления общего решения соответствующего однородного уравнения—общее решение уравнения (17):

$$y = \frac{A}{k-p} e^{kx} + Ce^{px},$$

где  $C$ —произвольная постоянная.

Полученное решение, очевидно, непригодно, если  $k=p$ . В этом особом случае решение уравнения (17) найдем с помощью общей формулы (13), заметив, что в рассматриваемом случае частное решение  $y_1(x)$  однородного уравнения равно  $e^{px}$ . Получим, приняв для

простоты  $x_0 = 0$ .

$$y = \int_0^x \frac{e^{px}}{e^{p\xi}} A e^{p\xi} d\xi + C e^{px} = A e^{px} \int_0^x d\xi + C e^{px} = A x e^{px} + C e^{px}. \quad (19)$$

Итак, для  $k=p$  в частном решении при экспоненте появляется дополнительный множитель  $x$ .

Общее неоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = py + g(x)$$

решается с помощью функции Грина, которая в данном случае имеет особенно простой вид

$$G(x; \xi) = \begin{cases} 0 & (x_0 < x < \xi), \\ \frac{e^{px}}{e^{p\xi}} = e^{p(x-\xi)} & (x > \xi). \end{cases}$$

Общее решение в силу формулы (13) имеет вид

$$y = \int_{x_0}^x e^{p(x-\xi)} g(\xi) d\xi + C e^{px}.$$

Рассмотренными здесь уравнениями не исчерпываются типы уравнений, решения которых могут быть записаны в виде точных формул, содержащих элементарные функции и интегралы от них. В курсах дифференциальных уравнений можно найти еще несколько таких типов; наиболее полно они рассмотрены в книге Э. Камке «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям», «Наука», 1971.

### Упражнения

Найдите решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным данным.

1.  $\frac{dy}{dx} = 2xy$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .
2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ,  $y = 1$  при  $x = 1$ .
3.  $\frac{dy}{dx} = e^{-y}$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .
4.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .
5.  $\frac{dy}{dx} = -y + e^x$ ,  $y = \frac{1}{e}$  при  $x = 1$ .
6.  $\frac{dy}{dx} = -2y + 4x$ ,  $y = -2$  при  $x = 0$ .
7.  $\frac{dy}{dx} + y = \cos x$ ,  $y = \frac{3}{2}$  при  $x = 0$ .

### § 3. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение второго порядка содержит вторую производную от искомой функции; его общий вид таков:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Если это уравнение зависит от искомой функции и ее производных линейно (зависимость от  $x$  может быть любой), то оно называется *линейным*. Таким образом, линейное уравнение второго порядка имеет общий вид

$$a(x) \frac{d^2y}{dx^2} + b(x) \frac{dy}{dx} + c(x) y = f(x).$$

Мы рассмотрим наиболее важный частный случай, когда коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  при искомой функции и ее производных являются постоянными. Такое уравнение встречается в задачах о механических и электрических колебаниях (см., например, ВМ, гл. VI и VIII), причем в этих задачах независимой переменной служит время  $t$ . Мы остановимся на рассмотрении механических колебаний простейшего осциллятора; тогда уравнение имеет вид

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = f(t), \quad (20)$$

где  $y$  — отклонение колеблющейся точки от положения равновесия,  $m$  — ее масса,  $h$  — коэффициент трения (считается, что сила трения пропорциональна скорости),  $k$  — коэффициент упругости восстанавливающей силы (эта сила принимается пропорциональной отклонению) и  $f(t)$  — внешняя сила \*).

Рассмотрим сначала уравнение свободных колебаний; оно имеет вид

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (21)$$

и называется *линейным однородным* уравнением. Его свойства во многом аналогичны свойствам линейного однородного уравнения первого порядка, разобранным в § 2. Так, легко проверить, что если  $y_1(t)$  — какое-либо частное решение уравнения (21), то и  $Cy_1(t)$ , где  $C$  — любая постоянная, также служит решением того же уравнения. В частности, при  $C=0$  получаем тождественно нулевое решение уравнения (21). Кроме того, легко проверить, что если  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  — два частных решения уравнения (21), то их сумма

\*) При этом нам придется частично повторить результаты из гл. VI ВМ, однако здесь изложение будет более полным и будет проводиться с более общих позиций.

$y = y_1(t) + y_2(t)$  также служит решением того же уравнения (проверьте, подставив эту сумму в (21)!).

Из сказанного следует, что если найдены два частных решения  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  уравнения (21), то их *линейная комбинация*

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad (22)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, также служит решением того же уравнения. Но общее решение дифференциального уравнения второго порядка получается в результате двух интегрирований и потому содержит в себе две произвольные постоянные. Значит, выражение (22) служит общим решением уравнения (21). Конечно, при этом  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  не должны быть пропорциональными, так как если  $y_2(t) = k y_1(t)$ , то

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = (C_1 + C_2 k) y_1(t) = C y_1(t),$$

т. е., по существу, здесь имеется только одна произвольная постоянная (не выполнено условие существенности параметров, ср. § IV.8).

Как же найти два «независимых» решения уравнения (21)? Эйлер, основываясь на свойстве пропорциональности экспоненты своим производным, предложил искать частные решения в виде

$$y = e^{pt}, \quad (23)$$

где  $p$  — некоторая постоянная, которую нужно определить. Так как при таком выборе  $\frac{dy}{dt} = p e^{pt}$ ,  $\frac{d^2 y}{dt^2} = p^2 e^{pt}$ , то после подстановки в (21) и сокращения на  $e^{pt}$  получаем для определения  $p$  квадратное уравнение (так называемое *характеристическое уравнение*)

$$mp^2 + hp + k = 0. \quad (24)$$

Как известно из алгебры, при решении квадратного уравнения могут представиться различные случаи в зависимости от знака дискриминанта

$$D = h^2 - 4mk.$$

Если трение велико, точнее, если  $h^2 > 4mk$ , то уравнение (24) имеет вещественные корни

$$p_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4mk}}{2m}.$$

Обозначим их  $p_1 = -a$ ,  $p_2 = -b$ , так как они оба отрицательные. Тогда на основе (22) и (23) получаем общее решение уравнения (21) в виде

$$y = C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt}, \quad (25)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые постоянные. Таким образом, при большом

трении отклонение точки от положения равновесия с возрастанием  $t$  стремится к нулю по экспоненциальному закону, без колебаний.

Если трение мало, точнее, если  $h^2 < 4mk$ , то уравнение (24) имеет мнимые сопряженные корни

$$p_{1,2} = -\frac{h}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}} = -\gamma \pm i\omega,$$

где обозначено  $\gamma = \frac{h}{2m}$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}$ . Имея в виду (23), получаем общее решение (22)

$$y = C_1 e^{-\gamma t + i\omega t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega t} = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}). \quad (26)$$

Множители  $e^{i\omega t}$  и  $e^{-i\omega t}$ , как выяснено в § V.4, являются периодическими функциями. Их период равен  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Поэтому  $\omega$  есть круговая частота колебаний. Множитель  $e^{-\gamma t}$  характеризует скорость затухания колебаний. Выражение (26) будет решением уравнения (21) при любых постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Для того чтобы получить вещественное решение, возьмем любое  $C_1 = \frac{1}{2} r e^{i\varphi}$  и положим  $C_2 = \frac{1}{2} r e^{-i\varphi} = C_1^*$ . Тогда

$$y = e^{-\gamma t} \left( \frac{1}{2} r e^{i\varphi} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} r e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} \right) = \frac{1}{2} r e^{-\gamma t} [e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}].$$

Воспользуемся формулой Эйлера. Получим

$$y = \frac{1}{2} r e^{-\gamma t} [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + \varphi) - i \sin(\omega t + \varphi)] = r e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Решение  $y = r e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$  — вещественное, оно содержит две произвольные постоянные  $r$  и  $\varphi$ . Иногда его записывают в ином виде, раскрыв косинус суммы:

$$\begin{aligned} y &= r e^{-\gamma t} (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \\ &= (r \cos \varphi) e^{-\gamma t} \cos \omega t + (-r \sin \varphi) e^{-\gamma t} \sin \omega t = \\ &= C_1 e^{-\gamma t} \cos \omega t + C_2 e^{-\gamma t} \sin \omega t, \end{aligned}$$

где через  $C_1$  и  $C_2$  обозначены соответствующие множители в скобках (они не равны  $C_1$  и  $C_2$  в формуле (26)!). Здесь хорошо видны вещественные независимые решения уравнения (21) (см. формулу (22)).

Обычно этот переход к вещественному решению проводят быстрее, исходя из следующих соображений. Если в левую часть уравнения (21) подставить комплексную функцию от вещественного аргумента  $t$  и произвести все действия, то в силу указанных в § V.5 свойств таких функций те же действия произведутся над вещественной, а также над мнимой частями этой функции. Поэтому если

после выполнения этих действий над комплексной функцией получится нуль, то и после выполнения действий над вещественной частью этой функции получится нуль, то же и над мнимой. Таким образом, если имеется комплексное решение (23) уравнения (21), то вещественная и мнимая части решения также являются решениями уравнения (21).

Отметим, что последнее утверждение справедливо для любого линейного однородного уравнения (т. е. уравнения, в которое  $y$  и его производные входят линейно, причем в уравнении нет члена, не содержащего ни  $y$ , ни какой-нибудь его производной) с вещественными коэффициентами. Если же  $y$  или его производные входят в уравнение нелинейно, то это утверждение неверно. Поэтому, например, если квадратное уравнение имеет два мнимых корня, то вещественная и мнимая части корней не являются в отдельности корнями этого уравнения.

Итак, когда трение мало, колебания затухают по экспоненциальному закону. Особое значение имеет случай, когда трение отсутствует, т. е.  $h=0$ . В этом случае характеристическое уравнение (24) приобретает вид

$$mp^2 + k = 0,$$

откуда

$$p_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = r \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (27)$$

т. е. в рассматриваемой системе происходят незатухающие гармонические колебания с произвольными амплитудой и начальной фазой и вполне определенной частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Интересно проследить за поведением полной энергии системы. Нетрудно показать (см., например, ВМ, § VI.10), что эта энергия имеет выражение

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{ky^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ m \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + ky^2 \right], \quad (28)$$

причем в правой части первое слагаемое равно кинетической, а второе — потенциальной энергии осциллятора. Подставив сюда формулу (27) для решения, получим

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k r^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \equiv \frac{1}{2} k r^2.$$

Таким образом, в случае  $h=0$  полная энергия остается постоянной и в процессе колебаний происходит только «перекачка» кинетической энергии в потенциальную и обратно.



Если трение имеется, то полная энергия системы убывает, рассеивается (переходит в тепло, которое в дифференциальном уравнении не учитывается). Действительно, дифференцируя формулу (28) и используя дифференциальное уравнение (21), найдем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \left[ 2m \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + 2ky \frac{dy}{dt} \right] = \frac{dy}{dt} \left( -h \frac{dy}{dt} - ky \right) + ky \frac{dy}{dt} = - \left( \frac{dy}{dt} \right)^2;$$

производная отрицательна, следовательно,  $E$  убывает.

В реальных задачах нас интересует не общее решение, а вполне определенное частное решение. Так как в общем решении дифференциального уравнения второго порядка имеются две произвольные постоянные (т. е. две степени свободы), то для выбора частного решения требуется задать два дополнительных соотношения, с помощью которых и находим значения этих произвольных постоянных. Обычно в качестве таких дополнительных условий задаются так называемые *начальные условия*, а именно, при некотором значении независимой переменной задаются значения искомой функции и ее производной.

Для уравнения (21) начальные условия состоят в задании значений

$$y|_{t=t_0} = y_0, \quad \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_0} = v_0, \quad (29)$$

т. е. начального отклонения и начальной скорости колеблющейся точки. Из физических соображений ясно, что эти условия полностью определяют процесс колебаний. Это легко доказать и математически. Рассмотрим, например, случай большого трения, когда общее решение имеет вид (25). Дифференцируя это решение и подставляя  $t = t_0$ , на основании (29) получим

$$\begin{aligned} C_1 e^{-at_0} + C_2 e^{-bt_0} &= y_0, \\ -C_1 a e^{-at_0} - C_2 b e^{-bt_0} &= v_0, \end{aligned}$$

откуда находим для  $C_1$  и  $C_2$  вполне определенные значения

$$C_1 = \frac{by_0 + v_0}{b-a} e^{at_0}, \quad C_2 = \frac{ay_0 + v_0}{a-b} e^{bt_0}.$$

Подставив эти значения в (25), получим искомое частное решение, удовлетворяющее условиям (29):

$$\begin{aligned} y &= \frac{by_0 + v_0}{b-a} e^{at_0} e^{-at} + \frac{ay_0 + v_0}{a-b} e^{bt_0} e^{-bt} = \\ &= y_0 \frac{be^{-a(t-t_0)} - ae^{-b(t-t_0)}}{b-a} + v_0 \frac{e^{-a(t-t_0)} - e^{-b(t-t_0)}}{b-a}. \end{aligned} \quad (30)$$

Формула (30) дает возможность рассмотреть еще не разобранный промежуточный случай, когда  $h^2 = 4mk$  и потому характеристическое уравнение (24) имеет совпадающие корни  $p_{1,2} = -a$ . Тогда реше-

ние (25) не является общим, так как  $C_1 e^{-at} + C_2 e^{-at} = (C_1 + C_2) e^{-at} = C e^{-at}$ , т. е. здесь, по существу, имеется лишь одна степень свободы, а не две, как требуется. Если в формуле (30) совершить переход к пределу при  $b \rightarrow a$ , то, воспользовавшись правилом Лопиталя (см., например, ВМ, § II.21), получим в пределе решение

$$y = y_0 [e^{-a(t-t_0)} + a(t-t_0)e^{-a(t-t_0)}] + v_0(t-t_0)e^{-a(t-t_0)} = \\ = y_0 e^{-a(t-t_0)} + (ay_0 + v_0)(t-t_0)e^{-a(t-t_0)}. \quad (31)$$

Мы видим, что здесь в решении появляется член вида  $te^{-at}$ . При возрастании  $t$  этот член стремится к нулю, так как показательная функция стремится к нулю быстрее, чем любая степень  $t$  стремится к бесконечности (см. там же). Таким образом, и в данном случае происходит затухание без колебаний.

Если заметить, что начальные условия произвольны, и перегруппировать слагаемые в правой части (31), то можно записать общее решение уравнения (21) в данном промежуточном случае в виде

$$y = C_1 e^{-at} + C_2 t e^{-at}.$$

#### Упражнения

Найдите решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным данным:

- |                           |          |                    |                          |
|---------------------------|----------|--------------------|--------------------------|
| 1. $y'' + y = 0,$         | $y = 0,$ | $y' = -2$          | при $t = \frac{\pi}{2}.$ |
| 2. $4y'' - 8y' + 5y = 0,$ | $y = 0,$ | $y' = \frac{1}{2}$ | при $t = 0.$             |
| 3. $y'' - 3y' + 2y = 0,$  | $y = 2,$ | $y' = 3$           | при $t = 0.$             |
| 4. $y'' - y = 0,$         | $y = 4,$ | $y' = -2$          | при $t = 0.$             |
| 5. $y'' - 2y' + y = 0,$   | $y = 0,$ | $y' = e$           | при $t = 1.$             |
| 6. $y'' + 4y' + 4y = 0,$  | $y = 1,$ | $y' = 3$           | при $t = 0.$             |

#### § 4. Простейшее линейное неоднородное уравнение второго порядка

Перейдем к рассмотрению уравнения *вынужденных колебаний* (20). Прежде всего надо заметить, что рассуждения § 2 о связи решений неоднородного уравнения с решениями соответствующего однородного уравнения остаются здесь в силе; поэтому общее решение уравнения (20) имеет вид

$$y = Y(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где  $Y(x)$  — некоторое его частное решение, а  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  — общее решение соответствующего однородного уравнения (21).

Частное решение уравнения (20) можно подобно § 2 построить с помощью функции Грина. Рассмотрим сначала самый простой случай, когда  $h = k = 0$ , т. е. когда уравнение (20) имеет вид

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t); \quad (32)$$

это означает, что тело движется под действием силы, зависимость которой от времени задана. Найдем решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$y|_{t=t_0} = 0, \quad v = \frac{dy}{dt}|_{t=t_0} = 0^* \quad (33)$$

Как и в § 2 (см. начало раздела III), убеждаемся, что решение  $y(t)$  полностью определяется заданием функции  $f(t)$ , причем имеет место принцип суперпозиции. Значит, на основании общей методики § VI.2 можно построить функцию Грина, решив уравнение

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \delta(t - \tau) \quad (34)$$

при любом зафиксированном  $\tau$  и начальных условиях (33). Будем считать для определенности, что  $t > t_0$ . Тогда в промежутке от  $t_0$  до  $\tau$  правая часть уравнения (34) равна нулю, а потому при нулевых условиях (33) и решение равно нулю. Проинтегрировав уравнение (34) от  $\tau - 0$  до  $\tau + 0^{**}$ , получим

$$m \left( \frac{dy}{dt} \Big|_{\tau+0} - \frac{dy}{dt} \Big|_{\tau-0} \right) = 1.$$

Но в силу только что доказанного  $\frac{dy}{dt} \Big|_{\tau-0} = 0$ , откуда

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{\tau+0} = \frac{1}{m}. \quad (35)$$

Мы видим, что при  $t = \tau$  производная  $\frac{dy}{dt}$  имеет конечный разрыв (конечный скачок); поэтому сама функция  $y(t)$  при  $t = \tau$  разрыва не имеет, т. е.

$$y|_{\tau+0} = y|_{\tau-0} = 0. \quad (36)$$

Однако при  $t > \tau$  уравнение (34) имеет вид  $m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ , т. е.  $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ , и нам нужно найти решение этого уравнения при начальных условиях (35) и (36). Нетрудно непосредственно проверить, что всем этим требованиям удовлетворяет функция  $y = \frac{1}{m}(t - \tau)$ . Итак, мы получаем функцию Грина для рассматриваемой задачи

$$G(t; \tau) = \begin{cases} 0 & (t_0 < t < \tau), \\ \frac{1}{m}(t - \tau) & (\tau < t < \infty). \end{cases} \quad (37)$$

\*) Здесь можно принять  $t_0 = -\infty$ , что во многих задачах наиболее физически естественно (ср. § 2). Мы, однако, оставляем произвольное  $t_0$  для перехода к дальнейшему, так как при  $t_0 = -\infty$  неудобно задавать ненулевые начальные условия.

\*\*) См. это обозначение в сноске на стр. 195.

(То, что эта непрерывная функция с «изломом» при  $t = \tau$  удовлетворяет уравнению (34), вытекает также из рассмотрений § VI.3; см. рис. 76, где изображена функция, вторая производная которой равна  $\delta(x)$ .) В силу общей формулы (VI.8), примененной к данному случаю, получаем искомое решение уравнения (32) при начальных условиях (33):

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0}^{\infty} G(t; \tau) f(\tau) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t G(t; \tau) f(\tau) d\tau + \int_t^{\infty} G(t; \tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (38)$$

Вывод формулы для решения закончен, и желающие могут сразу перейти к § 5, где разбирается общее уравнение вынужденных колебаний. Однако мы здесь сделаем еще несколько замечаний по поводу разбираемого здесь частного случая.

Функцию Грина (37), а с ней и формулу (38) можно получить и непосредственно из физических соображений. В самом деле, уравнение (34), определяющее функцию Грина, означает, что на тело, которое в начальный момент находилось в начале координат и было неподвижным, в момент  $\tau$  подействовала мгновенная сила с единичным импульсом (см. конец § VI.1). Но после действия кратковременной силы тело движется с постоянной скоростью, равной отношению импульса силы к массе тела (см., например, ВМ, § VI.5), т. е. в данном случае  $\frac{1}{m}$ . Поэтому  $y(t)$ , т. е. пройденный путь, выражается как раз по формулам (37).

Формулу (38) можно получить и без упоминания о функции Грина, хотя, по существу, тем же методом. Для этого достаточно мысленно представить силу  $f$  на промежутке от  $t_0$  до  $t$  как последовательность кратковременных сил, каждая из которых действует на некотором промежутке от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$  и потому имеет импульс  $f(\tau) d\tau$ . Если бы действовала только эта кратковременная сила, то тело набрало бы скорость  $\frac{f(\tau) d\tau}{m}$  и к моменту  $t$  прошло бы путь

$$\frac{f(\tau) d\tau}{m} (t - \tau). \quad (39)$$

Однако в силу линейности уравнения (32) имеет место принцип суперпозиции, другими словами, принцип сложения движений, согласно которому при наложении нескольких сил законы движения также складываются. Поэтому результаты (39) надо сложить по всем  $\tau$  от  $t_0$  до  $t$ , т. е. мы приходим к формуле (38).

Выведем теперь формулу (38) совсем иным путем, с помощью двукратного интегрирования формулы (32). Первое интегрирование

дает

$$m[y'(t) - y'(t_0)] = \int_{t_0}^t f(t) dt,$$

или, с учетом второго условия (33),

$$my'(t) = \int_{t_0}^t f(t) dt.$$

В этой формуле переменная интегрирования обозначена той же буквой  $t$ , что и верхний предел. Обычно такие обозначения не приводят к недоразумениям; однако сейчас нам удобнее применить более аккуратное обозначение.

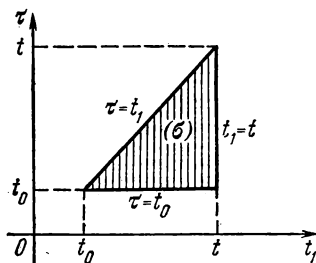


Рис. 83.

$$my'(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, \quad (40)$$

в котором строго различается переменная интегрирования  $\tau$  от верхнего предела  $t$ : скорость тела в момент времени  $t$  зависит от значений силы во все предыдущие моменты  $\tau$ , т. е. зависит от  $f(\tau)$ , где  $\tau$  принимает все значения от  $t_0$  до  $t$ . (Такое различие совершенно необходимо в формуле (38), где в подынтегральное выражение входит разность  $t - \tau$ .)

Вновь интегрируя формулу (40), получаем с учетом первого условия (33)

$$my(t) = \int_{t_0}^t my'(t_1) dt_1 = \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{t_1} f(\tau) d\tau \right) dt_1.$$

Получился двукратный интеграл (ср. § IV.7), в котором переменная  $t_1$  внешнего интегрирования меняется от  $t_0$  до  $t$ , а при каждом  $t_1$  переменная  $\tau$  внутреннего интегрирования меняется от  $\tau=t_0$  до  $\tau=t_1$ . Таким образом, интегрирование производится по треугольнику  $(\sigma)$ , показанному на рис. 83. Однако, как известно, двойной интеграл можно вычислять и в противоположном порядке, сначала по  $t_1$ , а затем по  $\tau$ . Тогда интегрирование по  $t_1$  будет производиться при фиксированном  $\tau$  от  $t_1=\tau$  до  $t_1=t$  (см. рис. 83), а внешнее интегрирование по  $\tau$  — от  $t_0$  до  $t$ ; в результате получаем

$$my(t) = \int_{(\sigma)} \int f(\tau) d\tau dt_1 = \int_{t_0}^t d\tau \int_{\tau}^t f(\tau) dt_1.$$

Но из-под знака внутреннего интеграла можно вынести  $f(\tau)$ , не

зависящее от переменной интегрирования  $t_1$ , так что

$$my(t) = \int_{t_0}^t d\tau f(\tau) \int_{\tau}^t dt_1 = \int_{t_0}^t d\tau \cdot f(\tau) (t - \tau),$$

и мы приходим к формуле (38).

Проверим, что формула (38) действительно дает решение поставленной задачи; это будет также полезным упражнением на дифференцирование. Мы будем исходить из двух формул. Первая

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^t \varphi(s) ds \right) = \varphi(t) \quad (41)$$

(производная интеграла по верхнему пределу) хорошо известна из интегрального исчисления, вторая формула

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^b F(s; t) ds \right) = \int_a^b F'_t(s; t) ds \quad (a, b = \text{const}), \quad (42)$$

(производная интеграла по параметру) была указана в § III.6. Но как найти производную от правой части (38), куда  $t$  входит и в качестве предела интегрирования и в качестве параметра под знак интеграла? Для этого надо взять сумму двух слагаемых, одно из которых получается в результате дифференцирования интеграла (38) при зафиксированном  $t$  под знаком интеграла, а другое — при зафиксированном  $t$  в верхнем пределе (ср., например, ВМ, § II.4). Дифференцирование производится по формулам (41) и (42):

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{m} (t - \tau) f(\tau) \Big|_{\tau=t} + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} [(t - \tau) f(\tau)] d\tau = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau. \quad (43)$$

При вторичном дифференцировании пользуемся формулой (41), т. е.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{m} f(t).$$

Отсюда вытекает, что уравнение (32) удовлетворяется. Справедливость условий (33) получится, если в формулах (38) и (43) положить  $t = t_0$ .

В качестве примера найдем закон движения тела, на которое действует сила, пропорциональная времени, протекшему с начала движения. В этом случае  $f(t) = a(t - t_0)$ , поэтому  $f(\tau) = a(\tau - t_0)$ . Получаем

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{m} \int_{t_0}^t (t - \tau) a(\tau - t_0) d\tau = \frac{a}{m} \int_{t_0}^t [(t - t_0) - (\tau - t_0)] (\tau - t_0) d\tau = \\ &= \frac{a}{m} (t - t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2} - \frac{a}{m} \frac{(t - t_0)^3}{3} = \frac{a(t - t_0)^3}{6m}. \end{aligned}$$

Мы решили задачу с нулевыми начальными данными. Это — самая важная часть дела, так как если мы умеем решать задачу с нулевыми начальными данными, то решение задачи с произвольными начальными данными  $y = y_0$ ,  $v = v_0$  при  $t = t_0$  не представляет труда. Действительно, пусть

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t), \quad y = y_0, \quad v = v_0 \quad \text{при} \quad t = t_0.$$

Тогда

$$y(t) = y^{(1)}(t) + y^{(2)}(t),$$

где  $y^{(1)}(t)$  есть решение задачи с нулевыми начальными данными:

$$m \frac{d^2 y^{(1)}}{dt^2} = f(t), \quad y^{(1)}(t_0) = 0, \quad \left. \frac{dy^{(1)}}{dt} \right|_{t=t_0} = v^{(1)}(t_0) = 0,$$

а  $y^{(2)}(t)$  есть решение задачи без силы

$$m \frac{d^2 y^{(2)}}{dt^2} = 0, \quad y^{(2)}(t_0) = y_0, \quad \left. \frac{dy^{(2)}}{dt} \right|_{t=t_0} = v^{(2)}(t_0) = v_0.$$

(Читатель легко проверит, что  $y = y^{(1)} + y^{(2)}$  является решением поставленной задачи.) Функцию  $y^{(2)}(t)$  найти просто,  $y^{(2)}(t) = v_0(t - t_0) + y_0$ , поэтому

$$y(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t (t - \tau) f(\tau) d\tau + v_0(t - t_0) + y_0.$$

Исследуем решение (38), отвечающее нулевым начальным условиям, приняв для простоты  $t_0 = -\infty$ . Для этого запишем его так:

$$y(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t (t - \tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t t f(\tau) d\tau - \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t \tau f(\tau) d\tau.$$

Так как  $t$  не есть переменная интегрирования, то ее можно вынести за знак интеграла, поэтому

$$y(t) = \frac{t}{m} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t \tau f(\tau) d\tau.$$

Эту формулу на основании (43) можно переписать так:

$$y(t) = tv(t) - \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t \tau f(\tau) d\tau.$$

Вынесем  $v(t)$  за скобку, получим

$$y(t) = v(t) \cdot (t - \theta),$$

где положено

$$\theta = \frac{\frac{1}{m} \int_{-\infty}^t \tau f(\tau) d\tau}{v(t)} = \frac{\int_{-\infty}^t \tau f(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau}, \text{ а } v(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

Записанные таким образом формулы особенно удобны, если сила по прошествии некоторого промежутка времени перестает действовать. Для моментов времени  $t$  после окончания действия силы интегралы

$\int_{-\infty}^t \tau f(\tau) d\tau$  и  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$  не зависят от  $t$ . Уве-

личение  $t$  в этих интегралах приводит только к увеличению той части области интегрирования, где подынтегральная функция равна нулю. После окончания действия силы тело движется с постоянной скоростью  $v = v_{\text{кон}}$ , при этом величина  $\theta = \theta_{\text{кон}}$  также постоянна. Поэтому график  $y(t)$  после окончания действия силы есть прямая линия

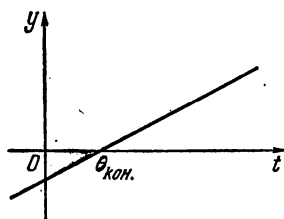


Рис. 84.

$$y = v_{\text{кон}} \cdot (t - \theta_{\text{кон}}).$$

Величина  $\theta_{\text{кон}}$  есть абсцисса точки пересечения этой прямой с осью  $t$  (рис. 84). Физический смысл величины  $\theta_{\text{кон}}$  таков: если тело начнет движение в момент времени  $t = \theta_{\text{кон}}$  со скоростью  $v = v_{\text{кон}}$ , то оно будет двигаться по тому же закону, по которому фактически движется тело после окончания действия силы.

### Упражнения

Найдите решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным данным:

$$1. \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad x(2) = 1, \quad x'(2) = -3.$$

$$2. \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 1, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 0.$$

$$3. \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$4. \quad \frac{d^2x}{dt^2} = e^t, \quad x(-\infty) = 0, \quad x'(-\infty) = 0.$$



### § 5. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Функцию Грина можно применить и к общему уравнению (20), описывающему движение упруго закрепленного тела под действием внешней силы, зависящей только от времени, при наличии трения, пропорционального скорости.

Как и в § 4, будем искать решение при нулевых начальных условиях (33). Для построения функции Грина нужно подобно § 4 (см. уравнение (34)) решить уравнение

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = \delta(t - \tau) \quad (44)$$

при начальных условиях (33). Считая  $t > t_0$ , получаем, что  $y(t) \equiv 0$  при  $t_0 < t < \tau$ , а интегрируя (44) от  $t = \tau - 0$  до  $t = \tau + 0$ , приходим к тем же условиям (35) и (36), так как интегралы от конечных второго и третьего слагаемых в (44) равны нулю. Таким образом, при  $t > \tau$  требуется найти решение однородного уравнения (21) при начальных условиях (35) и (36). Исходя из общего решения уравнения (21)

$$y = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t},$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — корни характеристического уравнения (24), и рассуждая подобно концу § 3, получаем искомое решение

$$y = \frac{e^{-p_1 \tau}}{m(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} + \frac{e^{-p_2 \tau}}{m(p_2 - p_1)} e^{p_2 t} = \frac{1}{m(p_1 - p_2)} [e^{p_1(t-\tau)} - e^{p_2(t-\tau)}];$$

это решение пригодно как для малого, так и для большого трения. Итак, получаем функцию Грина

$$G(t; \tau) = \begin{cases} 0 & (t_0 < t < \tau), \\ \frac{1}{m(p_1 - p_2)} [e^{p_1(t-\tau)} - e^{p_2(t-\tau)}] & (\tau < t < \infty). \end{cases}$$

(Эта функция, как и в условиях § 4, непрерывна, но имеет при  $t = \tau$  излом.) Отсюда подобно (38) получаем решение уравнения (20) при нулевых начальных условиях (33)

$$y(t) = \frac{1}{m(p_1 - p_2)} \int_{t_0}^t [e^{p_1(t-\tau)} - e^{p_2(t-\tau)}] f(\tau) d\tau. \quad (45)$$

Как и в § 1 (раздел IV), при внешней нагрузке особенно простого вида решение уравнения (20) можно найти без всякой функции Грина. Так будет, если  $f(t) = \text{const}$ , т. е. если рассматривается уравнение

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = A \quad (= \text{const}). \quad (46)$$

Нетрудно разыскать частное решение вида  $y = B = \text{const.}$  Подставляя в (46), получим

$$0 + 0 + kB = A, \quad \text{т. е.} \quad B = \frac{A}{k}.$$

Учитывая замечание, сделанное в начале § 4, получаем общее решение уравнения (46)

$$y = \frac{A}{k} + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad (47)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. В § 3 мы видели, что решение однородного уравнения (21) при возрастании  $t$  стремится к нулю, так как  $p_1$  и  $p_2$  — либо отрицательные вещественные, либо мнимые с отрицательной вещественной частью; таким образом, из (47) получаем при больших  $t$

$$y = \frac{A}{k}. \quad (48)$$

Этот результат ясен и физически. При постоянной внешней силе и при наличии трения колебания затухают и по прошествии «переходного процесса», определяемого начальными условиями, тело остановится в положении, где сила упругости  $ky$  (взятая с обратным знаком) будет равна внешней силе  $A$ ; отсюда и получаем (48). Это стационарное положение уже не зависит от начальных условий.

Простым является и решение уравнения

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = Ae^{qt}. \quad (49)$$

В этом случае легко найти частное решение вида  $y = Be^{qt}$ . Подставляя, получаем  $mBq^2 e^{qt} + hBqe^{qt} + kB e^{qt} = Ae^{qt}$ , т. е.  $B = \frac{A}{mq^2 + hq + k}$ , откуда искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{Ae^{qt}}{mq^2 + hq + k}. \quad (50)$$

Это решение непригодно, если  $q$  является корнем характеристического уравнения (24), так как тогда знаменатель обращается в нуль. Подобно § 2 можно, исходя из общей формулы (45), показать, что в этом особом случае уравнение (49) имеет частное решение вида  $Bte^{qt}$ .

Рассмотрим, наконец, решение уравнения

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = A \sin \omega t. \quad (51)$$

Здесь можно воспользоваться тем, что в силу формулы Эйлера правая часть является мнимой частью функции  $Ae^{i\omega t}$ . Значит,

достаточно решить уравнение

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = Ae^{i\omega t},$$

а у полученного решения взять мнимую часть (см. аналогичные рассуждения в § V.5). На основании (50) получаем комплексное решение

$$\begin{aligned} y &= \frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2 + h i\omega + k} = \frac{A}{k - m\omega^2 + i h\omega} e^{i\omega t} = \\ &= \frac{A[(k - m\omega^2) - i h\omega]}{(k - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t). \end{aligned}$$

Отсюда легко выделить мнимую часть, т. е. частное решение уравнения (51)

$$y = \frac{A}{(k - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2} [(k - m\omega^2) \sin \omega t - h\omega \cos \omega t]. \quad (52)$$

Чтобы получить общее решение уравнения (51), надо к найденному частному решению (52) добавить общее решение соответствующего однородного уравнения. Но так как каждое из решений однородного уравнения при возрастании  $t$  стремится к нулю, то после переходного процесса тело начинает колебаться по гармоническому закону (52), не зависящему от начальных условий. Это стационарное решение можно было найти и по методам § V.5.

Остановимся особо на случае, когда трение отсутствует, т. е. уравнение (20) заменяется на

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = f(t). \quad (53)$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет корни  $p_{1,2} = \pm i\omega_0$ , где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

— частота свободных колебаний системы, т. е. колебаний без внешней силы. Формула (45), преобразованная по формуле Эйлера, дает решение при нулевых начальных условиях (33)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{m \cdot 2i\omega_0} \int_{t_0}^t [e^{i\omega_0(t-\tau)} - e^{-i\omega_0(t-\tau)}] f(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{m\omega_0} \int_{t_0}^t \sin \omega_0(t-\tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (54)$$

(Проверьте с помощью дифференцирования, что правая часть действительно удовлетворяет уравнению (53) и начальным условиям (33).)

Пользуясь формулой

$$\sin \omega_0 (t - \tau) = \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 \tau - \sin \omega_0 \tau \cdot \cos \omega_0 t,$$

перепишем решение в виде

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t \cdot \int_{t_0}^t f(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau - \frac{1}{m\omega_0} \cos \omega_0 t \cdot \int_{t_0}^t f(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau.$$

Если по истечении некоторого промежутка времени  $t_1$  действие силы  $f(t)$  прекращается, то интегралы в этой формуле перестают зависеть от времени при  $t > t_1$  и решение принимает вид

$$y(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad \text{если } t > t_1,$$

где

$$a = -\frac{1}{m\omega_0} \int_{t_0}^{t_1} f(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau, \quad b = \frac{1}{m\omega_0} \int_{t_0}^{t_1} f(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau.$$

Таким образом, если первоначально тело покоилось, затем в течение некоторого времени на него действовала внешняя сила  $f(t)$ , то по окончании действия силы тело будет совершать свободные колебания с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

Формулу (54) можно записать иначе, введя «комплексное отклонение от положения равновесия»

$$w(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_{t_0}^t e^{i\omega_0(t-\tau)} f(\tau) d\tau = \frac{1}{m\omega_0} \int_{t_0}^t e^{-i\omega_0\tau} f(\tau) d\tau \cdot e^{i\omega_0 t},$$

для которого вещественное отклонение  $y(t)$  служит мнимой частью. Если  $t_0$  — начальный момент действия силы, то формулу можно переписать в виде

$$w(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega_0\tau} f(\tau) d\tau \cdot e^{i\omega_0 t},$$

так как при этом преобразовании к интегралу добавляется часть, равная нулю. Если сила действует только до некоторого момента  $t_1$  времени, то, начиная с этого момента, можно написать

$$w(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0\tau} f(\tau) d\tau \cdot e^{i\omega_0 t} \quad (55)$$

(этот интеграл фактически распространен по интервалу от  $t = t_0$  до  $t = t_1$ ). Получается гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$  и амплитудой

$$\left| \frac{1}{m\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0\tau} f(\tau) d\tau \right|.$$

Подобные интегралы (так называемые «интегралы Фурье») мы будем рассматривать в гл. XIV.

Если вынуждающая сила имеет вид  $f(t) = A \sin \omega t$ , то можно найти частное решение уравнения по формуле (52), которая при отсутствии трения, т. е. при  $h = 0$ , упрощается и приобретает вид

$$y = \frac{A}{k - m\omega^2} \sin \omega t = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \quad (56)$$

На это колебание, происходящее с частотой  $\omega$  вынуждающей силы, накладывается свободное колебание с собственной частотой  $\omega_0$ , зависящее от начальных условий и при отсутствии трения не затухающее.

Особо интересен случай, когда синусоидальная внешняя сила действует на осциллятор без трения при нулевых начальных условиях. Тогда решение находится по формуле (54) и, приняв для простоты  $t_0 = 0$ , получим

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0(t-\tau) A \sin \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{A}{m\omega_0} \int_0^t \frac{1}{2} [\cos(\omega\tau - \omega_0(t-\tau)) - \cos(\omega\tau + \omega_0(t-\tau))] d\tau = \\ &= \frac{A}{2m\omega_0} \left[ \frac{\sin(\omega\tau - \omega_0(t-\tau))}{\omega + \omega_0} - \frac{\sin(\omega\tau + \omega_0(t-\tau))}{\omega - \omega_0} \right]_{\tau=0}^t = \\ &= \frac{A}{2m\omega_0} \left[ \frac{\sin \omega t}{\omega + \omega_0} - \frac{\sin \omega t}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin(-\omega_0 t)}{\omega + \omega_0} + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega - \omega_0} \right] = \\ &= \frac{A}{m\omega_0(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)} (\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega t). \quad (57) \end{aligned}$$

Пусть частота  $\omega$  вынуждающей силы близка к собственной частоте  $\omega_0$  осциллятора. Преобразуя правую часть (57) по формуле

$$\begin{aligned} y &= \frac{A}{m\omega_0(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)} [\omega_0 \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega t + (\omega - \omega_0) \sin \omega_0 t] = \\ &= \frac{A}{m(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)} (\sin \omega_0 t - \sin \omega t) + \frac{A}{m\omega_0(\omega + \omega_0)} \sin \omega_0 t = \\ &= \frac{2A}{m(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \cos \frac{\omega_0 + \omega}{2} t + \frac{A}{m\omega_0(\omega + \omega_0)} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

и заменяя приближенно  $\omega_0 + \omega$  на  $2\omega_0$ , получим

$$y \approx \frac{-A}{m\omega_0(\omega - \omega_0)} \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \cos \omega_0 t + \frac{A}{2m\omega_0^2} \sin \omega_0 t.$$

Наиболее интересно первое, главное слагаемое. Его можно записать в виде

$$M(t) \cos \omega_0 t, \text{ где } M(t) = \frac{-A}{m\omega_0(\omega - \omega_0)} \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t,$$

и истолковать как гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$  и медленно изменяющейся амплитудой. Эта амплитуда меняется от 0 до

$$M_0 = \max |M(t)| = \frac{A}{m\omega_0 |\omega - \omega_0|} \quad (58)$$

с периодом

$$T = \frac{2\pi}{|\omega - \omega_0|}.$$

Такие колебания называются *биениями*, их график изображен на рис. 85. Они получаются в результате интерференции вынужденного

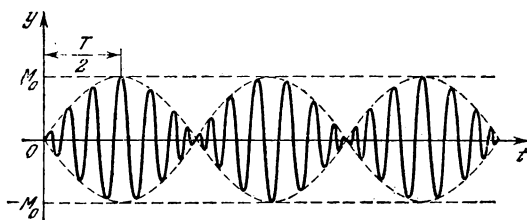


Рис. 85.

(56) и свободного колебаний из-за близости их по амплитуде и частоте (см. формулу (57)). Мы видим, что как время раскочки при биениях, так и амплитуда биений обратно пропорциональны  $|\omega - \omega_0|$ , т. е. разности частот свободных колебаний и вынуждающей силы.

Если осциллятор обладает малым трением, то процесс колебаний также начнется с биений, однако по прошествии достаточного времени свободное колебание затухнет и останется только вынужденное колебание (52). Его амплитуда равна при очень малом  $h$

$$\begin{aligned} \frac{A}{(k - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2} \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2} &= \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2}} \approx \\ &\approx \frac{A}{|k - m\omega^2|} \approx \frac{A}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} = \frac{A}{m|\omega_0 - \omega|(\omega_0 + \omega)} \approx \frac{A}{2m\omega_0(\omega - \omega_0)}. \end{aligned}$$

Сравнивая с формулой (58), мы видим, что амплитуда вынужденных колебаний равна половине амплитуды биений. Таким образом, график колебаний имеет вид, показанный на рис. 86. Интервал времени, на котором биения переходят в чисто гармонические колебания, является переходным периодом, а сам этот процесс — переходным процессом.

Если осциллятор без трения, то в особом случае, когда  $\omega = \omega_0$ , т. е. частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой, формула (56) непригодна; напомним, что это тот самый случай, который был нами пропущен в конце § V.5. Воспользуемся общей

формулой (54), приняв для простоты  $t_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{m} \int_0^t \sin \omega_0(t-\tau) \cdot A \sin \omega_0 \tau \, d\tau = \\ &= \frac{A}{2m} \int_0^t [\cos \omega_0(t-2\tau) - \cos \omega_0 t] \, d\tau = \\ &= \frac{A}{2m} \left[ \frac{\sin \omega_0(t-2\tau)}{-2\omega_0} - \tau \cos \omega_0 t \right]_{\tau=0}^t = \frac{A}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{A}{2m} t \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Первое из полученных слагаемых представляет собой свободное гармоническое колебание и присутствует только из-за необходимости удовлетворить нулевым граничным условиям. В отличие от этого

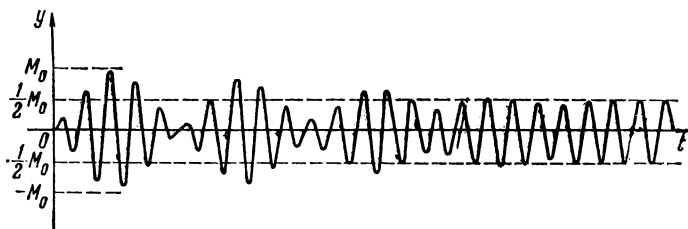


Рис. 86.

второе слагаемое представляет собой колебание, амплитуда которого с течением времени стремится к бесконечности по линейному закону. В этом и состоит очень важное явление резонанса, который получается, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы.

### Упражнения

Найдите решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным данным:

1.  $y'' - y = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y' = 0$  при  $t = 0$ .
2.  $y'' + y = t$ ,  $y = 1$ ,  $y' = 0$  при  $t = 0$ .

## § 6. Устойчивые и неустойчивые решения

Начнем с самого простого уравнения

$$\frac{dy}{dt} = ay \quad (a = \text{const}), \quad (59)$$

причем переменную  $t$  будем истолковывать как время. Его общее решение легко получить:

$$y = Ce^{at}, \quad (60)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, определяемая из начального условия

$$y(t_0) = y_0.$$

Подставляя в (60), находим

$$y_0 = Ce^{at_0}, \text{ т. е. } C = y_0 e^{-at_0}$$

и окончательно

$$y = y_0 e^{a(t-t_0)}. \quad (61)$$

В частности, при  $y_0 = 0$  получаем нулевое решение  $y \equiv 0$ . Однако допустим теперь, что начальное значение  $y_0$ , которое мы считали равным нулю, на самом деле оказалось хотя и малым, но отличным от нуля. Как будет вести себя тогда решение с течением времени, т. е. с возрастанием  $t$ ? Будет ли такое *возмущенное* решение приближаться к *невозмущенному* нулевому решению или удаляться от него?

Ответ на эти вопросы существенно зависит от знака коэффициента  $a$ . Если  $a < 0$ , то формула (61) сразу показывает, что при увеличении  $t$  решения безгранично приближаются к нулю, так что при больших  $t$  они практически становятся просто равными нулю. В такой ситуации невозмущенное решение называется *асимптотически устойчивым относительно изменения* (возмущения) *начального условия* или *асимптотически устойчивым по Ляпунову* по имени выдающегося русского математика и механика А. М. Ляпунова (1857—1918), который впервые начал систематически изучать понятие устойчивости процессов.

Совсем иная картина будет в случае  $a > 0$ . Здесь при  $y_0 \neq 0$  и при возрастании  $t$  решение по абсолютной величине безгранично увеличивается, т. е. становится не малым, даже если  $y_0$  было как угодно малым. Здесь невозмущенное решение называется *неустойчивым*. Уравнение (59) при  $a > 0$  получается, например, при рассмотрении размножения бактерий в питательной среде, причем  $y$  означает массу бактерий в единице объема, а  $a$  — это интенсивность размножения. Ясно, что если бактерий в начальный момент совершенно не было, то и с течением времени они не появятся. Однако эта картина неустойчива в том смысле, что сознательное или случайное внесение в среду как угодно малого количества бактерий приводит с течением времени к мощному загрязнению среды бактериями.

Интересен промежуточный случай  $a = 0$ . Здесь решения будут просто постоянными и потому при малом начальном отклонении возмущенного решения от невозмущенного первое будет и при возрастании  $t$  близким ко второму, хотя и не будет к нему асимптотически (при  $t \rightarrow \infty$ ) приближаться. Такая картина называется *неасимптотической устойчивостью* невозмущенного решения.

Рассмотрим теперь более общее уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \quad (62)$$



Нетрудно найти все стационарные решения, т. е. решения вида  $y = \text{const}$ . Для этого надо в (62) положить  $y = \tilde{y} = \text{const}$ , что даст

$$f(\tilde{y}) = 0. \quad (63)$$

Таким образом, стационарные решения уравнения (62)—это нули функции  $f(y)$ , стоящей в правой части. Остановимся на одном таком решении  $y = \tilde{y}$  и выясним, будет ли оно устойчивым.

Допустим сначала, что функция  $f(y)$  является убывающей, во всяком случае, в некоторой близости значения  $y = \tilde{y}$ ; тогда если  $y$  переходит через значение  $\tilde{y}$ , то  $f(y)$  переходит от положительных значений к отрицательным. В этом случае примерная картина поля

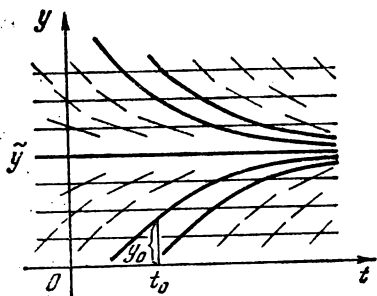


Рис. 87.

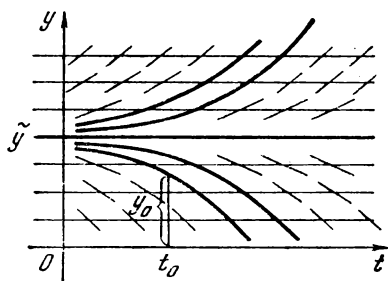


Рис. 88.

направлений, определенного уравнением (62) (ср. § 1), показана на рис. 87; при построении этого поля надо учесть, что изоклины для уравнения (62) имеют вид  $y = \text{const}$  (почему?), т. е. представляют собой прямые, параллельные оси  $t$  (они также показаны на рис. 87). На рис. 84 жирными линиями показаны интегральная прямая  $y = \tilde{y}$ , изображающая невозмущенное стационарное решение, и несколько других интегральных линий, получающихся при изменении начального условия. Ясно, что если  $y_0$  мало отличается от  $\tilde{y}$  (например, в пределах рисунка), то возмущенное решение мало отличается от невозмущенного и при возрастании  $t$ , а при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически к нему приближается. Таким образом, в данном случае невозмущенное решение асимптотически устойчиво.

Пусть теперь  $f(y)$  возрастает от отрицательных значений к положительным, когда  $y$  переходит через значение  $\tilde{y}$ . Соответствующая картина показана на рис. 88. Ясно, что как бы ни было  $y_0$  близким к  $\tilde{y}$  (но не равным  $\tilde{y}$ !), соответствующее решение  $y(t)$  с возрастанием  $t$  уйдет от невозмущенного решения на конечное, не малое расстояние. Это значит, что в данном случае невозмущенное стационарное решение неустойчиво. (Проверьте, что полученные ранее признаки устойчивости и неустойчивости для уравнения (59)

можно получить как следствие общих признаков, указанных для уравнения (62).)

Полученные сейчас признаки можно вывести иным способом, не опираясь на геометрическую картину. Разложим правую часть (62) в степенной ряд около значения  $y = \bar{y}$ ; тогда в силу условия (63) постоянного члена в разложении не будет и мы получим

$$\frac{dy}{dt} = f'(\bar{y})(y - \bar{y}) + \dots,$$

то есть

$$\frac{d(y - \bar{y})}{dt} = f'(\bar{y})(y - \bar{y}) + \dots, \quad (64)$$

где многоточием обозначены члены высшего порядка малости. Подчеркнем, что при выяснении устойчивости по Ляпунову изучается поведение возмущенных решений, мало отличающихся от невозмущенного, т. е. рассматриваются лишь малые значения  $y - \bar{y}$ . Поэтому в правой части уравнения (64) основную роль играет выписанный, линейный член. Отбрасывая члены высшего порядка малости, получаем уравнение вида (59), в котором  $a = f'(\bar{y})$ . Применяя результаты, полученные выше для уравнения (59), находим, что при  $f'(\bar{y}) < 0$  решение  $y - \bar{y} = 0$ , т. е.  $y = \bar{y}$ , асимптотически устойчиво; если же  $f'(\bar{y}) > 0$ , то решение  $y = \bar{y}$  неустойчиво. Однако в первом случае функция  $f(y)$  убывает (во всяком случае, около значения  $y = \bar{y}$ ), а во втором — возрастает, так что мы приходим к тем же выводам, которые были получены из геометрических соображений. В особом случае, когда  $f'(y) = a = 0$ , для уравнения (59) имеет место неасимптотическая устойчивость, т. е. решения, близкие к невозмущенному, не стремятся к нему, но и не уходят от него; тогда для полного уравнения (64) начинают играть существенную роль члены высшего порядка малости, которые в одном примере могут направить возмущенные решения к невозмущенному, а в другом — увести их на значительное расстояние. Мы не будем разбирать этот особый случай.

В качестве примера рассмотрим тепловой режим в некотором объеме, если в нем происходит химическая реакция, связанная с выделением тепла, и в то же время тепло отводится в окружающее пространство. Так как скорость реакции зависит от температуры  $T$  в данном объеме (мы будем рассматривать среднюю температуру в данный момент времени  $t$ ), то и скорость  $Q$  выделения тепла при реакции зависит от  $T$ ,  $Q = Q(T)$ . Примем эту зависимость такой, как показано на рис. 89. Кроме того, примем, что скорость отвода тепла в окружающее пространство равна  $a(T - T_0)$ , где  $a$  — коэффициент пропорциональности, а  $T_0$  — температура окружающей среды. Тогда при постоянной теплоемкости  $c$  рассматриваемого объема

дифференциальное уравнение процесса приобретает вид

$$\frac{d(cT)}{dt} \equiv c \frac{dT}{dt} = Q(T) - a(T - T_0). \quad (65)$$

В силу сказанного выше стационарное состояние, при котором температура в процессе реакции остается постоянной, возможно при тех  $T$ , для которых правая часть обращается в нуль, т. е. график  $Q(T)$  пересекается с графиком  $a(T - T_0)$  (см. рис. 89). Мы видим, что если окружающая температура  $T_0$  достаточно велика (на рис. 89 при  $T_0 = \bar{T}_0$ ), то стационарное состояние невозможно, подача тепла

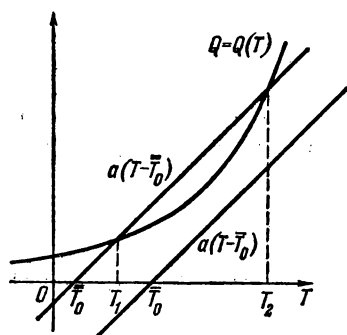


Рис. 89.

будет все время больше его отвода, и объем будет все время разогреваться. Если же эта температура мала (на рис. 89 при  $T_0 = \bar{T}_0$ ), то мыслимы два стационарных состояния, с температурой  $T_1$  или  $T_2$ . Вблизи значения  $T_1$  правая часть (65) переходит от положительных значений к отрицательным, т. е. убывает. Мы видели ранее, что такое состояние является устойчивым. Это видно и из рис. 89, так как если температура  $T$  опустится ниже  $T_1$ , то выделяться при реакции будет больше тепла, чем отводиться, т. е. объем будет

разогреваться, а если  $T$  поднимется выше  $T_1$ , то тепла будет отводиться больше, чем выделяться, и объем будет остывать. Аналогично проверяем, что стационарная температура  $T_2$  будет неустойчивой. Таким образом, при  $T_0 = \bar{T}_0$  развитие процесса зависит от начальной температуры следующим образом: если она была менее  $T_2$ , то с течением времени температура стремится к стационарному значению  $T_1$ , если же начальная температура была более  $T_2$ , то температура будет катастрофически нарастать. Эти соображения были положены в основу теории теплового взрыва лауреатом Нобелевской премии Н. Н. Семеновым в 1927 г.

Перейдем теперь к уравнению свободных колебаний

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (m, h, k > 0) \quad (21)$$

с общим решением

$$y = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad (66)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — корни характеристического уравнения (24), а  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Это уравнение имеет стационарное решение  $y \equiv 0$ . В § 3 мы видели, что все остальные решения при возрастании  $t$  стремятся к нулю (колебательным или неколебательным образом) и, таким образом,

указанное стационарное решение является асимптотически **устойчивым**. При отсутствии трения, т. е. при  $h = 0$ , мы видели, что **решения** периодичны; поэтому при малых начальном отклонении и начальной скорости решение будет малым и с возрастанием  $t$ , но не будет стремиться к нулю. Значит, при отсутствии трения стационарное решение будет устойчивым, но не асимптотически.

С помощью специально подобранных схем возможно построить системы с одной степенью свободы, описываемые уравнением (21) (где  $y$  представляет собой отклонение системы от стационарного состояния), для которых  $h < 0$  или  $k < 0$ . Такие системы можно истолковать как системы с отрицательным трением или с отрицательной упругостью. (См., например, описание работы туннельного диода в ВМ, § VIII.16, при которой систему можно истолковать как осциллятор с отрицательным трением.) Легко проверить, что у всех таких систем стационарное решение  $y \equiv 0$  неустойчиво. В самом деле, из алгебры известны свойства корней  $p_1$  и  $p_2$  квадратного уравнения (24):

$$p_1 + p_2 = -\frac{h}{m}, \quad p_1 p_2 = \frac{k}{m}.$$

Из первого равенства видно, что если  $h < 0$ , то либо по крайней мере один корень вещественный положительный, либо же корни мнимые сопряженные с положительной вещественной частью. Из второго равенства видно, что если  $k < 0$ , то корни разного знака и потому среди них имеется один положительный. Таким образом, во всех этих случаях среди корней имеется по крайней мере один либо вещественный положительный, либо мнимый с положительной вещественной частью. Пусть  $p_1$  — этот корень. Тогда первое слагаемое в правой части (66) имеет вид

$$C_1 e^{p_1 t} \quad (p_1 > 0) \quad \text{либо} \quad C_1 e^{(\gamma + i\omega)t} = C_1 e^{\gamma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (\gamma > 0),$$

и потому при как угодно малом  $C_1$  (т. е. при как угодно малых начальных данных) при возрастании  $t$  оно стремится к бесконечности. Это и означает неустойчивость стационарного решения.

### Упражнение

Найдите стационарные решения уравнения  $\frac{dy}{dt} = y^3 - 4y$  и выясните их устойчивость.

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1

1. Окружности  $x^2 + y^2 = C$  с центром в начале координат.

2. В точках перегиба должно быть  $y'' = 0$ . В силу уравнения (1) и формулы для производной сложной функции (§ IV.1) получаем  $y'' = (f(x, y))' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) y' = f'_x + f'_y f$ . Значит, искомое уравнение имеет вид  $f'_x + f'_y f = 0$ .

Для уравнения  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$  получаем  $x + y(x^2 + y^2) = 0$ .

## § 2.

1.  $y = e^{x^2}$ .

5.  $y = \frac{e^x}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - 1\right)e^{-x}$ .

2.  $y = x$ .

6.  $y = 2x - 1 - e^{-2x}$ .

3.  $y = \ln(x + e)$ .

7.  $y = e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$ .

4.  $y = \sqrt{1 + x^2}$ .

## § 3

1.  $y = 2 \cos t$ .

4.  $y = e^t + 3e^{-t}$

2.  $y = \frac{1}{4} e^{4t} \sin 2t$ .

5.  $y = (t - 1)e^t$ .

3.  $y = e^{2t} + e^t$ .

6.  $y = (5t + 1)e^{-2t}$ .

## § 4

1.  $x = -3(t - 2) + 1 = -3t + 7$ .

2.  $x = \frac{t^2}{2} - 2$ .

3.  $x = 2t - \sin t$ .

4.  $x = \int_{-\infty}^t (t - \tau) e^{\tau} d\tau = e^t$ .

## § 5

1.  $y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1$ .

2.  $y = t + \cos t - \sin t$ .

## § 6

$y = \pm 2$  (неустойчивые),  $y = 0$  (устойчивое).

## ГЛАВА VIII

### ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Эта глава является непосредственным продолжением предыдущей и существенно на нее опирается.

#### § 1. Особые точки

В § VII.1 мы установили, что интегральные линии уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  не пересекаются между собой. Однако из этого правила есть важное исключение. Действительно, может оказаться, что при некоторых значениях  $x$  и  $y$  функция  $f(x, y)$  не имеет определенного значения. Например,  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  не имеет определенного значения при  $x=0, y=0$ . Точка плоскости, в которой  $f(x, y)$  теряет смысл, называется *особой точкой* дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Через особую точку может проходить несколько интегральных кривых.

Если  $f(x, y)$  имеет вид отношения двух функций простого вида (например, двух многочленов),  $f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$ , то координаты особой точки находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= 0, \\ \psi(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Рассмотрим несколько примеров особых точек, принадлежащих к наиболее часто встречающимся в приложениях типам.

1.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ . Решением этого уравнения является функция  $y=Cx$  при любом постоянном  $C$ . Совокупность интегральных линий представляет собой все прямые линии, проходящие через начало координат (рис. 90). Таким образом, интегральные линии пересекаются в особой точке  $x=0, y=0$ .

2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ . Решением является  $y = Cx^2$ . Интегральные кривые — параболы с вершиной в начале координат. В этом случае все интегральные кривые касаются между собой в особой точке  $x = 0$ ,  $y = 0$  (рис. 91).

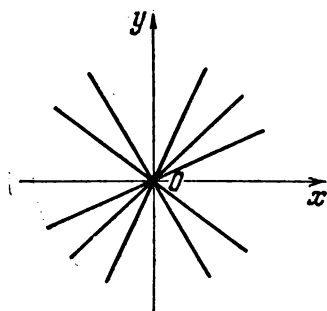


Рис. 90.

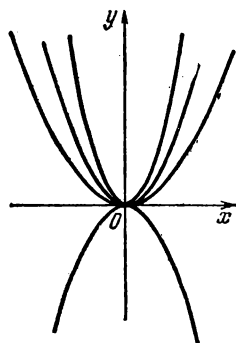


Рис. 91.

В рассмотренных примерах все интегральные линии проходят через особую точку, имея там определенное направление. Такая особая точка называется *узлом*.

3. Бывают особые точки, вблизи которых интегральные кривые ведут себя иначе. Пусть  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ . Интегральные линии имеют

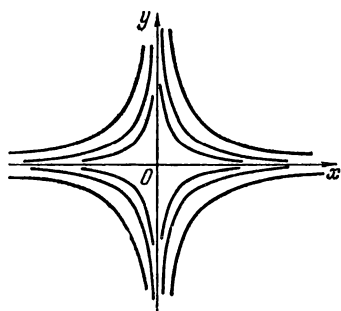


Рис. 92.

уравнение  $xy = C$ . При  $C = 0$  получаем  $x = 0$  или  $y = 0$  — две прямые, проходящие через начало координат. При  $C \neq 0$  интегральные кривые — гиперболы. Итак, две интегральные линии проходят через особую точку  $x = 0$ ,  $y = 0$ , остальные не проходят через нее. Особая точка такого типа называется *седлом* (рис. 92).

4. Интегральными кривыми уравнения  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  являются окружности  $x^2 + y^2 = C$ . В этом случае интегральные кривые окружают особую

точку, но через саму особую точку не проходит ни одна интегральная кривая (рис. 93).

Особая точка такого типа называется *центром*.

5. При интегрировании уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$  с особой точкой в начале координат удобно перейти к полярным координатам  $\rho$ ,  $\varphi$

по формулам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , откуда

$$dx = \cos \varphi \cdot d\rho - \rho \sin \varphi \, d\varphi, \quad dy = \sin \varphi \cdot d\rho + \rho \cos \varphi \, d\varphi.$$

После подстановки в уравнение и приведения подобных членов получим (проверьте!)  $d\rho = \rho \, d\varphi$ , откуда  $\frac{d\rho}{\rho} = d\varphi$  и  $\rho = Ce^{\varphi}$ . Придавая  $C$  всевозможные значения, получим семейство спиралей, накручивающихся на начало координат (рис. 94). Особая точка такого типа называется *фокусом*.

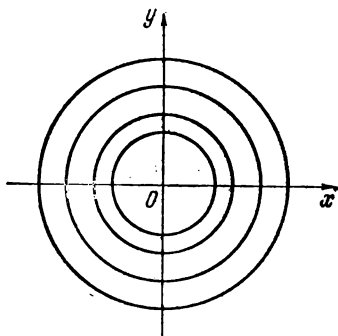


Рис. 93.

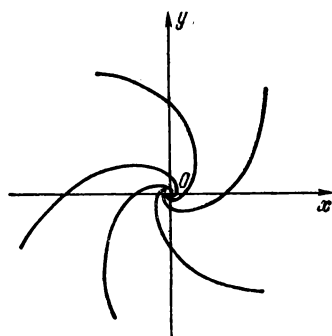


Рис. 94.

В приведенных примерах легко установить характер поведения интегральных кривых вблизи особой точки, так как легко решить дифференциальные уравнения. В более сложных случаях можно составить примерное представление о характере особой точки, вычерчивая изоклины. Более эффективные способы исследования особых точек лежат за пределами нашей книги. Применение этих способов показывает, в частности, что при выполнении условия  $\varphi'_x \psi'_y \neq \varphi'_y \psi'_x$  особая точка обязательно принадлежит к одному из разобранных типов.

#### Упражнение

Определите характер особой точки для уравнений  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x}$ ;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}.$$

## § 2. Системы дифференциальных уравнений

До сих пор мы считали, что нам дано одно дифференциальное уравнение, из которого нужно найти одну искомую функцию. Бывает, что неизвестных функций больше одной, например две:  $y(x)$  и  $z(x)$ . Тогда и дифференциальных уравнений должно быть два. Если это — уравнения первого порядка (разрешенные относительно производных



от искомых функций), то они имеют общий вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

т. е. мы получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка.

От одного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (2)$$

с одной искомой функцией легко перейти к равносильной системе из двух уравнений первого порядка с двумя искомыми функциями.

Для этого надо рассматривать  $\frac{dy}{dx}$  как дополнительную неизвестную функцию. Обозначая ее через  $z$ , получим

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dz}{dx}.$$

Поэтому вместо уравнения (2) можно написать равносильную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z, \\ \frac{dz}{dx} &= F(x, y, z). \end{aligned} \right\}$$

Аналогично уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

можно заменить равносильной системой трех уравнений первого порядка. Для этого надо положить

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = u.$$

Тогда получаем систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z, \\ \frac{dz}{dx} &= u, \\ \frac{du}{dx} &= \Phi(x, y, z, u). \end{aligned} \right\}$$

Подобным образом от уравнения любого порядка и даже от системы уравнений любого порядка легко перейти к системе первого порядка. Обратно, можно проверить, что от системы  $n$  уравнений первого порядка с  $n$  искомыми функциями можно перейти к одному

уравнению порядка  $n$  с одной искомой функцией. Поэтому общее решение такой системы получается в результате  $n$  интегрирований и, таким образом, содержит  $n$  произвольных постоянных. Задания  $n$  начальных условий (при некотором значении  $x$  задаются значения всех искомых функций) как раз достаточно, чтобы найти значения этих постоянных и, таким образом, получить частное решение.

Будем рассматривать для простоты систему из двух уравнений первого порядка вида (1). Иногда удастся, даже не решив систему, найти соотношение, связывающее компоненты (т. е.  $y(x)$  и  $z(x)$ ) любого ее частного решения. Такое соотношение имеет вид

$$H(x, y, z; C) = 0 \quad (3)$$

(причем  $C$  — постоянная, которая меняется от решения к решению) и называется *первым интегралом* этой системы уравнений. Знание первого интеграла дает возможность понизить число уравнений в системе на единицу, т. е. перейти к одному уравнению первого порядка с одной искомой функцией. Для этого можно из (3) выразить  $z$  через все остальное и подставить результат в первое уравнение (1); тогда получится одно уравнение первого порядка с одной искомой функцией  $y(x)$ . Если это уравнение проинтегрировать, т. е. найти  $y(x)$ , то  $z(x)$  можно будет найти без интегрирований из равенства (3).

Аналогичным образом знание двух независимых первых интегралов (т. е. таких, что ни один из них не является следствием другого)

$$\left. \begin{aligned} H_1(x, y, z; C_1) &= 0, \\ H_2(x, y, z; C_2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

дает общее решение системы (1), записанное в неявной форме. Для системы из  $n$  уравнений первого порядка общее решение получается из  $n$  независимых первых интегралов.

В некоторых случаях первые интегралы подсказываются физическими соображениями, чаще всего теми или иными законами сохранения. Например, запишем уравнение одномерных упругих линейных колебаний без трения (см. § VII.3)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

в форме системы первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = -kx. \quad (4)$$

В § VII.3 мы уже упоминали о выражении для полной энергии колеблющейся точки

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (5)$$

При свободных колебаниях без трения энергия должна сохраняться. И действительно, в силу (4)

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = -kxv + kxv = 0$$

(это — математическое доказательство закона сохранения энергии в данном примере). Таким образом,  $E = \text{const}$  для любого решения системы (4), т. е. формула (5), в которой  $E$  играет роль произвольной постоянной  $C$ , служит первым интегралом системы (4).

Подчеркнем в заключение, что, как видно из предыдущего, наиболее естественно рассматривать системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных функций; такие системы принято называть *замкнутыми*. Если уравнений меньше, чем искомым функций, то система называется незамкнутой (недоопределенной); чаще всего незамкнутость системы свидетельствует о том, что просто не все необходимые соотношения выписаны. Если уравнений больше, чем неизвестных функций, то система называется переопределенной; переопределенность системы обычно свидетельствует либо о ее зависимости (т. е. о том, что некоторые из уравнений являются следствиями остальных и потому излишни), либо об ошибке при ее составлении.

#### Упражнение

Рассмотрите систему уравнений

$$\frac{dy}{dx} = y + z, \quad \frac{dz}{dx} = -y + z.$$

Умножив первое уравнение на  $y$  и второе на  $z$ , а затем сложив результаты, найдите первый интеграл системы. Какие можно сделать из него выводы о поведении частных решений при  $x \rightarrow \pm \infty$ ?

### § 3. Определители и решение линейных систем с постоянными коэффициентами

Прежде чем перейти к дальнейшему, рассмотрим понятие определителя, играющее большую роль при решении и исследовании систем линейных уравнений различного вида. Начнем с системы двух алгебраических уравнений первой степени с двумя неизвестными

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y &= d_1, \\ a_2x + b_2y &= d_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решая ее (что мы предоставим сделать читателю), получим ответ

$$x = \frac{d_1b_2 - b_1d_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \quad y = \frac{a_1d_2 - d_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}. \quad (7)$$

Выражение  $a_1b_2 - b_1a_2$  называется *определителем* (детерминантом)

второго порядка и записывается в виде

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где вертикальные черточки — знак определителя. С помощью этого обозначения формулы (7) можно переписать в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (9)$$

Покажем на примере вычисление определителя:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 0 + 6 = 6.$$

Аналогичное решение системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

приводит к формулам

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad (11)$$

где в числителях и знаменателях стоят определители третьего порядка, вычисляемые по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3. \quad (12)$$

Формулы (11) совершенно аналогичны формулам (9). В знаменателе стоит один и тот же определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных (так называемый *определитель системы*). В числителе же для каждой из неизвестных стоит определитель, полученный из определителя системы подстановкой столбца свободных членов вместо столбца коэффициентов при данной неизвестной.

Определитель третьего порядка можно выразить через определители второго порядка. Для этого надо преобразовать выражение

(12) и воспользоваться обозначением (8):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) = \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

По этой формуле можно вычислять значение определителя. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ = 1 \left( 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \right) - 2(-1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = \frac{3}{2} + 8 = 9 \frac{1}{2}.$$

Оказывается, что формулы, аналогичные (9) и (11), справедливы для систем, состоящих из любого числа уравнений первой степени, если число неизвестных равно числу уравнений. При этом детерминанты (определители) четвертого порядка определяются по аналогии с формулой (13):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \\ + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

(надо как следует продумать структуру выражения, стоящего в правой части). Определители пятого порядка выражаются через определители четвертого порядка и т. д.

В формулах (9) и (11) подразумевается, что определитель системы, стоящий в знаменателях, не равен нулю. В этом случае сама система (6) и соответственно (10) имеют вполне определенное единственное решение; конечно, под решением такой системы понимается набор значений всех неизвестных. Иногда встречаются системы с определителем, равным нулю; их свойства совсем иные.

Рассмотрим для простоты систему (6). Если ее определитель равен нулю,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 = 0,$$

то

$$a_1 b_2 = b_1 a_2, \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

т. е. левые части системы пропорциональны. Например, система может иметь вид

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= d_1, \\ 8x + 12y &= d_2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ясно, что при произвольном выборе правых частей система несовместна, противоречива (не имеет ни одного решения). И только если правые части находятся в той же пропорции, что и левые (в данном примере  $d_2 = 4d_1$ ), то одно из уравнений является следствием другого и потому может быть отброшено. Но тогда останется одно уравнение с двумя неизвестными вида

$$2x + 3y = d_1,$$

которое имеет бесконечное количество решений; например, можно придать  $x$  любое значение и найти соответствующее  $y$ .

Оказывается, что рассмотренная картина является типичной. Именно, если определитель системы равен нулю, то между левыми частями системы имеется определенное соотношение. Если такое же соотношение справедливо для правых частей, то система имеет бесконечное количество решений; в противном случае нет ни одного решения.

Важным частным случаем является система  $n$  линейных однородных (т. е. без свободных членов) уравнений с  $n$  неизвестными. Например, в случае  $n=3$  система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Такая система, конечно, имеет нулевое («тривиальное», т. е. неинтересное) решение  $x=y=z=0$ . Часто бывает важно выяснить, имеются ли другие (ненулевые) решения. На основании предыдущего легко дать ответ на этот вопрос. Если определитель системы не равен нулю, то имеется только одно решение, а значит, ненулевых решений нет. Если же он равен нулю, то система имеет бесконечное количество ненулевых решений, так как несовместной в данном случае она быть не может. Чтобы найти эти решения, одно из уравнений системы отбрасывается, подобно тому как это было сделано для системы (14).

Применим полученные результаты к решению системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим, например, систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_1 y + b_1 z, \\ \frac{dz}{dx} &= a_2 y + b_2 z, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

в которой все коэффициенты  $a_1, b_1, a_2, b_2$  постоянны. Ее частные решения ищут в виде

$$y = \lambda e^{px}, \quad z = \mu e^{px}, \quad (16)$$

где  $\lambda, \mu, p$  — пока неизвестные постоянные. Подстановка в (15) дает после сокращения на  $e^{px}$  и переноса всех членов в одну сторону

$$\left. \begin{aligned} (a_1 - p)\lambda + b_1\mu &= 0, \\ a_2\lambda + (b_2 - p)\mu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Эти равенства можно рассматривать как систему из двух алгебраических однородных уравнений первой степени с двумя неизвестными  $\lambda, \mu$ . Чтобы она имела ненулевое решение, а только такое решение в силу (16) нас интересует, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 - p & b_1 \\ a_2 & b_2 - p \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Это — *характеристическое уравнение* для системы (15), из которого мы находим возможные значения для  $p$ . Его можно переписать, «раскрыв» определитель, в виде

$$p^2 - (a_1 + b_2)p + a_1b_2 - b_1a_2 = 0$$

(проверьте!).

Мы видим, что уравнение (18) имеет вторую степень относительно  $p$ ; поэтому оно имеет два корня  $p_1, p_2$ . Если эти корни различные, то можно любой из них ( $p_k$ ) подставить в систему (17), найти какое-либо ненулевое решение  $\lambda_k, \mu_k$  и по формуле (16) получить соответствующее решение  $y(x), z(x)$  системы (15). Так как величины  $\lambda_k, \mu_k$  определены с точностью до произвольного общего множителя, то умножим решение, отвечающее корню  $p_1$ , на произвольную постоянную  $C_1$ , а решение, отвечающее корню  $p_2$ , на  $C_2$  и сложим результаты. Мы получим общее решение системы (15)

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 \lambda_1 e^{p_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{p_2 x}, \\ z &= C_1 \mu_1 e^{p_1 x} + C_2 \mu_2 e^{p_2 x}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Здесь произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  можно найти, например, если даны дополнительно начальные условия, имеющие для системы (15) вид:

$$\text{при } x = x_0 \text{ заданы } y = y_0 \text{ и } z = z_0.$$

Если корни уравнения (17) мнимые, то решение можно либо оставить в форме (19), либо записать в вещественной форме, подобно § VII.3. Если  $p_1 = p_2$ , то  $y$  и  $z$  получаются в виде комбинации функций  $e^{p_1 x}$  и  $xe^{p_1 x}$  (ср. § VII.3).

### Упражнения

1. Исследуйте разрешимость системы алгебраических уравнений  $\left. \begin{array}{l} x + 2y = 3, \\ 3x + ay = b \end{array} \right\}$  при различных  $a, b$ .

2. Найдите общее решение системы  $\frac{dx}{dt} = 4x - y, \frac{dy}{dt} = -6x + 3y$ .

## § 4. Устойчивость по Ляпунову состояния равновесия

Понятие устойчивости как способности того или иного объекта, состояния или процесса сопротивляться неучитываемым заранее внешним воздействиям появилось еще в античной науке и сейчас занимает одно из центральных мест в физике и технике. Существуют различные конкретные реализации этого общего понятия в зависимости от типа рассматриваемого объекта, характера внешних воздействий и т. д. Здесь мы рассмотрим понятие устойчивости по Ляпунову, одно из наиболее важных, уже освещенное на простых примерах в § VII.6.

Пусть состояние некоторого объекта описывается конечным числом параметров, для простоты двумя параметрами  $x, y$ , так что изменение этого объекта во времени задается двумя функциями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $t$  — время). Пусть закон этого изменения имеет вид системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{array} \right\} \quad (20)$$

с заданными правыми частями, не содержащими явно независимой переменной  $t$ . Последнее условие означает, что дифференциальный закон развития процесса не меняется с течением времени; такие процессы называются *автономными*. (Автономные системы появляются, в частности, когда уравнения охватывают все тела, участвующие в задаче, так как законы природы неизменны во времени.)

Пусть состояние равновесия рассматриваемого объекта (когда он не меняется с течением времени) описывается постоянными значениями  $x = x_0, y = y_0$ ; тогда эта система постоянных, рассматриваемых как функции времени, также должна удовлетворять системе (20). Из непосредственной подстановки в (20) следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы одновременно

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0. \quad (21)$$



Пусть в некоторый момент  $t_0$  объект под влиянием каких-то причин вышел из состояния равновесия, т. е. параметры  $x, y$  стали равными  $x = x_0 + \Delta x_0, y = y_0 + \Delta y_0$ . Тогда для выяснения дальнейшего изменения рассматриваемого объекта надо решить систему уравнений (20) при начальных условиях:

$$x(t_0) = x_0 + \Delta x_0, \quad y(t_0) = y_0 + \Delta y_0. \quad (22)$$

Исследуемое состояние равновесия называется *устойчивым по Ляпунову*, если после малого отклонения от этого состояния объект продолжает оставаться вблизи от него в продолжение всего дальнейшего времени. Другими словами, при малых  $\Delta x_0, \Delta y_0$  для решения системы (20) при начальных условиях (22) разности  $\Delta x = x(t) - x_0, \Delta y = y(t) - y_0$  должны быть малыми при всех  $t > t_0$ .

Для выяснения того, будет ли иметь место устойчивость, подставим в систему (20)

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y,$$

что даст

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\Delta x)}{dt} &= P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (P'_x)_0 \Delta x + (P'_y)_0 \Delta y + \dots, \\ \frac{d(\Delta y)}{dt} &= Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (Q'_x)_0 \Delta x + (Q'_y)_0 \Delta y + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где обозначено  $(P'_x)_0 = P'_x(x_0, y_0)$  и т. п. Здесь при преобразовании правых частей мы воспользовались формулой Тейлора (§ IV.6) и формулами (21); многоточиями обозначены члены выше первого порядка малости.

Так как при выяснении устойчивости рассматриваются лишь малые  $\Delta x, \Delta y$ , то в правых частях системы (23) основную роль играют выписанные, линейные члены (ср. аналогичное рассуждение в § VII.6). Поэтому заменим систему (23) на *укороченную систему* (*систему первого приближения*), отбросив члены высшего порядка малости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\Delta x)}{dt} &= (P'_x)_0 \Delta x + (P'_y)_0 \Delta y, \\ \frac{d(\Delta y)}{dt} &= (Q'_x)_0 \Delta x + (Q'_y)_0 \Delta y. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Система (24)—это линейная система с постоянными коэффициентами, которая решается по методу § 3. Согласно формуле (19) (где, правда, были применены иные обозначения) решение системы (24) получается как комбинация функций вида  $e^{pt}$ , где  $p$  удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} (P'_x)_0 - p & (P'_y)_0 \\ (Q'_x)_0 & (Q'_y)_0 - p \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

При этом малым  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$  отвечают малые значения произвольных постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  и поэтому все дело в поведении функции  $e^{pt}$  при возрастании  $t$ . Так как  $p$  может быть и мнимым,  $p = r + is$ , а тогда

$$e^{pt} = e^{rt} (\cos st + i \sin st), \quad (26)$$

то нарастание или затухание возмущения определяется знаком  $p$ , если  $p$  вещественное, и знаком  $r$ , если  $p$  мнимое: если этот знак плюс, то возмущение нарастает, а если минус, то затухает. Мы приходим к следующим выводам. Если все корни характеристического уравнения (25) имеют отрицательную вещественную часть (в частности, они могут быть вещественными отрицательными), то рассматриваемое состояние равновесия  $(x_0; y_0)$  устойчиво по Ляпунову. Кроме того, тогда при малых  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$  будет  $x(t) \rightarrow x_0$ ,  $y(t) \rightarrow y_0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; такая устойчивость, как мы указывали в § VII.6, называется *асимптотической*. Если же среди корней уравнения (25) имеется по крайней мере один с положительной вещественной частью, то рассматриваемое состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову.

Эти результаты мы вывели для системы (24), но согласно сказанному выше те же утверждения справедливы для полной системы (23). Отметим, что наличие двойного корня у уравнения (25) не нарушает наших утверждений, так как хотя тогда в решении появляется  $t$  в качестве множителя, но экспонента  $e^{pt}$  при  $p < 0$  стремится к нулю быстрее, чем  $t$  к бесконечности.

Оба полученных вывода не охватывают случая, когда среди корней уравнения (25) нет корней с положительной вещественной частью, но имеется по крайней мере один с нулевой вещественной частью. Тогда в общем решении системы (24) появляются функции вида

$$e^{ist} = \cos st + i \sin st, \quad |e^{ist}| = 1 \quad \text{или} \quad e^{0t} = 1,$$

т. е. получается, будто бы рассматриваемый объект колеблется (или остается неподвижным) около состояния равновесия, не стремясь к нему. Но тогда из-за неограниченности времени начинают влиять отброшенные члены высшего порядка малости, которые могут нарушить устойчивость. Итак, в рассматриваемом особом случае по корням уравнения (25) нельзя заключить об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия; чтобы это сделать, надо привлечь какие-либо дополнительные соображения, например привлечь дальнейшие члены разложений (23). Мы не будем проводить такое исследование, отметим лишь, что малые возмущения здесь будут нарастать или затухать значительно медленнее, так как время изменения такого возмущения в заданное число (например, в  $e$ ) раз будет обратно пропорциональным этому возмущению или даже иметь еще более высокий порядок.

## Упражнение

Найдите состояния равновесия для системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= y + y^3 \end{aligned} \right\}$$

и исследуйте их устойчивость

## § 5. Построение приближенных формул для решения

Методы построения приближенных формул для решения дифференциального уравнения во многом аналогичны описанным в § 1.4 методам решения «конечных» уравнений. Мы будем для простоты рассматривать уравнения первого порядка, хотя те же методы естественно переносятся на уравнения любого порядка и на системы уравнений.

Начнем с метода итераций. Пусть рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка с заданным начальным условием

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Если взять интегралы от обеих частей уравнения, получим

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{dx} dx = y - y_0 = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds^*,$$

т. е.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (28)$$

Уравнение (28) равносильно сразу обоим равенствам (27), так как после его дифференцирования получается первое равенство, а после подстановки  $x = x_0$  — второе. Уравнение (28) является *интегральным уравнением*, так как в нем неизвестная функция стоит под знаком интеграла. Поскольку оно включает в себя не только первое, но и второе равенства (27), то оно имеет лишь единствен-

---

\* ) Мы часто применяем обозначения вида  $\int_{x_0}^x \varphi(x) dx$ , однако в данном случае нужно применять более аккуратную запись, различая верхний предел и переменную интегрирования (ср. ВМ, § 1.14).

ное решение, а не бесконечное количество, как дифференциальное уравнение.

Вид уравнения (28) удобен для применения метода итераций (сравните с уравнением (1.22)); хотя сейчас неизвестной является не число, а функция. Выбрав некоторую функцию  $y_0(x)$  в качестве нулевого приближения (желательно, чтобы она была по возможности ближе к искомому решению; если о последнем ничего не известно, то можно положить хотя бы  $y_0(x) \equiv y_0$ ), находим первое приближение по формуле

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0(s)) ds.$$

Подставляя результат в правую часть (28), находим второе приближение и т. д.; вообще

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Подобно § 1.4, если процесс итераций сходится, т. е. если последовательные приближения стремятся с ростом  $n$  к некоторой предельной функции, то она удовлетворяет уравнению (28).

Замечательно, что метод итераций для уравнения (28) сходится, во всяком случае для всех  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ . Это связано с тем, что при вычислении последующих приближений надо интегрировать предыдущие, а при последовательном интегрировании функции в целом «сглаживаются» и всякие неточности, происходящие из-за выбора нулевого приближения, погрешностей округления и т. п., постепенно устраниаются.

(В отличие от этого при последовательном дифференцировании функции, как правило, ухудшаются, первоначальные неточности разрастаются, и поэтому итерационный метод, основанный на последовательном дифференцировании, не дал бы сходимости. Ср. аналогичные соображения в § II.2.)

Рассмотрим, например, задачу

$$\left. \begin{aligned} y' &= x^2 + y^2, \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

После интегрирования получим

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3} + \int_0^x y^2(s) ds.$$

Выберем в качестве нулевого приближения для искомого решения, о котором мы пока ничего не знаем, функцию  $y_0(x) \equiv 1$ , так

как она удовлетворяет хотя бы начальному условию. Тогда получим (проверьте!), выписывая степени до  $x^4$  включительно,

$$y_1(x) = 1 + x + \frac{x^3}{3},$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 1 + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \left(1 + s + \frac{s^3}{3}\right)^2 ds = \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots, \end{aligned}$$

$$y_3(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \dots,$$

$$y_4(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \dots,$$

$$y_5(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \dots$$

Графики последовательных приближений показаны на рис. 95, где пунктиром показано также точное решение. Мы видим, что для небольших  $|x|$  процесс сходится.

Вопрос о том, на каком приближении нужно остановиться, на практике обычно решается с помощью сравнения последующих приближений с предыдущими.

Другой приближенный способ основан на том, что из данных (27) можно с помощью дифференцирования найти значения  $y'(x_0)$ ,  $y''(x_0)$  и т. д., после чего составить разложение решения в степенной ряд Тейлора (см., например, ВМ, § II.17). Необходимое количество членов определяется с помощью их последовательного вычисления и сравнения с выбранной степенью точности.

Рассмотрим, например, задачу (29). Подстановкой в правую часть уравнения находим, что  $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$ . Если продифференцировать обе части уравнения, получим  $y'' = 2x + 2yy'$  и, подставив  $x = 0$ , найдем  $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ . Аналогично находим

$$\begin{aligned} y''' &= 2 + 2y'^2 + 2yy''; & y'''(0) &= 8; \\ y^{IV} &= 6y'y'' + 2yy'''; & y^{IV}(0) &= 28 \end{aligned}$$

и т. д. Подставляя это в формулу Тейлора, получим

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \dots \quad (30)$$

Мы получили ту же формулу, что и по методу последовательных приближений. Этой формулой можно пользоваться лишь для небольших  $|x|$ ; например, при  $x=1$  ряд (30) (как и описанный выше метод итераций) расходится. Можно показать, что это вызвано существом рассматриваемой задачи. В самом деле, рассмотрим решение  $y^1(x)$  уравнения  $\frac{dy}{dx} = y^2$  при начальном условии

$y^1(0) = 1$ . Так как  $x^2 + y^2 > y^2$ , то поле направлений в плоскости  $x, y$ , определяющее исходное решение  $y(x)$ , расположено круче, чем поле направлений, определяющее решение  $y^1(x)$ . Но  $y(0) = y^1(0)$ ; значит, при  $x > 0$  линия  $y = y(x)$  проходит выше, чем линия

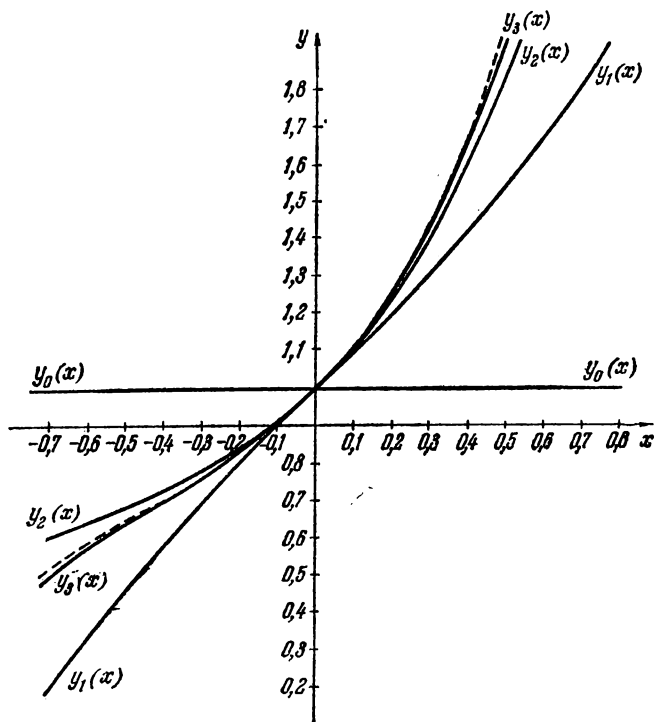


Рис. 95.

$y = y^1(x)$ . Решение  $y^1(x)$  легко найти с помощью разделения переменных,  $y^1(x) = \frac{1}{1-x}$ . Итак,  $y(x) > \frac{1}{1-x}$  ( $x > 0$ ). При  $x \rightarrow 1-0$  правая часть стремится к бесконечности; значит, решение  $y(x)$  при возрастании  $x$  от 0 также обращается в бесконечность при некотором  $x = x_1 \leq 1$ . Подсчет значения  $x_1$  (которое зависит от начального значения  $y(0)$ ) по методам § VIII.7 дает  $x_1 = 0,959$ . При  $x \rightarrow x_1-0$  будет  $x^2 \ll y^2$ , и потому  $y(x) \approx 1/(x_1 - x)$ .

С описанным методом тесно связан метод применения степенных рядов с неопределенными коэффициентами. Он состоит в том, что решение уравнения ищется в форме ряда с неизвестными коэффициентами

$$y = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3 + \dots,$$

которые находятся с помощью подстановки в уравнение, последующего приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях и применения начального условия, если оно задано.

Применим метод неопределенных коэффициентов к рассмотренной выше задаче (29). Так как  $x_0 = 0$ , то пишем

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots \quad (31)$$

Подставляя  $x = 0$ , получаем в силу начального условия, что  $a = 1$ . Перед подстановкой ряда (31) в уравнение (29) удобно правую часть этого уравнения разложить по степеням  $y - 1$ . (В общем случае производится разложение правой части в ряд Тейлора по степеням  $x - x_0$ ,  $y - y_0$  согласно формуле

$$f(x, y) = f_0 + (f'_x)_0(x - x_0) + (f'_y)_0(y - y_0) + \dots,$$

где нулевой индекс означает подстановку значений  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ .) Получим

$$y' = x^2 + [(y - 1) + 1]^2 = x^2 + 1 + 2(y - 1) + (y - 1)^2.$$

Подставляя ряд (31), получаем

$$b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \dots = 1 + x^2 + 2(bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots) + (bx + cx^2 + dx^3 + \dots)^2.$$

Раскрывая в правой части скобки и приводя подобные члены, а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , приходим к соотношениям  $b = 1$ ,  $2c = 2b$ ,  $3d = 1 + 2c + b^2$ ,  $4e = 2d + 2bc, \dots$ , откуда последовательно находим  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = \frac{4}{3}$ ,  $e = \frac{7}{6}$ ,  $\dots$

Подставляя эти значения в (31), мы вновь приходим к ряду (30).

При решении дифференциальных уравнений применяется также метод малого параметра (см. § 1.4). Приведем примеры.

Задача

$$y' = \frac{x}{1 + 0,1xy}, \quad y(0) = 0 \quad (32)$$

не содержит параметров. Однако можно рассмотреть более общую задачу

$$y' = \frac{x}{1 + \alpha xy}, \quad y(0) = 0, \quad (33)$$

из которой (32) получается при  $\alpha = 0,1$ . Задача (33) легко решается при  $\alpha = 0$ : тогда получается  $y = \frac{x^2}{2}$ . Поэтому ищем решение разложенным в ряд по степеням  $\alpha$ , т. е.

$$y = \frac{x^2}{2} + \alpha u + \alpha^2 v + \alpha^3 w + \dots, \quad (34)$$

где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  и т. д. — пока неизвестные функции  $x$ .

Подстановка (34) в (33) дает после умножения на знаменатель  $(x + \alpha u' + \alpha^2 v' + \alpha^3 w' + \dots) \left(1 + \frac{\alpha}{2} x^3 + \alpha^2 x u + \alpha^3 x v + \dots\right) = x$ ; (35)

$$\alpha u(0) + \alpha^2 v(0) + \dots = 0,$$

т. е.

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad \dots \quad (36)$$

Раскрывая скобки в (35) и приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $\alpha$ , получим последовательно

$$u' + \frac{1}{2} x^4 = 0, \quad v' + \frac{x^3}{2} u' + x^2 u = 0,$$

$$w' + \frac{x^3}{2} v' + x u u' + x^2 v = 0 \text{ и т. д.,}$$

откуда с учетом равенств (36) найдем (проверьте!)

$$u = -\frac{x^5}{10}, \quad v = \frac{7}{160} x^8, \quad w = \frac{71}{1760} x^{11} \text{ и т. д.}$$

Поэтому формула (34) дает

$$y = \frac{x^3}{2} - \frac{\alpha}{10} x^5 + \frac{7\alpha^2}{160} x^8 - \frac{71\alpha^3}{1760} x^{11} + \dots$$

В частности, для уравнения (32) получим

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{100} + \frac{7x^8}{16\,000} - \frac{71x^{11}}{1\,760\,000} + \dots$$

Этот ряд прекрасно сходится при  $|x| \leq 1$  и неплохо — при  $1 < |x| < 2^*$ .

Рассмотрим в качестве другого примера задачу

$$y' = \sin(xy), \quad y(0) = \alpha. \quad (37)$$

В отличие от предыдущего примера здесь параметр входит в начальное условие. При  $\alpha = 0$  задача (37) имеет решение  $y \equiv 0$ . Поэтому при малых  $|\alpha|$  ищем решение в форме

$$y = \alpha u + \alpha^2 v + \alpha^3 w + \dots \quad (u = u(x), \quad v = v(x), \dots). \quad (38)$$

Подстановка значения  $x = 0$  дает

$$u(0) = 1, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = 0. \quad (39)$$

---

\*) Замена  $s = -\alpha xy$ ,  $v(s) = -\alpha x^3$ , которую мы предоставляем читателю, переводит (33) в уравнение, не содержащее параметра. При  $s = 1$  происходит катастрофа:  $|dy/dx| = \infty$ . Численное интегрирование по методам § VIII. 7 показывает, что  $v(1) = 1,087$ . Поэтому ряд (34) не может сходиться при  $x > \sqrt[3]{1,087/\alpha}$ ; при  $\alpha = 0,1$  правая часть равна 2,16.



С другой стороны, подставив (38) в дифференциальное уравнение (37), получим, с учетом ряда Тейлора для синуса,

$$\begin{aligned} \alpha u' + \alpha^2 v' + \alpha^3 w' + \dots = \\ = \frac{(\alpha x u + \alpha^2 x v + \alpha^3 x w + \dots)}{1!} - \frac{(\alpha x u + \alpha^2 x v + \alpha^3 x w + \dots)^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\alpha$  дает

$$u' = x u, \quad v' = x v, \quad w' = x w - \frac{x^3 u^3}{3!}, \dots$$

Интегрируя эти уже линейные уравнения с учетом начальных условий (39), найдем (проверьте!)

$$u = e^{\frac{x^2}{2}}, \quad v = 0, \quad w = \frac{1}{12}(1 - x^2)e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{12}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Подстановка этих выражений в (38) дает разложение искомого решения, пригодное для небольших  $|\alpha|$ . При этом, чем больше  $|x|$ , тем больше коэффициенты и потому тем меньше интервал значений  $\alpha$ , при которых ряд применим.

В более сложных случаях при применении метода малого параметра часто бывает полезно найти хотя бы первый содержащий параметр член разложения, так как он дает представление о поведении решения при небольшом изменении этого параметра.

Подчеркнем в заключение, что на практике, особенно при грубых, прикидочных расчетах, широко применяется упрощение самого исходного уравнения путем отбрасывания сравнительно малых членов, замены медленно меняющихся коэффициентов на постоянные и т. п. После такого упрощения может получиться уравнение одного из интегрируемых типов и, интегрируя, мы получим функцию, которая может считаться приближенным решением исходного, полного уравнения; во всяком случае, она часто правильно передает характер поведения точного решения. Найдя это «нулевое приближение», иногда удастся с его помощью внести поправки, учитывающие упрощение, и тем самым найти «первое приближение» и т. д.

Если уравнение содержит параметры (например, массы, линейные размеры исследуемых объектов и т. п.), то нужно иметь в виду, что при одних значениях этих параметров относительно малыми могут быть одни члены уравнения, а при других значениях — другие, так что упрощение будет при разных значениях параметров производиться по-разному. Кроме того, иногда приходится разбивать интервал изменения независимой переменной на части, на каждой из которых упрощение проводится по-своему.

Особенно полезно такое упрощение уравнения в случаях, когда при самом выводе (написании) дифференциального уравнения делались существенные упрощающие предположения или когда точность,

с которой известны рассматриваемые величины, невелика. Например, члены уравнения, меньшие допускаемой погрешности в других его членах, надо безусловно отбросить.

Рассмотрим, например, задачу

$$y'' + \frac{1}{1+0,1x} y + 0,2y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2. \quad (40)$$

Так как коэффициент при  $y$  меняется медленно, то заменим его на его среднее значение

$$\frac{1}{1+0,1x} = k; \quad x=0, \quad k=1; \quad x=2, \quad k=\frac{1}{1,2}=0,83;$$

$$\bar{k} = \frac{1+0,83}{2} = 0,92.$$

Кроме того, сравнительно малое третье слагаемое отбросим.

Получим уравнение

$$y'' + 0,92y = 0$$

с решением при данных начальных условиях

$$y = \cos 0,96x. \quad (41)$$

Вид этого приближенного решения подтверждает правомерность отбрасывания последнего слагаемого в уравнении, так как отношение третьего члена ко второму получается порядка  $0,2y^3 < 0,2$  и потому сумма первых двух членов мала по сравнению со вторым, т. е. первый член должен с ним «почти взаимно уничтожиться».

Внесем поправку на последнее слагаемое, для чего подставим в него приближенное решение (41), оставив коэффициент осредненным:

$$y'' + 0,92y = -0,2 \cos^3 0,96x.$$

Интегрирование этого уравнения по методу § VII.5 дает при заданных начальных условиях

$$y = 0,99 \cos 0,96x - 0,08x \sin 0,96x + 0,01 \cos 2,88x.$$

Разница по сравнению с нулевым приближением (41) невелика, так что вывод в значении отдельных слагаемых в уравнении (40) остается в силе; в то же время третий член уравнения (40) внес свой вклад в решение. (Для учета непостоянства коэффициента  $k$  можно было бы второй член в уравнении (40) заменить на  $[1,1+0,1(x-1)]^{-1}y = \frac{1}{1,1} [1+0,91(x-1)]^{-1}y \approx 0,91y - 0,08(x-1) \times \times \cos 0,96x$ ; однако и это не привело бы к существенной замене решения.)

Подобные рассуждения зачастую не блещут строгостью (и иногда приводят к ошибкам), однако если они проводятся в соответствии со здравым смыслом, то все же, и притом довольно часто, дают решение, которым можно пользоваться на практике.

## Упражнения

1. Примените метод последовательных приближений к задаче  $\frac{dy}{dx} = y$ ,  $y(0) = 1$ .

2. С помощью вычисления производных найдите разложение по степеням  $x$  решения задачи  $\frac{dy}{dx} = e^x y$ ,  $y(0) = 0$  с точностью до  $x^3$ .

3. Найдите первые два члена разложения решения задачи  $\frac{dy}{dx} = y^2 + \alpha x$ ,  $y(0) = 1$  в ряд по степеням  $\alpha$ .

## § 6. Адиабатическое изменение решения

Рассмотрим еще один важный метод приближенного решения дифференциальных уравнений на примере линейного уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (x = x(t), \omega = \omega(t)), \quad (42)$$

где точкой сверху обозначается производная по времени  $t$ , а зависимость  $\omega(t)$  задана. Это уравнение колебаний осциллятора, параметры которого с течением времени меняются; например, это может быть маятник, у которого меняется длина подвеса, и т. п.

В общем случае уравнение (42) не интегрируется в квадратурах, и исследование его довольно сложно. Однако в важном частном случае, именно, когда коэффициент  $\omega(t) > 0$  меняется медленно, такое исследование можно провести. При этом понятие медленного изменения уточняется следующим образом. Пусть сначала  $\omega = \text{const}$ ; тогда в § VII.3 мы видели, что  $\omega$  служит частотой свободных колебаний осциллятора, а потому у нас имеется естественная мера времени, равная периоду  $\frac{2\pi}{\omega}$  этих колебаний. Примем, что какая-либо величина  $p(t)$  *меняется медленно*, говорят также—*адиабатически*, если ее относительное изменение за этот период мало, т. е. если

$$\left| \dot{p} \frac{2\pi}{\omega} \right| \ll |p| \quad \text{или, что то же,} \quad |\dot{p}| \ll \omega |p|.$$

Этим определением мы будем пользоваться и для случая  $\omega = \omega(t)$ ; адиабатичность изменения  $\dot{\omega}$  означает, что  $|\dot{\omega}| \ll \omega^2$ .

Если  $\omega = \text{const}$ , то общее решение уравнения (42) можно записать в виде

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $A$  и  $\varphi_0$ —произвольные постоянные. Короче,

$$x = A \sin \varphi, \quad (43)$$

где  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , и потому

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (44)$$

Если теперь  $\omega$  зависит от  $t$ , но меняется медленно, то естественно считать, что в каждый небольшой промежуток времени колебания осциллятора являются почти гармоническими с частотой, равной текущему значению  $\omega$ , и принять, что решение уравнения (42) все равно имеет вид (43) при условии (44), где, однако, уже  $A = A(t)$ ,  $\omega = \omega(t)$ . Из (44) получаем, что  $\varphi = \int \omega(t) dt$ , причем постоянный нижний предел этого интеграла несуществен.

Пусть не только  $\omega$ , но и  $\dot{\omega}$  меняются медленно; тогда естественно принять, что  $A$  и  $\dot{A}$  также меняются медленно. Из (43) получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A} \sin \varphi + A \cos \varphi \cdot \dot{\omega}, \\ \ddot{x} &= \ddot{A} \sin \varphi + 2\dot{A} \cos \varphi \cdot \dot{\omega} - A \sin \varphi \cdot \omega^2 + A \cos \varphi \cdot \dot{\omega}, \end{aligned}$$

и подстановка в (40) дает

$$\ddot{A} \sin \varphi + 2\dot{A} \cos \varphi \cdot \dot{\omega} + A \cos \varphi \cdot \dot{\omega} = 0. \quad (45)$$

Так как по предположению первый член имеет высший порядок малости по сравнению со вторым, то второй и третий члены должны взаимно уничтожаться. После сокращения на  $\cos \varphi$  получаем

$$2\dot{A}\omega + A\dot{\omega} = 0, \text{ т. е. } 2\frac{dA}{dt}\omega + A\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad 2\frac{dA}{A} + \frac{d\omega}{\omega} = 0$$

и после интегрирования находим, что  $2 \ln A + \ln \omega = \ln C$ ,  $A^2\omega = C$ . Итак, мы видим, что в наших предположениях амплитуда колебаний меняется обратно пропорционально корню квадратному из текущего значения собственной частоты.

Конечно, так как мы в уравнении (45) пренебрегли членом высшего порядка малости, то и выражение  $A^2\omega$  на самом деле не постоянно. Оно меняется с течением времени, но относительная скорость его изменения имеет высший порядок малости по сравнению с относительной скоростью изменения собственной частоты. Как говорят, величина  $A^2\omega$  является *адиабатическим инвариантом*.

К аналогичному результату можно прийти из энергетических соображений. Энергия осциллятора равна (см. формулу (5))

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2),$$

откуда, дифференцируя и пользуясь уравнением (42), получаем при  $m = \text{const}$

$$\dot{E} = \frac{m}{2} (2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega\dot{\omega}x^2 + 2\omega^2 x\dot{x}) = m\omega\dot{\omega}x^2. \quad (46)$$

Если  $\omega$  и  $\dot{\omega}$  изменяются медленно, то коэффициенты при  $x^2$  в правых частях на текущем периоде, т. е. на временном интервале

длины  $\frac{2\pi}{\omega}$ , являются почти постоянными, и можно произвести осреднение по этому интервалу. Учитывая формулу  $\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \varphi_0)$ , получаем, что  $\bar{x}^2 = \frac{1}{2} A^2$  и аналогично  $\bar{\dot{x}}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 A^2$ . Поэтому после осреднения мы получаем

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2, \quad \dot{E} = \frac{1}{2} m \omega \dot{\omega} A^2 \quad (47)$$

(так как  $E$  меняется медленно, мы заменили  $\bar{E}$  снова на  $E$ ). Отсюда  $\frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{\omega}}{\omega}$ ,  $\ln E = \ln \omega + \ln C_1$ ,  $E = C_1 \omega$ , т. е. энергия осциллятора прямо пропорциональна мгновенному значению его собственной частоты. Подставляя этот результат в первое равенство (47), получаем  $C_1 \omega = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ , т. е.  $\omega A^2 = \frac{2C_1}{m} = \text{const}$ , как и выше.

Интересно, что полученную пропорциональность  $E \propto \omega$  легко понять с позиций квантовой механики. Дело в том, что энергия одного кванта равна  $2\pi\hbar\omega$ , где  $\hbar \approx 10^{-27} \frac{\text{э.см}}{\text{сек}^2}$  — постоянная Планка; энергия осциллятора, находящегося на  $n$ -м уровне ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), равна  $2\pi\hbar\omega n$ . Если частота  $\omega$  меняется медленно, то осциллятор остается все время на одном и том же уровне, т. е.  $n = \text{const}$ , откуда и вытекает пропорциональность  $E \propto \omega$ . (См. по этому поводу заметку П. Парадоксова «Как квантовая механика помогает понять выводы классической механики», Успехи физ. наук, 89, № 4 (1966), стр. 707—70.)

Рассмотрим теперь другой важный частный случай, когда медленно меняется  $\omega$ , но не  $\dot{\omega}$ , на примере уравнения (42) с  $\omega = \omega_0 + \alpha \sin kt$ , где  $|\alpha| \ll \omega_0$ , а постоянная  $k$  имеет тот же порядок, что и  $\omega_0$ . В этом случае при осреднении правой части (46) надо ее предварительно преобразовать по формуле

$$m\omega_0\alpha k \cos kt \cdot A^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) \right] = \frac{1}{2} m\omega_0\alpha k A^2 \cos kt - \\ - \frac{1}{4} m\omega_0\alpha k A^2 \cos [(2\omega_0 + k)t + 2\varphi_0] - \\ - \frac{1}{4} m\omega_0\alpha k A^2 \cos [(2\omega_0 - k)t + 2\varphi_0].$$

Теперь может быть два случая. Если  $k \neq 2\omega_0$ , то среднее значение правой части как среднее значение от суммы чистых гармоник равно нулю, т. е.  $\dot{E} = 0$ ,  $E$  представляет собой адиабатический инвариант. Если же  $k = 2\omega_0$ , то последнее слагаемое в правой части превра-

щается в константу, откуда после осреднения получаем  $\dot{E} = -\frac{1}{4} m \omega_0 \alpha 2 \omega_0 A^2 \cos(2\varphi_0) = -\alpha \cos(2\varphi_0) E$ , т. е.  $E = C e^{-\alpha \cos(2\varphi_0) \cdot t}$ .

Итак в рассматриваемом случае энергия осциллятора, а с ней и амплитуда колебаний являются экспоненциально возрастающими или затухающими во времени, в зависимости от знака  $\cos 2\varphi_0$ . Это явление, аналогичное резонансу (п. VII.5) и проистекающее из-за периодического изменения параметров осциллятора, называется *параметрическим резонансом* (и между прочим, используется при раскачивании качелей).

### § 7. Численное решение дифференциальных уравнений

Часто бывает, что ни точного, ни достаточно удовлетворительного приближенного решения в виде формулы построить нельзя. Тогда применяется численное решение, при котором искомое частное решение (при конкретных значениях параметров, если они входят в постановку задачи) строится в табличном виде. Принцип численного решения дифференциального уравнения чрезвычайно прост и прямо вытекает из смысла производной.

Пусть уравнение имеет вид  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  и дано начальное условие  $y = y_0$  при  $x = x_0$ . Тогда, подставляя значения  $x_0, y_0$  в функцию  $f(x, y)$ , мы найдем величину производной в точке  $x_0$ :

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f(x_0, y_0).$$

Отсюда, считая, что  $\Delta x$  — малая величина, получаем

$$\begin{aligned} y(x_0 + \Delta x) &= y(x_1) = y_1 = y_0 + \Delta y = y_0 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x = \\ &= y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Полагая для краткости записи  $f(x_0, y_0) = f_0$ , записываем этот результат так:

$$y_1 = y_0 + f_0 \cdot \Delta x. \quad (48)$$

Теперь, принимая точку  $(x_1; y_1)$  за исходную, можно точно таким же методом получить  $y_2 = y(x_2)$ , где  $x_2 = x_1 + \Delta x$ . Таким образом, шаг за шагом, можно вычислять значения решения  $y$  для различных значений  $x$ . Это — *метод Эйлера*.

Пользуясь таким методом, мы получаем, конечно, не точные, а приближенные значения  $y$ . Действительно, ведь производная  $\frac{dy}{dx}$  не останется постоянной на промежутке от  $x = x_0$  до  $x = x_1$ . Поэтому, пользуясь формулой (48), мы допускаем ошибку в определении  $y$ , притом тем большую, чем больше  $\Delta x$ .

Более точно, так как правая часть (48) представляет собой сумму двух первых членов разложения  $y(x_0 + \Delta x)$  по степеням  $\Delta x$ , то ошибка формулы (48) имеет порядок  $(\Delta x)^2$ , т. е. не превосходит  $a(\Delta x)^2$ , где коэффициент  $a$  зависит от вида функции  $f(x, y)$ .

Пусть необходимо, зная начальное условие  $y(x_0) = y_0$ , получить значение решения при  $x = x_0 + l$ , причем  $l$  велико, так что при пользовании формулой (48), полагая в ней  $\Delta x = l$ , мы допустим огромную ошибку. Чтобы отыскать  $y(x_0 + l)$ , разобьем промежуток от  $x = x_0$  до  $x = x_0 + l$  на  $n$  равных малых промежутков, тогда длина каждого из них есть  $\Delta x = \frac{l}{n}$ . Для получения  $y(x_0 + l)$  нам придется сделать  $n$  шагов, последовательно получая  $y\left(x_0 + \frac{l}{n}\right)$ ,  $y\left(x_0 + 2\frac{l}{n}\right)$ , ...,  $y(x_0 + l)$ .

На каждом таком шаге ошибка порядка  $a\left(\frac{l}{n}\right)^2$ , а на всех  $n$  шагах ошибка порядка  $a\left(\frac{l}{n}\right)^2 n = \frac{al^2}{n}$ . Следовательно, ошибка, возникающая при применении способа Эйлера, обратно пропорциональна числу шагов. Если задана точность  $\varepsilon$ , то необходимое число шагов  $n$  есть величина порядка  $\frac{al^2}{\varepsilon}$ . Ясно, что чем больше шагов, тем меньше ошибка, тем точнее найдем мы величину  $y(x_0 + l)$ . Однако ошибка убывает очень медленно при увеличении числа шагов. Поэтому для достижения заданной точности иногда необходимо очень много шагов.

Приближенное значение для  $y$ , даваемое формулой (48), будем называть первым приближением ( $y_1$ ), так что  $y_1 = y_0 + f_0 \Delta x$ . Для получения более точного второго приближения будем брать среднее арифметическое производной в начале и в конце промежутка, вычисляя производную в конце промежутка при помощи первого приближения  $y_1$ . Таким образом,

$$y_{II} = y_0 + \frac{1}{2} \left( \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=x_0 + \Delta x \\ y=y_1}} \right) \Delta x,$$

или

$$\begin{aligned} y_{II} &= y_0 + \frac{1}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_1)] \Delta x = \\ &= y_0 + \frac{1}{2} [f_0 + f(x_0 + \Delta x, y_0 + f_0 \Delta x)] \Delta x. \end{aligned}$$

Можно показать, что величина  $y_{II}$  имеет ошибку порядка  $b(\Delta x)^3$ , где  $b$  — постоянная, зависящая от вида  $f(x, y)$ . Поэтому полная ошибка на  $n$  шагах в определении  $y(x_0 + l)$  будет  $\varepsilon = b\left(\frac{l}{n}\right)^3 \cdot n = \frac{bl^3}{n^2}$ , а число шагов  $n$ , необходимое для достижения заданной точ-

ности  $\varepsilon$ , есть величина порядка  $\sqrt{\frac{bl^3}{\varepsilon}}$ . В этом случае ошибка обратно пропорциональна квадрату числа шагов, т. е. с ростом числа шагов убывает значительно быстрее, нежели при пользовании первым приближением  $y_1$ .

Отметим, однако, что при нахождении  $y_{II}$  нужно на каждом шаге вычислять  $f(x, y)$  два раза, в то время как при нахождении  $y_1$  на одном шаге нужно вычислять лишь одно значение  $f(x, y)$ . В самом деле, действуя по способу Эйлера, мы, начиная расчет от точки  $(x_0; y_0)$ , находим  $y_1(x_1) = y_0 + f_0 \cdot \Delta x$ , затем вычисляем  $f(x_1, y_1(x_1))$  и переходим к следующему шагу.

Если же мы хотим отыскивать второе приближение, то схема такова. Сперва находим  $y_1(x_1) = y_0 + f_0 \cdot \Delta x$ , затем определяем  $f(x_1, y_1(x_1))$  и

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1(x_1))].$$

После этого мы находим  $y_{II}(x_1) = y_0 + \bar{f}_0 \cdot \Delta x$  и, наконец,  $f(x_1, y_{II}(x_1))$ . Только теперь все приготовлено для перехода к следующему шагу. Такую схему вычислений называют схемой с *пересчетом*, потому что величина  $f(x, y)$  на каждом шаге пересчитывается, заменяется более надежной величиной  $\bar{f}(x, y)$ .

Вычисление значений  $f(x, y)$  является, как правило, наиболее трудоемкой операцией (остальные операции — умножение на  $\Delta x$ , сложение — делаются гораздо быстрее), так что затрата труда на  $n$  шагов в схеме с пересчетом равносильна затрате труда на  $2n$  шагов в схеме для определения  $y_1$ . Однако, несмотря на это, если требуется высокая точность, т. е. если  $\varepsilon$  весьма мало, то схема с пересчетом выгоднее, так как  $2 \sqrt{\frac{bl^3}{\varepsilon}} \ll \frac{al^2}{\varepsilon}$ , если  $\varepsilon$  мало.

Схема с пересчетом имеет еще одно преимущество. В этой схеме есть хороший контроль правильности вычислений и выбора величины  $\Delta x$ , которую называют шагом: ясно, что расчет хорош лишь до тех пор, пока значения  $f(x, y)$  и  $\bar{f}(x, y)$  мало отличаются.

Рассмотрим пример. Пусть  $y$  есть решение уравнения  $y' = x^2 - y^2$  с начальным условием  $y=0$  при  $x=-1$ . Определим значение решения при  $x=0$ . Воспользуемся схемой с пересчетом, взяв шаг  $\Delta x=0,1$ .

Вычисления сведены в таблицу 5. Во втором и третьем столбцах таблицы в скобках вписаны промежуточные результаты, а под ними — результаты пересчета. В последнем столбце таблицы выписаны значения  $y$ , верные с точностью до четырех знаков после запятой. Сравнивая их с теми, которые мы получили, видим, что во всех найденных значениях три знака после запятой верны.

Метод пересчета поддается дальнейшему уточнению, результатом которого являются широко применяемые сейчас в вычислительной



Т а б л и ц а 5

$x$	$y$	$f=y'$	$\bar{f}$	Уточное
—1,0	0,0000 (0,1000)	1,0000 (0,8000)		0,0000
—0,9	0,0900 (0,1702)	0,8019 (0,6110)	0,9000	0,0900
—0,8	0,1606 (0,2220)	0,6142 (0,4407)	0,7064	0,1607
—0,7	0,2133 (0,2577)	0,4444 (0,2936)	0,5274	0,2135
—0,6	0,2502 (0,2799)	0,2974 (0,1717)	0,3690	0,2504
—0,5	0,2736 (0,2911)	0,1752 (0,0753)	0,2345	0,2738
—0,4	0,2861 (0,2939)	0,0782 (0,0036)	0,1252	0,2862
—0,3	0,2902 (0,2908)	0,0058 (—0,0446)	0,0409	0,2902
—0,2	0,2883 (0,2840)	—0,0699 (—0,0706)	—0,0194	0,2882
—0,1	0,2826 (0,2756)	—0,0699 (—0,0760)	—0,0568	0,2823
0,0	0,2753	—0,0758	—0,0730	0,2749

практике методы Рунге-Кутты и Милна, которые можно найти в курсах численных методов. Распространен также метод Адамса, основанный на применении конечных разностей (§ II.1). Изложим этот метод в несколько упрощенном варианте (обычно он доводится до третьих разностей, но мы ограничимся вторыми). Мы исходим из формулы Ньютона (II.5), примененной к производной от искомого решения  $y'(x)$ , причем вместо  $k$  мы возьмем  $k-1$

$$y'(x) = y'_k + \left( -\delta y'_k - \frac{1}{2} \right) \frac{h-s}{h} + \frac{\delta^2 y'_{k-1}}{2} \frac{h-s}{h} \left( \frac{h-s}{h} - 1 \right),$$

$$s = x - x_{k-1}.$$

Интегрирование этого равенства от  $x = x_k$  до  $x = x_{k+1}$ , т. е. от  $s = h$  до  $s = 2h$ , дает (проверьте!)

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx = y_{k+1} - y_k = y'_k h + \delta y'_{k-1} \frac{h}{2} + \delta^2 y'_{k-1} \frac{5}{12} h,$$

т. е.

$$y_{k+1} = y_k + \left( y'_k + \frac{1}{2} \delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} \delta^2 y'_{k-1} \right) h. \quad (49)$$

Эта формула применяется следующим образом. Сначала каким-либо способом (например, с помощью формулы Тейлора, § 5, или с помощью метода пересчета) находим значения  $y_1 = y(x_0 + h)$  и

$y_2 = y(x_0 + 2h)$ . Затем вычисляем соответствующие значения

$$y'_0 = f(x_0, y_0), y'_1 = f(x_1, y_1) = f(x_0 + h, y_1), y'_2 = f(x_2, y_2),$$

с помощью которых находим

$$\delta y'_{\frac{1}{2}} = y'_1 - y'_0, \delta y'_{1\frac{1}{2}} = y'_2 - y'_1, \delta^2 y'_1 = \delta y'_{1\frac{1}{2}} - \delta y'_{\frac{1}{2}}.$$

Далее, полагая в формуле (49)  $k=2$ , вычисляем  $y_3$ , а с его помощью

$$y'_3 = f(x_3, y_3), \delta y'_{2\frac{1}{2}} = y'_3 - y'_2, \delta^2 y'_2 = \delta y'_{2\frac{1}{2}} - \delta y'_{1\frac{1}{2}}.$$

Затем, полагая в формуле (49)  $k=3$ , вычисляем  $y_4$ , далее с его помощью  $y'_4 = f(x_4, y_4)$  и т. д.

Особая осторожность при численном решении дифференциальных уравнений нужна в том случае, когда искомая функция может неограниченно возрастать. Пусть, например, нам дано уравнение  $\frac{dy}{dx} = y^2$  и начальное условие  $y=1$  при  $x=1$ .

Для этого уравнения легко найти точное решение. В самом деле,

$$\frac{dy}{y^2} = dx, \text{ откуда } \int_1^y \frac{dy}{y^2} = \int_1^x dx, \text{ или } 1 - \frac{1}{y} = x - 1, \text{ что дает } y = \frac{1}{2-x}.$$

Ясно, что  $y$  неограниченно возрастает при приближении  $x$  к 2. Если бы мы решали это уравнение численно, то, конечно, и при  $x=2$  получили бы вполне определенное, хотя, может быть, и очень большое значение  $y$ .

Значение аргумента  $x=2$ , при приближении к которому решение неограниченно возрастает, мы отыскиали только благодаря тому, что смогли написать искомое решение в явном виде. Однако многие уравнения не имеют такого решения. Как же, решая уравнение численно, найти то значение  $x$ , при приближении к которому решение неограниченно возрастает?

Как быть, например, с уравнением Риккати

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot y^2 + \psi(x), \quad (50)$$

которое при произвольных  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  точно решить нельзя?\*)

Введем новую искомую функцию  $z = \frac{1}{y}$ . Тогда при интересующем нас значении  $x$  будет  $z=0$ . Заметим, что  $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}$ . Разделим уравнение (44) на  $-y^2$ , получим  $-\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = -\varphi(x) - \frac{\psi(x)}{y^2}$ , или  $\frac{dz}{dx} = -\varphi(x) - z^2 \cdot \psi(x)$ .

---

\*) Только что рассмотренное уравнение  $\frac{dy}{dx} = y^2$  получается из (50) при  $\varphi(x) = 1$ ,  $\psi(x) = 0$ .

Решая численно последнее уравнение, мы найдем значение  $x$ , при котором  $z = 0$ .

Изложенные способы численного решения дифференциальных уравнений легко переносятся на случай системы двух или большего числа уравнений. Покажем это на примере системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z). \end{aligned} \right\}$$

Пусть даны начальные условия  $y = y_0$ ,  $z = z_0$  при  $x = x_0$ . Положим  $f(x_0, y_0, z_0) = f_0$ ,  $\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi_0$ . Тогда первое приближение есть

$$\begin{aligned} y_I(x_1) &= y_I(x_0 + \Delta x) = y_0 + f_0 \cdot \Delta x, \\ z_I(x_1) &= z_I(x_0 + \Delta x) = z_0 + \varphi_0 \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Для получения второго приближения находим, используя первое приближение, значения производных в конце промежутка, т. е. при  $x_1 = x_0 + \Delta x$ ; получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0+\Delta x} &= f_I = f(x_0 + \Delta x, y_I, z_I), \\ \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0+\Delta x} &= \varphi_I = \varphi(x_0 + \Delta x, y_I, z_I). \end{aligned}$$

Затем определяем средние величины

$$\bar{f} = \frac{1}{2} (f_0 + f_I), \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2} (\varphi_0 + \varphi_I).$$

Второе приближение есть

$$y_{II} = y_0 + \bar{f} \cdot \Delta x, \quad z_{II} = z_0 + \bar{\varphi} \cdot \Delta x.$$

Наконец, получив  $y_{II}$  и  $z_{II}$ , мы пересчитаем значения производных при  $x = x_0 + \Delta x$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0+\Delta x} &= f_{II} = f(x_0 + \Delta x, y_{II}, z_{II}), \\ \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0+\Delta x} &= \varphi_{II} = \varphi(x_0 + \Delta x, y_{II}, z_{II}). \end{aligned}$$

Уравнение второго и более высоких порядков можно, как было показано в § 2, свести к системе уравнений первого порядка. Поэтому изложенные приемы численного решения применимы и для уравнений выше первого порядка.

Отметим один частный случай. Пусть рассматривается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x, t). \quad (51)$$

В отличие от общего случая уравнения второго порядка здесь правая часть не содержит  $\frac{dx}{dt}$  \*).

Уравнение (51) допускает решение в аналитическом виде в двух следующих случаях.

1. Если правая часть  $\varphi(x, t)$  не зависит от  $x$ . Тогда (45) принимает вид  $\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t)$ , откуда  $\frac{dx}{dt} = \int \varphi(t) dt$ ; интегрируя еще раз, найдем  $x(t)$ .

2. Если правая часть не зависит от  $t$ , т. е. уравнение (45) имеет вид  $\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x)$ . В этом случае положим  $v = \frac{dx}{dt}$ , тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dx}.$$

Уравнение переписется так:  $\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dx} = \varphi(x)$ , откуда

$$v^2 = 2 \int \varphi(x) dx, \quad v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2 \int \varphi(x) dx}.$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными.

Однако в случае, когда правая часть зависит и от  $x$  и от  $t$ , ни один из этих способов применить нельзя, так что приходится решать уравнение численно. Прежде всего, положив  $\frac{dx}{dt} = v$ , заменим (51) системой уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= \varphi(x, t). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Система (52) обладает следующей особенностью: правая часть первого уравнения системы не содержит  $x$ , а правая часть второго уравнения системы не содержит  $v$ . Благодаря этому можно предложить очень удобную схему вычислений.

Пусть даны начальные условия  $x = x_0$ ,  $\frac{dx}{dt} = v = v_0$  при  $t = t_0$ . Выберем шаг  $\Delta t$ , т. е. будем находить значения решения при следующих значениях аргумента:  $t_1 = t_0 + \Delta t$ ,  $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ ,  $t_3 = t_0 + 3\Delta t$  и т. д.

Значения аргумента  $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  будем называть целыми, а значения  $t_{1/2}, t_{1 1/2}, t_{2 1/2}, \dots$  — полуцелыми. Будем вычислять значения  $v = \frac{dx}{dt}$  для полуцелых значений аргумента, а значения  $x$  для

\*) Такое уравнение описывает, например, движение тела под действием силы, зависящей от положения тела и от времени, при отсутствии трения.

целых значений аргумента. Тогда последовательность действий такова. Зная  $x_0$  и  $v_0$ , мы находим  $v_{1/2}$  по формуле  $v_{1/2} = v_0 + \varphi_0 \cdot \frac{\Delta t}{2}$ , где положено  $\varphi_0 = \varphi(x_0, t_0)$ . Затем определяем  $x_1 = x_0 + v_{1/2} \cdot \Delta t$ ,  $\varphi_1 = \varphi(x_1, t_1)$  и  $v_{1^{1/2}} = v_{1/2} + \varphi_1 \cdot \Delta t$ . Далее процесс повторяется:  $x_2 = x_1 + v_{1^{1/2}} \cdot \Delta t$ ,  $\varphi_2 = \varphi(x_2, t_2)$ ,  $v_{2^{1/2}} = v_{1^{1/2}} + \varphi_2 \cdot \Delta t$  и т. д.

Вычисления удобно располагать в виде следующей таблицы.

Т а б л и ц а   6

$t$	$x$	$\varphi(x, t)$	$v = \frac{dx}{dt}$
$t_0$	$x_0$	$\varphi_0$	$v_0$
$t_{1/2}$			$v_{1/2}$
$t_1$	$x_1$	$\varphi_1 = \varphi(x_1, t_1)$	
$t_{1^{1/2}}$			$v_{1^{1/2}}$
$t_2$	$x_2$	$\varphi_2 = \varphi(x_2, t_2)$	
$t_{2^{1/2}}$			$v_{2^{1/2}}$
$t_3$	$x_3$	$\varphi_3$	
$t_{3^{1/2}}$			$v_{3^{1/2}}$
$t_4$	$x_4$	$\varphi_4$	

Таким образом, при переходе, например, от  $x_1$  к  $x_2$  мы пользуемся значением производной  $v_{1^{1/2}}$ , соответствующим середине промежутка. Благодаря этому точность способа такого же порядка, как точность второго приближения в обычном способе. (Ошибка на каждом шаге порядка  $(\Delta t)^3$ .) Поэтому при затраченной работе такой же, как и при пользовании первым приближением, мы получаем лучшую точность за счет разумного построения схемы вычислений.

Отметим еще раз, что такая схема возможна лишь благодаря указанным нами особенностям системы (52).

### Упражнения

1. Составьте таблицу значений функции  $y = e^x$ , решая численно уравнение  $y' = y$  с начальным условием  $y = 1$  при  $x = 0$ .

Получите значения  $e^x$  при  $x = 0,1; 0,2; 0,3$  и т. д. через  $0,1$  до  $x = 1$ . Вычисления ведите по первому приближению с четырьмя знаками после запятой. Затем возьмите шаг  $\Delta x = 0,05$  и пользуйтесь схемой с пересчетом. Результаты сравните с табличными.

2. Пусть  $y(x)$  есть решение уравнения  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$  с начальным условием  $y = 0,5$  при  $x = 0$ . Найдите  $y(0,5)$ .

Решите задачу двумя способами:

а) считайте по первому приближению с шагом  $\Delta x = 0,025$ ;

б) считайте по второму приближению с шагом  $\Delta x = 0,05$ . Сравните результаты \*).

\*) Дифференциальные уравнения задач 2 и 5 нельзя решить аналитически.

3. Пусть тело массы  $m$  движется под действием силы  $f(t) = at(\theta - t)$  и испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности равен  $k$ ).

Пусть в начальный момент времени скорость тела была равна 0. Составьте дифференциальное уравнение и решите его численно для случая  $m = 10$  г,  $a = 5 \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{сек}^4}$ ,  $\theta = 20$  сек,  $k = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}}$ . Определите скорость тела через 1,5 сек после начала движения.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь схемой с пересчетом, взяв  $\Delta t = 0,05$ . Вычисления ведите с тремя знаками после запятой.

4. Составьте таблицу значений функции  $y = \sin x$ , решая численно уравнение  $y'' + y = 0$  с начальными условиями  $y = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 1$  при  $x = 0$ . Получите значения при  $x = 0,1; 0,2; 0,3$  и т. д. через 0,1 до  $x = 1$ . Пользуйтесь схемой с пересчетом, взяв шаг  $\Delta x = 0,1$ . Сравните результаты с табличными. Вычисления ведите с тремя знаками после запятой.

5. Составьте таблицу значений решения уравнения  $\frac{d^2x}{dt^2} = t + x^2$  с начальными условиями  $x = 0$ ,  $\frac{dx}{dt} = 1$  при  $t = 0$ . Таблицу составьте от  $t = 0$  до  $t = 0,5$ . Возьмите шаг  $\Delta t = 0,1$  и считайте по схеме с полуцелыми значениями аргумента с тремя знаками после запятой.

## § 8. Краевые задачи

Общее решение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка содержит  $n$  произвольных постоянных, т. е. обладает  $n$  степенями свободы (см. § IV.8). Чтобы выделить из общего решения какое-либо частное, мы до сих пор пользовались начальными условиями, согласно которым искомая функция и ее производные задаются при одном значении аргумента. Это особенно естественно, если независимой переменной служит время, т. е. если изучается развитие некоторого процесса: тогда начальные условия просто служат математической записью начального состояния процесса. Именно поэтому применяются наименования *начальные условия*, *начальная задача* и в случае, если независимая переменная имеет другой физический смысл. Однако бывают задачи с иной постановкой, например, такие, в которых имеются два равноправных «узловых» значения независимой переменной, при которых задается искомая функция. Так, при рассмотрении отклонения  $y(x)$  струны, закрепленной на концах  $x = a$  и  $x = b$ , на искомую функцию  $y(x)$  накладываются условия  $y(a) = 0$ ,  $y(b) = 0$ . Имеются и другие способы выделения частного решения из общего, которые встречаются в практических задачах. Все эти способы объединяет то, что количество дополнительных равенств, накладываемых на искомое решение, должно равняться числу степеней свободы в общем решении рассматриваемого уравнения, т. е. порядку этого уравнения.

В дальнейшем мы рассмотрим решение уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (53)$$

при дополнительных условиях

$$y(a) = \alpha_1, \quad y(b) = \alpha_2, \quad (54)$$

хотя все полученные общие выводы справедливы для линейных дифференциальных уравнений любого порядка  $n$  при линейных дополнительных условиях любого вида. Условия вида (54), наложенные на концах интервала, на котором строится решение, называются *краевыми условиями*, а задача о решении дифференциального уравнения при заданных краевых условиях называется *краевой задачей*.

В гл. VII (§§ 2, 3 и 5) мы видели, что общее решение линейного неоднородного уравнения (53) имеет следующую структуру:

$$y = Y(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x); \quad (55)$$

здесь  $Y(x)$  — некоторое частное решение уравнения (53),  $y_1$  и  $y_2$  — два независимых решения соответствующего однородного уравнения, а  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Подставляя формулу (55) в условия (54), получим два соотношения для нахождения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) &= \alpha_1 - Y(a), \\ C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b) &= \alpha_2 - Y(b). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

При решении этой системы двух алгебраических уравнений первой степени с двумя неизвестными могут представиться два случая (см. § 3).

1. Основной случай: определитель системы отличен от нуля. В этом случае система (56) имеет вполне определенное решение, и потому уравнение (53) при условиях (54) имеет одно и только одно решение при любом неоднородном члене  $f(x)$  и любых числах  $\alpha_1, \alpha_2$ .

2. Особый случай: определитель системы равен нулю. В этом случае система (56), как правило, противоречива, но при некоторых правых частях она имеет бесконечное количество решений. Значит, и уравнение (53) при условиях (54) при произвольном выборе функции  $f(x)$  и чисел  $\alpha_1, \alpha_2$ , как правило, не имеет ни одного решения; однако при некоторых таких выборах задача имеет бесконечное количество решений. Например, можно проверить, что если  $f(x)$  и  $\alpha_1$  уже выбраны, то бесконечное количество решений получится лишь при одном значении  $\alpha_2$ , а при остальных значениях задача не будет иметь ни одного решения.

Подчеркнем, что то, какой именно случай имеет место, зависит от вида левых частей уравнения (53) и условий (54).

Согласно § 3, для того чтобы имел место основной случай, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача (в которой положено  $f(x) \equiv 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ) имела только нулевое решение. В особом случае однородная задача имеет бесконечное количество решений, а если неоднородная задача имеет хотя бы одно решение, то общее решение получится, если к этому частному решению прибавить общее решение соответствующей однородной задачи.

При решении начальной задачи (так называемой *задачи Коши*, т. е. задачи с начальными условиями) всегда имеет место основной случай, так как такое решение всегда существует и единственно. При решении краевой задачи может представиться и особый случай.

Например, рассмотрим задачу

$$y'' + y = 0 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad y(0) = \alpha_1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha_2.$$

В силу § VII.3 общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (57)$$

Подставляя граничные условия, получим

$$C_1 = \alpha_1, \quad C_2 = \alpha_2.$$

Значит, получаем при любых  $\alpha_1, \alpha_2$  вполне определенное решение

$$y = \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x.$$

Это — основной случай.

Для задачи

$$y'' + y = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad y(0) = \alpha_1, \quad y(\pi) = \alpha_2 \quad (58)$$

подстановка граничных условий в то же общее решение (57) даст

$$C_1 = \alpha_1, \quad -C_1 = \alpha_2, \quad \text{т. е. } C_1 = -\alpha_2.$$

Таким образом, если  $\alpha_1 \neq -\alpha_2$ , то задача (58) не имеет ни одного решения. Если же  $\alpha_1 = -\alpha_2$ , то эта задача имеет решение

$$y = \alpha_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

в котором  $C_2$  совершенно произвольно, т. е. мы имеем бесконечное число решений. Это — особый случай.

Рассмотрим, наконец, задачу с параметром  $\lambda = \text{const}$

$$y'' + \lambda y = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad y(0) = \alpha_1, \quad y(l) = \alpha_2, \quad (59)$$

причем будем считать сначала, что  $\lambda > 0$ . Тогда независимыми решениями соответствующего однородного дифференциального уравнения служат функции  $y_1(x) = \cos \sqrt{\lambda}x$ ,  $y_2(x) = \sin \sqrt{\lambda}x$  и определитель системы (56) равен

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(l) & y_2(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda}l & \sin \sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda}l.$$

Приравнявая его нулю, получим значения

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \quad \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2, \quad \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2, \quad \dots, \quad (60)$$

при которых для задачи (59) имеет место особый случай, т. е. нарушается либо существование, либо единственность решения.



Набор значений параметра, входящего в формулировку задачи, при которых задача в том или ином смысле вырождается (т. е. теряет какие-либо весьма существенные свойства, приобретая качественно иные), называется *спектром* этой задачи. Мы предоставляем читателю проверить, что при  $\lambda \leq 0$  для задачи (59) всегда имеет место основной случай, и тем самым набор значений (60) представляет собой весь ее спектр.

Спектр (60) задачи (59) можно получить также несколько иным, по существу равносильным методом. Как было сказано, особый случай для краевой задачи характеризуется тем, что соответствующая однородная задача

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

может иметь ненулевое решение. Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x = C (D \cos \sqrt{\lambda} x + \sin \sqrt{\lambda} x),$$

где обозначено  $C = C_2$ ,  $D = \frac{C_1}{C_2}$ . Применение граничных условий дает

$$C (D \cos \sqrt{\lambda} 0 + \sin \sqrt{\lambda} 0) = 0, \quad C (D \cos \sqrt{\lambda} l + \sin \sqrt{\lambda} l) = 0.$$

Мы видим, что постоянная  $C$  остается произвольной, тогда как для нахождения двух постоянных  $D$  и  $\lambda$  остается два уравнения

$$D \cos \sqrt{\lambda} 0 + \sin \sqrt{\lambda} 0 = 0, \quad D \cos \sqrt{\lambda} l + \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Отсюда получаем

$$D = 0, \quad \sin \sqrt{\lambda} l = 0, \quad \sqrt{\lambda} l = k\pi \quad (k = 1, 2, \dots),$$

и мы приходим к тем же значениям (60) для  $\lambda$ .

Полученный результат имеет интересное приложение к исследованию устойчивости упругого стержня при его сжатии. Пусть однородный (одинаковый по всей длине) упругий стержень расположен вдоль оси  $x$  и сжимается вдоль нее силой  $P$ , причем оба конца стержня удерживаются на оси  $x$ , но могут свободно вращаться вокруг точек закрепления (рис. 96, а). Тогда при достижении силой некоторого критического значения  $P_{кр}$  стержень изгибается, принимая положение, изображенное на рис. 96, б. Если обозначить через  $y$  поперечное отклонение точки стержня от ее исходного положения, то, как доказывается в курсах сопротивления материалов, функция  $y(x)$  с достаточной точностью удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевым условиям:

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0; \quad (61)$$

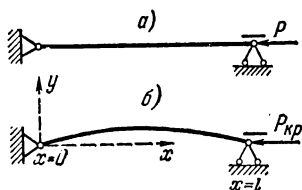


Рис. 96.

здесь  $E$  и  $J$  — так называемые «модуль Юнга» материала стержня и «момент инерции» поперечного сечения стержня. Как вытекает из (60), при

$$\frac{P}{EJ} < \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \quad (62)$$

для задачи (62) имеет место основной случай, т. е. она имеет только нулевое решение; изгибания не происходит. Как только с увеличением  $P$  неравенство (62) переходит в равенство, то наступает особый случай, и задача (61) наряду с нулевым решением имеет решение вида  $y = C \sin \frac{\pi}{l} x$ , где  $C$  — произвольная постоянная. Но тогда стержень ничем не удерживается в прямолинейном состоянии и малые внешние воздействия\*) могут привести к конечным отклонениям от этого состояния: стержень теряет устойчивость. Получающееся выражение для  $P_{кр}$

$$P_{кр} = EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

было найдено Л. Эйлером в 1757 году. Могло бы показаться, что при  $P > P_{кр}$  стержень должен опять выпрямиться. Однако это не так. Уравнение (61) описывает отклонение стержня точно лишь в пределе при малых отклонениях, а анализ более точного уравнения, справедливого при любых отклонениях (оно оказывается нелинейным), показывает, что при переходе  $P$  через  $P_{кр}$  наряду с неустойчивой прямолинейной возникает искривленная форма равновесия, которая и является устойчивой. С ростом  $P$  кривизна этой формы быстро возрастает, и стержень разрушается.

К решению неоднородного уравнения при однородных краевых условиях

$$\left. \begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= f(x) \quad (a \leq x \leq b), \\ y(a) &= 0, \quad y(b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

в основном (неособом) случае можно применить функцию Грина (§ VI.2), так как ясно, что при сложении правых частей решения также складываются. В соответствии с § VI.2, если через  $G(x; \xi)$  обозначить решение задачи (63), в которой вместо  $f(x)$  взята дельта-функция  $\delta(x - \xi)$ , то при произвольной функции  $f(x)$  решение задачи (63) получится по формуле

$$y(x) = \int_a^b f(\xi) G(x; \xi) d\xi. \quad (64)$$

---

\*) Подразумеваются такие внешние воздействия, которые стремятся отклонить стержень от прямолинейного состояния, например малая сила, направленная перпендикулярно стержню.

Приведем простой пример. Пусть рассматривается задача

$$y'' = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad y(0) = y(l) = 0. \quad (65)$$

Если взамен  $f(x)$  поставить  $\delta(x - \xi)$ , то при  $0 \leq x < \xi$  и при  $\xi < x \leq l$  получится просто  $y'' = 0$ , т. е. решение

$$y = ax + b \quad (0 \leq x < \xi), \quad y = cx + d \quad (\xi < x \leq l),$$

где  $a, b, c, d$  — какие-то постоянные. Применение краевых условий показывает, что  $b = 0$  и  $cl + d = 0$ , т. е.

$$\begin{aligned} y &= ax \quad (0 \leq x < \xi), \\ y &= c(x - l) \quad (\xi < x \leq l). \end{aligned} \quad (66)$$

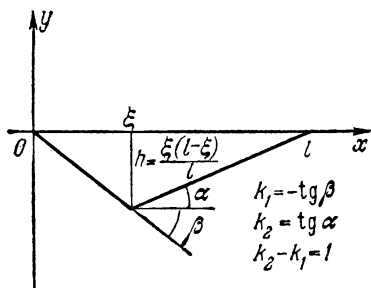


Рис. 97.

Если равенство  $y'' = \delta(x - \xi)$  проинтегрировать от  $x = \xi - 0$  до  $x = \xi + 0$ , то получится, что  $y'(\xi + 0) - y'(\xi - 0) = 1$ ; кстати, для левой части уравнения (63) получился бы такой же результат, так как интегрирование конечной функции по отрезку нулевой длины

даёт нуль. При вторичном интегрировании дельта-функции получается уже непрерывная функция, так что  $y(\xi - 0) = y(\xi + 0)$  и из (66) получаем  $c - a = 1$ ,  $a\xi = c(\xi - l)$ , откуда

$$a = -\frac{l - \xi}{l}, \quad c = \frac{\xi}{l}.$$

Подставляя в (66), находим функцию Грина для задачи (65):

$$G(x; \xi) = \begin{cases} -\frac{(l - \xi)x}{l} & (0 \leq x < \xi), \\ -\frac{(l - x)\xi}{l} & (\xi < x \leq l). \end{cases}$$

Эта функция изображена на рис. 97; нетрудно видеть, что она лишь постоянным множителем  $-F$  отличается от функции, построенной в § VI.2. В силу формулы (64) получаем решение задачи (65) при любой функции  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} y &= \int_0^l G(x; \xi) f(\xi) d\xi = \int_0^x G(x; \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^l G(x; \xi) f(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{l - x}{l} \int_0^x \xi f(\xi) d\xi - \frac{x}{l} \int_x^l (l - \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

#### Упражнения

1. Найдите спектр краевой задачи  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(l) = 0$ .
2. С помощью функции Грина постройте решение задачи  $y'' + y = f(x)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi/2) = 0$ .

## § 9. Пограничный слой

Часто бывает, что изучаемое дифференциальное уравнение или система таких уравнений содержит один или несколько параметров, которые могут принимать различные постоянные значения. Рассмотрим для простоты уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \lambda) \quad (67)$$

(где  $\lambda$  — параметр) при определенных начальных условиях  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ .

Будем считать, что точка  $(x_0; y_0)$  неособая (§ 1), т. е. при заданных условиях существует единственное решение уравнения (67). Тогда из геометрического смысла уравнения (67) (§ VII.1) следует, что если его правая часть зависит от  $\lambda$  непрерывно, то при малом изменении  $\lambda$  поле направлений будет меняться мало, а потому и решение  $y(x; \lambda)$  будет зависеть от  $\lambda$  непрерывно.

Однако иногда параметр входит в дифференциальное уравнение таким образом, что при некоторых значениях этого параметра уравнение понижает свой порядок, т. е. вырождается. При этом возникают новые обстоятельства, которые мы поясним на примере.

Рассмотрим задачу

$$\lambda y' + y = 0, \quad y|_{x=0} = 1, \quad (68)$$

с решением  $y = e^{-x/\lambda}$ . При  $\lambda = 0$  получается вырождение (почему?). Пусть решение рассматривается при  $x \geq 0$  и  $\lambda \rightarrow +0$ ; это решение показано на рис. 98. Уравнение (68) в пределе переходит в равенство  $y = 0$ , но мы видим, что при малом  $\lambda$  решение близко к нулю не сразу от  $x = 0$ , а только от некоторого  $x = h$ . Промежуток  $0 < x < h$ , называемый *пограничным слоем*, служит для перехода от единичного начального значения (68) к близкому к нулю значению. Ширина пограничного слоя условна, так как теоретически решение нигде не становится точно равным нулю. Если, например, принять за ширину пограничного слоя значение  $x = h$ , при котором решение уменьшается в  $e$  раз по сравнению с исходным значением, то мы получим

$$e^{-h/\lambda} = \frac{1}{e}, \quad h = \lambda,$$

т. е. для задачи (68) ширина пограничного слоя просто равна  $\lambda$ .

Такого рода профиль имеет скорость жидкости при скользящем движении пластинки в покоящейся жидкости. При этом  $x$  — это рас-

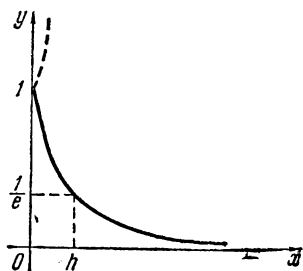


Рис. 98.

стояние от пластинки, отсчитываемое по нормали к ней, по оси  $y$  откладывается скорость жидкости, а параметр  $\lambda$  пропорционален вязкости жидкости. Оказывается, что для уравнений движения вязкой жидкости (это система уравнений с частными производными) коэффициент вязкости служит множителем при старшей производной, т. е. для этих уравнений получается та же ситуация, что для модельной задачи (68). При наличии вязкости жидкость прилипает к пластинке, причем слой жидкости, увлекаемый пластинкой, тем уже, чем меньше вязкость; это, впрочем, ясно и из физических соображений. В пределе, когда вязкость равна нулю (такая жидкость называется идеальной), пластинка скользит, не увлекая за собой жидкость, и скорость жидкости равна нулю вплоть до самой поверхности пластинки.

Если  $\lambda \rightarrow -0$ , то получающееся решение, изображенное на рис. 98 пунктиром, стремится к бесконечности при любом  $x > 0$ . Этот случай представляет меньший интерес.

#### Упражнение

Рассмотрите поведение решения задачи  $\lambda y'' - y = 1$ ,  $y(-1) = y(1) = 0$  при  $\lambda \rightarrow +0$ .

### § 10. Подобие явлений

Два или несколько явлений называются в физике (химии, технике, социологии и т. д.) *подобными*, если они различаются только масштабами. Например, подобными будут процессы изменения тока в цепи по законам, изображенным на рис. 99: в обоих случаях ток в течение некоторого времени равномерно нарастает, начиная от

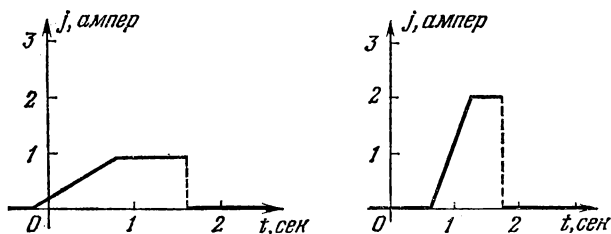


Рис. 99.

нулевого значения, затем в течение такого же времени остается постоянным, после чего скачком спадает до нуля. Таким образом, если выбрать в качестве *характерного времени*  $t_x$  (принимаемого в данном процессе за эталон для сравнения) время нарастания тока, в качестве *характерного тока*  $j_x$  — максимальный ток, а отсчет

времени производить от начала нарастания, после чего обозначить

$$t = t_x \tilde{t}, \quad j = j_x \tilde{j},$$

где  $\tilde{t}$  и  $\tilde{j}$  — безразмерные время и сила тока, то закон зависимости  $\tilde{j}(\tilde{t})$ , изображенный на рис. 100, для обоих процессов будет одинаковым.

Отметим, что графики рис. 99 в смысле элементарной геометрии, конечно, подобными не будут, так как при переходе от одного графика к другому углы меняются и длины не пропорциональны. Однако если по осям откладываются величины разной размерности, то нас никогда не интересуют углы и длины отрезков, не параллельных осям координат. Например, на рис. 99 расстояние некоторой точки от начала координат по правилам аналитической геометрии равно  $\sqrt{t^2 + j^2}$ , но это выражение бессмысленно с точки зрения размерности и потому никогда не может встретиться.

Если подобны зависимости  $j(t)$ , то подобны и другие зависимости, такие,

например, как  $\int_0^t j(t) dt$  — зависимость величины протекшего заряда от времени,

$Rj^2$  — зависимость мощности тока от времени и т. д. Однако представим себе, что в цепи имеется устройство, которое включается, когда сила тока достигает определенного значения  $j_0$ ; работа такого устройства описывается функцией  $e(j - j_0)$ , где  $e$  — единичная функция (§ VI.3). Ясно, что по отношению к такому устройству подобия, вообще говоря, не будет. Таким образом, необходимо говорить не вообще о подобии явлений, а об их подобии по отношению к тем или иным их характеристикам.

Как узнать, подобны ли два явления? Если характеристики, по отношению к которым рассматривается подобие, получаются из решения некоторых уравнений, то надо посмотреть, можно ли сделать линейные преобразования величин, входящих в эти уравнения (т. е. замены вида  $x \rightarrow a_x \tilde{x} + b_x$ , означающие изменение масштаба и начала отсчета), так, чтобы уравнения для обоих случаев стали одинаковыми. Конечно, если речь идет о дифференциальных уравнениях, то после преобразования должны совпасть и начальные условия, которые также нужны для определения решения. Равносильный способ: если уравнения для двух явлений можно с помощью линейных преобразований привести к одному и тому же «эталонному» виду, то явления подобны.

Приведем пример. Пусть рассматриваются вынужденные колебания линейного осциллятора без трения (§ VII.5), определенные уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = A \sin \omega t \quad (69)$$

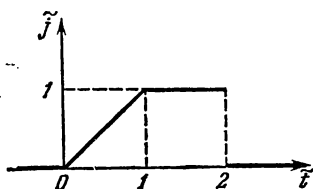


Рис. 100.

и начальными условиями

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (70)$$

В этой задаче пять параметров:  $m$ ,  $k$ ,  $A$ ,  $\omega$ ,  $x_0$ . Чтобы выяснить, когда при различных комбинациях этих параметров колебания будут подобными, примем  $1/\omega$  и  $x_0 \neq 0$  за характерные время и длину и обозначим  $t = \frac{1}{\omega} \tilde{t}$ ,  $x = x_0 \tilde{x}$ . После перехода к безразмерным переменным  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{x}$  и простых преобразований мы получим дифференциальное уравнение и начальные условия в виде

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \frac{k}{m\omega^2} \tilde{x} = \frac{A}{x_0 m \omega^2} \sin \tilde{t}, \quad \tilde{x}|_{\tilde{t}=0} = 1, \quad \left. \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \right|_{\tilde{t}=0} = 0. \quad (71)$$

Таким образом, если у одного осциллятора значения

$$I_1 = \frac{k}{m\omega^2}, \quad I_2 = \frac{A}{x_0 m \omega^2} \quad (72)$$

будут теми же, что у другого, то эталонные задачи (71) для них будут одинаковыми, т. е. соответствующие колебания — подобными. Нетрудно проверить, что величины  $I_1$  и  $I_2$  безразмерны. (Применив результаты § VII.5, легко получить формулы  $I_1 = \omega_0^2/\omega^2$ ,  $I_2 = x_{\text{своб}}/x_0$ , где  $\omega_0$  — собственная частота осциллятора, а  $x_{\text{своб}}$  — амплитуда колебаний свободной массы  $m$  под действием силы  $A \sin \omega t$ .) Такие безразмерные величины, совпадение которых обеспечивает подобие явлений, принято называть *критериями подобия*. Итак, в рассматриваемой задаче имеется два критерия (72), из которых только  $I_1$  определяется параметрами осциллятора, тогда как совпадение  $I_2$  можно обеспечить за счет подбора начальных условий. (В предыдущих рассуждениях был исключен случай  $x_0 = 0$ . Мы предоставляем читателю убедиться, что в этом случае единственным критерием подобия будет  $I_1$ .)

Решение эталонной задачи (71) имеет вид  $\tilde{x} = \varphi(\tilde{t}; I_1, I_2)$ , где конкретный вид функции  $\varphi$  легко получить по методу § VII.5. Возвращаясь к исходным переменным, получаем закон колебаний

$$x = x_0 \varphi \left( \omega t; \frac{k}{m\omega^2}, \frac{A}{x_0 m \omega^2} \right).$$

Во многих случаях критерии подобия можно установить непосредственно из соображений размерности. Так, в разобранный задаче примем за основные размерности массы  $M$ , времени  $T$  и длины  $L$ . Тогда размерности параметров задачи будут равны  $[m] = M$ ,  $[k] = MT^{-2}$ ,  $[A] = MT^{-2}L$ ,  $[\omega] = T^{-1}$ ,  $[x_0] = L$  (проверьте!). Из этих параметров можно составить только одну безразмерную комбинацию, не содержащую начальных данных, а именно  $I_1$ . (Конечно,

величины  $I_1^2$ ,  $I_1^{-1/2}$  и т. п. также будут безразмерными, но они не дадут новых, независимых критериев подобия.) Другой безразмерной комбинацией, содержащей начальные данные, является  $I_2$ . Нетрудно проверить—это мы предоставляем читателю,— что любую безразмерную комбинацию вида  $m^a k^b A^c \omega^d x_0^e$  можно представить следующим образом:  $I_1^b I_2^e$ , т. е. в данной задаче критериев подобия, независимых от  $I_1$  и  $I_2$ , нет.

Рассмотрим еще один пример. Пусть шарик массы  $m$  подвешен на нити длины  $l$  и колеблется с частотой  $\nu$  и максимальным углом  $\alpha$  отклонения от вертикали; при этом сопротивлением воздуха, массой нити и другими усложняющими факторами будем пренебрегать. Ясно, что между указанными параметрами и ускорением тяготения  $g$  имеется одно соотношение: например, можно задать  $m$ ,  $l$ ,  $g$  и  $\alpha$  произвольно, тогда  $\nu$  определяется однозначно. Напишем размерности всех параметров:  $[m] = M$ ,  $[l] = L$ ,  $[\nu] = T^{-1}$ ,  $[\alpha] = 1$ ,  $[g] = LT^{-2}$ . Здесь полной системой безразмерных критериев будет  $S = l\nu^2 g^{-1}$  и  $\alpha$ ; а так как между ними должно быть соотношение, то  $S$  должно зависеть только от  $\alpha$ , откуда

$$S^{1/2} = l^{1/2} \nu g^{-1/2} = f(\alpha), \quad \text{т. е. } \nu = \sqrt{\frac{g}{l}} f(\alpha). \quad (73)$$

Функцию  $f(\alpha)$  можно получить либо численно, с помощью интегрирования соответствующего дифференциального уравнения, либо экспериментально, с помощью измерения  $\nu$  при заданных значениях остальных параметров. Так как  $S$  выражается через  $\alpha$ , то  $\alpha$  в данной задаче является единственным критерием подобия.

Как видим, простые соображения размерности дали возможность получить важные сведения о колебаниях. Конечно, это только самые простые примеры приложения теории подобия и размерности, которая сейчас широко применяется в различных разделах физики. Упомянем несколько книг, содержащих изложение этой теории и ее приложений: П. В. Бриджмен, Анализ размерностей, ОНТИ, 1934; Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, «Наука», изд. 6, 1967; Д. А. Франк-Каменецкий, Диффузия и теплопередача в химической кинетике, изд. 2, «Наука», 1967. Начиная с некоторого уровня, математическая теория тесно переплетается здесь с физикой и развивается в различных областях физики по-разному.

На подобию явлений основано *моделирование*, при котором поведение какого-либо объекта выясняется на его модели, подобной в указанном выше смысле. Например, чтобы выяснить, с какой частотой будет при заданном  $\alpha$  качаться маятник на Луне, можно измерить частоту при том же  $\alpha$  в земных условиях, после чего произвести пересчет по формуле

$$\nu_1 : \nu_2 = \sqrt{\frac{g_1}{l_1}} : \sqrt{\frac{g_2}{l_2}},$$

вытекающей из соотношения (73).



## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

## § 1

Седло; узел; центр.

## § 2

$yy' + zz' = y^2 + z^2$ ,  $\frac{d(y^2 + z^2)}{y^2 + z^2} = 2 dx$ , откуда  $y^2 + z^2 = Ce^{2x}$ . Отсюда видно, что при  $x \rightarrow \infty$  все частные решения (кроме нулевого) уходят в бесконечность, а при  $x \rightarrow -\infty$  они стремятся к нулю.

## § 3

1. Если  $a \neq 6$ , система имеет ровно одно решение. При  $a=6$ ,  $b \neq 9$  система несовместна. При  $a=6$ ,  $b=9$  система имеет бесконечное количество решений:  $x=t$ ,  $y = \frac{3-t}{2}$  (при любом  $t$ ).

2.  $p_1=1$ ,  $\lambda_1=1$ ,  $\mu_1=3$ ;  $p_2=6$ ,  $\lambda_2=1$ ,  $\mu_2=-2$ ;  $x=C_1e^t+C_2e^{6t}$ ,  
 $y=3C_1e^t-2C_2e^{6t}$ .

## § 4

Равновесие в точке (0; 0) устойчивое; в точках (1; -1) и (-1; 1) неустойчивое.

## § 5

1.  $y_0(x)=1$ ;  $y_1(x)=1+x$ ;  $y_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$ ;  $y_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2 \cdot 3}$ ; ...

В пределе получаем точное решение  $y=e^x$ , разложенное в ряд по степеням  $x$ .

2.  $y=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{6}+\dots$

3.  $y=\frac{1}{1-x}+\frac{x^2(6-8x+3x^2)}{12(1-x)^2}\alpha+\dots$

## § 6

1. Приводим результаты вычислений по первому приближению, по второму приближению и точные значения:

$x$	$y$ по первому	$y$ по второму	$y$ точн.
0,0	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,1000	1,1051	1,1052
0,2	1,2100	1,2212	1,2214
0,3	1,3310	1,3496	1,3499
0,4	1,4641	1,4915	1,4918
0,5	1,6105	1,6483	1,6487
0,6	1,7716	1,8216	1,8221
0,7	1,9488	2,0131	2,0138
0,8	2,1437	2,2248	2,2255
0,9	2,3581	2,4587	2,4596
1,0	2,5939	2,7172	2,7183

2. По первому способу  $y(0,5)=0,7081$ ; по второму — 0,7161.

3. Дифференциальное уравнение имеет вид  $\frac{dv}{dt}=0,5t(20-t)-0,2v$ . Ско-

рость через 1,5 сек после начала движения равна  $9,682 \frac{см}{сек}$ .

## 4. Приводим результаты вычислений и точные значения

$x$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_{\text{прибл.}}$	0,000	0,100	0,199	0,296	0,390	0,480	0,565	0,645	0,718	0,784	0,842
$y_{\text{точн.}}$	0,000	0,100	0,199	0,296	0,389	0,479	0,565	0,644	0,717	0,783	0,842

## 5. Приводим таблицу значений решения

$t$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$x$	0,000	0,100	0,201	0,305	0,412	0,525

## § 7

1. Пусть  $\lambda > 0$ . Тогда  $y_1(x) = \cos \sqrt{\lambda} x$ ,  $y_2(x) = \sin \sqrt{\lambda} x$  и определитель системы, аналогичной (56), равен

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(l) & y_2'(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l.$$

Отсюда спектр определяется из равенства  $\cos \sqrt{\lambda} l = 0$ , т. е.  $\sqrt{\lambda} l = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\lambda = \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4l^2}$  ( $k=1, 2, \dots$ ). Если  $\lambda < 0$ , то  $y_1(x) = e^{\sqrt{|\lambda|} x}$ ,

$y_2(x) = e^{-\sqrt{|\lambda|} x}$ , определитель равен  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{|\lambda|} e^{\sqrt{|\lambda|} l} & -\sqrt{|\lambda|} e^{-\sqrt{|\lambda|} l} \end{vmatrix} = -\sqrt{|\lambda|} (e^{\sqrt{|\lambda|} l} + e^{-\sqrt{|\lambda|} l}) < 0$ , т. е. в нуль не обращается. При  $\lambda = 0$

будет  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = x$ , определитель равен  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ .

2. В данной задаче  $G(x; \xi) = \begin{cases} -\cos \xi \sin x & (0 \leq x \leq \xi), \\ -\sin \xi \cos x & (\xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}). \end{cases}$  Отсюда решение задачи имеет вид

$$y = -\cos x \int_0^x \sin \xi f(\xi) d\xi - \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos \xi f(\xi) d\xi.$$

## § 8

Решение имеет вид

$$y = -1 + \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{\lambda}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{\lambda}}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}}.$$

При  $\lambda \rightarrow +0$  оно стремится к решению вырожденного уравнения, т. е. к  $y = -1$  для всех  $x$  между  $-1$  и  $1$ . Вблизи обоих концов возникает пограничный слой, ширина которого асимптотически при  $\lambda \rightarrow 0$  равна  $\sqrt{\lambda}$ .

## ГЛАВА IX

### ВЕКТОРЫ

В физике мы часто встречаемся с векторами, т. е. с величинами, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Примерами таких величин могут служить отрезок, соединяющий начало координат с данной точкой; скорость движения материальной точки; сила, действующая на тело.

Если тело движется по определенной линии, например по прямому рельсовому пути, то положение тела можно определять расстоянием от определенной точки данной линии, измеренным вдоль этой линии. Вдоль заданной линии движение возможно лишь в двух направлениях, которые можно различать, приписывая одному направлению знак плюс, а противоположному — знак минус.

Если же нам известно, что тело движется по плоскости (или в пространстве), то мы не сможем указать положение тела в данный момент времени, если задано только расстояние тела от определенной точки; необходимо задать еще направление линии, соединяющей тело с этой точкой (началом координат). Точно так же, задавая скорость тела, надо указывать ее величину и направление. Величины, имеющие направление, называются *векторами*. Мы будем обозначать их полужирным шрифтом или буквами со стрелкой наверху. В отличие от векторов, величины, не имеющие направления и полностью определяющиеся своим числовым значением в выбранной системе единиц, называют *скалярами*. Примерами скаляров служат масса тела, его энергия, температура тела в какой-либо точке. Пока мы не рассматривали векторов, специальное слово «скаляр» можно было не вводить в употребление.

Векторы можно рассматривать в трехмерном пространстве или на плоскости (т. е. в «двумерном пространстве»).

Если отвлечься от направления векторной величины, то можно пользоваться модулем этой величины. Модуль — это положительный скаляр, имеющий размерность рассматриваемой величины. Например, для вектора  $\mathbf{F}$  силы в 5 н, имеющего определенное направление, модулем (он обозначается через  $|\mathbf{F}|$  или  $F$ ) будет 5 н,  $|\mathbf{F}| = 5$  н.

Два вектора считаются *равными*, если они имеют равные модули, параллельны и направлены в одну и ту же сторону. Это значит, что каждый вектор можно, не меняя его, перенести *поступательно* (па-

параллельно самому себе) в любое место, т. е. начало этого вектора может находиться где угодно. Таким образом, задать вектор—это значит задать его модуль и направление.

Вектор геометрически изображают отрезком, направление которого отмечается стрелкой. Конечно, для этого надо условиться о масштабе (например, указать, что сила в 1 н изображается отрезком в 3 см и т. п.). Лишь векторную величину, имеющую размерность длины, можно изобразить без этого условия, т. е. в масштабе 1:1. Поэтому, например, о векторе перемещения можно сказать, что, отложенный от точки  $A$  пространства, он достигнет точки  $B$ , тогда как для вектора силы такое утверждение бессмысленно.

### § 1. Линейные действия над векторами

К *линейным действиям* над векторами относятся сложение (и связанное с ним вычитание) и умножение вектора на скаляр. (Сложение вектора со скаляром так же нелепо, как сложение секунд и сантиметров.) Величина может называться векторной, только если эти действия осуществляются по описываемым ниже правилам.

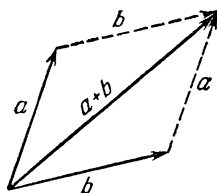


Рис. 101.

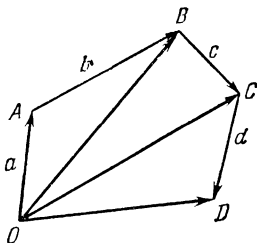


Рис. 102.

Сложение двух векторов выполняется по хорошо известному из школьного курса физики и показанному на рис. 101 *правилу параллелограмма*. При этом, конечно, для нахождения суммы достаточно построить только один из показанных на рис. 101 треугольников. Отсюда легко получить правило сложения нескольких векторов: на рис. 102

$$\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{OD} = \vec{OC} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}.$$

(В трехмерном случае векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  не обязаны лежать в одной плоскости!) Таким образом, сумма нескольких векторов изображается отрезком, замыкающим ломаную, звеньями которой служат векторы-слагаемые; направление этого замыкающего вектора берется от начала первого слагаемого вектора к концу последнего.

Изменив на рис. 102 направление вектора  $\overrightarrow{OD}$  на противоположное, мы приходим к следующему интересному выводу. Если векторы образуют замкнутый многоугольник, т. е. каждый следующий вектор приложен началом к концу предыдущего, а конец последнего совпадает с началом первого, то сумма всех этих векторов равна *нуль-вектору*  $\mathbf{0}$ , т. е. вектору, конец которого совпадает с его началом. Модуль нуль-вектора равен нулю, а направление не определено.

Отметим, что векторы нельзя соединять друг с другом знаком неравенства, в частности, не бывает положительных и отрицательных векторов.

*Умножение вектора на скаляр* (в частности, на число) получается в результате естественного обобщения сложения и вычитания векторов.

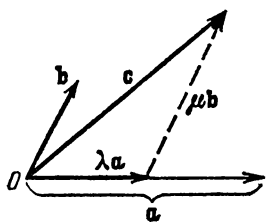


Рис. 103.

Так, под вектором  $3F$  понимается сумма  $F + F + F$ ; из построения ясно, что этот вектор направлен так же, как  $F$ , но в три раза длиннее. Под вектором  $(-1)F = -F$  понимается вектор, который в сумме с  $F$  дает  $\mathbf{0}$ ; ясно, что этот вектор направлен противоположно вектору  $F$  и имеет тот же модуль, что  $F$ . Обобщая эти определения, под  $\lambda F$  (где  $\lambda$  — любой скаляр) понимают вектор, модуль которого равен  $|\lambda| |F|$ , причем  $\lambda F$  параллелен  $F$  и направлен в ту же сторону, что

$F$ , если  $\lambda > 0$ , и в противоположную, если  $\lambda < 0$ . (При  $\lambda < 0$  иногда говорят, что векторы  $\lambda F$  и  $F$  *антипараллельны*.)

При линейных действиях над векторами выполняются все обычные правила элементарной математики. Например, можно слагаемое  $a$  в одной части равенства заменить на  $-a$  в другой, т. е. перенести слагаемое с изменением перед ним знака из одной части равенства в другую; обе части векторного равенства можно помножить или разделить на один и тот же скаляр по обычным правилам и т. п.

Всякое выражение вида  $\lambda a + \lambda b + \dots + \xi d$ , где  $\lambda, \mu, \dots, \xi$  — некоторые скаляры, называется *линейной комбинацией* векторов  $a, b, \dots, d$ . Заданные векторы называются *линейно зависимыми*, если какой-либо из этих векторов является линейной комбинацией остальных; в противном случае эти векторы называются *линейно независимыми* (между собой).

Линейная зависимость для двух векторов означает их параллельность (продумайте это!). Если взять на плоскости любые два непараллельных вектора  $a$  и  $b$ , то какой угодно третий вектор  $c$  в этой же плоскости можно «разложить по векторам  $a$  и  $b$ », т. е. представить в виде линейной комбинации (рис. 103).

$$c = \lambda a + \mu b. \quad (1)$$

Поэтому на плоскости можно указать два линейно независимых

вектора, но всякие три вектора уже линейно зависимы. Разложение (1) часто применяется в механике и других дисциплинах (разложение силы по двум направлениям и т. п.), причем каждое из слагаемых  $\lambda \mathbf{a}$  и  $\mu \mathbf{b}$  называется *составляющей (компонентой)* вектора  $\mathbf{c}$ , а совокупность векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  называется *базисом*.

Подобным образом в пространстве можно указать уже три линейно независимых вектора (любые три вектора, не параллельные одной плоскости). Их можно принять за базис, т. е. по ним можно разложить какой угодно четвертый вектор, а потому в пространстве любые четыре вектора линейно зависимы. Различие с утверждениями предыдущего абзаца связано с тем, что плоскость двумерна, а пространство трехмерно. Если в  $n$ -мерном пространстве (§ IV.8) ввести понятие вектора, то там базис будет состоять уже из  $n$  векторов (см. § 5).

Наиболее широко применяются базисы, состоящие из *единичных* (т. е. с безразмерным модулем, равным 1) взаимно перпендикулярных векторов; такие базисы называются *декартовыми* или *евклидовыми*. Векторы, образующие декартов базис, обычно обозначаются  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  (на плоскости) и  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  (в пространстве); таким образом, аналогично (1) можно написать разложение любого вектора

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$$

на плоскости и

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

в пространстве, где  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  — коэффициенты разложения.

Легко выяснить геометрический смысл этих коэффициентов, называемых *декартовыми координатами вектора  $\mathbf{a}$* ; при этом будем для определенности говорить о векторах на плоскости, так как в пространстве получаются совершенно аналогичные результаты. Выберем на плоскости произвольно точку  $O$ , которую назовем *началом координат*, и проведем через нее оси параллельно векторам выбранного базиса; эти оси обозначим соответственно буквами  $x$  и  $y$  (рис. 104). Мы получим *декартову систему координат*, в которой положение каждой точки  $A$  на плоскости определяется координатами  $(x_A; y_A)$ . Из рис. 104 мы видим, что для вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  будет

$$a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A.$$

Разность  $x_B - x_A$  называется также проекцией вектора  $\overrightarrow{AB}$  на ось  $x$ . Вообще, *проекцией*  $\text{пр}_l \mathbf{a}$  вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  на какую-либо ось  $l$  (т. е. на прямую, для которой указано, какое из двух ее направлений

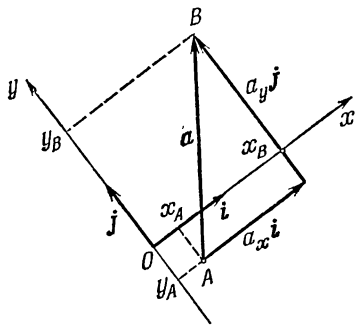


Рис. 104.

принято за положительное) называется модуль вектора  $\vec{A'B'}$ , определенного основаниями перпендикуляров (рис. 105), опущенных из точек  $A$  и  $B$  на ось  $l$ ; причем этот модуль берется со знаком «+» или «—» в зависимости от того, пройдет ли вектор  $\vec{A'B'}$  в положительном или отрицательном направлении оси  $l$ . Аналогично определяется проекция одного вектора на другой; в этом случае перпендикуляры опускаются на этот другой вектор или на его продолжение.

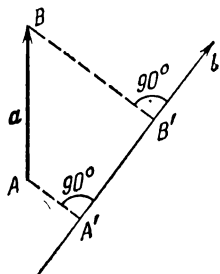


Рис. 105.

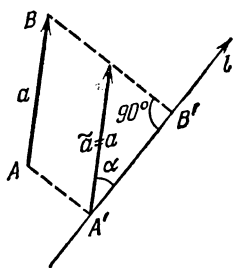


Рис. 106.

Таким образом, декартовы координаты вектора — это его проекции на базисные векторы:

$$a_x = \text{пр}_x a = \text{пр}_i a, \quad a_y = \text{пр}_y a = \text{пр}_j a, \quad a_z = \text{пр}_z a = \text{пр}_k a.$$

Подчеркнем, что проекция вектора — скаляр. Ее физическая размерность такая же, как размерность проектируемого вектора. Из рис. 106 сразу следует простая формула для вычисления проекции:

$$\text{пр}_l a = |a| \cos \alpha = |a| \cos(\widehat{a, l}). \quad (2)$$

Отсюда вытекает, в частности, широко применяемая в математике формула для декартова разложения единичного вектора  $e$ :

$$e = e_x i + e_y j + e_z k = \cos(\widehat{e, x}) i + \cos(\widehat{e, y}) j + \cos(\widehat{e, z}) k.$$

Применение декартовых проекций дает возможность вместо геометрических построений пользоваться формулами и вычислениями, что обычно оказывается проще. Получим в качестве примера условие параллельности двух векторов, заданных своими разложениями

$$F = F_x i + F_y j + F_z k, \quad G = G_x i + G_y j + G_z k.$$

Это условие можно записать в виде векторного равенства

$$G = \lambda F,$$

где  $\lambda$  — какой-то скаляр, или в проекциях на оси координат

$$G_x = \lambda F_x, \quad G_y = \lambda F_y, \quad G_z = \lambda F_z.$$

Выражая из каждого равенства  $\lambda$  и приравнявая результаты, приходим к требуемому условию

$$\frac{G_x}{F_x} = \frac{G_y}{F_y} = \frac{G_z}{F_z}.$$

Это условие состоит из двух равенств, а так как вектор определяется тремя, то при выборе вектора, параллельного данному, остается еще одна степень свободы — модуль. (Выведите эти равенства геометрически, исходя из свойств подобия треугольников.)

В заключение подчеркнем, что вектор  $\mathbf{a}$  полностью характеризуется своими декартовыми проекциями  $a_x, a_y, a_z$ , только если декартов базис  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  зафиксирован. Если выбрать этот базис по-другому, т. е. если повернуть оси координат, то тот же вектор будет иметь другие проекции (координаты). Мы поговорим об этом подробнее в § 5.

### Упражнения

1. Пусть  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ . Найдите вектор  $\vec{OC}$ , где  $C$  — середина отрезка  $AB$ .
2. В тех же условиях найдите вектор  $\vec{OD}$ , где  $D$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $\lambda:1$ .
3. Начало вектора в точке  $A(2; 3)$ , конец его в точке  $B(-1; 4)$ . Разложите этот вектор по единичным векторам координатных осей.

## § 2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется скаляр, равный произведению модуля одного вектора на проекцию на него другого вектора. Скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  обозначается так:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  или  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Таким образом,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{ пр}_a \mathbf{b}$ , а если воспользоваться формулой (2) для вычисления проекции, мы получим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \quad (3)$$

Отсюда сразу видно, что скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ . Кроме того, видно, что для ненулевых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  скалярное произведение  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  будет положительным, отрицательным или равным нулю в соответствии с тем, будет ли угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  острым, тупым или прямым. Особенно важно запомнить равенство

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0,$$

как необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Частным случаем является также скалярное произведение вектора самого на себя (скалярный квадрат вектора):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}|^2.$$

Важным примером скалярного произведения является работа, которую совершает сила  $\mathbf{F}$  на прямолинейном пути  $\mathbf{S}$ . Если тело



движется по прямой и сила направлена по этой же прямой, работа равна произведению силы на путь. Если же направление силы не совпадает с направлением движения, то работа равна произведению пути на величину составляющей силы, действующей вдоль направления движения, т. е.

$$A = |S| F_s = |S| |F| \cos \theta = S \cdot F,$$

где  $\theta$  — угол между направлениями силы и перемещения. Таким образом, работа равна скалярному произведению силы на путь. Частный случай, когда сила действует вдоль направления движения, охватывается этой формулой. При этом если направление силы совпадает с направлением движения, то  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ ,  $A = |F| |S|$ , работа положительна. Если же сила направлена противоположно движению, то  $\theta = \pi$ ,  $\cos \theta = -1$ ,  $A = -|F| |S|$ , работа отрицательна.

Отметим еще следующие свойства скалярного произведения:

$$(\lambda a) \cdot b = \lambda (a \cdot b), \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Мы не станем останавливаться на простом доказательстве этих свойств; желающие могут провести его самостоятельно, исходя из определения скалярного произведения. Эти свойства дают возможность при действиях со скалярным произведением пользоваться обычными правилами алгебры, помня, однако, что скалярно перемножать можно только два вектора.

Применяются также следующие формулы, проверить которые мы предоставляем читателю: если  $e$ ,  $e'$ ,  $e''$  — единичные векторы, то

$$a \cdot e = \text{пр}_e a, \quad e' \cdot e'' = \cos(\widehat{e', e''}).$$

Выведем теперь важную формулу, позволяющую вычислить скалярное произведение, если известны проекции перемножаемых векторов в некотором декартовом базисе  $i$ ,  $j$ ,  $k$  (§ 1):

$$a = a_x i + a_y j + a_z k, \quad b = b_x i + b_y j + b_z k. \quad (4)$$

Если учесть, что

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, \quad i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

(почему?), то, подставляя вместо  $a$  и  $b$  их разложения (4), получим

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (5)$$

(проверьте!). Как мы уже отмечали в конце § 1, при повороте осей координат проекции векторов  $a$  и  $b$  на оси координат, вообще говоря, меняются; однако правая часть (5) остается неизменной (инвариантной), так как она равна левой, а определение скалярного произведения было дано независимо от расположения осей координат.

Если в формуле (5) положить  $b = a$ , мы получим выражение для квадрата модуля вектора через его декартовы координаты:

$$a \cdot a = |a|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Для вектора на плоскости получаем  $|a|^2 = a_x^2 + a_y^2$ . Эта формула равносильна теореме Пифагора, а предыдущая — аналогу теоремы Пифагора для пространства (квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его ребер).

### Упражнения

1. Два вектора единичной длины образуют угол  $\varphi = 30^\circ$ . Найдите их скалярное произведение.
2. Найдите скалярное произведение векторов, изображенных на рис. 107.
3. Вычислите угол  $\theta$  между векторами

$$F = \sqrt{3}i + j \quad \text{и} \quad G = -\sqrt{3}i + j.$$

4. Докажите, что векторы, имеющие начало в точке  $A(-1; 1)$ , а концы в точках  $B(1; 2)$  и  $C(0; -1)$  соответственно, перпендикулярны.

5. Параллелограмм  $ABCD$  построен на векторах  $\vec{AB} = F$  и  $\vec{AD} = G$ . Выразив диагонали  $\vec{AC}$  и  $\vec{DB}$  через  $F$  и  $G$  и рассматривая  $\vec{AC} \cdot \vec{AC}$  и  $\vec{DB} \cdot \vec{DB}$ , докажите теорему: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

6. В кубе со стороной  $a$  найдите длину диагоналей (внутренних!); углы между диагоналями; проекции сторон на диагонали.

7. Правильный тетраэдр со стороной  $a$  расположен так, что одна из его вершин находится в начале координат, другая — на положительной полуоси  $x$ , третья — в первой четверти плоскости  $xy$ . Найдите координаты всех вершин и центра тетраэдра; угол между прямыми, идущими из центра к вершинам.

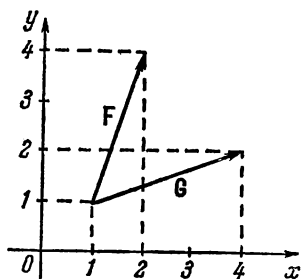


Рис. 107.

## § 3. Производная от вектора

Найдем производную от вектора, зависящего от некоторой переменной, например от времени  $t$ , по этой переменной.

Будем откладывать вектор  $A(t)$  от некоторой определенной точки  $O$ . Тогда конец вектора при изменении  $t$  начертит линию ( $L$ ) (рис. 108).

Возьмем весьма малое  $dt$  и составим отношение

$$\frac{A(t+dt) - A(t)}{dt}.$$

Это отношение также есть вектор. (Вектор  $A(t+dt) - A(t)$  изображается на рис. 108 отрезком  $M_1M_2$ .) Оно является *производной* вектора  $A(t)$  по переменной  $t$  и потому обозначается через  $\frac{dA}{dt}$ , так что

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A(t+dt) - A(t)}{dt}. \quad (6)$$

(Более строго, в правой части надо поставить знак предельного перехода при  $dt \rightarrow 0$ .)

Формулу (6) можно переписать и так:

$$\mathbf{A}(t+dt) = \mathbf{A}(t) + \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt, \quad (7)$$

с точностью до малых высшего порядка. Как и в случае обычных функций, можно написать ряд Тейлора

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t_0) + \mathbf{B}(t_0)(t-t_0) + \mathbf{D}(t_0) \frac{1}{2}(t-t_0)^2 + \dots,$$

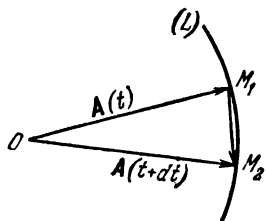


Рис. 108.

где  $\mathbf{B}(t_0) = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{t=t_0}$ ,  $\mathbf{D}(t_0) = \left. \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} \right|_{t=t_0}$  и т. д.

Ясно, что при весьма малом  $dt$  точки  $M_2$  и  $M_1$  линии  $(L)$  весьма близки, так что вектор  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  направлен по касательной к ней.

Если  $\mathbf{C}$  — постоянный вектор, то  $\mathbf{C}(t+dt) - \mathbf{C}(t) = \mathbf{0}$ , так что в этом случае  $\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{0}$ .

Пользуясь определением производной, легко доказать две следующие формулы:

1.  $\frac{d}{dt} [a_1 \mathbf{A}_1(t) + a_2 \mathbf{A}_2(t)] = a_1 \frac{d\mathbf{A}_1(t)}{dt} + a_2 \frac{d\mathbf{A}_2(t)}{dt}$ , где  $a_1, a_2$  — постоянные скаляры.

2.  $\frac{d}{dt} [f(t) \mathbf{A}(t)] = \frac{df}{dt} \mathbf{A}(t) + f(t) \frac{d\mathbf{A}}{dt}$ . В частности,  $\frac{d}{dt} [f(t) \mathbf{C}] = \frac{df}{dt} \mathbf{C}$ ,

если вектор  $\mathbf{C}$  — постоянный. Таким образом, мы видим, что производная от вектора вида  $f(t) \mathbf{C}$  оказывается параллельной самому этому вектору (тогда как из рис. 108 видно, что в общем случае это не так).

Найдем производную от скалярного произведения. Пусть  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — два переменных вектора. Согласно определению производной

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A}(t+dt) \cdot \mathbf{B}(t+dt) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{dt}.$$

Пользуясь формулой (7), находим

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\left( \mathbf{A}(t) + \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt \right) \cdot \left( \mathbf{B}(t) + \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt \right) - \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)}{dt},$$

или

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + dt \left( \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) + dt \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \right) + (dt)^2 \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{dt}.$$

Пренебрегая членом, содержащим  $dt^2$ , окончательно получаем

$$\frac{d}{dt}(A \cdot B) = A \cdot \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \cdot B. \quad (8)$$

Таким образом, формула имеет такой же вид, как формула для производной от произведения двух скалярных функций.

Положив, в частности, в формуле (8)  $A = B$ , получим

$$\frac{d}{dt}(A \cdot A) = A \cdot \frac{dA}{dt} + \frac{dA}{dt} \cdot A = 2A \cdot \frac{dA}{dt}. \quad (9)$$

Однако  $A \cdot A = |A|^2$  и потому  $\frac{d}{dt}(A \cdot A) = 2|A| \frac{d|A|}{dt}$ . Приравнявая эти результаты, получаем

$$|A| \frac{d|A|}{dt} = A \cdot \frac{dA}{dt}, \text{ т. е. } \frac{d|A|}{dt} = \frac{A \cdot \frac{dA}{dt}}{|A|}. \quad (10)$$

Отсюда легко вывести, в частности, что если вектор  $A(t)$  имеет постоянный модуль, а изменяется лишь его направление, то вектор  $\frac{dA}{dt}$  перпендикулярен вектору  $A$ . В самом деле, тогда  $|A| = \text{const}$ , т. е.  $\frac{d|A|}{dt} = 0$ , и в силу последней формулы  $A \cdot \frac{dA}{dt} = 0$ , а равенство нулю скалярного произведения означает, что  $A$  и  $\frac{dA}{dt}$  перпендикулярны.

#### Упражнение

Найти угол, который составляет винтовая линия  $x = R \cos \omega t$ ,  $y = R \sin \omega t$ ,  $z = vt$  с ее осью (осью  $z$ ).

### § 4. Движение материальной точки

При движении материальной точки в пространстве зависимости между положением точки, ее скоростью и ускорением являются соотношениями между векторами. Пусть положение точки характеризуется вектором  $r$ , проведенным из начала координат в эту точку, скорость — вектором  $u$ , ускорение — вектором  $a$ . Тогда из определения производной немедленно вытекает

$$u = \frac{dr}{dt}, \quad a = \frac{du}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Запишем вектор  $r$  через единичные векторы координатных осей:

$$r = xi + yj + zk.$$

В этом равенстве  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — это проекции, которые при движении точки изменяются со временем, а векторы  $i$ ,  $j$ ,  $k$  — постоянные.

Поэтому

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

Следовательно, проекции вектора скорости  $\mathbf{u}$  на оси координат равны производным от соответствующих проекций вектора  $\mathbf{r}$ :

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Точно так же для ускорения получаем

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

В силу формулы (10) скорость изменения расстояния  $|\mathbf{r}|$  точки от начала координат равна

$$\frac{d|\mathbf{r}|}{dt} = \frac{\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{r}|}.$$

С помощью последней формулы легко найти, в частности, условие, при котором расстояние точки от начала координат не изменяется, т. е.  $|\mathbf{r}| \equiv \text{const}$ . Именно, так будет в следующих двух случаях. Во-первых, если  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (в этом случае точка не движется), и, во-вторых, если в каждый момент времени скорость  $\mathbf{u}$  перпендикулярна вектору  $\mathbf{r}$  (в этом случае тело движется по сфере радиуса  $|\mathbf{r}|$  с центром в начале координат).

Подобным образом, из (9) получается формула

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{u}|^2 = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}). \quad (11)$$

Из формулы (11) следует, что величина скорости постоянна в двух случаях: если равно нулю ускорение, либо если ускорение не равно нулю, но направлено перпендикулярно скорости.

Уравнение движения материальной точки имеет вид  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ , где  $m$  — масса точки,  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на точку. (Второй закон Ньютона.) Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор скорости  $\mathbf{u}$ . Получим

$$m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}.$$

Пользуясь формулой (11), получим

$$m \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}|^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u},$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}. \quad (12)$$

Покажем, что величина  $F \cdot u$  есть мощность силы  $F$ . В самом деле, за время  $dt$  точка перемещается на  $dr$ , при этом производится работа  $F \cdot dr$ . Отношение этой работы ко времени  $dt$ , равное

$$\frac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot u,$$

есть работа, производимая в единицу времени, т. е. мощность.

Если обозначить  $\frac{m}{2} |u|^2 = T$ , то уравнение (12) принимает вид  $\frac{dT}{dt} = F \cdot u$ , откуда  $T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot u dt$  (справа стоит работа силы  $F$ ).

Таким образом, из второго закона Ньютона следует, что существует определенная величина  $T$ , выражающаяся через массу и скорость движущейся точки и притом такая, что увеличение  $T$  в процессе движения как раз равно работе внешней силы  $F$ . Это и служит обоснованием того, что величину  $T$  называют *кинетической энергией* движущейся материальной точки.

Иногда в качестве параметра, определяющего положение движущейся точки вдоль траектории, берут длину  $s$  дуги, отсчитываемую вдоль траектории от некоторого начала отсчета, т. е. полагают  $r = r(s)$ . Так как отношение длины бесконечно малой дуги к стягивающей ее хорде стремится к единице (в силу того, что такая дуга почти не успевает изменить свое направление, т. е. «искривиться»), то при  $\Delta s \rightarrow 0$

$$\frac{|\Delta r|}{\Delta s} \rightarrow 1, \text{ т. е. } \left| \frac{dr}{ds} \right| = \lim \left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right| = 1. \quad (13)$$

Поэтому производная  $dr/ds$  представляет собой единичный вектор, направленный по касательной к траектории. Этот вектор принято обозначать буквой  $\tau$ , откуда

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = \tau u = u \tau, \quad (14)$$

где обозначено  $u = |u|$ .

Из формулы (13) вытекает также выражение для дифференциала дуги в декартовых координатах

$$ds = |dr| = |d(xi + yj + zk)| = |dxi + dyj + dzk| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Так как  $|\tau(s)| = 1 = \text{const}$ , то (см. § 3)  $\frac{d\tau}{ds} \perp \tau$ . Таким образом, прямая  $pp$  (рис. 109), проведенная через некоторую текущую точку  $M$  траектории ( $L$ ) параллельно  $d\tau/ds$ , будет служить нормалью к ( $L$ ), т. е. перпендикуляром к касательной  $ll$  в точке  $M$ . Чтобы отличить ее от остальных нормалей (а в каждой точке линии в пространстве можно провести к ней бесконечное число нормалей, которые заполняют «нормальную плоскость»), ее называют *главной*

нормалью в точке  $M$  к линии  $(L)$ . Длина вектора  $d\tau/ds$  называется кривизной линии  $(L)$  в точке  $M$  и обозначается буквой  $k$ , т. е.

$$\left| \frac{d\tau}{ds} \right| = k, \quad \frac{d\tau}{ds} = kn,$$

где  $n$  — единичный вектор главной нормали (см. рис. 109).

Из рис. 110 виден геометрический смысл кривизны:

$$k = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \lim \left| \frac{\Delta\tau}{\Delta s} \right| = \lim \frac{BC}{\Delta s} = \lim \frac{\alpha}{\Delta s},$$

где  $\alpha$  — угол между касательными к  $(L)$  в близких точках  $B$  и  $C$ ; в последнем переходе мы заменили отрезок  $BC$  на дугу окружности единичного радиуса. Таким образом, кривизна есть скорость поворота касательной в расчете на единицу длины пройденного пути.

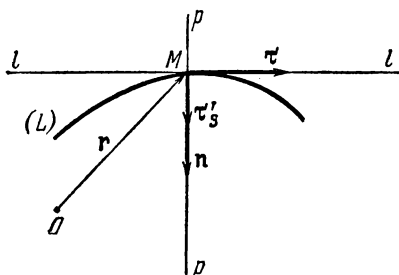


Рис. 109.

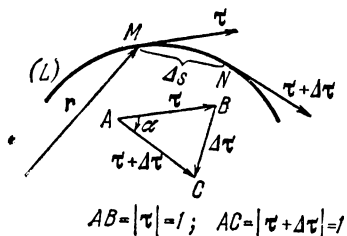


Рис. 110.

Отсюда видно, в частности, что во всех точках окружности радиуса  $R$  кривизна  $k = 1/R$  (об этом говорилось в ВМ, § III.5, при рассмотрении понятия кривизны плоской кривой). Заодно видно, что вектор  $\tau'_s = \frac{d\tau}{ds}$ , а с ним и  $n$  направлены в ту сторону, куда кривая заворачивает.

Дифференцируя формулу (14) по  $t$ , получим

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{du}{dt} \tau + u \frac{d\tau}{dt} = \frac{du}{dt} \tau + u \frac{d\tau}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} \tau + u^2 kn. \quad (15)$$

Эта формула широко применяется в физике, так как она дает разложение вектора ускорения на «тангенциальную» (т. е. направленную по касательной) и нормальную составляющие; последняя, как видим, направлена именно по главной нормали.

Таким образом, вектор  $a$ , будучи отложен от точки  $M$ , обязательно лежит в плоскости, проходящей через касательную и главную нормаль, проведенные в этой точке; эта плоскость называется *соприкасающейся плоскостью* к линии  $(L)$  в точке  $M$ . Можно доказать, что это не что иное, как плоскость, проходящая через три

точки линии ( $L$ ), расположенные в бесконечной близости от  $M$ . (Подобно тому как касательная—это прямая, проведенная через две бесконечно близкие точки линии.)

Из формулы (15) вытекают важные выводы о силах, действующих на точку в процессе движения. Подставим в формулу второго закона Ньютона  $F = ma$  выражение для  $a$  из (15). Мы видим, что действующая сила имеет тангенциальную составляющую

$$F_\tau = F_\tau \tau = m \frac{du}{dt} \tau \quad (16)$$

и нормальную составляющую

$$F_n = F_n n = mu^2 kn, \quad (17)$$

направленную по главной нормали к траектории. Соприкасающаяся плоскость к траектории в ее некоторой точке—это плоскость векторов  $u$  и  $F$  в этой точке.

Из формулы (16) получаем

$$uF_\tau = um \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mu^2}{2} \right) = \frac{dT}{dt},$$

откуда приращение кинетической энергии равно

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} uF_\tau dt = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds.$$

Мы видим, что работу производит лишь тангенциальная составляющая силы. Нормальная же составляющая (она называется также центростремительной силой) не меняет скорости движения точки, но порождает искривление траектории, причем кривизна согласно (17) равна

$$k = \frac{F_n}{mu^2}.$$

Напомним, что размерность кривизны ( $cm^{-1}$ ) обратна размерности длины.

#### Упражнение

Найдите кривизну винтовой линии из упражнения к § 3.

### § 5. Понятие о тензорах

Мы уже подчеркивали в конце § 1, что если характеризовать вектор тройкой его декартовых проекций, то надо иметь в виду, что эта тройка существенно зависит от выбора декартова базиса. Рассмотрим этот вопрос подробно. Будем обозначать векторы базиса буквами  $e_1, e_2, e_3$ , а проекции вектора  $a$ —символами  $a_1, a_2,$



$a_3$ , так что

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3. \quad (18)$$

Допустим теперь, что выбран новый декартов базис  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ , выражающийся через старый по формулам

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{i1} \mathbf{e}_1 + \alpha_{i2} \mathbf{e}_2 + \alpha_{i3} \mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \mathbf{e}_j \quad (i = 1, 2, 3).$$

В тензорной алгебре принято писать более коротко:

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}_j; \quad (19)$$

при этом подразумевается, что по повторяющемуся индексу производится суммирование в соответствии с размерностью пространства — так, для трехмерного пространства  $j = 1, 2, 3$ . Такой индекс является *немой*, т. е. может быть обозначен любой буквой:  $\alpha_{ij} \mathbf{e}_j = \alpha_{ik} \mathbf{e}_k = \alpha_{il} \mathbf{e}_l$  и т. д.

Умножив обе части (19) скалярно на  $\mathbf{e}_j$ , получим, что  $\alpha_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ . Аналогично, из формул  $\mathbf{e}_i = \beta_{ij} \mathbf{e}'_j$ , выражающих старый базис через новый, получаем, что  $\beta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$ . Но это значит, что  $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ , т. е. старый базис выражается через новый по формулам

$$\mathbf{e}_i = \alpha_{ji} \mathbf{e}'_j. \quad (20)$$

(Это равенство можно переписать в виде  $\mathbf{e}_j = \alpha_{ij} \mathbf{e}'_i$ , так что получается, что в равенстве (19), связывающем декартовы базисы, можно просто «переставить» множитель  $\alpha_{ij}$  из одной части в другую.)

Если подставить выражения (20) в (18) и обозначить через  $a'_i$  проекции вектора  $\mathbf{a}$  в базисе  $\mathbf{e}'_i$ , мы получим

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i = \sum_i a_i \sum_j \alpha_{ji} \mathbf{e}'_j = \sum_{j,i} \alpha_{ji} a_i \mathbf{e}'_j.$$

Меняя обозначения  $i \leftrightarrow j$ , получим

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} a_j \mathbf{e}'_i = \sum_i \left( \sum_j \alpha_{ij} a_j \right) \mathbf{e}'_i = \sum_i a'_i \mathbf{e}'_i,$$

откуда

$$a'_i = \alpha_{ij} a_j. \quad (21)$$

Сравнивая с (19), мы видим, что проекции любого вектора преобразуются по тем же формулам, что и базисные векторы.

Конечно, в предыдущих рассуждениях под  $\mathbf{a}$  не обязательно понимать «геометрический» вектор, т. е. направленный отрезок на плоскости или в пространстве. Это может быть вектор силы или скорости и т. д.; во всех случаях его проекции преобразуются по формулам (21). Нетрудно проверить, что и обратно, каждую тройку величин, приобретающих определенные значения только после указания декартова базиса и преобразующихся по формулам (21) при замене (19) этого базиса, можно истолковать как тройку координат

некоторого вектора, т. е. считать, что такая тройка определяет некоторый вектор. (В то же время вряд ли полезно истолковывать любую тройку величин как вектор. Например, при изучении потока газа можно рассматривать тройку величин — температуру  $\vartheta$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$ , характеризующих состояние газа в некоторой точке пространства. Однако истолковывать такую тройку как вектор нецелесообразно, так как повороты базиса в пространстве не сказываются на значениях величин, составляющих тройку. Три скаляра не составляют вектор.)

Бывают величины, преобразующиеся при замене (19) базиса по более сложному закону, чем (21). Важный пример таких величин получается при рассмотрении *линейного отображения* пространства в себя. Говорят, что задано такое отображение  $T$ , если каждому вектору  $\mathbf{a}$  поставлен в соответствие вектор  $T\mathbf{a}$  (того же пространства), причем сумме прообразов соответствует сумма образов, т. е.  $T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T\mathbf{a} + T\mathbf{b}$ ,  $T(\lambda\mathbf{a}) = \lambda T\mathbf{a}$ . Примерами линейных отображений могут служить поворот пространства вокруг некоторой точки, равномерное сжатие его к некоторой плоскости, прямой или точке и т. д. (продумайте это!).

Чтобы охарактеризовать такое отображение числами, выберем в пространстве базис  $\mathbf{e}_i$  и разложим каждый из векторов  $T\mathbf{e}_i$  по этому базису:

$$T\mathbf{e}_i = p_{ji}\mathbf{e}_j \quad (22)$$

(обратите внимание на порядок индексов). Знание девяти коэффициентов  $p_{ij}$  позволяет найти образ  $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$  любого вектора (18). В самом деле,

$$\mathbf{b} = \sum_i b_i \mathbf{e}_i = T\left(\sum_i a_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i,j} a_i p_{ji} \mathbf{e}_j = \sum_{i,j} a_j p_{ij} \mathbf{e}_i,$$

откуда  $b_i = p_{ij} a_j$ .

Набор коэффициентов  $p_{ij}$ , зависящих от двух индексов, часто записывают в виде *матрицы*, т. е. таблицы

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Посмотрим теперь, как изменятся коэффициенты  $p_{ij}$  при переходе к новому базису  $\mathbf{e}'_i$ . Так как в силу (22)  $p_{ij} = T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i$ , то, учитывая формулы (19), получим

$$p'_{ij} = T\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}'_i = \alpha_{ji} T\mathbf{e}_l \cdot \alpha_{ik} \mathbf{e}_k = \alpha_{ik} \alpha_{jl} p_{kl}. \quad (23)$$

Отсюда, в частности, легко показать, что сумма  $p_{ii}$  при таком переходе остается инвариантной, т. е. она представляет собой скаляр. В самом деле,

$$p'_{ii} = \alpha_{ik} \alpha_{il} p_{kl} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k \alpha_{il} p_{kl} = \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}'_i \alpha_{il}) p_{kl} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l p_{kl} = p_{ii}.$$

В рассмотренном примере величины  $p_{ij}$  были безразмерными. Можно проверить, что, и наоборот, каждый набор безразмерных величин  $p_{ij}$ , преобразующихся по формулам (23) при замене (19) декартова базиса, можно истолковать как матрицу некоторого линейного отображения пространства в себя. В § XI.5 будут приведены примеры размерных величин, имеющих иной физический смысл, но также преобразующихся по формулам (23) при замене базиса.

Перепишем формулы (21) и (23), изменив обозначения индексов:

$$a'_{i'} = \alpha_{i'i} a_i, \quad p'_{i'j'} = \alpha_{i'i} \alpha_{j'j} p_{ij}.$$

Мы видим, что эти формулы имеют общую структуру. Обобщая, мы приходим к закону преобразования величин  $q_{ij} \dots l$ , зависящих от  $m$  индексов  $i, j, \dots, l$ , каждый из которых принимает значения 1, 2, 3 (для трехмерного пространства) или 1, 2 (для плоскости):

$$q'_{i'j' \dots l'} = \alpha_{i'i} \alpha_{j'j} \dots \alpha_{l'l} q_{ij \dots l}. \quad (24)$$

Если величины  $q_{ij \dots l}$  принимают определенные значения только после указания декартова базиса и преобразуются по формулам (24) (в правой части стоит  $m$ -кратная сумма!) при замене (19) этого базиса, то говорят, что величины  $q_{ij \dots l}$  образуют *тензор ранга  $m$* . Таким образом, набор проекций вектора образует тензор 1-го ранга, набор коэффициентов линейного отображения — тензор 2-го ранга (этот набор коэффициентов в каждом базисе свой, но определяет одно и то же отображение, не зависящее от выбора базиса). Отметим, что с точки зрения приведенного определения тензором ранга 0 надо считать величину, принимающую в выбранных единицах измерения числовое значение и инвариантную относительно замены базиса, т. е. скаляр.

К понятию тензора возможен также следующий подход. Рассмотрим для определенности тензор 2-го ранга, т. е. набор величин  $p_{ij}$ , преобразующихся при замене (19) базиса по формулам (23), и сопоставим этому набору формальное выражение

$$P = \sum_{i,j=1}^3 p_{ij} e_i e_j. \quad (25)$$

При этом *тензорное произведение*  $e_i e_j$  (не путать со скалярным произведением  $e_i \cdot e_j$ !) не сводится к какому-либо более простому объекту — скаляру или вектору. Перестановка множителей в тензорном произведении невозможна, т. е.  $e_i e_j \neq e_j e_i$ , но в тензорном произведении сумм можно раскрывать скобки по обычным правилам, следя за порядком сомножителей, например:

$$(2e_1 + e_2 - e_3)(e_1 + 3e_3) = 2e_1 e_1 + 6e_1 e_3 + e_2 e_1 + 3e_2 e_3 - e_3 e_1 - 3e_3 e_3.$$

В новом базисе  $e'_i$  взамен (25) надо написать выражение

$$P' = \sum_{i,j} p'_{ij} e'_i e'_j.$$

Однако с учетом формул (23) и (20) получим

$$P' = \sum_{i,j,k,l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} p_{kl} e'_i e'_j = \sum_{k,l} p_{kl} \left( \sum_i \alpha_{ik} e'_i \right) \left( \sum_j \alpha_{jl} e'_j \right) = \sum_{k,l} p_{kl} e_k e_l = P.$$

Итак, выражение (25)—оно и называется тензором—инвариантно относительно замены декартова базиса. Аналогично вводится понятие тензора любого ранга, причем тензор 1-го ранга  $\sum_i a_i e_i$  есть вектор.

Тензоры, тензорная алгебра и тензорный анализ (в котором изучаются правила дифференцирования тензоров) играют в современной физике очень важную роль. В тензорных терминах формулируются основные законы теории упругости, электродинамики и оптики анизотропной среды и т. д. Это дает возможность не связывать рассмотрение с какой-то одной, искусственно выбранной системой координат, не оправданной существом исследования. Отметим, что во многих случаях оказывается недостаточным ограничиваться декартовыми базисами; тогда приходится изменить определение тензора так, чтобы он оставался инвариантным при переходе к любому, не обязательно декартову базису. Мы не будем рассматривать здесь это измененное определение.

А. Эйнштейн применил тензорный анализ к электродинамике и теории тяготения, чем привлек к тензорам широкое внимание физиков и математиков. В его небольшой книге «Сущность теории относительности» содержится лучшее краткое изложение теории тензоров.

#### Упражнение

Напишите матрицы линейных отображений плоскости в себя, описанных на рис. 111. Укажите, во что переходит квадрат при различном наложении его сторон.

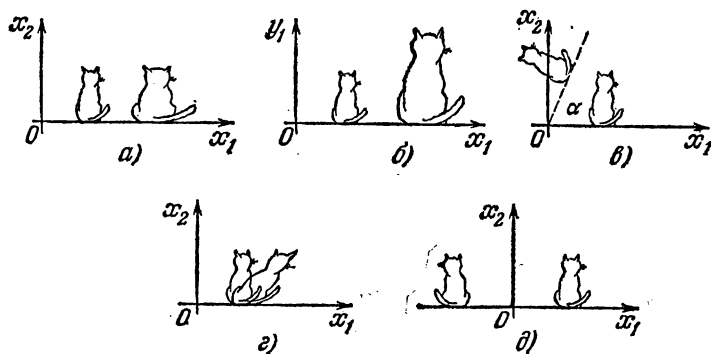


Рис. 111.

## § 6. Многомерное векторное пространство

В § IV.8 мы видели, что к понятию многомерного пространства можно подойти двояко: либо исходя из числовой схемы, либо же исходя из рассмотрения системы со многими степенями свободы. Аналогичные подходы возможны к понятию многомерного векторного пространства, которые выделяются из общих пространств возможностью выполнения линейных действий. Рассмотрим сначала первый подход, причем для определенности будем говорить о четырехмерном пространстве (общий случай рассматривается аналогично).

Как мы видели, точкой в четырехмерном пространстве можно считать просто набор четырех чисел  $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ . Единичный вектор  $e_1$  первой координатной оси (оси  $x_1$ ) надо представлять себе как отрезок с началом в начале координат  $(0; 0; 0; 0)$  и концом в точке  $(1; 0; 0; 0)$ . Впрочем, исходя из возможности переносить любой вектор параллельно самому себе,  $e_1$  можно рассматривать как отрезок с началом в любой точке  $(x_1; x_2; x_3; x_4)$  и концом в точке  $(x_1 + 1; x_2; x_3; x_4)$ . Аналогично вводятся единичные векторы  $e_2, e_3, e_4$  других трех координатных осей. Рассматривая линейную комбинацию этих четырех векторов

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4, \quad (26)$$

мы получаем вектор, ведущий из начала координат в точку  $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ , т. е. радиус-вектор этой точки. Вектор  $x$  можно откладывать не от начала координат, а от любой другой точки; во всяком случае, коэффициенты  $x_1, x_2, x_3, x_4$  в формуле (26)—это проекции вектора  $x$  на оси координат.

Действия над четырехмерными векторами осуществляются по тем же формальным правилам, что и над двумерными и трехмерными. Наиболее просто рассматривать векторы разложенными по осям координат, т. е. представленными в виде (26). Если наряду с вектором (26) мы имеем вектор  $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4$ , то

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1) e_1 + (x_2 + y_2) e_2 + (x_3 + y_3) e_3 + (x_4 + y_4) e_4, \\ \lambda x &= \lambda x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2 + \lambda x_3 e_3 + \lambda x_4 e_4 \quad (\lambda \text{ — скаляр}), \\ x \cdot y &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4. \end{aligned} \quad (27)$$

Можно проверить, что все основные свойства, описанные выше для двумерных и трехмерных векторов, сохраняют силу и для четырехмерных векторов. Однако некоторого внимания требуют свойства, связанные с понятием линейной зависимости (§ 1). Дело в том, что в четырехмерном пространстве возможны плоскости двух «сортов» — двумерные и трехмерные. Двумерная плоскость получается, если взять два линейно независимых (т. е. непараллельных) вектора, а затем их всевозможные линейные комбинации отложить от какой-либо фиксированной точки, например от начала координат. Если это проделать с тремя линейно независимыми векторами, то получится

трехмерная плоскость (говорят также «трехмерная гиперплоскость») в четырехмерном пространстве. Если же взять четыре линейно независимых вектора (т. е. не параллельных одной трехмерной плоскости), то их линейные комбинации заполнят все пространство, т. е. по ним можно разложить любой пятый вектор. Таким образом, в четырехмерном пространстве любые четыре линейно независимых вектора можно принять за базис (ср. § 1).

Рассмотрим теперь другой подход к понятию многомерного векторного пространства. Будем исходить из некоторой совокупности  $R$  каких-то объектов, над которыми можно, оставаясь в рамках  $R$ , производить линейные действия, т. е. складывать друг с другом и умножать на скаляры (вещественные числа). Кроме того, требуется, чтобы при этих действиях соблюдались те же свойства, которые были указаны в § 1 для линейных действий над векторами на плоскости или в пространстве. В этом случае  $R$  называется *линейным* (или *векторным*) *пространством*, а составляющие его объекты называются (*обобщенными*) *векторами*.

Основной числовой характеристикой заданного векторного пространства является максимально возможное число линейно независимых векторов, называемое также *размерностью* этого пространства. Например, если пространство  $R$  четырехмерно, то это означает, что в нем можно указать такие четыре линейно независимых вектора  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ , что любой другой вектор  $\mathbf{x}$  из  $R$  можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \lambda_4 \mathbf{a}_4. \quad (28)$$

Таким образом, эти векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  можно в  $R$  принять за базис. Так как для разных векторов  $\mathbf{x}$  коэффициенты разложения в (28) могут принимать всевозможные значения, то при выборе вектора  $\mathbf{x}$  в пространстве  $R$  имеется четыре степени свободы, т. е. пространство  $R$  оказывается четырехмерным и в смысле § IV.8.

Может оказаться, что в рассматриваемом линейном пространстве можно указать как угодно большое число линейно независимых векторов. Такое пространство называется *бесконечномерным*; пример бесконечномерного пространства мы рассмотрим в § XIV.7.

Если в конечномерном линейном пространстве введено понятие скалярного произведения, удовлетворяющее описанным в § 2 свойствам обычного скалярного произведения, то это пространство называется *евклидовым*. В евклидовом пространстве естественно вводятся понятия модуля вектора (по формуле  $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ ), единичного вектора, ортогональности векторов (если  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ ). В евклидовом пространстве обычно выбирается не какой угодно базис, а ортогональный базис, т. е., например, для четырехмерного случая совокупность четырех взаимно ортогональных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ . В этом случае коэффициенты разложения (28) любого вектора  $\mathbf{x}$  легко найти следующим образом: помножим обе части равенства (28)

скалярно на какой-то из векторов  $\mathbf{a}_j$ , что даст

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j = \lambda_j (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_j);$$

остальные слагаемые в правой части пропадают в силу условия ортогональности. Отсюда

$$\lambda_j = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j}{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_j} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (29)$$

Наличие скалярного произведения делает возможными повороты в линейном пространстве, которое приобретает свойство *изотропии* (равноправия направлений); при этом векторное пространство становится существенно более полноценным. Вернемся к упомянутой в § 5 характеристике состояния газа в точке с помощью величин  $\phi$ ,  $p$ ,  $\rho$ . Над приращениями этих величин можно производить линейные действия, т. е. тройки таких приращений образуют трехмерное линейное пространство. Однако в этом пространстве нет скалярного произведения и поворотов, т. е. оно не является евклидовым, чем и объясняется его неполноценность\*).

Упомянем еще о *псевдоевклидовых* пространствах, в которых квадрат модуля вектора (скалярное произведение его самого на себя) может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Именно таким в силу теории относительности является четырехмерное пространство  $x, y, z, t$  декартовых координат и времени. В псевдоевклидовом пространстве возможны повороты, хотя и не все направления в нем оказываются равноправными.

До сих пор мы считали, что скаляры—это произвольные вещественные числа; в этом случае линейное пространство называется *вещественным*. Рассматриваются также *комплексные линейные пространства*, в которых в качестве скаляров можно брать произвольные комплексные числа. Тогда при определении евклидова пространства имеется новый момент: именно, требуется, чтобы

$$(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^*, \quad (30)$$

т. е. чтобы при перестановке сомножителей в скалярном произведении оно заменялось на комплексно сопряженное число. Однако если в формуле (30) положить  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , то мы получим, что скалярный квадрат любого вектора представляет собой число вещественное (и даже, как можно проверить, положительное, так что модуль вектора можно находить по той же формуле, что и раньше, и этот модуль оказывается положительным). Кроме того, при вынесении скалярного множителя за знак скалярного произведения пользуются следующими формулами:

$$(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda^* (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Простейший пример четырехмерного комплексного евклидова про-

\*) Не надо путать эту «неевклидовость» с так называемой неевклидовой геометрией, которая к теории линейных пространств не имеет отношения.

странства — это пространство, рассмотренное в начале этого параграфа, где, однако, числа  $x_1, x_2, x_3, x_4$  надо считать комплексными, а взамен формулы (27) надо воспользоваться формулой

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1^* + x_2 y_2^* + x_3 y_3^* + x_4 y_4^*.$$

### Упражнения

1. Укажите формулу для длины вектора (26).
2. Проверьте, что радиусы-векторы точек  $(1; 1; 1; -1)$ ,  $(1; 1; -1; 1)$  и  $(0; 0; 1; 1)$  взаимно перпендикулярны; постройте четвертый (не нулевой) вектор, перпендикулярный этим трем.

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1

$$1. \frac{a+b}{2}. \quad 2. \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}. \quad 3. \overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

#### § 2

$$1. \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Из рисунка видно, что  $F_x = 1$ ,  $F_y = 3$ ,  $G_x = 3$ ,  $G_y = 1$ . Поэтому  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = 6$ .

3.  $\cos \theta = -1/2$ ,  $\theta = 120^\circ$ .

4.  $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ , поэтому  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 = 0$ .

5.  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{F} + \mathbf{G}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \mathbf{F} - \mathbf{G}$ , откуда

$$\begin{aligned} AC^2 + DB^2 &= (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) + (\mathbf{F} - \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{G}) = \\ &= 2\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} + 2\mathbf{G} \cdot \mathbf{G} = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2. \end{aligned}$$

6. Расположим оси координат, как на рис. 112. Тогда  $\overrightarrow{OA} = a\mathbf{i}$ ,  $\overrightarrow{OB} = a\mathbf{j}$ ,  $\overrightarrow{OC} = a\mathbf{k}$ . Длины всех диагоналей одинаковы; например,  $\overrightarrow{OD} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ ,  $OD = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a = 1,73a$ . Углы между диагоналями также одинаковы; например, угол между  $\overrightarrow{OD}$  и  $\overrightarrow{CE} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} - a\mathbf{k}$  вычисляется по формуле

$$\cos \vartheta = \frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CE}}{OD \cdot CE} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a \cdot \sqrt{3}a} = \frac{1}{3}, \text{ т. е. } \vartheta = 70^\circ 32'.$$

И проекции сторон на диагонали одинаковы; например, проекция стороны  $OA$

на диагональ  $OD$  равна  $\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}}{OD} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0,58a$ .

7. Обозначим точки, упомянутые в формулировке задачи, как на рис. 113. Ясно, что  $O$  имеет координаты  $(0; 0; 0)$ , а  $A(a; 0; 0)$ . Пусть  $B$  имеет координаты  $(x_B; y_B; 0)$ , а  $C(x_C; y_C; z_C)$ . Тогда  $OB = a$ ,  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ , т. е.  $x_B^2 + y_B^2 = a^2$ ,  $x_B a = \frac{a^2}{2}$ , откуда  $x_B = \frac{a}{2}$ ,  $y_B = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Далее,  $OC = a$ ,  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{a^2}{2}$ ,  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{a^2}{2}$ , т. е.  $x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 = a^2$ ,  $x_C a = \frac{a^2}{2}$ ,  $x_C \frac{a}{2} + y_C \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2}$ , откуда  $x_C = \frac{a}{2}$ ,  $y_C = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ ,  $z_C = \sqrt{\frac{2}{3}}a$ .



Так как точка  $D$ , в силу соображений симметрии, расположена точно под  $C$ , то обозначим ее координаты через  $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2\sqrt{3}}; z_D\right)$ . Приравнявая длины векторов  $\vec{DC}$  и  $\vec{DO}$ , получим  $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a - z_D\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + z_D^2$ ,

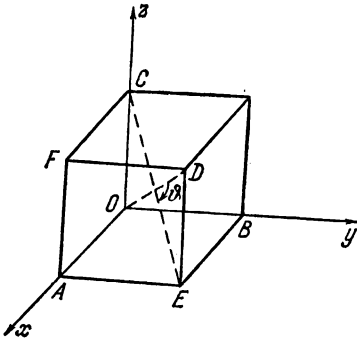


Рис. 112.

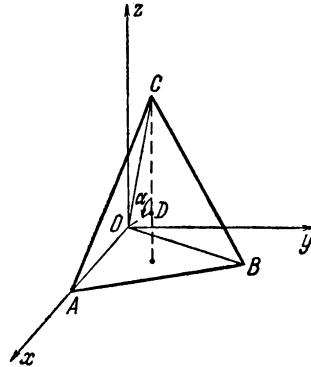


Рис. 113.

откуда  $z_D = \frac{a}{2\sqrt{6}} \left( = \frac{z_C}{4} \right)$ . Наконец, так как  $\vec{DC} \parallel \mathbf{k}$ , а  $\vec{DO} = -\frac{a}{2}\mathbf{i} - \frac{a}{2\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{a}{2\sqrt{6}}\mathbf{k}$ , то искомый угол можно найти по формуле

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{k} \cdot \vec{DO}}{|\mathbf{k}| \cdot |\vec{DO}|} = \frac{-\frac{a}{2\sqrt{6}}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{24}}} = -\frac{1}{3}, \text{ откуда } \alpha = 109^\circ 28'.$$

### § 3

Радиус-вектор точки винтовой линии равен  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j} + vt\mathbf{k}$ . Отсюда

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -R\omega \sin \omega t \mathbf{i} + R\omega \cos \omega t \mathbf{j} + v\mathbf{k}. \quad (31)$$

Так как этот вектор направлен по касательной, то остается найти его угол  $\vartheta$  с вектором  $\mathbf{k}$ :

$$\cos \vartheta = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{k}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| |\mathbf{k}|} = \frac{v}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2}}.$$

## § 4.

В силу (31)  $ds = |dr| = |-R\omega \sin \omega t \mathbf{i} + R\omega \cos \omega t \mathbf{j} + v\mathbf{k}| dt = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2} dt$ .  
Поэтому

$$\tau = \frac{dr}{ds} = \frac{-R\omega \sin \omega t \mathbf{i} + R\omega \cos \omega t \mathbf{j} + v\mathbf{k}}{\sqrt{R^2\omega^2 + v^2}},$$

$$k = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{R\omega^2}{R^2\omega^2 + v^2}.$$

## § 5

а)  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; д)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

В примерах б), в) и д) каждый квадрат переходит снова в квадрат. В примерах а) и г) из квадрата получится, вообще говоря, косоугольный параллелограмм. Если стороны квадрата параллельны осям координат в случае а) или имеют угловой коэффициент  $\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + 1}$  в случае г), то получится прямоугольник. Если из указанного положения повернуть квадрат на  $45^\circ$ , то получится ромб.

## § 6

1.  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ .

2. Перпендикулярность проверяется с помощью формулы (27), так как скалярное произведение любой пары векторов оказывается равным нулю. Если четвертый вектор имеет проекции  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , то из условия перпендикулярности получаем  $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ ,  $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ ,  $x_3 + x_4 = 0$ , откуда легко выводится, что  $x_3 = x_4 = 0$ ,  $x_1 + x_2 = 0$ . Таким образом, можно принять проекции четвертого вектора равными 1, -1, 0, 0.

## ГЛАВА X

### ТЕОРИЯ ПОЛЯ \*)

#### § 1. Введение

Говорят, что в пространстве задано *поле* некоторой величины, если в каждой точке пространства (или некоторой его *области*, т. е. части) определено значение этой величины. Например, при рассмотрении потока газа приходится исследовать температурное поле (в каждой точке температура имеет определенное значение), поле плотностей, поле давлений, поле скоростей и т. д. Поле может быть *скалярным* или *векторным* в зависимости от характера исследуемой величины: например, поля температур, давлений или плотностей являются скалярными, а поля скоростей или сил — векторными. Поле может быть *стационарным* (*установившимся*), если оно не меняется с течением времени в каждой точке пространства, или *нестационарным* (*неустановившимся*), если такое изменение имеет место.

Обозначим рассматриваемую (для определенности, скалярную) величину буквой  $u$  и введем в пространство декартову систему координат  $x, y, z$ . Заданием этих координат определяется точка в пространстве и тем самым соответствующее значение  $u = u(x, y, z)$ . (Если поле нестационарное, то  $u = u(x, y, z, t)$ , где  $t$  — время; однако при этом мы рассматриваем время не как равноправную четвертую координату, а скорее как некоторый дополнительный параметр, так что дальнейшие построения будут относиться к любому, но фиксированному моменту времени.) Таким образом, с формальной точки зрения стационарное поле — это просто функция трех переменных  $x, y, z$ . Однако надо иметь в виду, что координаты в пространстве можно ввести по-разному. При этом выражение  $u(x, y, z)$  будет изменяться; но в любой данной точке  $M$  значение  $u$ , конечно, не зависит от выбора системы координат. Поэтому часто говорят, что  $u$  представляет собой *функцию точки*,  $u = u(M)$ , так как задание точки  $M$  полностью определяет соответствующее значение  $u$ , т. е. значение

---

\*) Эта глава является непосредственным продолжением предыдущей и существенно опирается на материал §§ IX.1—2. Применяются также понятия кратного интеграла (§ IV.7) и функции Грина (§ VI.2).

величины  $u$  в точке  $M$ . Функция точки при рассмотрении поля является первичной по отношению к функции координат, так как поле имеет смысл и может быть исследовано без всяких систем координат.

Если исследуемая величина по своему смыслу задана в плоскости, то соответствующее поле называется *плоским*; такие поля получаются, например, при исследовании тепловых процессов в пластинке, толщиной которой мы пренебрегаем.

Если поле величины  $u$  пространственное, но в некоторой декартовой системе координат  $x, y, z$  эта величина оказывается не зависящей от  $z$ , то поле называется *плоскопараллельным*. В таком случае часто бывает возможным отвлечься от координаты  $z$ , рассматривая поле в плоскости  $x, y$  (т. е. рассматривать вместо плоскопараллельного поля — плоское) и помня о том, что во всех параллельных плоскостях поле имеет в точности тот же вид, т. е. на перпендикулярах к этим плоскостям все величины, характеризующие поле, постоянны.

### Упражнение

Пусть величина  $u$  имеет в некоторой декартовой системе координат выражение  $u = x^2 + y^2 + 2yz + z^2$ . Докажите, что эта величина образует плоскопараллельное поле.

У к а з а н и е. Поверните систему координат на  $45^\circ$  вокруг оси  $x$ .

## § 2. Скалярное поле и градиент

Будем для простоты считать, что в пространстве задана декартова система координат  $x, y, z$ , и рассмотрим стационарное скалярное поле  $u = u(x, y, z)$ . Пусть, кроме того, в пространстве дана некоторая точка  $M$ . Из нее можно выходить по всевозможным направлениям; на рис. 114 показано одно из таких направлений  $l$ . Производной от  $u$  по направлению  $l$  называется скорость изменения поля в этом направлении в расчете на единицу длины:

$$\frac{du}{dl} = \lim_{N \rightarrow M} \frac{u(N) - u(M)}{MN} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} \Big|_l.$$

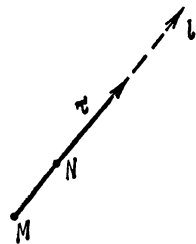


Рис. 114.

Рассуждая так же, как при выводе формулы (IV.5), получим

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dl}.$$

Правую часть удобно представить в виде скалярного произведения двух векторов (см. формулу (IX.5))

$$\frac{du}{dl} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dl} \mathbf{i} + \frac{dy}{dl} \mathbf{j} + \frac{dz}{dl} \mathbf{k} \right).$$

Первый из них называется *градиентом* поля  $u$  и обозначается

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}; \quad (1)$$

его физический смысл будет показан несколько позже. Второй вектор

$$\frac{dx}{dl} \mathbf{i} + \frac{dy}{dl} \mathbf{j} + \frac{dz}{dl} \mathbf{k} = \frac{d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \boldsymbol{\tau}$$

— это единичный вектор направления  $l$  (см. § IX.4). Таким образом,

$$\frac{du}{dl} = \text{grad } u \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2)$$

Первый множитель в правой части, при заданном поле  $u$ , зависит лишь от выбора точки  $M$ ; второй множитель зависит лишь от направления  $l$ .

Так как скалярное произведение какого-либо вектора на единичный вектор равно просто проекции первого вектора на второй, то формулу (2) можно переписать в виде

$$\frac{du}{dl} = \text{grad}_l u \quad (3)$$

(это обозначение для проекции градиента на направление  $l$ ).

Пусть заданы поле  $u$  и точка  $M$ ; поставим вопрос: по какому направлению  $l$  производная  $du/dl$  самая большая? Согласно формуле (3) этот вопрос сводится к следующему: на какое направление проекция вектора  $\text{grad } u$  самая большая? Очевидно, что любой вектор при проектировании на различные направления дает самую большую проекцию, равную его длине, при проектировании на его собственное направление. Таким образом, вектор  $\text{grad } u$  в точке  $M$  указывает в сторону наибо́льшей скорости, отнесенная к единице длины, равна  $|\text{grad } u|$ ; чем поле меняется быстрее, тем  $\text{grad } u$  длиннее. На рис. 115 показаны векторы градиента температуры в отдельных точках проводника тепла, подогреваемого изнутри (из заштрихованной зоны) и охлаждаемого снаружи. Градиент температуры направлен «к песчке».

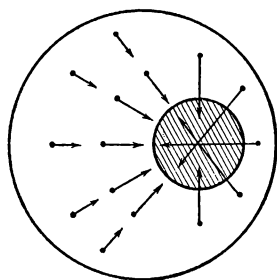


Рис. 115.

Полученный физический смысл градиента показывает также, что градиент инвариантно связан с рассматриваемым полем, т. е. остается неизменным (инвариантным) при замене декартовых осей (этого не было видно из его определения (1), данного в «неинвариантной» форме, «привязанной» к какой-то одной системе координат). Более того, если задано поле  $u$ , то в каждой точке пространства можно найти направление и скорость наибо́льшей скорости возрастания поля  $u$ ;

так можно найти вектор  $\text{grad } u$ , не прибегая к координатам и к заданию  $u(x, y, z)$ . Итак, градиент скалярного поля образует вполне определенное векторное поле.

Аналогичное требование инвариантности ставится для всех основных понятий теории поля. Как мы говорили в § IX.5, при замене осей декартовой системы координат хотя векторы и остаются неизменными, инвариантными, но их проекции меняются. Таким образом, если какое-либо понятие теории векторного поля сформулировано с помощью координат и проекций этого поля, то это понятие должно удовлетворять требованию инвариантности относительно изменения этих координат и проекций при повороте осей координат. Так будет, в частности, если формулировка выражена в терминах скаляров, векторов и тензоров (§ IX.5).

Отметим, что производные  $u'_x$ ,  $u'_y$  и  $u'_z$  также являются производными по направлению: например,  $u'_x$  — это производная по направлению оси  $x$ .

Градиент поля  $u(x, y, z)$  тесно связан с *поверхностями уровня* этого поля, т. е. поверхностями, на которых поле имеет постоянное значение,  $u(x, y, z) = \text{const}$ ; в зависимости от физического смысла поля они могут называться изотермическими, изобарическими и т. п. поверхностями. Именно, в каждой точке  $M$  градиент поля нормален (т. е. перпендикулярен касательной плоскости) поверхности уровня, проходящей через  $M$ . Действительно (рис. 116), если  $\Delta C$  мало, то вблизи  $M$  поверхности  $u = C$  и  $u = C + \Delta C$  можно считать почти плоскими и

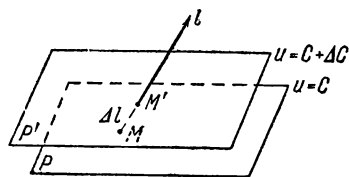


Рис. 116.

$$\frac{du}{dl} \approx \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\Delta C}{\Delta l}, \quad (4)$$

где  $\Delta l$  — расстояние между поверхностями по направлению  $l$ . Но ясно, что  $\Delta l$  будет самым малым, а потому производная  $\frac{du}{dl}$  — самой большой, если  $l$  направлено по нормали к поверхности. Отсюда и следует наше утверждение.

Все понятия, введенные для пространственного поля, переносятся с соответствующими упрощениями на плоские поля (см. § 1). Так, градиент поля  $u(x, y)$ , вычисляемый по формуле  $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j}$ , представляет собой вектор, лежащий в плоскости  $x, y$ . В каждой точке градиент поля нормален *линии уровня* поля, т. е. линии  $u(x, y) = \text{const}$ , проходящей через эту точку (рис. 117). При этом из формулы (4) видно, что модуль градиента обратно пропорционален расстоянию между линиями уровня. Там, где линии уровня сближа-

ются, градиент увеличивается (сравните, например, градиент поля в точках  $A$  и  $B$  на рис. 117).

Вычислим в качестве примера градиент центрально-симметричного поля  $u=f(r)$ , где  $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ . В этом случае значение  $u$  зависит только от расстояния точки до начала координат, а потому поверхностями уровня служат сферы с центром в начале координат. Если взять две сферы, радиусы которых отличаются на  $dr$ , то значения функции  $f$  на них будут отличаться на  $df$ . Поэтому скорость изменения поля поперек поверхностей уровня (т. е. вдоль радиусов) равна  $\frac{df}{dr}$ , а потому

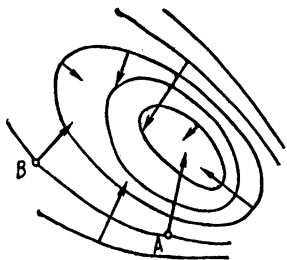


Рис. 117.

$$\text{grad } u(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{df}{dr} \mathbf{r}^0. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат в любую текущую точку  $(x; y; z)$ ;  $r = |\mathbf{r}|$ ;  $\mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$  — вектор единичной длины, направленный вдоль  $\mathbf{r}$ .

Получим формулу (5) другим способом, опираясь на выражение градиента в координатной форме (1). Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{df}{dr} \frac{x}{r}.$$

Аналогично  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dr} \frac{y}{r}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{df}{dr} \frac{z}{r}$ , откуда

$$\text{grad } u = \frac{df}{dr} \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{df}{dr} \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{df}{dr} \frac{z}{r} \mathbf{k} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{1}{r} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{df}{dr} \frac{1}{r} \mathbf{r}.$$

Так как  $\frac{1}{r} \frac{df}{dr}$  — скаляр, то мы видим, что при  $\frac{df}{dr} > 0$  векторы  $\text{grad } u$  всюду продолжают соответствующие векторы  $\mathbf{r}$  (как колючки у свернувшегося ежа), а если  $\frac{df}{dr} < 0$ , то векторы  $\text{grad } u$  всюду обращены к началу координат.

### Упражнения

1. Найдите производную от поля  $u = xy - z^2$  в точке  $M(2; 1; -3)$  по направлению вектора  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ .

2. Найдите градиент поля  $u = \frac{k_1}{r_1} + \frac{k_2}{r_2}$ , где  $k_1, k_2 = \text{const}$ , а  $r_1, r_2$  — расстояния от некоторых фиксированных точек  $M_1, M_2$ .

### § 3. Потенциальная энергия и сила

Предположим, что на тело\*), произвольно перемещающееся в пространстве, действует сила  $\mathbf{F}$ , зависящая лишь от положения тела. Другими словами, в каждой точке  $M$  пространства определен соответствующий вектор силы  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M)$ , который образует, таким образом, векторное силовое поле. При перемещении тела эта сила производит работу, которая тратится на изменение кинетической энергии тела или на преодоление сопротивления каких-то внешних сил.

Легко подсчитать работу, которую производит сила  $\mathbf{F}$  на заданном пути тела. В самом деле, при бесконечно малом перемещении  $d\mathbf{r}$  силу можно считать постоянной и потому соответствующая работа равна (см. § IX.2) скалярному произведению

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Суммируя такие элементарные работы, получаем общую работу, производимую силой  $\mathbf{F}$ , когда тело проходит некоторый путь  $(L)$ ,

$$A = \int_{(L)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6)$$

Такой интеграл, взятый вдоль линии  $(L)$ , называется *линейным*. Чтобы его вычислить, должны быть заданы не только поле  $\mathbf{F}$  и линия  $(L)$ , но и направление, в котором эта линия проходит; как говорят, линия  $(L)$  должна быть *ориентирована*. Если линия  $(L)$  разомкнута, то для ее ориентации можно просто указать, какая из двух граничных точек считается ее началом, а какая — концом, т. е. указать пределы интегрирования. Эта ориентация существенна, так как если в том же поле ту же линию проходить в противоположном направлении, то  $d\mathbf{r}$  заменится на  $-d\mathbf{r}$ , в результате чего  $A$  заменится на  $-A$ , работа изменит знак.

Выражение (6) линейного интеграла можно записать в других полезных формах. Если вспомнить, что  $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds$ , где  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной к  $(L)$ , а  $ds$  — дифференциал длины дуги, то получим

$$A = \int_{(L)} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_{(L)} F_{\tau} ds,$$

где  $F_{\tau}$  означает проекцию вектора  $\mathbf{F}$  на  $\boldsymbol{\tau}$ , т. е. «тангенциальную» проекцию вектора  $\mathbf{F}$ . С другой стороны, если написать в декартовых координатах  $x, y, z$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

---

\*) Подразумевается, что размеры тела очень малы; такие тела иногда называют материальными точками.



откуда  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ , и вспомнить выражение (IX.5) для скалярного произведения в декартовых проекциях, получим

$$A = \int_{(L)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Работу силы можно выразить и как интеграл по времени; если задано движение тела, т. е. задана функция  $\mathbf{r}(t)$ , то и сила, действующая на тело, оказывается сложной функцией времени

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] = \mathbf{F}(t).$$

Работу силы за время  $dt$  можно выразить через скорость  $\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ; так как  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ , из формулы (6) получаем

$$A = \int_{t_n}^{t_k} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt,$$

где  $t_n$  и  $t_k$  — моменты начала и конца движения.

Таким образом, величина  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  — скалярное произведение силы на скорость — равна работе, отнесенной к единице времени; как известно, она носит специальное название «мощность».

Мы рассматриваем в этом параграфе силу, зависящую только от положения тела. Зависимость силы, действующей на тело, от времени является результатом перемещения тела. В этом случае можно утверждать, что работа  $A$  при перемещении по данному пути в действительности не зависит от скорости тела, не зависит от вида функций  $\mathbf{v}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$ , а зависит только от траектории, по которой перемещается тело, несмотря на то, что  $\mathbf{v}(t)$  в явном виде входит множителем в подынтегральное выражение для  $A$ . Дело в том, что при изменении функции  $\mathbf{v}(t)$  меняется и  $\mathbf{r}(t)$ ; следовательно, меняется и вид  $\mathbf{F}(t)$  при данном  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ ; меняются и пределы интегрирования  $t_n$  и  $t_k$ , отвечающие заданным начальной и конечной точкам пути,  $\mathbf{r}(t_n) = \mathbf{r}_n$ ,  $\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_k$ .

Для целого ряда физических силовых полей  $\mathbf{F}$  оказывается, что если тело обходит замкнутый контур, то суммарная работа силы  $\mathbf{F}$  при этом равняется нулю; другими словами, если на одном участке контура сила производит некоторую работу, то на остальной его части тело движется против действия силы и возвращает накопленную энергию полю. Так ведут себя гравитационное поле (поле тяготения), электростатическое и многие другие поля. Математически это означает, что

$$\oint_{(L)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (7)$$

для любой замкнутой линии  $(L)$ , где под  $\oint$  понимается линейный интеграл по замкнутому контуру. Такой интеграл называется еще *циркуля-*

ций; итак, мы предполагаем, что циркуляция силы  $\mathbf{F}$  по любому замкнутому контуру равна нулю.

Предположение (7) можно равносильным образом сформулировать так: работа (6) силы  $\mathbf{F}$  по любому разомкнутому контуру ( $L$ ) зависит только от положения начала и конца этой линии, но не зависит от вида самой линии. В самом деле, пусть условие (7) выполнено, а линии ( $L_1$ ) и ( $L_2$ ) имеют общие начало  $M$  и конец  $N$ , и пусть работа силы  $\mathbf{F}$  вдоль ( $L_1$ ) равна  $A_1$ , а вдоль ( $L_2$ ) равна  $A_2$ . Образует замкнутый контур, пройдя от  $M$  к  $N$  по ( $L_1$ ), а затем от  $N$  к  $M$  по ( $L_2$ ). Тогда в силу сказанного выше работа силы  $\mathbf{F}$  по такому контуру равна  $A_1 - A_2$ . С другой стороны, в силу условия (7) получаем  $A_1 - A_2 = 0$ , откуда  $A_1 = A_2$ . Мы предоставляем читателю доказать аналогичным образом, что, обратно, из последнего равенства вытекает условие (7).

В предположении (7) можно ввести понятие потенциальной энергии тела, т. е. энергии, зависящей от положения тела (это понятие для одномерного движения было подробно рассмотрено в ВМ, гл. VI). Именно, значение потенциальной энергии  $U$  в любой точке  $M$ , по определению, равно работе, которую совершает сила  $\mathbf{F}$ , когда тело перемещается из точки  $M$  в некоторую фиксированную точку  $M_0$ . (В конкретных задачах точка  $M_0$  часто выбирается на бесконечности, так что речь идет о работе, совершаемой, когда тело удаляется на бесконечность; для этого указанная работа должна быть конечной и не зависеть от способа такого удаления.) Другими словами,

$$U(M) = \int_{M \rightarrow M_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (8)$$

При этом выбор конкретного пути, ведущего из  $M$  в  $M_0$ , несущественен.

С помощью потенциальной энергии легко выразить работу, совершаемую силой  $\mathbf{F}$ , когда тело перемещается из любой точки  $M_1$  в любую другую точку  $M_2$ . Именно, если при таком перемещении пройти через  $M_0$  (что возможно, так как выбор пути не сказывается на работе) и рассмотреть работу на этапах от  $M_1$  до  $M_0$  и от  $M_0$  до  $M_2$ , то мы получаем, что рассматриваемая работа равна  $U(M_1) - U(M_2)$ . Итак, работа, совершаемая полем, равна уменьшению потенциальной энергии тела.

При определении потенциальной энергии имеется некоторый произвол в выборе точки  $M_0$ , т. е. точки, в которой потенциальная энергия полагается равной нулю. Посмотрим, что получится, если заменить  $M_0$  на какую-нибудь другую точку  $\tilde{M}_0$ . Так как работа  $\tilde{U}(M)$ , совершаемая при перемещении из  $M$  в  $\tilde{M}_0$ , равна работе  $U(M)$ , совершаемой при перемещении из  $M$  в  $M_0$ , плюс работа, совершаемая при перемещении из  $M_0$  в  $\tilde{M}_0$ , то  $\tilde{U}(M)$  отличается от  $U(M)$  на постоянное слагаемое. Итак, потенциальная энергия определена

с точностью до постоянного слагаемого. Однако этот произвол не сказывается на разности значений потенциальной энергии в двух точках, т. е. он пропадает при подсчете работы, совершаемой при перемещении из одной точки в другую.

Мы доказали существование потенциальной энергии в силовом поле, т. е. потенциальность этого поля, исходя из условия (7) равенства нулю работы по любому замкнутому контуру. Легко проверить, что и обратно, если потенциальная энергия существует, то при подсчете работы, совершаемой полем при перемещении тела из точки  $M$  в точку  $N$ , существенно только положение этих точек, но сам путь, по которому перемещается тело, роли не играет, так как эта работа равна  $U(M) - U(N)$ . А мы видели, что это равносильно условию (7).

Формула (8) определяет потенциальную энергию, если задано силовое поле. Получим обратную формулу, выражающую поле через потенциальную энергию. Допустим, что тело совершило бесконечно малое перемещение  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ . Тогда сила  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$  совершит элементарную работу

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

С другой стороны, эта работа равна

$$dA = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right).$$

Сравнивая обе формулы, находим

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

откуда

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = -\text{grad } U \quad (9)$$

(см. § 2).

Пусть частица массы  $m$  движется под действием заданного поля сил  $\mathbf{F} = -\text{grad } U$ . Тогда согласно § IX.4 приращение кинетической энергии равно

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds = - \int_{s_1}^{s_2} \frac{dU}{ds} ds = U_1 - U_2.$$

Значит,

$$\frac{mv_2^2}{2} + U_2 = \frac{mv_1^2}{2} + U_1,$$

т. е. величина *полной энергии* частицы

$$E = \frac{mv^2}{2} + U$$

в процессе движения остается постоянной. Как видим, полная энергия представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий. (Для одномерного движения аналогичное рассмотрение приведено в ВМ, § VI.8.)

Рассмотрим в качестве примера притяжение по закону Ньютона, т. е. случай, когда на тело действует сила, направленная к некоторой фиксированной точке  $O$  (за которую мы примем начало координат) и обратно пропорциональная квадрату расстояния от этой точки. Так как вектор  $-\frac{\mathbf{r}}{r}$  направлен к началу координат и имеет единичную длину, то рассматриваемое силовое поле имеет вид

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (10)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности. В силу центральной симметрии силы легко убедиться\*), что и потенциальная энергия имеет вид  $U = f(r)$ . Но тогда в силу формул (9) и (5) получаем

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U = -\frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Сравнивая эту формулу с (10), получаем

$$\frac{df}{dr} = \frac{k}{r^2}, \quad \text{откуда} \quad U = f(r) = -\frac{k}{r} \quad (11)$$

с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Таким образом, ньютоново силовое поле потенциально, и его *потенциал* определяется по формуле (11). Эта формула дает потенциал, нормированный (*нормировкой* называется выбор из равноправных объектов какого-то одного) условием обращения в нуль на бесконечности.

Иногда возникает задача о построении *векторных линий* силового поля  $\mathbf{F}$  или, как говорят короче, *силовых линий* поля  $\mathbf{F}$ . Так называются линии, идущие в каждой своей точке вдоль поля, т. е. касающиеся в каждой своей точке вектора поля  $\mathbf{F}$ . Задача о построении таких линий легко сводится к задаче об интегрировании системы дифференциальных уравнений: надо ввести в пространстве декартовы координаты  $x, y, z$ , после чего записать условие параллельности векторов

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

и

$$\mathbf{F} = F_x(x, y, z) \mathbf{i} + F_y(x, y, z) \mathbf{j} + F_z(x, y, z) \mathbf{k}$$

(см. конец § IX.1):

$$\frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}. \quad (12)$$

---

\*) Рассмотрите перемещение тела по сфере с центром в точке  $O$ , когда  $r = \text{const}$ . Работа силы при таком перемещении равна нулю.

Здесь мы пользуемся тем, что вектор  $d\mathbf{r}$  идет как раз по касательной к линии (см. § IX. 4). Уравнения (12) образуют систему дифференциальных уравнений векторных линий поля  $\mathbf{F}$ , записанную в «симметричной форме», в которой все три координаты выступают как равноправные. Отсюда легко выразить  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{dz}{dx}$  и перейти к системе из двух дифференциальных уравнений относительно  $y(x)$  и  $z(x)$ , записанной в обычной форме (§ VIII. 2).

Как ясно из геометрического смысла (и подробно разбиралось в теории дифференциальных уравнений), через каждую точку проходит ровно одна силовая линия; таким образом, все пространство (или часть его, в которой задано силовое поле) заполняется силовыми линиями.

Для ньютонова поля силовые линии суть лучи, выходящие из центра притяжения, т. е. из точки  $O$ . Они не пересекаются нигде, кроме самой точки  $O$ , которая является особой точкой системы дифференциальных уравнений (ср. конец § 2).

В § 2 мы видели, что в каждой точке вектор  $\text{grad } U$  нормален к поверхности  $U = \text{const}$ , проходящей через эту точку. Поэтому из формулы (9) следует, что силовые линии в каждой своей точке нормальны к эквипотенциальным поверхностям. Это, впрочем, ясно и из того, что наибольшая работа на единицу длины пройденного пути производится, если тело перемещается нормально к поверхностям равного потенциала, а с другой стороны, так будет, если тело перемещается вдоль силовых линий.

#### Упражнение

Пусть плоское силовое поле имеет потенциал  $U = \alpha xy$  ( $\alpha = \text{const}$ ). Найдите само поле и его силовые линии.

### § 4. Поле скорости и поток

Пусть рассматривается стационарное течение газа или жидкости. В любой точке  $M$  скорость частицы газа имеет вполне определенное значение  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M)$ , т. е. мы имеем векторное поле скорости.

Рассмотрим траекторию  $(L)$  какой-либо частицы или, как говорят, *линию тока*. Хорошо известно (см., например, § IX.4), что в каждой точке  $(L)$  вектор скорости  $\mathbf{v}$  касателен к  $(L)$ . Значит, для поля скорости векторными линиями (§ 3) служат линии тока. Дифференциальные уравнения для них, аналогичные (12), легко получить непосредственно, если из равенств

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

выразить  $dt$  и приравнять полученные результаты.

Перейдем теперь к очень важному для дальнейшего понятию потока вектора через поверхность. Допустим, что в пространстве

мысленно выбрана некоторая замкнутая или незамкнутая «ориентированная» поверхность ( $\sigma$ ). Поверхность называется *ориентированной*, если указано, какая ее сторона считается наружной, а какая внутренней. Такую ориентацию можно осуществить двумя способами (рис. 118).

Подсчитаем объем газа, проносимого через ( $\sigma$ ) за единицу времени изнутри наружу. Найдем сначала объем, проносимый за малое время  $dt$  через элемент поверхности ( $d\sigma$ ) (рис. 119). Это объем

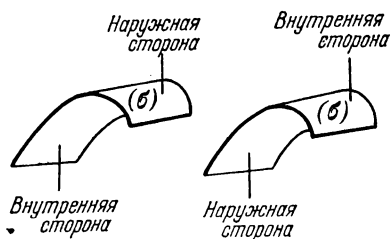


Рис. 118.

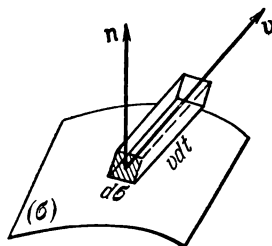


Рис. 119.

косого цилиндрика с основанием  $d\sigma$  и образующей  $v dt$ . Высота цилиндрика равна проекции образующей на перпендикуляр к основанию, т. е. равна  $v_n dt$ , где  $v_n$  — проекция вектора скорости  $\mathbf{v}$  на единичный вектор  $\mathbf{n}$  внешней (т. е. направленной во внешнюю сторону) нормали к поверхности. Таким образом, объем цилиндрика равен  $v_n dt d\sigma$ .

Если за время  $dt$  через элемент поверхности ( $d\sigma$ ) проходит объем  $v_n dt d\sigma$ , то за единицу времени через тот же элемент пройдет объем  $v_n d\sigma$ . Суммируя эти объемы для всех элементов, получим, что через всю поверхность ( $\sigma$ ) за единицу времени проходит объем

$$Q = \int_{(\sigma)} v_n d\sigma \quad (13)$$

изнутри наружу. Такой интеграл от нормальной проекции называется *поток вектора  $\mathbf{v}$  через поверхность ( $\sigma$ )* \*).

В гидродинамике наряду с полем скорости  $\mathbf{v}$  часто пользуются полем «массовой скорости»  $\rho \mathbf{v}$ , где  $\rho$  — плотность газа в данной точке. Рассуждая в точности, как выше, легко доказать, что поток

$$\int_{(\sigma)} \rho v_n d\sigma$$

этого вектора через любую ориентированную поверхность ( $\sigma$ ) равен

\*) Интеграл (13) — это частный случай интеграла по поверхности, о котором мы говорили в § IV.7.

массе (а не объему, как раньше!) газа, проносимого за единицу времени через  $(\sigma)$  изнутри наружу.

Поток, очевидно, есть величина скалярная. Он существенно зависит от ориентации поверхности  $(\sigma)$ : если изменить эту ориентацию на противоположную, то в формуле (13)  $v_n$ , а с ней и  $Q$  поменяют знак. (Впрочем, это ясно и из указанного нами смысла интеграла (13).) Если поверхность  $(\sigma)$  расположена так, что линии тока пересекают ее всюду изнутри наружу, то  $Q > 0$ , а если всюду снаружи внутрь, то  $Q < 0$ ; если же линии тока частично пересекают  $(\sigma)$  изнутри наружу, а частично снаружи внутрь, то поток равен сумме положительной и отрицательной величин (каких?)



Рис. 120.

и может оказаться положительным, отрицательным или равным нулю. Всегда равен нулю поток вектора скорости через поверхность, целиком заполненную линиями тока (т. е. через каждую точку которой проходит линия тока, целиком лежащая на этой поверхности)\*).

Поток (13) иногда записывают в другой форме. Если дана ориентированная плоская площадка  $(\sigma)$ , то ей принято ставить в соответствие вектор  $\sigma$ , направленный перпендикулярно  $(\sigma)$  от внутренней стороны к наружной (рис. 120), причем модуль этого вектора берется равным площади  $(\sigma)$ . Так поступают в случае, если существенны только площадь  $(\sigma)$  и ее направление в пространстве, но конкретная форма  $(\sigma)$  (т. е. будет ли это круг, или прямоугольник и т. д.) не играет роли. При таком обозначении вектор  $d\sigma$  пойдет по  $n$  (см. рис. 119) и можно написать  $v_n d\sigma = v \cdot d\sigma$  (см. формулу (IX.3)). Таким образом,

$$Q = \int_{(\sigma)} v_n d\sigma = \int_{(\sigma)} v \cdot d\sigma. \quad (14)$$

Поток вектора  $v$  через поверхность  $(\sigma)$  иначе называется количеством векторных линий (т. е. линий тока), пересекающих  $(\sigma)$  изнутри наружу. Это название условное, так как указанное количество имеет размерность и, как правило, получается дробным, но из-за своей наглядности широко применяется. Надо иметь в виду, что это «количество» понимается в алгебраическом смысле, так что если часть  $(\sigma)$  пересекается линиями изнутри наружу, а другая часть — снаружи внутрь, то оно может быть любого знака (и даже равным нулю) в зависимости от того, какую часть пересекает больше линий.

Приведем простые примеры подсчета потока. Пусть сначала поле  $v$  постоянное (однородное, одинаковое во всех точках), а

\*) Говоря наглядно, это — поверхность, вдоль которой скользит газ при своем движении.

поверхность  $(\sigma)$  плоская. Тогда из формулы (14) вытекает, что

$$Q = v_n \sigma = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (15)$$

Пусть поле  $\mathbf{v}$  пропорционально радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ , т. е.  $\mathbf{v} = k\mathbf{r}$  ( $k$ —коэффициент пропорциональности), а  $(\sigma)$ —сфера с центром в начале координат, ориентированная естественным образом (к началу координат обращена ее внутренняя сторона). Тогда  $v_n = v_r = kr$ , и так как  $r = \text{const}$  на  $(\sigma)$ , то

$$Q = \int_{(\sigma)} kr d\sigma = kr \int_{(\sigma)} d\sigma = kr\sigma = 4\pi kr^3.$$

Рассмотрим, наконец, общее центрально-симметричное поле в пространстве, определенное формулой

$$\mathbf{v} = f(r) \mathbf{r}^0 \quad \left( \mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (16)$$

где  $\mathbf{r}$ —радиус-вектор текущей точки, а  $r$ —его длина, так что  $\mathbf{r}^0$ —это единичный вектор, идущий по радиусу-вектору и указывающий направление поля. Тогда поток поля через сферу радиуса  $r$  с центром в начале координат равен

$$Q = Q(r) = \int v_n d\sigma = \int f(r) d\sigma = f(r) 4\pi r^2. \quad (17)$$

Из формулы (15) вытекает интересное следствие. Рассмотрим некоторый замкнутый многогранник (рис. 121); ориентируем его грани так, чтобы одна из граней (на рис. 121  $(\sigma)$ ) была «закрывающей» для совокупности остальных граней. Тогда ясно, что если этот многогранник мысленно помещен в однородное поле скорости  $\mathbf{v}$ , то поток через  $(\sigma)$  равен алгебраической сумме потоков через остальные грани:  $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_s$ . Отсюда

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3),$$

и в силу произвольности  $\mathbf{v}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3. \quad (18)$$

Итак, вектор замыкающей площадки равен сумме векторов «составляющих» площадок, т. е. площадки можно складывать, как векторы. Мы существенно пользовались тем, что площадки изображаются векторами именно так, как показано на рис. 120, что и является одним из важных доводов в пользу разумности такого изображения.

К этому вопросу возможен иной подход. Ориентируем все грани многогранника рис. 121 «естественным» образом, так, чтобы векторы  $\boldsymbol{\sigma}_i$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  смотрели наружу. Тогда в формулу (18) вместо  $\boldsymbol{\sigma}_i$  надо

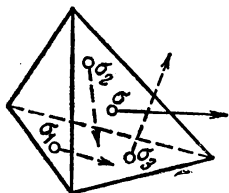


Рис. 121.



подставить  $-\sigma_i$  и, перенеся все слагаемые в левую часть, получим  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma = 0$ . Это соотношение вполне аналогично хорошо известному из векторной алгебры правилу о равенстве нулю суммы векторов, образующих замкнутый многоугольник (см. § IX.1). Этим также подтверждается закономерность изображения площадок векторами.

В пределе из многоугольника можно получить любую замкнутую линию  $(L)$ , а из многогранника — любую замкнутую поверхность  $(\sigma)$ ; таким образом, мы приходим к равенствам  $\oint_{(L)} dr = 0, \oint_{(\sigma)} d\sigma = 0$  (первое очевидно), где кружок у знака интеграла (его выписывать необязательно) подчеркивает, что интеграл берется по замкнутой линии или поверхности.

### Упражнение

Рассмотрите общее осесимметричное поле в пространстве, определенное формулой  $\mathbf{v} = f(|\rho|, z) \rho^0$  ( $\rho^0 = \frac{\rho}{|\rho|}$ ), где  $\rho$  — вектор, идущий из точки  $(0; 0; z)$  в точку  $(x; y; z)$ . Чему равен поток этого поля через поверхность прямого кругового цилиндра радиуса  $|\rho|$  с осью  $z$ ? Чему равен этот поток в частном случае плоскопараллельного поля?

## § 5. Электростатическое поле, его потенциал и поток

Хорошо известно, что заряд, помещенный в пространство, порождает электрическое поле, которое можно проанализировать на основе закона Кулона. Мы будем для простоты считать пространство пустым (вакуум) и рассмотрим сначала поле от заряда  $q$ , помещенного в начале координат  $O$ . Для исследования поля можно в произвольную точку  $M$  поместить пробный единичный заряд и посмотреть, с какой силой поле на него действует; эта сила  $E$  называется напряженностью электрического поля. Так как в разных точках  $M$  напряженность  $E$  различная, то мы имеем векторное поле  $E = E(M)$ , представляющее собой, по существу, частный случай рассмотренного в § 3 силового поля (если все время иметь в виду, что речь идет о воздействии на пробный единичный заряд). Закон Кулона по математической формулировке аналогичен закону Ньютона, рассмотренному в § 3. Для точечного заряда  $q$  он имеет вид

$$E = \frac{kq}{r^2} r^0 = \frac{kq}{r^3} r$$

( $r^0 = \frac{r}{r}$  — единичный вектор, идущий вдоль радиуса-вектора); эта формула несколько отличается от (10), так как сила должна быть прямо пропорциональна  $q$  и, кроме того, при  $q > 0$  пробный единичный положительный заряд не притягивается, а отталкивается. Коэффициент  $k$  в последней формуле зависит от выбранной системы

единиц, и мы для простоты положим его равным единице\*), т. е. будем писать

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0 = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (19)$$

В § 3 мы видели, что такое поле имеет потенциал

$$\varphi(M) = \frac{q}{r} = \frac{q}{OM},$$

который связан с полем  $\mathbf{E}$  соотношением

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (20)$$

и нормирован условием обращения в нуль на бесконечности. В силу однородности пространства такой же заряд  $q$ , помещенный в точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , порождает потенциал (будем писать  $\varphi(\mathbf{r})$  вместо  $\varphi(M)$ ), считая  $\mathbf{r}$  радиусом-вектором точки  $M$ )

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор точки  $M_0$  \*\*).

Пусть теперь в пространстве имеется система зарядов; тогда электрические поля  $\mathbf{E}$ , отвечающие этим зарядам, складываются друг с другом. (Этот важный факт, означающий независимость действия отдельных зарядов, установлен экспериментально.) Но из формулы (20) легко проверить, что и соответствующие потенциалы складываются друг с другом. В самом деле, если  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , где

$$\mathbf{E}_l = -\text{grad } \varphi_l = -\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z} \mathbf{k}\right) \quad (l = 1, 2),$$

то, складывая одноименные проекции, получаем

$$\mathbf{E} = -\left[\frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z} \mathbf{k}\right] = -\text{grad } (\varphi_1 + \varphi_2),$$

т. е.  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  служит потенциалом поля  $\mathbf{E}$ .

Мы видим, что электрическое поле, образованное любой системой покоящихся зарядов, обладает потенциалом и, кроме того, при изучении зависимости потенциала от поля имеет место принцип суперпозиции (закон линейности, см. § VI.2). Это дает возможность по общему методу построить потенциал электрического поля, получающегося, когда заряды распределены в пространстве с некоторой переменной плотностью  $\rho$ . Если плотность имеет вид пространственной дельта-функции (см. § VI.3), т. е. если

$$\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (22)$$

то соответствующий заряд — это единичный заряд, сосредоточенный в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$ . Поэтому потенциал, отвечающий

\*) Это значит, что  $\mathbf{E}$  и  $q$  выражены в электростатической системе единиц CGSE.

\*\*) Не следует путать радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$  с единичным вектором  $\mathbf{r}^0$ .

плотности (22), — а он представляет собой функцию Грина в данной задаче, — вычисляется по формуле (21) с  $q=1$ , т. е.

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Здесь  $\mathbf{r}_0$  определяет точку воздействия, а  $\mathbf{r}$  — точку наблюдения.

Зная функцию Грина, легко по общему методу § VI.2 получить выражение для потенциала в случае произвольной плотности  $\rho(\mathbf{r})$ :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{(\Omega_0)} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}_0) d\Omega_0 = \int_{(\Omega_0)} \frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\Omega_0,$$

где интегрирование производится по всей области  $(\Omega_0)$ , занятой зарядом. В координатной форме то же можно написать так:

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{(\Omega_0)} \frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} dx_0 dy_0 dz_0. \quad (23)$$

Примеры вычисления потенциала будут рассмотрены ниже, в § 6.

Рассмотрим теперь поток вектора  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность  $(\sigma)$ , ориентированную «естественным» образом, т. е. так, что ее внутренняя сторона смотрит в конечную область, ограниченную  $(\sigma)$ , а внешняя сторона смотрит в бесконечность. В § 4 мы говорили, что такой поток иначе называется количеством векторных линий (т. е. для поля  $\mathbf{E}$  — «электрических силовых линий»), пересекающих  $(\sigma)$  изнутри наружу. Так как это количество понимается в алгебраическом смысле, т. е. как разность между числом выходящих линий и числом входящих, то его же можно понять как число линий, начинающихся внутри  $(\sigma)$ .

В самом простом случае, когда  $\mathbf{E}$  порождается точечным зарядом  $q$ , расположенным в начале координат, а  $(\sigma)$  представляет собой сферу с центром в начале и радиусом  $R$ , поток найти совсем просто. В самом деле, на  $(\sigma)$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{R^2} \mathbf{r}^0 = \frac{q}{R^2} \mathbf{n},$$

так как на сфере  $\mathbf{r}^0$  совпадает с единичным вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$ . Но тогда на сфере  $E_n = \frac{q}{R^2} = \text{const}$  и, по определению (ср. формулу (13)), поток равен

$$\int_{(\sigma)} E_n d\sigma = \int_{(\sigma)} \frac{q}{R^2} d\sigma = \frac{q}{R^2} \int_{(\sigma)} d\sigma = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q. \quad (24)$$

Итак, рассматриваемый поток не зависит от радиуса  $R$  и прямо пропорционален величине заряда.

Аналогично (24) доказывается, что поток вектора  $\mathbf{E}$  через часть сферы с центром в точечном заряде (рис. 122) равен  $\omega q$ , где  $\omega$  —

соответствующий «телесный угол», т. е. соответствующая площадь на сфере единичного радиуса. Но отсюда сразу следует, что для поля, порожденного точечным зарядом, электрические силовые линии не могут начинаться или заканчиваться ни в каком объеме, не содержащем этого заряда (т. е. они начинаются или заканчиваются только на этом заряде). В самом деле, выбрав малый объем ( $d\Omega$ ), как показано на рис. 122, легко убедиться, что через его сферические стенки выходит столько же линий, сколько и входит, а через коническую стенку линии вообще не проходят.

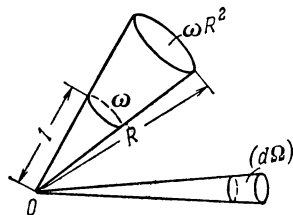


Рис. 122.

Таким образом, для любой поверхности ( $\sigma$ ), содержащей точечный заряд  $q$  внутри себя, количество силовых линий, начинающихся внутри ( $\sigma$ ) (т. е. поток вектора  $E$  через ( $\sigma$ )), равно  $4\pi q$ . Другими словами, для рассматриваемого

поля силовые линии при  $q > 0$  начинаются на заряде (причем их количество пропорционально заряду) и уходят на бесконечность. Если заряд отрицательный, то силовые линии начинаются в бесконечности и заканчиваются на заряде.

Пусть теперь внутри замкнутой поверхности ( $\sigma$ ) содержится несколько зарядов, например  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ . Тогда соответствующие поля, а потому и потоки складываются, т. е. суммарный поток через ( $\sigma$ ) равен  $4\pi q_1 + 4\pi q_2 + 4\pi q_3 = 4\pi (q_1 + q_2 + q_3) = 4\pi q$ , где  $q = q_1 + q_2 + q_3$  — суммарный заряд, расположенный внутри ( $\sigma$ ).

Итак, количество электрических силовых линий, начинающихся в любом объеме пространства, пропорционально (с коэффициентом пропорциональности  $4\pi$ ) общему заряду, заключенному в этом объеме. Это утверждение называется *теоремой Гаусса*.

## § 6. Примеры

Поле, созданное точечным зарядом, — наиболее простое электрическое поле. В результате комбинации полей от точечных зарядов, помещенных в различных точках, получаются и другие, более сложные поля.

Во многих важных случаях поле можно построить с помощью непосредственного применения теоремы Гаусса (см. конец § 5). Рассмотрим, например, поле, созданное шаром радиуса  $R_0$ , заряженным с постоянной объемной плотностью  $\rho$ . Если принять центр шара за начало координат, то в силу сферической симметрии задачи ясно, что напряженность  $E$  поля имеет вид

$$E = F(r) r^0, \quad (25)$$

где  $F(r)$  — некоторая скалярная функция. Приравнявая по теореме Гаусса поток вектора  $E$  через сферу радиуса  $r$ , вычисленный по формуле (17), заряду внутри этой сферы, умноженному на  $4\pi$ , получим

$$F(r) \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} 4\pi \frac{4}{3} \pi r^3 \rho & (r < R_0), \\ 4\pi \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho = 4\pi q & (r > R_0), \end{cases}$$

где  $q$  — общий заряд шара. Отсюда, находя  $F(r)$  и подставляя в (25), получаем

$$E = \begin{cases} 4\pi \frac{\rho}{3} r r_0 = \frac{4}{3} \pi \rho r & (\text{внутри шара}), \\ \frac{q}{r^2} r^0 & (\text{вне шара}). \end{cases}$$

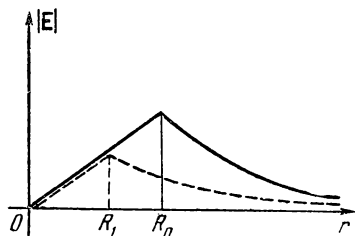


Рис. 123.

В частности (ср. формулу (19)), вне шара напряженность поля в точности такова, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре шара. График модуля вектора  $E$  в зависимости от радиуса показан на рис. 123 сплошной линией.

Соответствующий потенциал в силу соображений симметрии имеет вид  $U = U(r)$ . Вспомнив формулу (5), получаем, что

$$\frac{dU}{dr} = \begin{cases} -\frac{4}{3} \pi \rho r & (0 \leq r \leq R_0), \\ -\frac{q}{r^2} & (R_0 \leq r < \infty). \end{cases}$$

Отсюда

$$U = \begin{cases} -\frac{2}{3} \pi \rho r^2 + C_1 & (0 \leq r \leq R_0), \\ \frac{q}{r} + C_2 & (R_0 \leq r < \infty), \end{cases}$$

где  $C_1, C_2$  — некоторые постоянные. Нормируя потенциал условием  $U(\infty) = 0$ , получаем, что  $C_2 = 0$ ; а чтобы  $U(r)$  было непрерывно при  $r = R_0$ , должно быть

$$-\frac{2}{3} \pi \rho R_0^2 + C_1 = \frac{q}{R_0}, \quad \text{т. е. } C_1 = \frac{q}{R_0} + \frac{2}{3} \pi \rho R_0^3.$$

Итак, окончательно

$$U = \begin{cases} \frac{2}{3} \pi \rho (R_0^2 - r^2) + \frac{q}{R_0} & (0 \leq r \leq R_0), \\ \frac{q}{r} & (R_0 \leq r < \infty). \end{cases}$$

Рассмотрим теперь поле от заряда, распределенного с постоянной плотностью  $\sigma$  между двумя концентрическими сферами радиусов  $R_1$  и  $R_0$ . В силу принципа суперпозиции это поле можно получить как разность полей, полученных при распределении заряда плотности  $\rho$  в шаре радиуса  $R_0$  и в шаре радиуса  $R_1$ . Графики обоих полей показаны на рис. 123. Мы видим, что внутри полости (т. е. внутри сферы радиуса  $R_1$ ) разность равна нулю, т. е. электрического поля нет; другими словами, там потенциал постоянный. Вне сферы радиуса  $R_0$  поле имеет вид

$$\frac{q_0}{4\pi r^2} r^0 - \frac{q_1}{4\pi r^2} r^0 = \frac{q_0 - q_1}{4\pi r^2} r^0 = \frac{q}{4\pi r^2} r^0,$$

т. е. и в этом случае поле таково, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре. График поля для полого шара показан на рис. 124. Эти же выводы справедливы для бесконечно близких  $R_1$  и  $R_0$ , т. е. при равномерном распределении заряда на сфере.

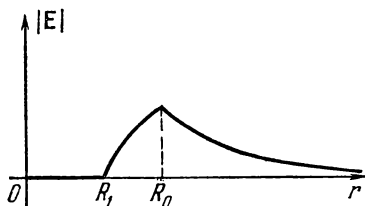


Рис. 124.

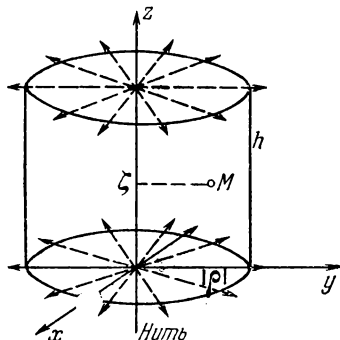


Рис. 125.

Рассмотрим в качестве следующего примера заряд, распределенный с постоянной линейной плотностью  $\mu$  вдоль бесконечной прямолинейной нити, за которую мы примем ось  $z$ . Это поле — плоскопараллельное (§ 1), и его можно получить в результате суммирования (интегрирования) полей от малых зарядов, расположенных вдоль нити. Но проще использовать теорему Гаусса. Заметим, что в силу осевой симметрии задачи, поле должно иметь вид

$$E = \varphi(|\rho|)\rho^0,$$

где  $\rho$  — это вектор, перпендикулярный нити и направленный от нее в текущую точку (если нить идет по оси  $z$ , то  $\rho = xi + yj$ );  $\rho^0 = \frac{\rho}{|\rho|}$  — единичный вектор (не следует путать вектор  $\rho$  с объемной плотностью заряда);  $\varphi(|\rho|)$  — некоторая скалярная функция. Применяя теорему Гаусса к цилиндру высоты  $h$  и радиуса  $|\rho|$ , изображенному на рис. 125, получим

$$\varphi(|\rho|) 2\pi |\rho| h = 4\pi \mu h$$

(при этом надо учесть, что поток вектора  $\mathbf{E}$  через основания цилиндра равен нулю, так как электрические силовые линии идут вдоль этих оснований). Отсюда имеем  $\Phi(|\rho|) = \frac{2\mu}{|\rho|}$ , т. е.

$$\mathbf{E} = \frac{2\mu}{|\rho|} \rho^0. \quad (26)$$

На рис. 125 показаны соответствующие силовые линии; они начинаются (в случае  $\mu > 0$ ) на заряженной нити и расходятся на бесконечность.

Интересная трудность возникает при вычислении потенциала рассматриваемого поля. Можно было бы попытаться просуммировать потенциалы от элементарных зарядов нити. В силу формулы (21) это дало бы в некоторой точке  $M(x; y; z)$

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu d\xi}{|x\xi + yj + zk - \xi k|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \xi)^2}}. \quad (27)$$

Но знаменатель при больших  $|\xi|$  ведет себя, как  $\sqrt{\xi^2} = |\xi|$ , и поэтому интеграл (27) расходится к бесконечности (см. § III.1), т. е. имеет бесконечное значение! Ясно, что так найти потенциал нельзя.

Однако вспомним о том, что нас всегда интересует не само значение потенциала, а производные от него (для нахождения поля  $\mathbf{E}$ ) или разность его значений для двух точек. Поэтому ситуация как раз такова, как описано в § III.5 при рассмотрении расходящегося интеграла, зависящего от параметра (в данном случае имеется три параметра:  $x, y, z$ ). Учтем к тому же, что реально нить всегда конечна, т. е. взамен (26) надо рассмотреть интеграл

$$\Phi_N = \int_{-N}^N \frac{\mu d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \xi)^2}}$$

при очень большом  $N$ . Этот интеграл удобно разбить на два:

$\int_{-N}^z + \int_z^N$  — и в первом заменить  $\xi - z$  на  $\xi$ , а во втором  $z - \xi$  на  $\eta$ , после чего получится (проверьте!)

$$\begin{aligned} \Phi_N &= -\mu \ln(x^2 + y^2) + \mu \ln[N - z + \sqrt{x^2 + y^2 + (N - z)^2}] + \\ &\quad + \mu \ln[N + z + \sqrt{x^2 + y^2 + (N + z)^2}] = \\ &= -\mu \ln(x^2 + y^2) + P_N(x, y, z), \end{aligned} \quad (28)$$

где через  $P_N$  обозначена сумма «длинных логарифмов». Следовательно, потенциал в фиксированной точке  $Q(x; y; z)$ , зависящий от длины нити, обращается в бесконечность, когда длина нити стремится к бесконечности. В природе мы никогда не имеем дела с

нитей бесконечной длины с постоянной плотностью заряда на них; для вычисления потенциала существенно, что когда длина нити конечна, величина  $N$ , характеризующая длину, входит в ответ, в частности, и при  $N \rightarrow \infty$ .

Замечательно, что, несмотря на это, поле  $E$  вблизи нити не зависит от длины нити \*).

Точный способ действий заключается в следующем: зафиксируем какое-то большое, но конечное  $N$  и найдем поле по общему правилу (20):

$$\begin{aligned} E_x &= 2\mu \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial P_N}{\partial x} = \\ &= 2\mu \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\mu x}{(N-z+\sqrt{x^2+y^2+(N-z)^2})\sqrt{x^2+y^2+(N-z)^2}} + \\ &\quad + \text{аналогичный член с } N+z; \end{aligned}$$

выражение  $E_y$  получается заменой  $x$  на  $y$ ;

$$E_z = \frac{\partial P_N}{\partial z} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+(N-z)^2}} + \text{аналогичный член с } N+z.$$

Теперь, после дифференцирования, устремим  $N$  к бесконечности; при этом члены  $\frac{\partial P_N}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P_N}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial P_N}{\partial z} \rightarrow 0$ , и мы получим простой, не зависящий от  $N$  ответ

$$E_x = 2\mu \frac{x}{x^2+y^2}, \quad E_y = 2\mu \frac{y}{x^2+y^2}, \quad E_z = 0.$$

Подробная процедура с получением выражения  $\phi$  для конечного  $N$ , нахождением  $E$  и последующим переходом к пределу при  $N \rightarrow \infty$  не необходима. Откажемся от нормировки потенциала  $\phi$  условием  $\phi = 0$  на бесконечности. Примем за нуль, например, потенциал в точке  $x=1$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  и обозначим через  $\Phi$  нормированный так потенциал. Он получится добавлением к (28) константы  $C = C_N$ :

$$\Phi = -\mu \ln(x^2+y^2) + P_N(x, y, z) + C,$$

откуда

$$C = -P_N(1, 0, 0) = -2\mu \ln(N + \sqrt{1+N^2}).$$

Легко убедиться, что в пределе при  $N \rightarrow \infty$

$$P_N(x, y, z) + C = P_N(x, y, z) - P_N(1, 0, 0) \rightarrow 0,$$

\*) Для того чтобы это утверждение было правильно, нужно выполнение неравенств  $\frac{|x|}{N}$ ,  $\frac{|y|}{N}$ ,  $\frac{|z|}{N} \ll 1$ . Проверьте, что если хотя бы одна из этих величин удовлетворяет обратному неравенству, т. е.  $\frac{|x|}{N} \gg 1$ , или  $\frac{|y|}{N} \gg 1$ , или  $\frac{|z|}{N} \gg 1$ , то потенциал и поле близки к полю конечного заряда, равного  $2\mu N$  и находящегося в начале координат.



откуда

$$\Phi = -\mu \ln(x^2 + y^2).$$

Вычисляя  $E = -\text{grad } \Phi$ , получим предыдущий результат. Этот результат совпадает с тем, что был получен с применением теоремы Гаусса (ср. формулу (26)). В отличие от потенциала при вычислении поля по теореме Гаусса можно (и нужно!) сразу рассматривать бесконечную нить.

Поле можно найти также интегрированием — сложением элементарных полей  $dE$  зарядов  $dq = \mu d\zeta$ , расположенных на элементе нити. Так как  $E$  есть вектор, то нужно отдельно складывать компоненты

$$dE_x = \frac{x dq}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} = \frac{\mu x d\zeta}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}},$$

$$dE_y = \frac{\mu y d\zeta}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}, \quad dE_z = \frac{\mu (z - \zeta) d\zeta}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}.$$

Соответствующие интегралы сходятся, так как при больших  $\zeta$  подынтегральная функция убывает как  $|\zeta|^{-3}$  или  $|\zeta|^{-2}$ . Поэтому можно сразу брать интегралы в пределах от  $\zeta = -\infty$  до  $\zeta = \infty$  (см. упражнение 1).

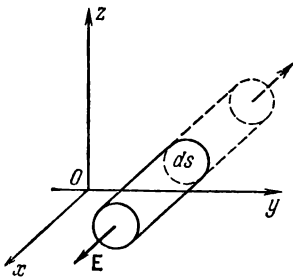


Рис. 126.

Рассмотрим, наконец, поле, порожденное зарядом, равномерно распределенным по плоскости, за которую мы примем плоскость  $yOz$ , с постоянной поверхностной плотностью  $\nu$ . Здесь опять удобно применить теорему Гаусса. Заметим, что в силу соображений симметрии силовые линии должны идти параллельно оси  $x$ . Возьмем (рис. 126) тонкий цилиндр, расположенный симметрично относительно плоскости  $yOz$ .

Поток через его боковую поверхность равен нулю, а через основания, из тех же соображений симметрии, равен  $2Eds$ . С другой стороны, этот поток, по теореме Гаусса, равен произведению  $4\pi$  на заряд, заключенный внутри цилиндра, т. е. на  $\nu ds$ . Приравняв результаты, получаем  $2Eds = 4\pi\nu ds$ , откуда  $E = 2\pi\nu$ . Таким образом, в данном примере

$$E = 2\pi\nu i \quad (x > 0), \quad E = -2\pi\nu i \quad (x < 0). \quad (29)$$

Мы видим, что напряженность по обе стороны от заряженной плоскости постоянная, а при переходе через эту плоскость испытывает скачок  $4\pi\nu i$ .

Что же будет, если заряжена не бесконечная плоскость, а, как всегда на практике, конечный ее кусок? Тогда вблизи этого куска (причем не у границы, а у внутренней части) конечность куска сказывается слабо и мы имеем почти однородное поле, вычисляемое

по формулам (29). Вблизи границы куска, а также при удалении от него однородность поля существенно нарушается. На достаточном расстоянии от куска (как и от любой конечной системы зарядов) его можно просто заменить на поле точечного заряда, равного суммарному заряду на указанном куске, т. е. можно пользоваться формулой (19).

Важный случай представляет собой схематически изображенный на рис. 127 плоский конденсатор, т. е. две параллельные пластины с равными и противоположными по знаку зарядами на них ( $\nu$  единиц на  $1 \text{ см}^2$  одной и  $-\nu$  единиц на  $1 \text{ см}^2$  другой пластины). Проверьте, что слева от  $A$  и справа от  $B$  поля двух пластин направлены в противоположные стороны и в сумме равны нулю. Внутри конденсатора, между  $A$  и  $B$ , поле равно  $E = 4\pi\nu$  и направлено от положительной пластины к отрицательной. Однако нужно помнить, что это поле наполовину обусловлено зарядами пластины  $A$  и наполовину — зарядами пластины  $B$ . В частности, сила, действующая на пластину  $A$ , равна  $2\pi S\nu^2 = \frac{1}{2} qE$ , так как на пластину  $A$  действует только поле зарядов  $B$  (ср. ВМ, § VIII.4).

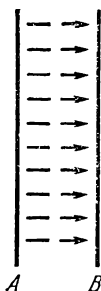


Рис. 127.

Иначе можно коэффициент  $\frac{1}{2}$  получить так: заряды на  $A$  расположены на границе между областью, где  $E = 0$  (слева от  $A$ ), и областью, где  $E = 4\pi\nu$  (справа от  $A$ ); поэтому среднее поле равно  $\frac{1}{2}(4\pi\nu + 0) = 2\pi\nu$ . Но это усреднение и есть способ рассмотреть только ту часть поля, которая создана  $B$ -зарядами и одинакова слева и справа от  $A$ . Поле самих зарядов  $A$  имеет слева и справа от  $A$  противоположный знак и при усреднении пропадает.

Перейдем теперь к случаям, когда поле получается с помощью непосредственного наложения полей от точечных зарядов.

Рассмотрим комбинацию двух зарядов,  $+q$  и  $-q$ , в точках  $(\frac{h}{2}; 0; 0)$  и  $(-\frac{h}{2}; 0; 0)$ . Обозначая через  $\mathbf{r}_+$  и  $\mathbf{r}_-$  радиусы-векторы этих точек, получим в силу формулы (21) суммарный потенциал

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|} = \\ &= q \left( \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{h}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{h}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Так как поле симметрично относительно оси  $x$ , то достаточно представить его картину в какой-либо плоскости, проходящей через эту ось, например в плоскости  $xOz$ . На рис. 128 изображены сплошными линиями следы пересечения плоскостью  $xOz$  эквипотенциальных поверхностей, которые получаются, если приравнять

правую часть (30) постоянной (это — замкнутые овальные поверхности восьмого порядка). Пунктиром изображены силовые линии; они начинаются на положительном заряде (это — «источник» силовых линий,

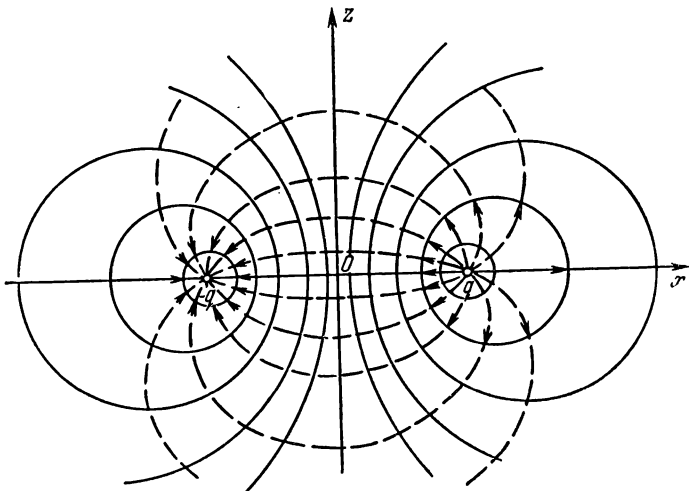


Рис. 128.

имеющий «обильность»  $4\pi q$ ) и заканчиваются на отрицательном (это — «сток»). В силу соотношения (20) эти линии нормальны к эквипотенциальным поверхностям (пересекают их под прямым углом).

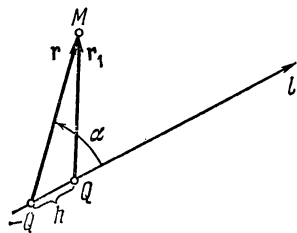


Рис. 129.

Если  $h$  бесконечно мал, т. е. источник и сток расположены в бесконечной близости друг от друга, то система зарядов называется *диполем*. Однако если при этом сами заряды остаются конечными, то их поля просто взаимно уничтожаются, так что в сумме получается нулевое поле. Поэтому интерес представляет только случай, когда заряды бесконечно большие, причем такие, чтобы произведение  $m = qh$  (это произведение

называется *моментом диполя*) оставалось конечным. Диполь в пространстве характеризуется не только местом расположения и моментом, но и направлением, для получения которого нужно провести ось через заряды в направлении от отрицательного к положительному.

Для вывода поля от диполя рассмотрим рис. 129, где  $l$  — ось диполя. При достаточно малом  $h$  в любой точке  $M$  будет

$$E = \frac{q}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{q}{r^3} \mathbf{r} = qh \frac{\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3}}{h} = m \frac{d}{dl} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right), \quad (31)$$

где  $\frac{d}{dl}$  означает производную, полученную при изменении положения заряда (она отличается от производной, полученной при изменении положения точки наблюдения  $M$ , множителем  $-1$ ). Упрощая правую часть (31), получим (проверьте!)

$$E = m \left( \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dl} - \frac{3r}{r^4} \frac{dr}{dl} \right) = \frac{m}{r^3} \left( \frac{3r}{r} \cos \alpha - l^0 \right),$$

где  $l^0$  — единичный вектор, идущий по оси  $l$ , а  $\alpha$  — угол между векторами  $l^0$  и  $r$ .

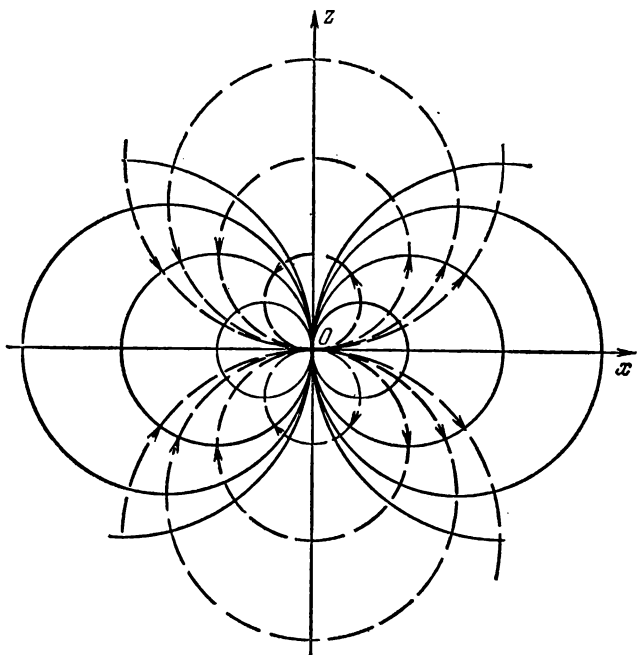


Рис. 130.

Аналогичное рассмотрение потенциала диполя дает выражение

$$\varphi = m \frac{d}{dl} \left( \frac{1}{r} \right) = m \frac{\cos \alpha}{r^2}.$$

Если принять ось диполя совпадающей с осью  $x$  и, подобно рис. 128, рассмотреть картину в плоскости  $xOz$ , то мы получим  $\cos \alpha = x/r$ , т. е.  $\varphi = m \frac{x}{r^3} = m \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$ . На рис. 130 показаны следы эквипотенциальных поверхностей (это овальные поверхности шестого порядка) и электрические силовые линии, которые, как видим, начинаются на диполе и на нем же заканчиваются. (Подумайте, как получить рис. 130 из рис. 128.)

## Упражнения

1. Вычислите поле от бесконечной однородной заряженной прямолинейной нити с помощью интегрирования.
2. Вычислите поле от бесконечной однородной заряженной плоскости с помощью интегрирования.
3. Вычислите поле и потенциал от «плоского диполя», представляющего собой результат наложения двух противоположно заряженных однородных прямолинейных бесконечно близких нитей.

## § 7. Общее векторное поле и его дивергенция

Теперь легко сформулировать введенные понятия в общем виде, для некоторого стационарного *векторного поля*  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(M)$ , независимо от его физического смысла. Естественно обобщается понятие *векторных линий* как линий, идущих в каждой своей точке вдоль поля. Как и в § 4, вводится понятие *потока вектора*  $\mathbf{A}$  через ориентированную поверхность  $(\sigma)$  по формуле  $Q = \int_{(\sigma)} A_n d\sigma = \int_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ . Этот поток иначе называется *количеством векторных линий*, пересекающих  $(\sigma)$  изнутри наружу.

Как и в § 5, можно рассматривать поток вектора  $\mathbf{A}$  через замкнутую поверхность  $(\sigma)$ ,

$$Q = \oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (32)$$

(кружок у знака интеграла выписывать не обязательно; он подчеркивает, что интеграл берется по замкнутой поверхности). Такой поток обладает следующим простым свойством: если некоторое тело  $(\Omega)$  с помощью каких-то поверхностей разбито на части  $(\Omega_1)$ ,  $(\Omega_2)$ , ..., то поток поля через поверхность тела  $(\Omega)$  изнутри наружу равен сумме аналогичных потоков, взятых для каждого из тел  $(\Omega_1)$ ,  $(\Omega_2)$ , ... Например, на рис. 131 показано разбиение  $(\Omega)$  на две части,  $(\Omega_1)$  и  $(\Omega_2)$ . Поток вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность тела  $(\Omega_1)$  можно предста-

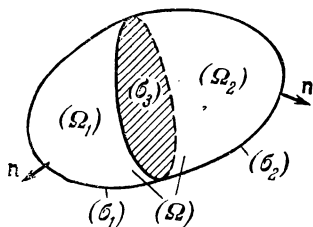


Рис. 131.

вить в виде суммы двух интегралов, по  $(\sigma_1)$  и по  $(\sigma_3)$ ; поток же через поверхность тела  $(\Omega_2)$  равен сумме интегралов по  $(\sigma_2)$  и по  $(\sigma_3)$ . Если сложить эти потоки, то интегралы по  $(\sigma_3)$  взаимно уничтожатся (почему?), а интегралы по  $(\sigma_1)$  и по  $(\sigma_2)$  в сумме дадут поток вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность тела  $(\Omega)$ .

Доказанное свойство дает возможность истолковать интеграл (32) как количество векторных линий, начинающихся внутри объема  $(\Omega)$ ,

ограниченного поверхностью ( $\sigma$ ). Если  $Q > 0$ , то говорят, что в ( $\Omega$ ) имеется *источник векторных линий*, а  $Q$  называется *обильностью* этого источника. Если  $Q < 0$ , то говорят, что в ( $\Omega$ ) имеется *сток* или, что то же, источник отрицательной обильности; для простоты мы будем всегда считать сток частным случаем источника. Если  $Q = 0$ , то либо в ( $\Omega$ ) нет ни источников, ни стоков, либо же они взаимно компенсируются; впрочем, и при  $Q \neq 0$  в ( $\Omega$ ) могут быть как источники, так и стоки, которые, однако, в этом случае компенсируются не полностью.

Пусть векторные линии возникают по всему пространству. Можно говорить о средней плотности источника  $Q/\Omega$  в любом объеме ( $\Omega$ ) (под  $\Omega$  понимается численное значение объема ( $\Omega$ )) и о плотности источника в любой точке  $M$  пространства; эта плотность равна

$$\lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \frac{\Delta Q}{\Delta\Omega} = \lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \frac{\oint_{(\Delta\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\sigma}{\Delta\Omega}, \quad (33)$$

где под ( $\Delta\Omega$ ) понимается малый объем, содержащий точку  $M$ , а под ( $\Delta\sigma$ )—его поверхность. Эта плотность источника называется также *дивергенцией* (по-русски *расходимостью*) векторного поля  $\mathbf{A}$  и обозначается через  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ . Таким образом, можно сказать, что дивергенция векторного поля—это количество векторных линий, начинающихся в бесконечно малом объеме (или, что то же, поток поля  $\mathbf{A}$  через поверхность этого объема), отнесенное к единице этого объема. Отметим, что дивергенция векторного поля есть величина скалярная или, точнее, образует скалярное поле, так как она принимает в каждой точке пространства свое значение.

Формулу (33) можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{dQ}{d\Omega}, \text{ т. е. } dQ = \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega. \quad (34)$$

Получилось выражение для количества векторных линий, начинающихся в элементарном объеме ( $d\Omega$ ). Производя суммирование (§ IV. 7), получаем выражение для количества векторных линий, начинающихся в конечном объеме ( $\Omega$ ), т. е. для потока вектора  $\mathbf{A}$ ,

$$\oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\sigma = \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega, \quad (35)$$

где ( $\Omega$ )—конечный объем, а ( $\sigma$ )—его поверхность. Эта важная формула называется *формулой Остроградского*.

Иногда оказывается удобным подсчитать дивергенцию непосредственно на основе ее определения (33). Рассмотрим, например, центрально-симметричное поле в пространстве, определенное формулой

$$\mathbf{A} = f(r) \mathbf{r}^0. \quad (36)$$

Как было показано в § 4 (формулы (16)—(17)), поток поля через сферу

радиуса  $r$  с центром в начале координат равен  $Q(r) = 4\pi r^2 f(r)$ , а потому количество векторных линий, начинающихся в тонком слое между двумя такими сферами, равно  $dQ = 4\pi d[r^2 f(r)] = 4\pi [2rf(r) + r^2 f'(r)] dr$ .

Значит, на единицу объема этого слоя приходится

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{dQ}{4\pi r^2 dr} = \frac{2}{r} f(r) + f'(r). \quad (37)$$

В частности, центрально-симметричное поле без источников вне начала координат характеризуется тем, что

$$\frac{2}{r} f(r) + f'(r) = 0, \text{ откуда } f(r) = \frac{C}{r^2} \quad (C = \text{const}).$$

Мы пришли к закону Ньютона (10). В силу формулы (17) в самом начале координат в данном случае начинается  $Cr^{-2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi C$  векторных линий. Но точечный источник обильности  $4\pi C$  в начале координат имеет плотность  $4\pi C \delta(\mathbf{r})$ . Таким образом, в силу (36)

$$\operatorname{div} \left( \frac{C}{r^2} \mathbf{r}^0 \right) = 4\pi C \delta(\mathbf{r}), \text{ т. е. } \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 4\pi \delta(\mathbf{r}). \quad (38)$$

В этом важном примере забвение дельта-функции привело бы к грубой ошибке! Здесь фигурирует трехмерная  $\delta$ -функция (см. § VI.3):

$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ . Пользование дельта-функцией гораздо удобнее длинных словесных формулировок: «дивергенция равна нулю везде, кроме особой точки поля, где она бесконечна» и т. п. Начало координат является особой точкой, так как скорость в этой точке бесконечна и не имеет определенного направления. В этом примере все векторные линии уходят в бесконечность. Подумайте, где начинаются и где заканчиваются (или куда уходят) векторные линии, если  $f(r)$  при  $r \rightarrow 0$  возрастает медленнее или быстрее, чем  $r^{-2}$ .

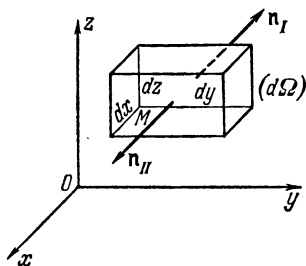


Рис. 132.

Определение дивергенции (33) было дано в инвариантной форме, не зависящей от выбора системы координат. Представляет интерес также вывести формулу для вычисления дивергенции с помощью декартовой системы координат  $x, y, z$ . Для этого воспользуемся тем, что в формуле (34) форма элементарного объема ( $d\Omega$ ) несущественна, и выберем в качестве этого объема бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат (рис. 132). Тогда поток  $dQ$  вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность параллелепипеда (т. е. числитель дроби, стоящий в первой формуле (34)) можно представить в виде суммы шести слагаемых, отвечающих шести граням параллелепипеда. Рассмотрим сумму двух

из этих слагаемых, отвечающих задней и передней граням, которые мы обозначим соответственно цифрами I и II. Тогда  $(A_n)_{II} = (A_x)_{II}$ ,  $(A_n)_I = -(A_x)_I$  (почему?), и потому указанную сумму можно записать в виде

$$\left(\int A_n d\sigma\right)_I + \left(\int A_n d\sigma\right)_{II} = -\int (A_x)_I d\sigma + \int (A_x)_{II} d\sigma = \\ = \int [(A_x)_{II} - (A_x)_I] d\sigma.$$

Подынтегральная функция с точностью до малых высшего порядка равна  $\partial_x A_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx$ ; это «частный дифференциал» от  $A_x$  по  $x$ , получающийся из-за того, что точки передней грани отличаются от соответствующих точек задней грани значением координаты  $x$ . Поэтому весь интеграл, с точностью до членов высшего порядка малости, равен

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} dx \int d\sigma = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Проводя аналогичные вычисления для двух других пар граней, получим весь элементарный поток

$$dQ = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Но так как  $dV = dx dy dz$ , то в силу первой формулы (34) получаем окончательно

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (39)$$

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. Из формулы (33) хорошо видно, что поток вектора через **малую** замкнутую поверхность имеет порядок не площади этой поверхности (как можно было бы ожидать от интеграла по поверхности), а ограниченного ею объема, т. е. по сравнению с линейными размерами имеет не второй, а третий порядок малости. Это можно объяснить следующим образом. Поток вектора через разомкнутую поверхность, действительно, имеет второй порядок малости. Однако поток постоянного вектора через замкнутую поверхность всегда равен нулю! (Это свойство легко вытекает из предыдущего материала; докажете его, например, с помощью последней формулы § 4 или формулы (35).) Поэтому если внутри малой замкнутой поверхности разложить поле по формуле Тейлора (§ VI.6), то интеграл от первого, постоянного члена даст нуль, а интеграл от членов первого порядка малости будет иметь третий порядок малости.

Сделанное замечание не относится к случаю, когда внутри замкнутой поверхности находятся особенности поля, в которых объемная



плотность источника обращается в бесконечность. Если внутри поверхности имеется источник векторных линий, распределенный по площади, то поток имеет второй порядок малости; если источник распределен по линии, то поток имеет первый порядок малости (пропорционален длине линии); наконец, поток через поверхность, внутри которой имеется точечный источник (т. е. дивергенция имеет характер дельта-функции), вообще не является малым. Именно с таким случаем мы столкнулись выше в весьма важном случае кулоновского поля (см. формулу (38)).

### Упражнения

1. Пользуясь формулой Остроградского, найдите поток через сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  изнутри наружу поля  $\mathbf{A} = 2xi + yk$ ;  $\mathbf{R} = y^2i - z^2j$ .
2. Получите формулу (37) с помощью формулы (39).
3. Найдите дивергенцию плоскопараллельного осесимметричного поля  $\mathbf{A} = f(|\rho|)\rho^0$ . В каком случае это поле не имеет источников вне оси  $z$ ?

## § 8. Дивергенция поля скорости и уравнение неразрывности

Вернемся теперь к рассмотрению стационарного течения газа (см. § 4) и будем считать, что в процессе течения масса газа не меняется. В § 4 мы установили, что поток вектора скорости  $\mathbf{v}$  через ориентированную поверхность  $(\sigma)$  равен объему газа, проносимому через  $(\sigma)$  в единицу времени изнутри наружу. Значит, если поверхность  $(\sigma)$  замкнутая, то этот поток равен разности между объемом, выходящим за единицу времени из  $(\sigma)$  по той части поверхности, где  $\mathbf{v}$  направлено наружу, и объемом, входящим внутрь  $(\sigma)$  по той части поверхности, где  $\mathbf{v}$  направлено внутрь.

Почему поток вектора  $\mathbf{v}$  через замкнутую поверхность может быть отличным от нуля? Если газ считается несжимаемым в процессе течения (так будет при рассмотрении скоростей течения, значительно меньших скорости звука, а также при рассмотрении жидкостей), то вытекающий объем равен вытекающему и потому указанный поток равен нулю. Однако, если  $(\sigma)$  находится в зоне, где газ по мере течения расширяется, то вытекающий объем будет больше втекающего и потому суммарный поток будет положительным; аналогично в зоне сжатия суммарный поток отрицателен.

Теперь ясно, что такое дивергенция вектора скорости. В силу § 7, чтобы получить  $\operatorname{div} \mathbf{v}$ , надо разделить поток вектора  $\mathbf{v}$  через поверхность бесконечно малого объема  $(d\Omega)$  на численное значение  $d\Omega$  этого объема. Таким образом, получается отношение объема, «рождающегося» в  $(d\Omega)$  за единицу времени, к объему  $d\Omega$ ; это отношение естественно назвать «скоростью относительного увеличения объема». Отсюда ясно, что равенство  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  — это условие несжимаемости газа, а соотношения  $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$  выполняются соответственно в зоне расширения и в зоне сжатия.

Рассмотрим поле «массовой скорости»  $\rho \mathbf{v}$ . В § 4 мы показали, что поток такого вектора через ориентированную поверхность ( $\sigma$ ) равен массе газа, пронесимого за единицу времени через ( $\sigma$ ) изнутри наружу. Но так как масса газа остается неизменной, то полный поток вектора  $\rho \mathbf{v}$  через любую замкнутую поверхность обязательно равен нулю, так как внутрь такой поверхности втекает такая же масса, как и вытекает из нее. Так будет и для бесконечно малого объема, и потому в силу § 7 мы приходим к равенству

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (40)$$

для стационарного течения, при котором внутри каждого элемента объема масса газа с течением времени не меняется. Это *уравнение неразрывности* — одно из основных соотношений гидродинамики, выражающее закон сохранения массы.

Распишем это выражение в координатах. Вектор  $\rho \mathbf{v}$  имеет, очевидно, компоненты  $\rho v_x$ ,  $\rho v_y$ ,  $\rho v_z$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = \\ &= \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho \end{aligned}$$

(иным путем это будет выведено в § XI.8). Следовательно, условие сохранения массы приводит к соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho.$$

Для несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$ ,  $\operatorname{grad} \rho = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . Что такое величина  $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$  в стационарном потоке сжимаемой жидкости (именно такой поток мы рассматриваем, для него  $\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0$ )? Найдем изменение плотности частицы. В стационарном потоке  $\rho = \rho(x, y, z)$ , плотность в данной точке не зависит от  $t$ , т. е.  $\partial \rho / \partial t = 0$ . Но когда мы переходим к рассмотрению данной частицы, то нужно учесть, что ее координаты зависят от времени. Скорость  $\mathbf{v}$  как раз и характеризует эту зависимость:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

По общему правилу (ср. формулу (IV.5)), рассматривая  $\rho = \rho[x(t), y(t), z(t)] = \rho(t)$ , найдем

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho.$$

Итак,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Это и есть количественное выражение сделанных выше высказываний

о  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  в области, где газ сжимается ( $d\rho/dt > 0$ ) или расширяется ( $d\rho/dt < 0$ ) при  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

Рассмотрим теперь нестационарное течение газа, когда поле скоростей и другие рассматриваемые здесь поля меняются с течением времени. Тогда все введенные ранее понятия нужно (как и в случае нестационарного поля с любым физическим смыслом) рассматривать для любого фиксированного момента времени. При этом линии тока (т. е. линии, которые строятся в любой фиксированный момент времени и в этот момент в каждой точке идут вдоль вектора скорости) уже не совпадают с траекториями частиц жидкости (подумайте, почему!).

Если в нестационарном случае рассмотреть некоторый объем ( $d\Omega$ ), то здесь поток вектора  $\rho \mathbf{v}$  через поверхность, равный в силу формулы (34)  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\Omega$ , дает скорость уменьшения массы газа в этом объеме, т. е. массу газа, выходящего из этого объема за единицу времени. Однако масса газа, содержащегося в бесконечно малом объеме ( $d\Omega$ ), равна  $\rho d\Omega$  и потому увеличивается\*) со скоростью

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho d\Omega) = \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega.$$

Таким образом, получаем

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\Omega = -\frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega,$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (41)$$

Это и есть уравнение неразрывности, которое и для нестационарного случая означает, что в процессе движения газа он не порождается и не исчезает. В стационарном случае уравнение (41), очевидно, переходит в уравнение (40).

В нестационарном случае скорость  $\frac{d\rho}{dt}$  изменения плотности в частице (в отличие от скорости  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  изменения плотности в фиксированной точке) равна

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho.$$

Отсюда найдем, что в нестационарном случае формула

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

остается без изменения.

---

\*) Слово «увеличивается» надо понимать в алгебраическом смысле: если  $\partial \rho / \partial t > 0$ , то масса внутри  $d\Omega$  увеличивается, а если  $\partial \rho / \partial t < 0$ , то масса уменьшается.

## Упражнение

Пусть рассматривается поток «нейтронного газа» в реакторе, причем нейтроны постулают в поток по всему объему за счет реакции деления ядер урана, происходящей в данном объеме. Как изменится уравнение неразрывности?

## § 9. Дивергенция электрического поля и уравнение Пуассона

Пусть в пространстве распределен заряд с некоторой плотностью  $\rho$ , и им порождается электрическое поле  $\mathbf{E}$ . В § 5 мы видели, что поток  $Q$  вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность любого объема  $(\Omega)$ , т. е. количество электрических силовых линий, начинающихся в  $(\Omega)$ , равняется произведению  $4\pi$  на заряд  $q$ , содержащийся в  $(\Omega)$ . Отсюда, если объем бесконечно мал, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{dQ}{d\Omega} = \frac{d(4\pi q)}{d\Omega} = 4\pi \frac{dq}{d\Omega},$$

т. е. окончательно

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (42)$$

Итак, дивергенция напряженности электрического поля, т. е. плотность возникновения электрических силовых линий, прямо пропорциональна плотности распределенных зарядов.

В § 5 мы видели, что электрическое поле имеет потенциал  $\varphi$ , связанный с вектором  $\mathbf{E}$  соотношением (20). Подставляя (20) в (42), получаем уравнение для потенциала

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -4\pi\rho.$$

Комбинация  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$  называется *оператором Лапласа* и обозначается буквой  $\Delta$ ; поэтому уравнение для потенциала можно переписать в виде

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (43)$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона*; его решение (23), равное нулю на бесконечности, было найдено ранее. В части пространства, свободной от зарядов, уравнение (43) приобретает вид

$$\Delta\varphi = 0 \quad (44)$$

и называется *уравнением Лапласа*.

Легко получить выражение для оператора Лапласа в декартовых координатах. Из формул (1) и (39) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \operatorname{div} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (44)—это то самое уравнение Лапласа, которое уже встречалось нам в § V.7, но записанное для трехмерного случая.

Иногда удобнее вычислять оператор Лапласа в других системах координат. Например, для центрально-симметричного поля  $\varphi(r)$  в силу формул (5) и (36)—(37) получаем

$$\Delta\varphi(r) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(r) = \\ = \operatorname{div} \left( \frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{2}{r} \left( \frac{d\varphi}{dr} \right) + \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)'_r = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr}.$$

Оператор Лапласа связан простой формулой со средним значением функции на малой сфере. Для вывода этой связи положим в формуле Остроградского (35)  $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi$ ; получим

$$\oint_{(\sigma)} \operatorname{grad}_n \varphi \, d\sigma = \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \, d\Omega, \text{ т. е. } \oint_{(\sigma)} \frac{d\varphi}{dn} \, d\sigma = \int_{(\Omega)} \Delta\varphi \, d\Omega.$$

Допустим, что  $(\sigma) = (\sigma)_r$ —сфера радиуса  $r$  с центром в некоторой точке  $O$ ; тогда  $d\sigma = r^2 d\omega$ , где  $d\omega$ —элемент телесного угла с вершиной  $O$  (§ 5), откуда

$$\oint_{(\sigma)_r} \frac{d\varphi}{dr} r^2 \, d\omega = \int_{(\Omega)_r} \Delta\varphi \, d\Omega, \text{ т. е. } \frac{d}{dr} \oint \varphi \, d\omega = \frac{1}{r^2} \int_{(\Omega)_r} \Delta\varphi \, d\Omega.$$

(К интегрированию по  $\omega$  мы перешли, чтобы область интегрирования не зависела от параметра  $r$  и потому можно было применить правило § III.6 дифференцирования интеграла по параметру.) Интегрируя последнее равенство по  $r$ , начиная от  $r=0$ , получим

$$\oint \varphi \, d\omega - \oint \varphi \, d\omega \Big|_{r=0} = \int_0^r \frac{ds}{s^2} \int_{(\Omega)_s} \Delta\varphi \, d\Omega.$$

Однако  $\varphi|_{r=0} = \varphi(O) = \text{const}$ ,  $\oint d\omega = 4\pi$  (почему?), откуда, поделив на  $4\pi$ , получаем

$$\varphi(O) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{(\sigma)_r} \varphi \, d\sigma - \int_0^r \frac{ds}{4\pi s^2} \int_{(\Omega)_s} \Delta\varphi \, d\Omega. \quad (45)$$

Из этой формулы мы выведем некоторые следствия. Прежде всего, допустим, что  $\Delta\varphi \equiv 0$  в некоторой области, включающей шар  $(\Omega)_r$ ; тогда функция  $\varphi$  называется *гармонической* (ср. § V.7) и в силу формулы (44)

$$\varphi(O) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{(\sigma)_r} \varphi \, d\sigma. \quad (46)$$

Таким образом, значение гармонической функции в центре сферы равно среднему значению этой функции на сфере.

Отсюда вытекает, в частности, что гармоническая функция не может иметь внутри области своего определения максимумов или минимумов. В самом деле, если, например, в точке  $O$  будет минимум, а  $r$  достаточно мало, то среднее значение функции  $\varphi$  на  $(\sigma)_r$  будет больше  $\varphi(O)$  (почему?), а это противоречит формуле (46). По-другому это свойство было доказано в ВМ, § VI.3, где было отмечено и следствие из него: заряд в электростатическом поле в области, свободной от других зарядов, не может иметь положений устойчивого равновесия.

Другое следствие из формулы (45) для произвольной функции  $\varphi$  получится, если считать  $r$  малым. Тогда  $(\Delta\varphi)_{(\Omega)_s} \approx \Delta\varphi|_O$ , откуда

$$\int_0^r \frac{ds}{4\pi s^2} \int_{(\Omega)_s} \Delta\varphi d\Omega \approx \int_0^r \frac{ds}{4\pi s^2} \left( \Delta\varphi \Big|_O \cdot \frac{4}{3} \pi s^3 \right) = \frac{1}{6} r^2 \Delta\varphi \Big|_O.$$

Поэтому, с точностью до величин, малых при малом  $r$ ,

$$\Delta\varphi|_O = \frac{6}{r^2} \left[ \frac{1}{4\pi r^2} \int_{(\sigma)_r} \varphi d\sigma - \varphi(O) \right] = 6 \frac{\bar{\varphi}^{(\sigma)_r} - \varphi(O)}{r^2}, \quad (47)$$

где под  $\bar{\varphi}^{(\sigma)_r}$  понимается среднее по сфере  $(\sigma)_r$ . Отсюда видно, в частности, что если  $\bar{\varphi}^{(\sigma)_r} \equiv \varphi(O)$ , т. е. выполняется описанное выше свойство среднего по сферам, то  $\Delta\varphi = 0$ , т. е. функция  $\varphi$  гармоническая.

Формула (47) весьма напоминает формулу

$$\varphi''(x) = \frac{2}{h^2} \left[ \frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h)}{2} - \varphi(x) \right],$$

которую при малом  $h$  для функции  $\varphi(x)$  одного переменного легко проверить с помощью формулы Тейлора (проделайте это!). Во многих случаях формула (47) дает возможность глубже понять смысл соотношений, в которые входит оператор Лапласа. Например, в теории теплопроводности выводится уравнение  $\frac{\partial v}{\partial t} = \text{const} \cdot \Delta v$  распространения тепла в однородной среде, где  $v$  — температура. В силу формулы (47) это означает, что если вокруг точки  $O$  температура в среднем выше, чем в  $O$ , то температура в  $O$  должна повышаться.

### Упражнения

1. Чему равно  $\Delta\varphi(|\rho|)$ , где  $\rho = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  (§ 6)?
2. Докажите, что значение гармонической функции в центре шара любого радиуса равно среднему значению этой функции на шаре.
3. Докажите формулу (47) с помощью разложения функции  $\varphi$  в ряд Тейлора.

### § 10. Вектор площадки и давление

В § 4 мы говорили о том, что ориентированную плоскую площадку принято изображать вектором. Особенно естественен такой подход при исследовании сил давления в жидкости или газе. В самом деле, пусть в некоторой точке давление равно  $p$ ; это, конечно, величина скалярная\*). Пусть в этой точке расположен ориентированный элемент поверхности ( $d\sigma$ ) (см. рис. 120). Тогда сила, с которой жидкость, расположенная по внутреннюю сторону поверхности, давит на этот элемент, направлена по нормали к ( $d\sigma$ ) во внешнюю сторону и численно равна  $p d\sigma$ ; таким образом, эта сила равна

$$dF = p d\sigma. \quad (48)$$

Вектор площадки получает непосредственное истолкование.

Теперь легко подсчитать суммарную силу, с которой жидкость давит на некоторый мысленно выделенный в ней объем ( $\Omega$ ) с поверхностью ( $\sigma$ ). Для этого надо просуммировать элементарные силы (48), поменяв, однако, в правой части знак, так как поверхность ( $\sigma$ ) мы будем, как и в предыдущих параграфах, считать ориентированной внутренней стороной к ( $\Omega$ ), а не к давящей жидкости. Тогда мы получим

$$F = - \int_{(\sigma)} p d\sigma. \quad (49)$$

При вычислении интеграла (49) часто бывает удобно перейти к интегрированию по ( $\Omega$ ). Для этого заметим, что

$$p d\sigma = p n d\sigma = p [\cos(\hat{n}, x) i + \cos(\hat{n}, y) j + \cos(\hat{n}, z) k] d\sigma \quad (50)$$

(см. конец § IX.1). С другой стороны,  $p \cos(\hat{n}, x) = (pi)_n$ , где значком  $n$  обозначена проекция на внешнюю нормаль. Поэтому в силу формулы Остроградского (35) и формулы (39) для вычисления дивергенции получаем

$$\oint_{(\sigma)} p \cos(\hat{n}, x) d\sigma = \oint_{(\sigma)} (pi)_n d\sigma = \int_{(\Omega)} \operatorname{div}(pi) d\Omega = \int_{(\Omega)} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega,$$

и интеграл от первого слагаемого в правой части (50) оказывается равным  $i \int_{(\Omega)} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega$ . Аналогично преобразуются интегралы от двух других слагаемых, и в результате мы получаем

$$\int_{(\sigma)} p d\sigma = \int_{(\Omega)} \left( \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k \right) d\Omega = \int_{(\Omega)} (\operatorname{grad} p) d\Omega \quad (51)$$

\*) Жидкость или газ подчиняются закону Паскаля; мы не рассматриваем ни прочности, ни вязкости, которые приводят к различию сил, действующих на площадки, по-разному направленные.

(см. формулу (1)). Итак, сила давления равна

$$\mathbf{F} = - \int_{(\Omega)} (\text{grad } p) d\Omega. \quad (52)$$

Рассмотрим примеры. Пусть сначала давление постоянно,  $p = \text{const}$ . Тогда  $\text{grad } p = \mathbf{0}$ , и формула (52) показывает, что и  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ .

Мы приходим к выводу, что постоянное давление, приложенное со всех сторон к телу как угодно сложной формы, дает нулевую результирующую силу. Именно поэтому нас не выталкивает атмосферное давление, которое интенсивно, но с постоянной силой давит на сложную поверхность нашего тела. По существу, данный пример уже был рассмотрен в конце § 4; в частности, мы видим, что если в жидкость помещен многогранник, показанный на рис. 121, то

$$p(-\sigma) + p(\sigma_1) + p(\sigma_2) + p(\sigma_3) = 0.$$

Сокращая на  $p$ , мы вновь приходим к формуле (18).

В качестве другого примера рассмотрим давление в жидкости, находящейся в поле тяготения. Если направить ось  $z$  от свободной поверхности вверх, то, как хорошо известно, давление в жидкости зависит от  $z$  следующим образом:

$$p = p_0 - g\rho z,$$

где  $p_0$  — давление на свободной поверхности\*),  $\rho$  — плотность жидкости и  $g$  — ускорение земного тяготения. Отсюда в силу (52) получаем выталкивающую силу

$$\mathbf{F} = \int_{(\Omega)} g\rho \mathbf{k} d\Omega = g\rho \Omega \mathbf{k}.$$

Так как произведение  $g\rho\Omega$  равно весу жидкости в объеме  $(\Omega)$ , то мы приходим к известному закону Архимеда.

Вернемся к общему случаю и найдем результирующую сил давления, приложенных к бесконечно малому объему  $(d\Omega)$ . Так как в случае постоянного давления эта результирующая, как мы только что показали, равна нулю, то, рассуждая, как в конце § 7, можно вывести, что хотя силы давления приложены к поверхности, но результирующая пропорциональна не площади, а объему. Это видно и из формулы (52), откуда следует, что для бесконечно малого объема интегрирования

$$d\mathbf{F} = -(\text{grad } p) d\Omega. \quad (53)$$

К объему  $(d\Omega)$  могут быть приложены некоторые объемные силы (например, силы тяготения, центробежные силы и т. д.), распределенные

\*) Обратите внимание на то, что в жидкости, очевидно,  $z < 0$ , так что давление  $p$  по формуле больше  $p_0$ , как и должно быть.



с плотностью  $f$ . Результирующая таких сил равна

$$dF_1 = f d\Omega.$$

Обе эти силы придают массе  $\rho d\Omega$  ускорение  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ , т. е.

$$\rho d\Omega \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -(\text{grad } p) d\Omega + f d\Omega,$$

откуда, сокращая на  $d\Omega$ , получаем уравнение движения

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + f. \quad (54)$$

В левой части здесь стоит скорость изменения вектора  $\mathbf{v}$  вдоль траектории частицы. Эта скорость записывается подобно тому, как это было сделано в § IV.1 для случая скалярного поля (т. е. она состоит из локальной и конвективной скоростей); ее координатное выражение мы получим в § XI.8.

Рассмотрим, в частности, стационарное течение несжимаемой (т. е. при  $\rho = \text{const}$ ) жидкости в поле тяготения. В этом случае, направив ось  $z$  вертикально вверх, получим, что  $f$ , т. е. сила, действующая на единицу объема, равна  $-\rho g \mathbf{k}$ . Умножив обе части уравнения (54) скалярно на  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ , получим в левой части

$$\rho d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{\rho}{2} d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\rho}{2} d(v^2) \quad (\text{здесь } \mathbf{v} = |\mathbf{v}|).$$

В правой части первое слагаемое после умножения дает

$$-\text{grad } p \cdot d\mathbf{r} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) = -dp,$$

а второе  $-\rho g \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = -\rho g dz$ . Итак,

$$\frac{\rho}{2} d(v^2) = -dp - \rho g dz.$$

Подчеркнем, что это соотношение выполняется вдоль линии тока: мы пользовались этим, когда писали  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ , так как такое равенство определяет смещение движущейся частицы вдоль траектории (см. § IX.4). Интегрируя вдоль такой линии, получаем соотношение

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z = \text{const}, \quad (55)$$

которое должно выполняться в стационарном потоке вдоль каждой линии тока. При этом постоянная интегрирования, стоящая в правой части, принимает на различных линиях тока, вообще говоря, различные значения. Соотношение (55), называемое *интегралом Бернулли*, выражает закон сохранения энергии при движении частицы жидкости. Это особенно ясно, если помножить обе части на  $d\Omega$ , а затем взять приращение  $\Delta$  (не путать с оператором Лапласа!)

обеих частей равенства вдоль некоторого участка линии тока. Мы получим

$$\Delta \frac{\rho v^2}{2} d\Omega + \Delta p d\Omega + \Delta \rho g z d\Omega = 0,$$

т. е.

$$\Delta \left( \frac{dm \cdot v^2}{2} + dm \cdot g z \right) = -\Delta p \cdot d\Omega.$$

Так как в скобках стоит сумма кинетической и потенциальной энергий движущейся частицы, то левая часть равна приращению полной энергии этой частицы. Правую часть можно представить в виде интеграла вдоль линии тока

$$-\int \frac{dp}{ds} ds \cdot d\Omega = -\int (\text{grad } p) \cdot ds \cdot d\Omega = \int F_x ds$$

(см. формулу (53)). Значит, эта правая часть равна работе сил давления при движении частицы. Итак, формула (55) означает, что приращение полной энергии частицы равно работе действующих на нее сил.

В стационарном потоке закон сохранения энергии можно применить еще и другим способом. Рассмотрим «трубку тока», т. е. трубку, через боковую поверхность которой линии тока не выходят и не входят; схематически эта трубка изображена на рис. 133. При этом стенки могут быть твердыми, так как на стенках работа не совершается и жидкость через них не проходит. Сравним мощность насоса (т. е. энергию за единицу времени), затрачиваемую на подачу жидкости в трубку, с мощностью турбины на выходе из трубки; если пренебрегать потерями на трение, то эти мощности должны быть равными. Через входное отверстие в трубку в единицу времени поступает  $v_1 S_1$  единиц объема жидкости, где  $S$  — площадь поперечного сечения трубки, а индекс 1 указывает на то, что рассматриваемые величины относятся ко входу. Эта жидкость обладает кинетической энергией

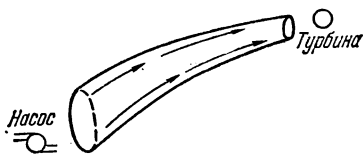


Рис. 133.

$$\rho v_1 S_1 \frac{v_1^2}{2}.$$

Кроме того, на создание давления  $p_1$  в объеме  $v_1 S_1$  тратится мощность насоса  $p_1 v_1 S_1$ , а на поднятие на высоту  $z_1$  (от некоторой стандартной высоты  $z = 0$ ) — мощность  $\rho v_1 S_1 g z_1$ . Составляя аналогичные выражения для выходного сечения и приравнявая суммы, получим запись закона сохранения энергии

$$\rho v_1 S_1 \frac{v_1^2}{2} + p_1 v_1 S_1 + \rho v_1 S_1 g z_1 = \rho v_2 S_2 \frac{v_2^2}{2} + p_2 v_2 S_2 + \rho v_2 S_2 g z_2. \quad (56)$$

Однако в силу сохранения массы и несжимаемости жидкости имеем  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ . Сокращая (55) на эту величину, получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2.$$

Это равенство равносильно интегралу Бернулли (55).

Из интеграла Бернулли хорошо видно, что при постоянной или мало изменяющейся высоте давление в струе существенно зависит от скорости течения: чем больше скорость, тем меньше давление. Это и естественно: если частица переходит из области с меньшим давлением в область с большим давлением, то равнодействующая сил давления на нее направлена против скорости, т. е. движение тормозится. Если же по мере движения давление падает, то давление «в спину» частицы больше, чем давление ей «в грудь», и частица разгоняется. При достижении определенной скорости в силу (55) давление должно было бы стать отрицательным; на самом деле этого не происходит, жидкость теряет сплошность — в ней возникают полости (возникает так называемая «кавитация»).

### Упражнение

Выведите с помощью формулы (51) инвариантное, не связанное с выбором системы координат, определение градиента, аналогичное определению (33) дивергенции.

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1

Легко проверить, что связь старых координат  $x, y, z$  с новыми  $x', y', z'$  такова:  $x = x'$ ;  $y = \frac{y' - z'}{\sqrt{2}}$ ;  $z = \frac{y' + z'}{\sqrt{2}}$ . Подставляя эти формулы в выражение для  $u$ , получим  $u = x'^2 + 2y'^2$ . Так как  $z'$  не входит, то поле плоскопараллельное.

#### § 2

1. Так как  $\text{grad } u = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ , то  $(\text{grad } u)_M = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ . Искомая производная равна  $\text{grad } u \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{19}{\sqrt{10}} = 6,0$ .

$$2. \text{grad } u(M) = -\frac{\vec{M}_1 M}{M_1 M^3} - \frac{\vec{M}_2 M}{M_2 M^3}.$$

#### § 3

$F = -\text{grad } U = -\alpha y\mathbf{i} - \alpha x\mathbf{j}$ . Силовые линии определяются уравнением  $\frac{dx}{-\alpha y} = \frac{dy}{-\alpha x}$ , откуда  $x dx = y dy$ ,  $x^2 = y^2 + C$ . Это — гиперболы с центром в начале координат (рис. 33).

#### § 4

$$Q = 2\pi |\rho| \int_a^b f(|\rho|, z) dz, \text{ где } z = a \text{ и } z = b \text{ — плоскости оснований цилиндра.}$$

В случае плоскопараллельного поля  $f$  не зависит от  $z$  и  $Q = 2\pi |\rho| f(|\rho|) h$ , где  $h$  — высота цилиндра.

## § 6

1. Интегрируя выражение для  $dE_x$ , указанное в тексте, получаем (с помощью подстановки  $\xi - z = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} \alpha$ )

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu x d\xi}{[x^2 + y^2 + (z - \xi)^2]^{3/2}} = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu x \sqrt{x^2 + y^2} \frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha}}{(x^2 + y^2)^{3/2} \frac{1}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\mu x}{x^2 + y^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{2\mu x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Аналогично находим  $E_y = \frac{2\mu y}{x^2 + y^2}$ ,  $E_z = 0$ . Отсюда  $\mathbf{E} = \frac{2\mu x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{2\mu y}{x^2 + y^2} \mathbf{j} = \frac{2\mu \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^2} = \frac{2\mu}{|\boldsymbol{\rho}|} \boldsymbol{\rho}$ . Результат совпадает с (26).

2. Приняв заряженную плоскость за плоскость  $yOz$ , получим в точке  $(x; 0; 0)$  при  $x > 0$   $E_y = E_z = 0$ , тогда как

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu x}{(x^2 + \eta^2 + \xi^2)^{3/2}} d\eta d\xi.$$

Переходя к полярным координатам  $\rho$ ,  $\varphi$  в плоскости  $\eta$ ,  $\xi$ , как в конце § IV.7, получим

$$E_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\nu x \rho d\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} = 2\pi \nu x \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} = 2\pi \nu x \left. \frac{-1}{(x^2 + \rho^2)^{1/2}} \right|_{\rho=0}^{\infty} = 2\pi \nu.$$

Отсюда  $\mathbf{E} = 2\pi \nu \mathbf{i}$ , что совпадает с (29).

3. Рассуждая, как в конце § 6, получаем при естественном смысле букв

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 2m \frac{d}{dt} \left( \frac{\boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^2} \right) = \frac{2m}{|\boldsymbol{\rho}|^2} \left( \frac{2\boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|} \cos \alpha - \mathbf{l}^0 \right); \\ \varphi &= 2m \frac{d}{dt} (-\ln |\boldsymbol{\rho}|) = 2m \frac{\cos \alpha}{|\boldsymbol{\rho}|}. \end{aligned}$$

Можно проверить, что следы цилиндрических эквипотенциальных поверхностей, а также электрические силовые линии расположены, как на рис. 130, но теперь и те и другие будут окружностями.

## § 7

1. По формуле (39)  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 2$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ . Поэтому по формуле Остроградского искомый поток равен

$$\int_{(\Omega)} \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega = \int_{(\Omega)} 2 d\Omega = 2\Omega = \frac{8}{3} \pi R^3, \quad \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \mathbf{B} d\Omega = 0.$$

2. Так как  $\mathbf{A} = f(r) \mathbf{r}^0 = \frac{f(r)}{r} \mathbf{r}$ , то  $A_x = \frac{f(r)x}{r}$ ,

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{\left[ f'(r) \frac{x}{r} \cdot x + f(r) \right] r - f(r) x \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{f'(r)}{r^2} x^2 + f(r) \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

Аналогично находим  $\frac{\partial A_y}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial A_z}{\partial z}$ . Отсюда

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{f'(r)}{r^2} (x^2 + y^2 + z^2) + f(r) \frac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3} = f'(r) + \frac{2f(r)}{r}.$$

3. Рассуждая, как при выводе формулы (37), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{d}{2\pi} \frac{[2\pi |\boldsymbol{\rho}| f(|\boldsymbol{\rho}|)]}{|\boldsymbol{\rho}| d |\boldsymbol{\rho}|} = f'(|\boldsymbol{\rho}|) + \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}|} f(|\boldsymbol{\rho}|),$$

при этом  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , если  $f(|\boldsymbol{\rho}|) = \frac{C}{|\boldsymbol{\rho}|}$ . Это — поле (26), рассмотренное в § 6.

### § 8

1.  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = f$ , где  $f = f(x, y, z, t) = \frac{dM}{d\Omega dt}$ , а  $dM$  — масса нейтро-

нов, поступающих в поток в объеме ( $d\Omega$ ) за время  $dt$ .

2. Разобьем шар  $(\Omega)_r$  на бесконечно тонкие «пузыри» радиуса  $s$  и толщины  $ds$  ( $0 \leq s \leq r$ ). Тогда в силу формулы (46)

$$\int_{(\Omega)_r} \varphi d\Omega = \int_0^r \left( \int_{(\sigma)_s} \varphi d\sigma \right) ds = \int_0^r 4\pi s^2 \varphi(O) ds = \frac{4}{3} \pi r^3 \varphi(O),$$

откуда и вытекает требуемое утверждение.

3. Пусть  $O$  — начало координат. Из соображений симметрии

$$\int x d\sigma = \int y d\sigma = \int z d\sigma = \int xy d\sigma = \int xz d\sigma = \int yz d\sigma = 0$$

(все интегралы берутся по  $(\sigma)_r$ ); кроме того,  $\int x^2 d\sigma = \int y^2 d\sigma = \int z^2 d\sigma$ , откуда

$\int x^2 d\sigma = \frac{1}{3} \int (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \frac{1}{3} r^2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \pi r^4$ . Применяя разложение вида (IV.27) с  $a=b=0$ , получим, с точностью до малых пятого порядка,

$$\int_{(\sigma)_r} \varphi d\sigma = \varphi(O) \cdot 4\pi r^2 + \frac{4}{3} \pi r^4 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)_O,$$

откуда легко вытекает формула (47).

### § 9

$$\Psi''(|\boldsymbol{\rho}|) + \frac{2}{|\boldsymbol{\rho}|} \Psi'(|\boldsymbol{\rho}|).$$

### § 10

$$\operatorname{grad} p(M) = \frac{\oint_{(\Delta\sigma)} p d\sigma}{d(M)} = \lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \frac{\oint_{(\Delta\sigma)} p d\sigma}{\Delta\Omega}. \quad (57)$$

Отметим, что эта формула справедлива для любого скалярного поля, а не только для поля давлений.

## ГЛАВА XI

### ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ВРАЩЕНИЕ\*)

#### § 1. Векторное произведение векторов

В векторной алгебре наряду с умножением вектора на скаляр (§ IX.1) и скалярным произведением двух векторов (§ IX.2) определяется также *векторное произведение* двух векторов, к описанию которого мы переходим.

Напомним (§ X.4), что поверхность в пространстве ориентирована, если указано, какая ее сторона считается внешней, а какая — внутренней. Принято считать, что если эта поверхность незамкнутая (т.е. с краем), то ориентация поверхности порождает также ориен-

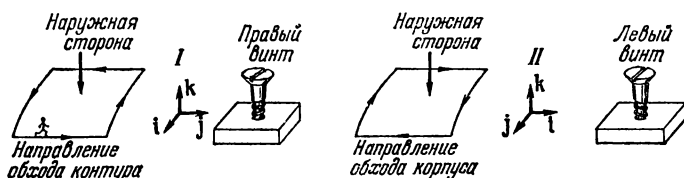


Рис. 134.

тацию ее контура, т.е. направление его обхода. Обратно, если указывается направление обхода контура, это приводит к ориентации самой поверхности. Связь между ориентацией поверхности и ориентацией ее контура указана на рис. 134: если за основу системы координат взята правая тройка векторов  $i, j, k$  (т.е. такая тройка, что, смотря с конца третьего вектора, мы видим кратчайший поворот от первого ко второму против часовой стрелки), то применяется правило правого винта, в противном случае — правило левого винта. Например, правило правого винта можно сформулировать так: если правый винт (который обычно применяется в

\*) Эта глава является непосредственным продолжением двух предыдущих и существенно опирается на материал §§ IX.1—2 и X.1—4, 7. Кроме того, используются понятия кратного интеграла (§ IV.7), определителя (§ VIII.3) и  $\delta$ -функции (§ VI.1). В § 12 используется также материал §§ X.5—9.

технике и обыденной жизни) вращать в направлении обхода контура, то винт должен пойти от внутренней стороны поверхности к наружной. Или, другими словами: если маленький человечек обходит по наружной стороне поверхности ее контур по указанному направлению обхода (см. рис. 134), то сама поверхность должна быть у него по левую руку \*).

Переходим к понятию векторного произведения. *Векторное произведение* двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , по определению, представляет собой вектор  $\mathbf{S}$  площадки ( $S$ ) (см. § X.4), которая получится, если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  отнести к одному началу, затем построить на этих векторах параллелограмм и обходить его контур, начиная с первого вектора (т. е.  $\mathbf{a}$ ; см. рис. 135, где принято правило правого винта, которым мы всегда будем пользоваться, если не оговорено противное).

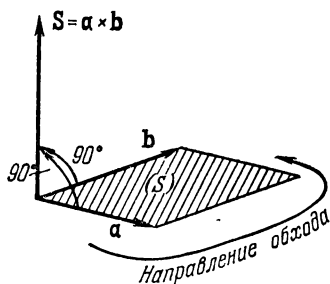


Рис. 135.

Таким образом, векторное произведение двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — это вектор, направленный перпендикулярно обоим векторам, по модулю равный

площади параллелограмма, построенного на  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , и образующий с этими векторами тройку такого же смысла (т. е. правую или левую), как векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Обозначается векторное произведение косым крестом  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  или квадратными скобками  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

Отметим наиболее важные свойства векторного произведения. Так, векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулевому вектору в том и только том случае, если векторы параллельны:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ равносильно } \mathbf{a} \parallel \mathbf{b},$$

так как параллельность векторов означает вырождение параллелограмма в отрезок, площадь которого равна нулю. В частности, всегда  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Векторное произведение «антикоммутативно» \*\*)

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Действительно, при перемене порядка множителей параллелограмм не изменится, но контур его будет проходиться в противоположном

\*) Первые три картинки рис. 134 относятся к правой системе координат. Как видно из рисунка, если вертеть правый винт от  $\mathbf{i}$  к  $\mathbf{j}$ , т. е. вывинчивать его из пластинки, то винт в целом перемещается в направлении  $\mathbf{k}$ . Обход контура в эту сторону соответствует тому, что нижняя сторона поверхности ( $\sigma$ ) — внутренняя, верхняя — наружная, вектор  $\sigma$  направлен по  $\mathbf{k}$ .

\*\*) Коммутативность означает переместительность. Например, умножение обычных чисел или скалярное умножение векторов коммутативны. Вообще некоторая операция над какими-либо объектами называется коммутативной, если она не зависит от порядка, в котором берутся эти объекты.

направлении и потому вектор площадки заменится на противоположный.

Можно проверить, что скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения:

$$(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda (a \times b)$$

и что справедлив распределительный закон:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c; \quad c \times (a + b) = c \times a + c \times b.$$

Раскрывая скобки в выражениях, включающих векторное произведение, надо тщательно следить за порядком множителей. Приведем пример:

$$(a + 2b) \times (2a - 3b) = 2a \times a - 3a \times b + 4b \times a - 6b \times b = -7a \times b.$$

Пусть векторы  $a$  и  $b$  даны своими разложениями в декартовых проекциях

$$a = a_x i + a_y j + a_z k, \quad b = b_x i + b_y j + b_z k.$$

Тогда, если воспользоваться равенствами (проверьте их!)

$$\begin{aligned} i \times j = k; \quad j \times i = -k; \quad j \times k = i; \quad k \times j = -i; \\ k \times i = j; \quad i \times k = -j, \end{aligned} \quad (1)$$

получим

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \times (b_x i + b_y j + b_z k) = \\ &= a_x b_y k - a_x b_z j - a_y b_x k + a_y b_z i + a_z b_x j - a_z b_y i = \\ &= i(a_y b_z - a_z b_y) + j(a_z b_x - a_x b_z) + k(a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned} \quad (2)$$

(продумайте структуру последнего выражения!).

Этот результат очень просто запомнить, если записать его в виде определителя (см. формулу (VIII.13)):

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Пусть, например, надо вычислить площадь  $S$  параллелограмма, построенного на векторах  $a = 3i - 2j + k$  и  $b = -2i + j + 4k$ . Так как  $S = |a \times b|$ , то вычисляем

$$\begin{aligned} S = a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= i(-8 - 1) + j(-2 - 12) + k(3 - 4) = -9i - 14j - k; \\ S &= |a \times b| = \sqrt{9^2 + 14^2 + 1^2} = 16,7. \end{aligned}$$



Так как в этом примере векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  безразмерные, то и площадь  $S$  получается, соответственно, безразмерной.

Иногда применяется также *векторно-скалярное* или, иначе, *смешанное* произведение трех векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , которое, по определению, равно скалярной величине  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ . Ее геометрический смысл виден из рис. 136:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{d}| c_d = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| c_d = Sh = V,$$

т. е. смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. На рис. 138 векторы

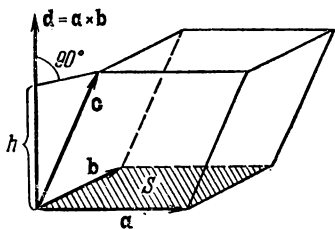


Рис. 136.

$\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  образуют правую тройку, и получился объем со знаком плюс. Для левой тройки угол между  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  был бы тупой; в этом случае  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -V$ . (Предполагается, что за основу принято правило правого винта.) Векторно-скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда все три вектора параллельны одной плоскости, так как такая параллельность означает, что параллелограмм вырождается в часть плоскости, т. е. имеет нулевой объем.

Легко получить выражение для смешанного произведения в случае, если даны разложения сомножителей в декартовой системе координат. Для этого нужно правую часть (2) помножить обычным способом скалярно (по формуле (IX.5)) на вектор  $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$ . Это даст после перегруппировки слагаемых

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z = \\ &= a_x (b_y c_z - b_z c_y) - a_y (b_x c_z - b_z c_x) + a_z (b_x c_y - b_y c_x) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Нам понадобится еще формула для *векторно-векторного произведения*  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  трех векторов. Для ее вывода представим себе, что мы выбрали оси координат так, что ось  $x$  пошла по вектору  $\mathbf{b}$ , а ось  $y$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Тогда вектор  $\mathbf{b}$  будет иметь проекцию только на ось  $x$ , т. е.  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i}$ ; аналогично  $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ . Пользуясь формулой (3), получаем

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & 0 & 0 \\ c_x & c_y & 0 \end{vmatrix} = b_x c_y \mathbf{k}; \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & b_x c_y \end{vmatrix} = a_y b_x c_y \mathbf{i} - a_x b_x c_y \mathbf{j},$$

Этот результат неудобен тем, что «привязан» к специальному выбору осей координат. Поэтому преобразуем его (проверьте!):

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_x c_x + a_y c_y) b_x \mathbf{i} - a_x b_x (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (4)$$

Эта формула уже не содержит координатных проекций, а потому не зависит от специального выбора системы координат. Для запоминания этой формулы студенты пользуются фразой: «*абц* равно *бац* минус *цаб*».

### Упражнения

1. Найдите площадь треугольника с вершинами  $A(1; 0; -2)$ ,  $B(-1; 1; 2)$ ,  $C(1; 3; 3)$ .
2. Какую тройку образуют векторы  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ?
3. Вычислив  $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$  и  $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$ , покажите, что векторное произведение не обладает свойством ассоциативности.

## § 2. Некоторые приложения к механике

Векторное произведение особенно удобно при описании вращательного движения и связанных с ним понятий. Рассмотрим вращение твердого тела вокруг некоторой оси (рис. 137) с угловой скоростью  $\omega$ . Такое вращение принято изображать вектором угловой скорости  $\omega$ , который расположен по оси вращения и направлен в соответствии с направлением вращения согласно выбранному правилу винта; напримср, на рис. 137 направление  $\omega$  выбрано по правилу правого винта, как мы всегда будем делать. Где именно на оси берется вектор  $\omega$  — безразлично; такой вектор, который можно произвольно перемещать вдоль некоторой оси, но не в сторону от этой оси, называется *скользящим*\*).

Будем считать, что начало координат  $O$  выбрано в любой точке оси вращения, и найдем линейную скорость  $\mathbf{v}$  произвольной точки  $M$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  (рис. 137). Очевидно, что вектор  $\mathbf{v}$  перпендикулярен обоим векторам  $\mathbf{r}$  и  $\omega$ , а потому перпендикулярен и всему параллелограмму  $(S)$ , построенному на последних векторах. Численное значение  $v$  равно произведению  $\omega$  на кратчайшее расстояние точки  $M$  до оси вращения, т.е. как раз площади указанного параллелограмма. Но этим условиям, сформулированным для вектора  $\mathbf{v}$ , удовлетворяет векторное произведение  $\omega \times \mathbf{r}$ . Таким образом,

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \quad (5)$$

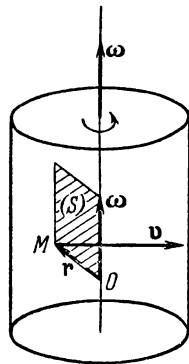


Рис. 137.

\*) Напомним, что раньше точка приложения вектора не фиксировалась, считался возможным параллельный перенос вектора в любую точку.

(проверьте, что векторное произведение надо брать именно в выписанном порядке и что правая часть (5) не зависит от конкретного выбора точки  $O$  на оси вращения).

Удобство вектора угловой скорости видно, в частности, из следующего. Допустим, что тело испытывает одновременно два вращения с (вообще говоря, непараллельными) векторами угловой скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , причем оси вращения пересекаются в точке  $O$ . Тогда в силу формулы (5) линейная скорость любой точки  $M$  равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \omega_1 \times \mathbf{r} + \omega_2 \times \mathbf{r} = (\omega_1 + \omega_2) \times \mathbf{r} = \omega \times \mathbf{r},$$

где обозначено  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ . Значит, тело вращается с угловой скоростью  $\omega$ , и мы приходим к выводу, что при сложении вращений векторы угловой скорости складываются по правилу параллелограмма. Именно поэтому и можно называть угловую скорость вектором!

С помощью векторного произведения вводится такое важное понятие, как *момент* произвольного вектора  $\mathbf{b}$  с началом в точке  $M$  относительно любой точки  $O$ : по определению, этот момент равен  $\mathbf{r} \times \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{r} = \vec{OM}$ . В механике наиболее часто рассматривают момент силы  $\mathbf{F}$ , т. е. величину  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , и момент количества движения  $m\mathbf{v}$ , т. е. величину  $m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ .

При вычислении момента вектора этот вектор можно считать скользящим. В самом деле, если вектор  $\mathbf{b}$  скользит сам по себе, то это значит, что к  $\mathbf{r}$  прибавляется  $\lambda\mathbf{b}$ , где  $\lambda$  — какой-то скаляр. Однако

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} + \lambda\mathbf{b}) \times \mathbf{b} &= \mathbf{r} \times \mathbf{b} + (\lambda\mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{b} + 0 = \mathbf{r} \times \mathbf{b}, \end{aligned}$$

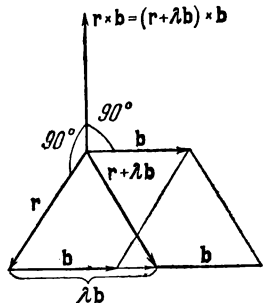


Рис. 138.

т. е. от такого скольжения момент вектора не меняется (рис. 138). Если же вектор отнести в сторону относительно его направления, то момент изменяется.

Рассмотрим систему как-то связанных между собой материальных частиц, каждая из которых имеет постоянную массу  $m_i$  и (вообще говоря, переменный) радиус-вектор  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ . Пусть на каждую из этих точек

действуют различные силы; обозначим равнодействующую всех «внутренних» сил (т. е. сил взаимодействия между точками системы), приложенных к  $i$ -й точке, через  $\mathbf{F}_i^{\text{in}}$ , а равнодействующую всех «внешних» сил — через  $\mathbf{F}_i^{\text{ex}}$ \*). Характерная особенность внутренних сил состоит в том, что на основе третьего закона Ньютона («действие равно противодействию») для каждой внутренней силы имеется противоположная ей внутренняя сила, причем, что очень важно, расположенная на продолжении первой. Поэтому сумма всех

\*) Индексы происходят от латинского «intra» — внутри и «extra» — вне.

внутренних сил, а также сумма их моментов относительно любой точки равны нулю.

Основные уравнения движения системы частиц получаются, если записать второй закон Ньютона («сила равна произведению массы на ускорение»):

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{F}_i^{in}. \quad (6)$$

Если просуммировать эти равенства по всем частицам, получим

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ex} + \sum_i \mathbf{F}_i^{in} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ex}, \quad (7)$$

так как сумма всех внутренних сил, как было сказано выше, равна нулю. Удобно ввести точку  $C$  с радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad \text{где } M = \sum_i m_i$$

— общая масса системы; эта точка называется «центром масс» рассматриваемой системы. При таком обозначении уравнение (7) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{ex}, \quad \text{т. е. } M \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ex}.$$

Итак, центр масс движется так, как будто он обладает полной массой системы и на него действует сила, равная сумме всех внешних сил. В частности, если внешние силы отсутствуют, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно,  $\mathbf{r}_C = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$ .

Перейдем к моментам. Если обе части равенства (6) умножить слева векторно на  $\mathbf{r}_i$ , мы получим

$$m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{in}. \quad (8)$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \mathbf{r}_i \times \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{r}_i \times \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2},$$

которое вытекает из общей формулы производной векторного произведения; эта формула  $\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$  выводится совершенно так же, как аналогичная формула (IX.8) для скалярного произведения. Отсюда равенство (8) можно переписать так

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{in}.$$

Суммируя эти равенства по всем  $i$ , получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{in} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ex}, \quad (9)$$

так как сумма моментов всех внутренних сил равна нулю. Сумма

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (10)$$

моментов количества движения всех частиц, составляющих систему, называется *кинетическим моментом (моментом вращения)* этой системы относительно той же точки  $O$ , по отношению к которой берутся все моменты. Сумма

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$$

моментов всех внешних сил, действующих на систему, называется *полным (главным) моментом внешних сил*. Таким образом, формулу (9) можно переписать

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{L}, \quad (11)$$

т. е. скорость изменения кинетического момента системы равна полному моменту внешних сил, действующих на эту систему. В частном случае, если внешние силы отсутствуют или если их полный момент равен нулю, получаем, что кинетический момент системы остается постоянным.

#### Упражнение

Когда момент вектора  $\mathbf{b}$  относительно точки  $O$  равен нулю?

### § 3. Движение в поле центральных сил

Пусть при движении материальной частицы на нее действует сила, изменяющаяся по произвольному закону, но направленная все время точно к началу координат  $O$  (или от него); такое поле сил называется *центральной*. Если в начальный момент времени провести через начало координат и вектор скорости плоскость  $(P)$ , то точка в процессе движения не может ее покинуть, так как нет сил, которые могли бы вывести точку из  $(P)$ . (Плоскость  $(P)$  совпадает с плоскостью рис. 139.) Так как внешняя сила направлена вдоль радиуса-вектора, то ее момент равен нулю, и потому кинетический момент точки, т. е. ее момент ко-

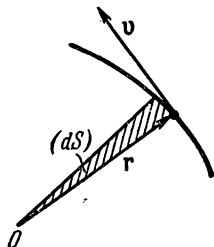


Рис. 139.

личества движения,  $\mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  остается все время постоянным. Однако модуль вектора  $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$  равен удвоенной площади треугольника  $(dS)$ , изображенного на рис. 139 (почему?). Поэтому в процессе движения точки производная  $dS/dt$  остается постоянной, т. е.  $S$  в зависимости от времени меняется по линейному закону. Таким образом, мы приходим ко *второму закону Кеплера*: при центральной силе площади секторов, заметаемых

радиусом-вектором за равные промежутки времени, равны. Прочие законы Кеплера, о которых мы скажем позже, существенно используют конкретный вид зависимости силы от длины радиуса-вектора \*).

Пусть  $\mathbf{F} = -F(r)\mathbf{r}^0$ . В силу § X.2 такое поле имеет потенциал  $U(r)$ , где функция  $U(r)$  — первообразная к  $F(r)$ , т. е.  $\frac{dU}{dr} = F(r)$ .

Введем в плоскости ( $P$ ) полярные координаты  $r, \varphi$ ; тогда закон движения частицы определяется зависимостями  $r = r(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ .

Чтобы найти эти зависимости, воспользуемся двумя законами сохранения — кинетического момента (§ 2) и полной энергии (§ X.3). Для этого обозначим через  $\mathbf{s}^0$  вектор, полученный из  $\mathbf{r}^0$  поворотом на  $90^\circ$  в положительном направлении. Тогда

$$\frac{d\mathbf{r}^0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{s}^0.$$

(Эта довольно очевидная формула является частным случаем формулы (IX.14) и, по существу, совпадает с формулой (V.10).) Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r\mathbf{r}^0) &= \frac{dr}{dt} \mathbf{r}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{s}^0, & \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{r}^0 \times \mathbf{s}^0, \\ \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 &= \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как вектор  $\mathbf{r}^0 \times \mathbf{s}^0 = \mathbf{P}^0$  перпендикулярен плоскости ( $P$ ) и имеет постоянный модуль, равный 1, то закон сохранения кинетического момента можно записать в виде

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = G (= \text{const}). \quad (13)$$

Закон сохранения полной энергии в силу (12) приобретает вид

$$\frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + U(r) = E (= \text{const}). \quad (14)$$

При этом постоянные  $G$  и  $E$  определяются начальными условиями.

Выразим из соотношения (13)  $\frac{d\varphi}{dt}$  и подставим в (14). Мы получим дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left[ U(r) + \frac{G^2}{2mr^2} \right] = E \quad (15)$$

для  $r(t)$ ; найдя  $r(t)$ , мы можем получить  $\varphi(t)$  из уравнения (13).

Уравнение (15) совершенно аналогично уравнению

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + u(x) = E \quad (16)$$

---

\*) Кеплер нашел свои законы эмпирически, исследуя движение планет солнечной системы. Только Ньютон показал, что эти законы являются следствием определенного вида силы тяготения, с которой центральное тело — Солнце действует на планеты.

движения частицы  $m$  по оси  $x$  под действием силы с потенциалом  $u(x)$ . Напомним простые свойства решений уравнения (16), рассмотренные, в частности, в ВМ, § VI.8. Допустим, что график потенциала  $u(x)$  имеет вид, изображенный на рис. 140, так что  $u(\infty) = u_\infty$ . Тогда при  $u_{\min} < E < u_\infty$ , например при  $E = E_1$  на рис. 140, частица будет периодически колебаться, имея  $a$  и  $b$  точками возврата, при этом говорят, что движение *финитно*; период колебаний, как легко вывести из (16), равен

$$T = \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - u(x)}}. \quad (17)$$

Если же  $E \geq u_\infty$ , например при  $E = E_2$  на рис. 140, частица при движении налево дойдет до точки  $c$  и повернет назад, а при движении направо уйдет на бесконечность, движение *инфинитно*.

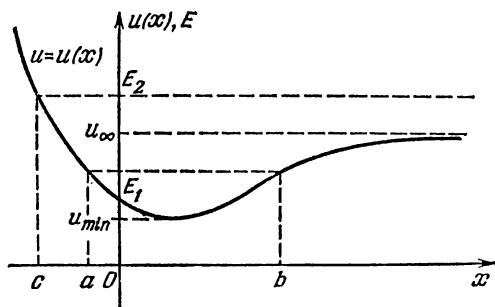


Рис. 140.

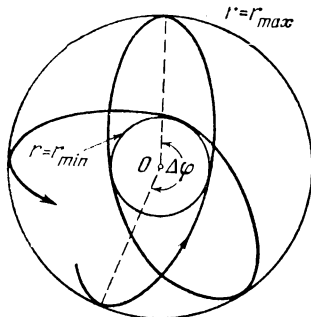


Рис. 141.

Уравнение (15) примет вид (16), если вместо  $r$  писать букву  $x$  (что несущественно) и обозначить

$$u(r) = U(r) + \frac{G^2}{2mr^2} \quad (0 < r < \infty). \quad (18)$$

Таким образом, к исходному потенциалу  $U(r)$  добавляется *центробежный потенциал*  $\frac{G^2}{2mr^2}$ , зависящий от начальных условий, точнее, от кинетического момента  $G$  рассматриваемой системы.

Таким образом, если  $u_{\min} < E < u_\infty (= U_\infty)$ , то зависимость  $r(t)$  будет периодической. За каждый период изменения  $r$  полярный угол получит одно и то же приращение  $\Delta\phi$ . Так как  $\Delta\phi$ , вообще говоря, несоизмеримо с  $2\pi$ , то траектория будет, как правило, иметь вид розетки (рис. 141) и при своем продолжении всюду плотно заполнит кольцо между окружностями  $r = r_{\min}$  и  $r = r_{\max}$ .

Однако для двух наиболее интересных видов центральных сил, которые мы сейчас рассмотрим, траектории получаются замкнутыми

и без самопересечений, более того — просто эллипсами! В первом примере будем считать, что сила обратно пропорциональна квадрату расстояния частицы от начала координат. По этому закону движутся небесные тела (закон Ньютона) или электрически заряженные частицы (закон Кулона), если центральное тело, вызвавшее силу притяжения, можно считать покоящимся (об этом условии мы поговорим позже).

В рассматриваемом примере  $F(r) = \frac{k}{r^2}$ ,  $U(r) = -\frac{k}{r}$ , поэтому в силу формулы (18)

$$u(r) = -\frac{k}{r} + \frac{G^2}{2mr^2}.$$

На рис. 142 показан график этого *эффективного потенциала* при  $k > 0$  (как мы будем считать впредь) и различных значениях  $G$ . Ясно, что если  $G \neq 0$ , т. е. если движение не вырождается в прямолинейное, то центробежный потенциал при  $r \rightarrow 0$  нарастает быстрее, чем потенциал притяжения, а потому  $u(+0) = \infty$ ; это означает, что движущаяся частица не может упасть на центральное тело — во всяком случае, если считать его достаточно малым и тем самым пренебречь возможностью того, что частица «налетит» на него, проходя слишком близко от начала координат.

Так как  $\frac{du}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{G^2}{mr^3}$ , то минимум эффективного потенциала достигается при

$$\frac{k}{r^2} - \frac{G^2}{mr^3} = 0, \text{ откуда } r = \tilde{r} = \frac{G^2}{mk}, \text{ причем } u_{\min} = -\frac{mk^2}{2G^2}.$$

Значит, возможно решение  $r \equiv \frac{G^2}{mk}$ , которому отвечает движение частицы по окружности с центром в начале координат. Соответствующая угловая скорость определяется из уравнения (13):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{m\tilde{r}^2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m\tilde{r}^3}}; \quad (19)$$

она постоянная, т. е. мы получаем равномерное вращение частицы вокруг центрального тела. Если рассматривается гравитационное поле, то  $k = \kappa m M$ , где  $\kappa$  — гравитационная постоянная, а  $M$  — масса

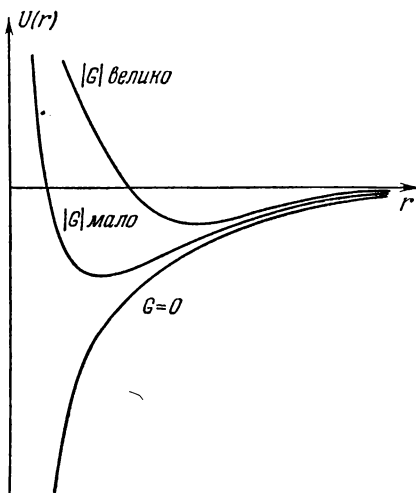


Рис. 142.



центрального тела. Отсюда в силу (19) получаем период обращения:

$$T = \frac{2\pi}{d\varphi/dt} = 2\pi \sqrt{\frac{m\tilde{r}^3}{\kappa m M}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa M}} \tilde{r}^{3/2}.$$

Мы пришли к *третьему закону Кеплера*: квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам их расстояний от Солнца. Здесь он доказан только для круговых орбит, но при соответствующем уточнении формулировки он оказывается справедливым для любых орбит (см. упражнение 1).

Чтобы выяснить вид некруговых траекторий при  $G \neq 0$ , подставим в уравнение (15)  $U(r) = -k/r$  и произведем дополнение до полного квадрата; мы получим (проверьте!)

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{k}{G} - \frac{G}{mr}\right)^2 = q^2, \quad (20)$$

где для краткости обозначено  $q = \left[\frac{2}{m} \left(E + \frac{mk^2}{2G^2}\right)\right]^{1/2}$ . При этом мы учитываем неравенство  $E > -\frac{mk^2}{2G^2}$  (откуда оно вытекает?). В силу (20) можно обозначить

$$\frac{k}{G} - \frac{G}{mr} = q \cos \psi, \quad \frac{dr}{dt} = q \sin \psi, \quad \text{где } \psi = \psi(t). \quad (21)$$

Дифференцируя первое равенство (21), получим  $(G/mr^2) \frac{dr}{dt} = -q \sin \psi \frac{d\psi}{dt}$ , откуда, учитывая второе равенство (21), а также равенство (13), получаем, что  $\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}$ , т. е.  $\psi = \alpha - \varphi$ , где  $\alpha = \text{const}$  определяется начальными условиями. Из первого равенства (21) получаем

$$r = \frac{G^2}{\kappa m} \left[1 - \frac{Gq}{k} \cos(\alpha - \varphi)\right]^{-1} = p [1 - \varepsilon \cos(\varphi - \alpha)]^{-1}, \quad (22)$$

где обозначено

$$p = \frac{G^2}{\kappa m}, \quad \varepsilon = \frac{Gq}{k}.$$

Из уравнения (22) сразу видно, что при  $\varepsilon < 1$  траектория будет замкнутой (рис. 143), тогда как при  $\varepsilon \geq 1$  она уходит на бесконечность. Нетрудно проверить, что условие  $\varepsilon < 1$  равносильно неравенству  $E < 0$ ; таким образом, траекториями ограниченных движений (см. рис. 142) служат замкнутые линии. Более точно, уравнение (22) при  $\varepsilon < 1$  определяет эллипс с фокусом в начале координат и большой осью, наклоненной под углом  $\alpha$  к полярной оси. (Для доказательства этого утверждения, которое мы предоставляем читателю, можно перейти к декартовым координатам по формулам  $x' = r \cos(\varphi - \alpha)$ ,  $y' = r \sin(\varphi - \alpha)$ .) Таким образом, траекто-

риями ограниченных движений служат эллипсы с одним из фокусов в центральном теле; в этом состоит *первый закон Кеплера*. Аналогично проверяется, что при  $\epsilon > 1$  движение происходит по гиперболе, а в пограничном случае, при  $\epsilon = 1$ , — по параболе.

Можно доказать, что, и обратно, из законов Кеплера вытекает закон притяжения  $F(r) = k/r^2$ ; поэтому движения по такому закону называются *кеплеровыми*.

До сих пор мы считали центральное тело как бы «приклепанным» к началу координат. Движением центрального тела можно пренебречь, если его масса  $M$  существенно больше массы  $m$ ,

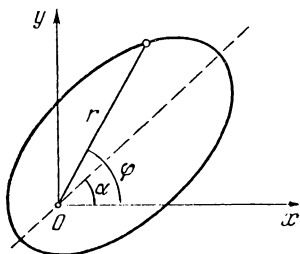


Рис. 143.

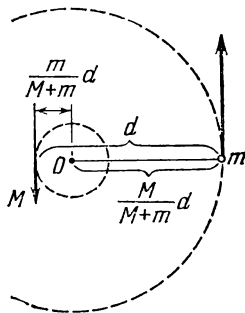


Рис. 144.

$M \gg m$ . Оказывается — мы не будем здесь это доказывать, — что случай сравнимых масс  $M$  и  $m$  приводит к разобранному, однако кривые второго порядка, по которым движутся обе массы, будут тогда иметь фокус в центре масс всей системы. Интересно, что при этом распределение между обоими телами как значений кинетической энергии, так и моментов количества движения относительно центра масс получается обратно пропорциональным массам этих тел. В самом деле, ограничимся для простоты случаем, когда тела движутся по окружностям с центром в центре масс  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , и обозначим через  $d$  (постоянное) расстояние между телами (рис. 144). Тогда кинетическая энергия и момент количества движения массы  $M$  равны соответственно  $\frac{M}{2} \left( \frac{\omega d}{M+m} \right)^2$  и  $\frac{M d}{M+m} \frac{M \omega d}{M+m}$ , тогда как для массы  $m$  эти величины равны  $\frac{m}{2} \left( \frac{\omega M d}{M+m} \right)^2$  и  $\frac{M d}{M+m} \frac{m \omega M d}{M+m}$ , откуда и вытекает обратная пропорциональность.

Случай отталкивания по закону Кулона, т. е.  $k < 0$ , мы предоставляем рассмотреть читателю; отметим только, что при  $G \neq 0$  траектории представляют собой гиперболы.

В качестве другого примера центральной силы рассмотрим силу  $F = -kr$  ( $k > 0$ ), пропорциональную расстоянию частицы от

начала координат. Здесь потенциал  $U(r) = \frac{k}{2} r^2$ . В декартовых координатах рассматриваемый потенциал можно записать в виде

$$U = \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2).$$

В силу § IV.6 такой вид имеет главная (квадратичная) часть разложения потенциала  $U$  по степеням  $x, y, z$  в окрестности точки его минимума в изотропном случае, т. е. когда эквипотенциальные

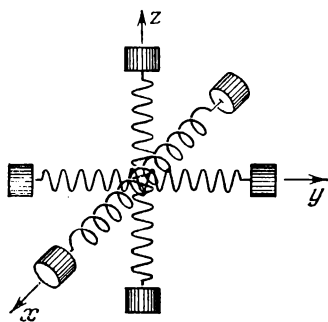


Рис. 145.

поверхности представляют собой, с точностью до малых высшего порядка, не эллипсоиды, а сферы. Поэтому рассматриваемый потенциал описывает малые колебания частицы вблизи произвольного положения ее устойчивого равновесия (без особенности у потенциала) в изотропном случае. Такой случай реализуется, например, для схемы рис. 145, если все пружины имеют одинаковую жесткость. Из § X.6 вытекает, что такой потенциал возникает также внутри однородного притягивающего шара; можно представить,

что частица движется внутри канала, просверленного в соответствии с рассчитанной траекторией в этом шаре, настолько тонкого, что влиянием его на гравитационное поле можно пренебречь.

Если принять плоскость, в которой движется частица, за плоскость  $x, y$ , то в рассматриваемом примере дифференциальное уравнение движения можно записать в виде

$$m \frac{d^2}{dt^2} (xi + yj) = -kr r^0 = -kr = -k(xi + yj)$$

или, в проекциях,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0.$$

Таким образом, в декартовых координатах переменные разделились, т. е. колебания по обеим осям происходят независимо друг от друга. Закон движения в силу § VII.3 имеет вид

$$x = r_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = r_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (23)$$

где  $\omega = \sqrt{k/m}$ , а постоянные  $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$  определяются начальными условиями. Мы предоставляем читателю убедиться в том, что уравнения (23) определяют в качестве траектории частицы эллипс с центром в начале координат.

Таким образом, для силы  $F(r) = kr$  все траектории также оказываются замкнутыми, причем период  $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$  колебаний

частицы не зависит от начальных условий. Отсюда вытекает, например, что если прорыть через центр Земли колодец и выкачать из него воздух, то период колебаний камня, брошенного в этот колодец, не будет зависеть от амплитуды и окажется равным времени обращения спутников на уровне земной поверхности (без сопротивления воздуха).

Конечно, во втором из разобранных примеров замкнутость траекторий получилась из-за того, что в декартовых осях переменные разделились, а колебания по обеим осям имели одинаковый период. Но удивительно и замечательно то, что и в первом примере, где переменные не разделяются, траектории тоже оказались замкнутыми! Это похоже на некое математическое чудо. В самом деле, форма закона  $F = k/r^2$  была в § X.7 получена непосредственно из условия  $\operatorname{div} \mathbf{F}(r) = 0$  ( $r \neq 0$ ), естественного с точки зрения физики. В отличие от этого, замкнутость траекторий при таком законе притяжения отнюдь не очевидна и доказана с помощью искусственных математических выкладок. Это «чудо» значительно облегчило измерение и тем самым упростило анализ сравнительно малых отклонений реальных траекторий от эллиптической формы (например, движение перигелия Меркурия; как известно, объяснение этого движения, вытекающее из общей теории относительности, послужило одним из первых решающих подтверждений этой теории).

### Упражнения

1. Найдите период колебаний частицы по эллипсу (22) и установите связь этого периода с большой полуосью эллипса.
2. Найдите период изменения радиуса частицы для закона притяжения  $F = -kr$  с помощью формулы (17) и объясните расхождение ответа с результатом, полученным в этом параграфе.

## § 4. Вращение твердого тела

Рассмотрим вращение твердого тела ( $\Omega$ ) вокруг фиксированной оси, за которую мы примем ось  $z$ . Кинетический момент  $\mathbf{G}$  этого тела относительно какой-либо точки  $O$  на оси вращения легко связать с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$  вращения, пользуясь формулой (5):

$$\mathbf{G} = \int_{(\Omega)} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm = \int_{(\Omega)} \mathbf{r} \times (\omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}) \rho \, d\Omega = \omega \int_{(\Omega)} \rho \mathbf{r} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \, d\Omega,$$

где через  $\rho$  мы обозначили (вообще говоря, непостоянную) плотность тела. Вспомнив, что  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , найдем по формуле (4)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{r} = (x^2 + y^2 + z^2) \mathbf{k} - z(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \\ &= -xzi - yzj + (x^2 + y^2) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} G_x &= -\omega \int_{(\Omega)} \rho xz \, d\Omega, & G_y &= -\omega \int_{(\Omega)} \rho yz \, d\Omega, \\ G_z &= \omega \int_{(\Omega)} \rho (x^2 + y^2) \, d\Omega. \end{aligned}$$

В частности, последний интеграл

$$I_z = \int_{(\Omega)} \rho (x^2 + y^2) \, d\Omega \quad (24)$$

называется *моментом инерции* тела  $(\Omega)$  относительно оси  $z$ , так что  $G_z = \omega I_z$ .

Допустим, что на тело  $(\Omega)$  действуют некоторые заданные силы  $F_i^{ex}$  и силы  $F_j^{op}$  реакции в опорах, заранее не заданные. Если эти последние силы приложены к оси вращения, то их момент  $\mathbf{r}^{op} \times \mathbf{F}_j^{op} = z^{op} \mathbf{k} \times \mathbf{F}_j^{op}$  перпендикулярен оси  $z$ . Чтобы не рассматривать эти неизвестные силы, спроектируем равенство (11) на ось  $z$ , что даст

$$\frac{dG_z}{dt} = \frac{d(\omega I_z)}{dt} = L_z, \quad (25)$$

причем при образовании правой части, т. е. проекции полного момента внешних сил на ось вращения, надо учитывать только заданные силы  $F_i^{ex}$ . Таким образом, от векторного равенства (11) мы перешли к скалярному равенству (25).

Рассмотрим, в частности, случай, когда внешние силы  $F_i^{ex}$  отсутствуют или направлены параллельно оси вращения. Тогда  $L_z = 0$  и из (25) получаем  $\omega I_z = \text{const}$ . Если при этом тело не меняется, то  $I_z = \text{const}$ , а потому и  $\omega = \text{const}$ , т. е. угловая скорость вращения не меняется. (При этом мы пренебрегаем трением в опорах, которое приводит к дополнительному слагаемому в правой части (25) и, как следствие, к затуханию скорости вращения.) Если же  $I_z$  меняется, то  $\omega$  изменяется обратно пропорционально  $I_z$ . Этим свойством пользуется танцовщица, когда она вращается («делает туры») на одной ноге. Начав вращение с расставленными руками, она быстро сводит их (обычно книзу, переводя их в «подготовительное положение»). При этом в силу формулы (24) получается, что она уменьшает  $I_z$  своего тела (причем довольно сильно, так как расставленные руки дают в  $I_z$  значительный вклад) и соответственно увеличивает  $\omega$ . (Как сказано в «Основах классического танца» А. Я. Вагановой, «этим движением рук и берется нужный для тура форс».) Одновременно она приподнимается на носок (на «полупальцы» или на пальцы) для уменьшения трения. После нескольких оборотов она вновь разводит руки, уменьшая  $\omega$ , и становится на обе ступни, что приводит к полной остановке.

Рассмотрим теперь *гироскоп* (волчок), т. е. твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, которую мы примем за начало координат. Принимается, что гироскоп имеет ось симметрии, проходящую через точку закрепления, и быстро вращается вокруг этой оси, а силы трения пренебрежимо малы.

Заметим, что если твердое тело вращается вокруг оси симметрии, проходящей через начало координат, то кинетический момент этого тела направлен по оси вращения и пропорционален угловой скорости вращения. В самом деле, первое вытекает хотя бы из соображений симметрии, а второе — непосредственно из определения (10). С другой стороны, в механике выводится, что силы тяжести можно заменить равнодействующей, проходящей через центр тяжести тела, который, очевидно, лежит на оси симметрии. Поэтому если гироскоп закреплен в центре тяжести или если он запущен в вертикальном положении (в обоих этих случаях момент силы тяжести равен нулю), то из равенства (11) вытекает, что кинетический момент, а с ним и ось вращения остаются постоянными. При кратковременных толчках правая часть (11) может на короткое время становиться отличной от нуля. При этом  $\mathbf{G}$  получит некоторое приращение, однако чем больше угловая скорость, т. е. чем больше  $|\mathbf{G}|$ , тем меньше относительное значение этого приращения, т. е. тем устойчивее гироскоп. На этом свойстве основано применение гироскопа в технике.

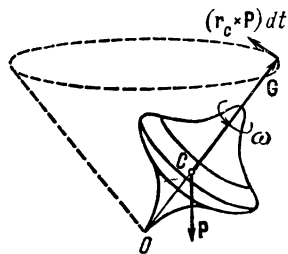


Рис. 146.

Рассмотрим теперь, что произойдет, если центр тяжести расположен выше точки закрепления (как это будет, в частности, для детского волчка), а ось вращения расположена не вертикально. В этом случае сила тяжести  $\mathbf{P}$ , приложенная к центру тяжести  $\mathbf{C}$ , создает опрокидывающий момент  $\mathbf{r}_C \times \mathbf{P}$  (рис. 146). В силу уравнения (11) кинетический момент  $\mathbf{G}$  за время  $dt$  получит бесконечно малое приращение  $d\mathbf{G} = (\mathbf{r}_C \times \mathbf{P}) dt$ . Так как этот бесконечно малый вектор горизонтален и перпендикулярен вектору  $\mathbf{G}$ , то вектор  $\mathbf{G} + d\mathbf{G}$  получается из  $\mathbf{G}$  поворотом на бесконечно малый угол вокруг вертикальной оси. Это значит, что численное значение угловой скорости не изменится, но ось вращения гироскопа повернется вокруг вертикальной оси. К новому положению можно применить то же рассуждение, и мы видим, таким образом, что под действием силы тяжести ось симметрии гироскопа получает дополнительное равномерное вращательное движение (так называемое *прецессионное движение*) вокруг вертикальной оси. Скорость прецессии тем меньше, чем больше  $\omega$ , так как при большом  $\mathbf{G}$  то же самое  $d\mathbf{G}$  влечет за собой меньший поворот.

Сделанные выше выводы не являются вполне точными, так как из-за прецессии кинетический момент идет не точно по оси гироскопа, а отклоняется от нее. Поэтому в действительности движение гироскопа является более сложным, чем описано выше. Однако пока угловая скорость  $\omega$  велика, эта поправка незначительна. Если гироскоп не подкручивается и из-за неизбежного постоянно действующего трения угловая скорость уменьшается, то скорость прецессии увеличивается, а когда эти скорости становятся сравнимыми, характер движения существенно изменяется и, в конце концов, волчок падает.

### Упражнение

Вычислите  $J_z$  для однородного: а) цилиндра радиуса  $R$  массы  $M$  с осью вращения  $Oz$ ; б) прямолинейного стержня длины  $L$  массы  $m$ , если ось  $Oz$  служит перпендикуляром к середине стержня.

## § 5. Симметрические и антисимметрические тензоры

Рассмотрение кинетического момента твердого тела служит хорошей областью приложения понятия тензора (§ IX.5). Будем пользоваться тензорными обозначениями, примененными в § IX.5. Пусть начало координат  $O$  зафиксировано, но оси координат могут выбираться по-разному. Из § 4 видно, что при рассмотрении кинетического момента тела  $\Omega$  существенную роль играют интегралы

$$I_{ij} = \begin{cases} - \int_{(\Omega)} \rho x_i x_j d\Omega & (i \neq j), \\ \int_{(\Omega)} \rho (x_k x_k - x_i x_j) d\Omega & (i = j). \end{cases} \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что при замене координатного базиса величины (26) преобразуются по тензорному правилу (IX.23) и потому образуют тензор 2-го ранга

$$I = I_{ij} e_i e_j, \quad (27)$$

называемый *тензором инерции* тела  $(\Omega)$  относительно точки  $O$ . Для доказательства запишем величины  $I_{ij}$  единой формулой:

$$I_{ij} = \int_{(\Omega)} \rho (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) d\Omega,$$

где символ *Кroneкера*  $\delta_{ij}$  при любом выборе базиса определен равенствами

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

Мы предоставляем читателю убедиться в том, что величины  $\delta_{ij}$

образуют тензор 2-го ранга (он называется *единичным тензором*). Если теперь базис заменен по формулам (IX.19), то величины  $x_i$ , как проекции вектора  $\mathbf{r}$ , преобразуются по формулам  $x'_i = \alpha_{ij} x_j$ , откуда, применяя равенство  $x'_k x'_k = x_k x_k$  (откуда оно следует?), получаем

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \int_{(\Omega)} \rho (\delta'_{ij} x'_k x'_k - x'_i x'_j) d\Omega = \int_{(\Omega)} \rho (\alpha_{ir} \alpha_{jl} \delta_{rl} x_k x_k - \alpha_{ir} \alpha_{jl} x_r x_l) d\Omega = \\ &= \alpha_{ir} \alpha_{jl} \int_{(\Omega)} \rho (\delta_{rl} x_k x_k - x_r x_l) d\Omega = \alpha_{ir} \alpha_{jl} I_{rl}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь тело  $(\Omega)$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через начало координат  $O$ ; покажем, как выражается соответствующий кинетический момент  $\mathbf{G}$  относительно  $O$ . Рассуждая, как в § 4, и пользуясь формулой (4), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_{(\Omega)} \rho \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) d\Omega = \int_{(\Omega)} \rho [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \omega - (\mathbf{r} \cdot \omega) \mathbf{r}] d\Omega = \\ &= \int_{(\Omega)} \rho [x_k x_k \omega_i \mathbf{e}_i - x_j \omega_j x_i \mathbf{e}_i] d\Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Чтобы вынести под знаком интеграла за скобки  $\omega_j$  и  $\mathbf{e}_i$ , запишем  $\omega_i = \delta_{ij} \omega_j$  (продумайте эту формулу!); это даст

$$\mathbf{G} = \int_{(\Omega)} \rho (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) \omega_j \mathbf{e}_i d\Omega = I_{ij} \omega_j \mathbf{e}_i,$$

другими словами,

$$G_i = I_{ij} \omega_j. \quad (29)$$

(Можно написать также  $\mathbf{G} = \mathbf{I} \cdot \omega$ , где скалярное произведение тензора 2-го ранга на вектор определяется с помощью формул  $(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$ , откуда

$$\mathbf{I} \cdot \omega = (I_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot \omega_k \mathbf{e}_k = I_{ij} \omega_k \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) = I_{ij} \omega_k \mathbf{e}_i \delta_{jk} = I_{ij} \omega_j \mathbf{e}_i = \mathbf{G}.)$$

Формула (29), по существу, совпадает с формулами § 4, однако не связана, как это было в § 4, со специальным выбором декартовых осей. Она показывает, в частности, что, за исключением сферически симметричного случая (когда  $I_{ij} = I \delta_{ij}$ ), направления векторов  $\omega$  и  $\mathbf{G}$ , вообще говоря, различны. Например, если для тела, изображенного на рис. 147, массы втулки и стержня пренебрежимо малы по сравнению с  $m$ , то момент вращения согласно формуле (4) равен

$$\mathbf{G} = \rho \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) = \rho r^2 \omega - (\omega \text{ пр } \omega \mathbf{r}) \mathbf{r},$$

т. е. вектор  $\mathbf{G}$  вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Это изменение

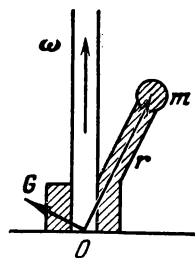


Рис. 147.



момента вращения в силу формулы (11) компенсируется моментом, передаваемым втулкой на ось вращения.

Выведем еще формулу для кинетической энергии  $T$  вращающегося тела ( $\Omega$ ). Для этого заметим сначала, что для любых двух векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  на основании известной формулы для площади параллелограмма будет  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ . С другой стороны,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})$ . Отсюда

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 [\sin^2(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) + \cos^2(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}})] = a^2 b^2. \quad (30)$$

Умножим равенство (28) скалярно на  $\boldsymbol{\omega}$  и воспользуемся формулой (30); мы получим

$$\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_{(\Omega)} \rho [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})] d\Omega = \int_{(\Omega)} \rho |\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}|^2 d\Omega = 2T.$$

Отсюда в силу (29)

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (31)$$

Тензор (27) обладает важным свойством симметричности:

$$I_{ij} = I_{ji}, \quad (32)$$

что сразу вытекает из его определения (26). Вообще, тензор 2-го ранга, обладающий таким свойством, называется *симметрическим*. При этом нетрудно проверить, что если свойство (32) выполняется при каком-то одном выборе базиса, то оно выполняется и при любом другом выборе базиса.

Основным свойством симметрического тензора (IX.25) является возможность приведения его к *диагональному виду*, т. е. возможность такого выбора базиса  $\tilde{\mathbf{e}}_i$ , для которого все величины  $\tilde{p}_{ij}$  при  $i \neq j$  обращаются в нуль. Мы не будем здесь доказывать это общее утверждение (справедливое для симметрических тензоров в пространстве любого числа измерений), а сделаем только два замечания по этому поводу. Прежде всего, так как диагональный тензор обладает свойством симметричности, а это свойство сохраняется при замене базиса, то к диагональному виду можно приводить только симметрические тензоры. Во-вторых, так как при выборе евклидова базиса в трехмерном пространстве имеется три степени свободы (почему?), а для приведения тензора к диагональному виду надо удовлетворить трем равенствам  $\tilde{p}_{12} = \tilde{p}_{13} = \tilde{p}_{23} = 0$ , то степеней свободы оказывается как раз столько, сколько нужно.

В осях  $\tilde{\mathbf{x}}_i$ , в которых тензор инерции имеет диагональный вид (они называются *главными осями* этого тензора), выражения (29) для проекций кинетического момента и (31) для кинетической энергии

приобретают вид

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &= \tilde{I}_{11} \tilde{\omega}_1, & \tilde{G}_2 &= \tilde{I}_{22} \tilde{\omega}_2, & \tilde{G}_3 &= \tilde{I}_{33} \tilde{\omega}_3, \\ T &= \frac{1}{2} (\tilde{I}_{11} \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{I}_{22} \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{I}_{33} \tilde{\omega}_3^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tilde{I}_{11}} \tilde{G}_1^2 + \frac{1}{\tilde{I}_{22}} \tilde{G}_2^2 + \frac{1}{\tilde{I}_{33}} \tilde{G}_3^2 \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Чтобы нагляднее представить себе зависимость кинетической энергии  $T$  от направления момента вращения  $\mathbf{G}$ , изобразим на сфере  $|\mathbf{G}| = \text{const}$ , жестко связанной с телом ( $\Omega$ ), линии, которым отвечают равные значения  $T$ ; другими словами, это линии с уравнением (33)

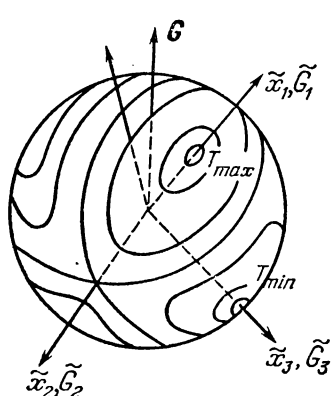


Рис. 148.

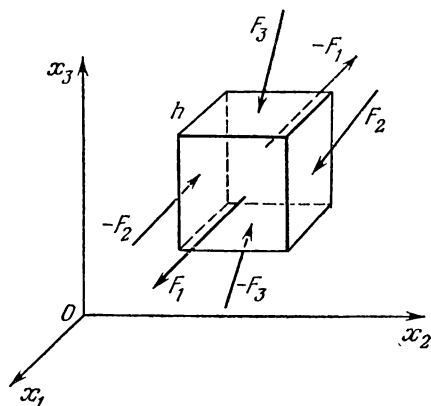


Рис. 149.

при различных значениях  $T$  (рис. 148). Допустим для определенности, что  $\tilde{I}_{11} < \tilde{I}_{22} < \tilde{I}_{33}$ . Тогда при заданном  $|\mathbf{G}|$  наибольшее значение  $T$ , равное  $\frac{1}{2\tilde{I}_{11}} |\mathbf{G}|^2$ , получится, когда  $\tilde{G}_2 = \tilde{G}_3 = 0$  (рис. 148);

при  $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 = 0$  будет наименьшее значение  $T$ , тогда как при  $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_3 = 0$   $T$  будет иметь минимакс. При свободном вращении  $\mathbf{G}$  и  $T$  постоянны, но  $\omega$  меняется как по направлению, так и по модулю (за исключением вращения вокруг одной из осей  $x_i$ , когда  $\omega \parallel \mathbf{G} \parallel \mathbf{e}_i$ ). Тело ( $\Omega$ ) поворачивается так, что вектор  $\mathbf{G}$  все время проходит через одну из изображенных линий (на рис. 148 показано перемещение  $\mathbf{G}$  относительно ( $\Omega$ )).

В качестве другого важного примера симметрического тензора упомянем о тензоре упругих напряжений. Пусть рассматривается напряженное состояние твердого тела, вызванное приложенными к нему силами. Выделим мысленно в изучаемой среде кубик со стороной  $h$  и с ребрами, параллельными осям координат. Тогда упругое воздействие окружающей среды на каждую из граней этого кубика можно заменить силой (рис. 149), которая при малом  $h$  будет пропорциональна  $h^2$ :

$$F_i = \sigma_{ij} e_j h^2 + \dots$$

Величины  $\sigma_{ij}$  зависят от выбора направления осей координат. Можно показать, что при замене базиса они преобразуются по тензорному правилу (IX.23) и потому образуют тензор 2-го ранга, который называется тензором упругих напряжений и характеризует напряженное состояние среды в рассматриваемой точке. Диагональные члены этого тензора определяют напряжения сжатия или растяжения, а внедиагональные — сдвиговые напряжения.

Нетрудно проверить, что тензор упругих напряжений симметрический. В самом деле, полный момент внешних сил, действующих на кубик, относительно его центра с точностью до малых высшего

порядка равен 
$$\sum_i 2 \cdot \frac{1}{2} h e_i \times F_i = \sum_{i,j} h^3 \sigma_{ij} e_i \times e_j.$$
 Если какое-либо

$\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ , то этот момент был бы отличен от нуля, что невозможно, так как момент инерции кубика порядка  $h^5$  и получилось бы бесконечное угловое ускорение.

Применяются также *антисимметрические тензоры*  $(p_{ij})$ , для которых

$$p_{ij} = -p_{ji}; \quad (34)$$

диагональные члены такого тензора по необходимости равны нулю. Нетрудно проверить, что если свойство антисимметрии (34) выполнено при каком-то одном выборе базиса, то оно выполняется и при любом другом выборе базиса.

Антисимметрический тензор в трехмерном пространстве непосредственно связан с векторным произведением. Именно, пусть дано линейное отображение пространства в себя с антисимметричной матрицей коэффициентов  $p_{ij}$  (см. § IX.5; мы упоминали там, что любой тензор 2-го ранга можно с точностью до размерности истолковывать как матрицу некоторого линейного отображения пространства в себя). Тогда любой вектор  $r = x_i e_i$  отображается по формуле  $Tr = p_{ij} x_j e_i = p_{12} x_2 e_1 + p_{13} x_3 e_1 - p_{12} x_1 e_2 + p_{23} x_3 e_2 - p_{13} x_1 e_3 - p_{23} x_2 e_3$ . Но тот же результат получится (проверьте!), если векторно помножить вектор  $p = -(p_{12} e_3 + p_{23} e_1 + p_{31} e_2)$  на  $r$ ; итак,  $Tr \equiv p \times r$ . Из последнего равенства видно, что вектор  $p$  определен отображением  $T$ , а потому и тензором  $p_{ij}$  инвариантно, т. е. независимо от выбора декартова базиса.

Рассмотрим в заключение тензор линейного отображения, близкого к тождественному. Он имеет вид  $\delta_{ij} + \eta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — единичный тензор, а  $\eta_{ij}$  — малые коэффициенты; такой тензор получается, в частности, при рассмотрении малых деформаций упругого тела.

Представим тензор  $\eta_{ij}$  в виде суммы симметрического тензора  $\beta_{ij}$  и антисимметрического тензора  $\gamma_{ij}$ , где

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2} (\eta_{ij} + \eta_{ji}), \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\eta_{ij} - \eta_{ji}). \quad (35)$$

Тогда тензор  $\beta_{ij}$  в некоторых осях  $\tilde{x}_i$  принимает диагональный вид и потому определяет комбинацию малых равномерных растяжений вдоль этих осей: вдоль оси  $\tilde{x}_1$  в  $1 + \tilde{\beta}_{11}$  раз (конечно, если  $\tilde{\beta}_{11} < 0$ , то на самом деле получится сжатие) и т. д. При этом объем увеличится в  $(1 + \tilde{\beta}_{11})(1 + \tilde{\beta}_{22})(1 + \tilde{\beta}_{33})$  или, с точностью до малых высшего порядка, в  $1 + \tilde{\beta}_{11} + \tilde{\beta}_{22} + \tilde{\beta}_{33} = 1 + \tilde{\beta}_{ii}$  раз. Но  $\tilde{\beta}_{ii} = \beta_{ii}$  (см. § IX.5), а потому в силу (35)  $\tilde{\beta}_{ii} = \eta_{ii}$ .

Что касается тензора  $\gamma_{ij}$ , то он определяет малый поворот. В самом деле, при таком повороте вокруг вектора  $\mathbf{p}^0$  на малый угол  $\psi$  каждый вектор  $\mathbf{r}$ , с точностью до малых высшего порядка, переходит в вектор  $\mathbf{r} + \psi \mathbf{p}^0 \times \mathbf{r}$ , а мы показали выше, как по антисимметрическому тензору  $\gamma_{ij}$  можно подобрать соответствующий вектор  $\mathbf{p} = \psi \mathbf{p}^0$ .

Итак, линейное отображение, близкое к тождественному, сводится к комбинации равномерных растяжений вдоль взаимно перпендикулярных осей и поворота. Так как при повороте объем не меняется, то сумма  $\eta_{ii}$  (она называется *следом* тензора  $\eta_{ij}$ ) представляет собой коэффициент приращения объема, т. е. при рассматриваемом отображении объем увеличится в  $1 + \eta_{ii}$  раз.

Подчеркнем, что наложение деформаций приводит к сложению соответствующих тензоров только для малых деформаций; по существу, это получается в результате применения формулы  $(1 + \alpha)(1 + \beta) \approx 1 + (\alpha + \beta)$  при малых  $\alpha, \beta$ . Большие деформации (например, повороты на конечный угол) накладываются по совсем иному, вообще говоря, некоммутативному закону, который мы здесь не будем рассматривать.

### Упражнения

1. Докажите теорему о возможности приведения симметрического тензора к диагональному виду для двумерного случая.
2. Разложите малый сдвиг (рис. 111, а) на растяжения и поворот.

## § 6. Истинные векторы и псевдовекторы

Между вектором линейной скорости и вектором угловой скорости имеется следующее принципиальное различие. Куда именно направлен вектор линейной скорости, не вызывает никаких сомнений. В отличие от этого согласно § 2 вектор угловой скорости откладывается по оси вращения; но в какую именно сторону? В § 2 мы выбрали эту сторону в соответствии с правилом правого винта. Но с таким же основанием можно условиться опираться на правило левого винта, и тогда на рис. 137 вектор  $\omega$  был бы направлен вниз. Таким образом, выбор направления вектора угловой скорости по оси вращения является условным и зависит от выбранного правила винта, так

что при перемене этого правила на противоположное этот вектор заменяется на противоположный. Векторы, обладающие таким свойством, называются *псевдовекторами* в отличие от *истинных векторов*, не зависящих от выбора правила винта. Итак, вектор линейной скорости — это истинный вектор (такими же являются векторы силы, ускорения, электрической напряженности и т. д.), а вектор угловой скорости — это псевдовектор. Принята также другая терминология, истинные векторы называют *полярными* (от слова «полюс»), а псевдовекторы — *аксиальными* (от латинского названия оси)\*).

Из определения векторного произведения ясно, что векторное произведение двух истинных векторов представляет собой псевдовектор, так как при перемене правила винта бывшая наружная сторона параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах, станет внутренней (см. рис. 134 и 135). Таким образом, момент силы и кинетический момент (§ 2) — это псевдовекторы. Аналогичным образом легко проверить, что векторное произведение истинного вектора на псевдовектор представляет собой истинный вектор (см., например, формулу (5)), а двух псевдовекторов — также псевдовектор.

Вопрос об эквивалентности правой и левой систем координат совсем не так прост, как это может показаться с первого взгляда. Эта эквивалентность означает, что для любого явления теоретически возможно *зеркально отраженное* явление, при котором все геометрические формы являются как бы зеркальными отражениями соответствующих форм для первого явления, подобно тому как правая перчатка является зеркальным отражением левой. (Так называемый «закон сохранения четности».) Недавно обнаружено, что этот закон не имеет универсальной силы, и в связи с этим крупнейший советский физик-теоретик лауреат Ленинской и Нобелевской премий Л. Д. Ландау (1908—1968) предложил «принцип комбинированной четности», согласно которому все физические явления допускают зеркальное отражение только при замене всех частиц античастицами\*\*).

Отметим в заключение, что векторное умножение двух векторов, при котором проекции вектора-произведения выражаются через проекции векторов-сомножителей (но в то же время произведение инвариантно относительно выбора осей координат) и выполняются естественные правила умножения, — это операция, характерная для трехмерного пространства. Грубо говоря, дело здесь заключается в том, что в трехмерном пространстве можно условиться каждым двум разным ортам, например  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  (по осям  $x$  и  $y$ ), ставить в соответствие третий недостающий до комплекта орт  $\mathbf{k}$  (по оси  $z$ ). Так

---

\*) При рассмотрении процессов, происходящих во времени, возникает еще классификация векторов по их поведению при изменении знака  $t$  (сравните, например, векторы скорости и перемещения).

\*\*) В конце 1964 г. появились новые экспериментальные данные, согласно которым принцип комбинированной четности также нарушается и не является точным.

можно прийти, производя циклические (круговые) перестановки, к формулам (1) векторного умножения ортов. (В самом деле, если  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ , то обязательно  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ , так как вектор  $\mathbf{k}$  расположен относительно векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  в точности так же, как вектор  $\mathbf{i}$  относительно векторов  $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ .) Из последних получаются формулы векторного умножения любых векторов. В  $n$ -мерном векторном пространстве (§ IX.6) нужно взять  $n-1$  ортов, чтобы определить  $n$ -й недостающий. Поэтому аналогом векторного произведения в  $n$ -мерном пространстве является вектор, определенным образом построенный из  $n-1$  векторов\*). Таким образом, векторное произведение двух векторов специфично для трехмерного пространства. Понятно, что мы не перечислили всех условий, необходимых для определения векторного произведения. Все же хотелось отметить разницу между векторным произведением и скалярным произведением, которое определяется совершенно одинаково в пространстве любого числа измерений.

### Упражнения

1. Справедливы ли формулы (1) и (3) в левой системе координат?
2. Постройте разумное определение векторного произведения в четырехмерном пространстве.

## § 7. Ротор векторного поля

В § X.3 при вычислении работы силового поля мы уже пришли к понятию линейного интеграла. Сейчас мы рассмотрим это понятие в общем виде.

Пусть в пространстве, в котором задано поле вектора  $\mathbf{A}$ , выбрана ориентированная линия  $(L)$ . Тогда *линейным интегралом* вектора  $\mathbf{A}$  по линии  $(L)$  называется интеграл

$$I = \int_{(L)} A_{\tau} dL, \quad (36)$$

где  $A_{\tau}$  — проекция вектора  $\mathbf{A}$  на касательную к  $(L)$ , проведенную в направлении обхода (рис. 150). Так как вектор  $d\mathbf{r}$  идет вдоль по  $\tau$ , а  $|d\mathbf{r}| = dL$  (§ IX.4), то выражение для линейного интеграла можно переписать так:

$$I = \int_{(L)} |\mathbf{A}| \cos \alpha |d\mathbf{r}| = \int_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(L)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz).$$

\*) Аналог смешанного произведения (стр. 352) составляется для  $n$  векторов; это произведение равно  $n$ -объему «параллелепипеда», натянутого на эти векторы. В частности, для плоскости, т. е. при  $n = 2$ , получаем площадь, которая является скаляром или, точнее, — псевдоскаляром. Слово «псевдо» значит «почти»; в данном случае имеется в виду, что величина не меняется при поворотах системы координат, но множится на  $-1$  при перестановке осей  $x$  и  $y$ . Примером псевдоскаляра в трехмерном пространстве была величина смешанного произведения трех истинных векторов, равная объему: знак этой величины при данных трех векторах зависит от выбора правой или левой системы.

Линейный интеграл есть величина скалярная и обладает обычными свойствами интегралов. При перемене ориентации линии ( $L$ ) он меняет только знак. Если угол  $\alpha$  (см. рис. 150) во всех точках линии ( $L$ ) острый, то  $I > 0$ , а если он тупой, то  $I < 0$ . Равенство  $I = 0$  получается, если угол  $\alpha$  все время прямой или (что бывает чаще) если интегралы по частям ( $L$ ), где  $\alpha$  острый и  $\alpha$  тупой, взаимно уничтожаются.

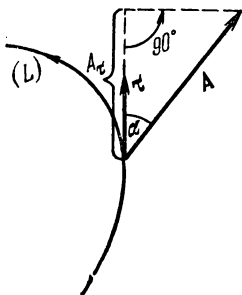


Рис. 150.

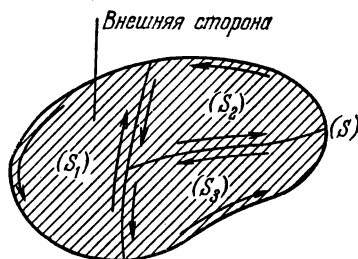


Рис. 151.

Если линия ( $L$ ) замкнутая, то линейный интеграл

$$\Gamma = \oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{(L)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (37)$$

называется *циркуляцией* вектора  $\mathbf{A}$  по линии ( $L$ ). Циркуляция обладает следующим важным свойством аддитивности (сложения). Допустим, что некоторая ориентированная незамкнутая поверхность ( $S$ ) разбита на несколько частей, например на три части ( $S_1$ ), ( $S_2$ ) и ( $S_3$ ), как на рис. 151. Обозначим контуры ( $S$ ) и этих частей, в соответствии с ориентацией ( $S$ ), через ( $L$ ), ( $L_1$ ), ( $L_2$ ) и ( $L_3$ ), а соответствующие циркуляции — через  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ . Тогда

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3.$$

В самом деле, если в правой части все циркуляции представить в виде суммы линейных интегралов по отдельным дугам, изображенным на рис. 151, то интегралы по внутренним к ( $S$ ) дугам все взаимно уничтожаются (так как каждая такая дуга проходится дважды в противоположных направлениях), а интегралы по контурным к ( $S$ ) дугам сложатся и дадут циркуляцию, стоящую в левой части.

Доказанное свойство аддитивности дает возможность говорить о том, что циркуляция (37) «порождается» на поверхности ( $S$ ), а тем самым и о «плотности порождения циркуляции», т. е. о циркуляции, порождаемой бесконечно малым куском поверхности и отнесенной к единице площади этого куска. К целесообразности

рассмотрения такой плотности приводит также следующее соображение. Легко проверить, что циркуляция постоянного вектора всегда равна нулю:

$$\oint_{(L)} (C_1 dx + C_2 dy + C_3 dz) = (C_1 x + C_2 y + C_3 z) \Big|_{(L)},$$

где последний значок говорит о том, что нужно взять приращение результата интегрирования, когда точка обходит контур  $(L)$ . Однако после такого обхода последнее выражение, стоящее в скобках, возвращается к своему исходному значению, и потому приращение равно нулю. Но теперь можно рассуждать подобно тому, как это было сделано в конце § X.7. Именно, в силу формулы Тейлора внутри бесконечно малого контура вектор  $\mathbf{A}$  можно представить в виде суммы постоянного вектора и членов первого порядка малости. При этом происходит почти полная компенсация: интеграл от постоянного вектора равен нулю, а интеграл от членов первого порядка малости даст величину второго порядка малости. Таким образом, циркуляция по бесконечно малому контуру пропорциональна не длине контура, а площади, охватываемой этим контуром.

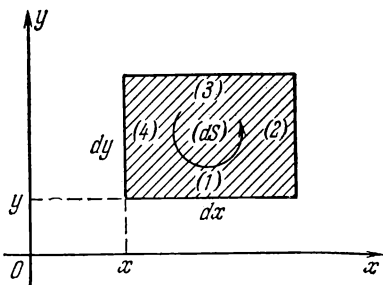


Рис. 152.

Чтобы подсчитать указанную плотность порождения циркуляции, вычислим циркуляцию вектора  $\mathbf{A}$  по бесконечно малому контуру. Сначала допустим, что этот контур лежит в плоскости  $z = \text{const}$ . Кроме того, так как при подсчете плотности форма контура несущественна, то возьмем за этот контур прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (см. рис. 152, где размер этого прямоугольника несколько преувеличен). По формуле (37) соответствующая циркуляция равна

$$d\Gamma = \int_{(1)} A_x dx + \int_{(2)} A_y dy + \int_{(3)} A_x dx + \int_{(4)} A_y dy \quad (38)$$

(цифрами обозначены последовательные стороны прямоугольника, см. рис. 152), так как на каждой стороне изменяется только одна переменная, а остальные дифференциалы равны нулю. Учитывая направление обхода указанных сторон, получим из (38)

$$\begin{aligned} d\Gamma &= (A_x)_1 dx + (A_y)_2 dy - (A_x)_3 dx - (A_y)_4 dy = \\ &= [(A_y)_2 - (A_y)_4] dy - [(A_x)_3 - (A_x)_1] dx, \end{aligned} \quad (39)$$



где цифровой индекс указывает, на какой стороне берется соответствующая проекция. Однако с точностью до малых высшего порядка

$$(A_y)_2 - (A_y)_4 = \frac{\partial A_y}{\partial x} dx, \quad (A_x)_3 - (A_x)_1 = \frac{\partial A_x}{\partial y} dy,$$

и потому формула (39) дает

$$d\Gamma = \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial A_x}{\partial y} dy dx = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS.$$

Итак, для бесконечно малого замкнутого контура

$$\frac{d\Gamma_{xy}}{dS_{xy}} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (40)$$

(индексы в левой части указывают на то, что контур параллелен плоскости  $x, y$ ). При этом имеется в виду, что контур обходится в положительном направлении; в противном случае надо поменять знак или, что то же, считать  $dS_{xy} < 0$ .

Декартовы координаты в пространстве полностью равноправны, и потому из любой формулы, содержащей эти координаты, можно получить другую верную формулу, заменив  $x, y, z$  соответственно на  $y, z, x$  или на  $z, x, y$ . (Такая перестановка, упоминавшаяся в § 6, называется *циклической* или *круговой*; при ней правая система координат остается правой.) Поэтому из (40) вытекает

$$\frac{d\Gamma_{yz}}{dS_{yz}} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{d\Gamma_{zx}}{dS_{zx}} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (41)$$

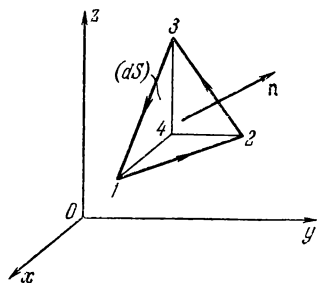


Рис. 153.

Рассмотрим теперь бесконечно малую ориентированную площадку ( $dS$ ), произвольно наклоненную относительно осей координат.

Для подсчета циркуляции эту площадку удобнее всего взять в форме треугольника, как на рис. 153. Построим на этом треугольнике тетраэдр с гранями, параллельными координатным плоскостям, и обозначим вершины этого тетраэдра цифрами, как на рис. 153. Тогда легко проверить, что

$$d\Gamma = d\Gamma_{123} = d\Gamma_{124} + d\Gamma_{234} + d\Gamma_{431},$$

так как в правой части интегралы по отрезкам 41, 42 и 43 взаимно уничтожаются. Но правую часть можно подсчитать по формулам (40) и (41)

$$d\Gamma = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS_{124} + \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dS_{234} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dS_{431}, \quad (42)$$

где цифровые индексы показывают, о каких площадях идет речь.

Полученный результат становится более обозримым, если ввести вектор, называемый *ротором* (*вихрем*, или *вихревым вектором*) поля  $\mathbf{A}$  и обозначаемый буквами  $\text{rot } \mathbf{A}$ , по формуле

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (43)$$

Если заметить дополнительно, что в силу формулы (X.18)

$$dS_{234}\mathbf{i} + dS_{431}\mathbf{j} + dS_{124}\mathbf{k} = dS_{234} + dS_{431} + dS_{124} = d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS,$$

и поделить на  $dS$ , то формулу (42) можно переписать в более простом виде:

$$\frac{d\Gamma}{dS} = (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \text{rot}_n \mathbf{A}; \quad (44)$$

в последнем выражении индекс  $n$  указывает на то, что берется проекция ротора на нормаль  $\mathbf{n}$ . Эта формула дает циркуляцию по бесконечно малому контуру, отнесенную к единице площади, охватываемой этим контуром\*).

Таким образом, проекция ротора поля на любое направление  $\mathbf{n}$  равна отношению циркуляции поля по бесконечно малому контуру, перпендикулярному  $\mathbf{n}$ , к площади, охватываемой этим контуром. Отсюда, в частности, видно, что ротор, определение (43) которого привязано к выбранной системе координат, на самом деле связан с полем инвариантно (образует новое векторное поле, так как имеет в каждой точке пространства, вообще говоря, свое значение): он не зависит от выбора системы координат, так как левая часть формулы (44) не зависит от этого выбора, а знание проекции вектора на каждое направление определяет этот вектор однозначно. Вместе с тем ротор истинного вектора является псевдовектором (см. § 6), так как при смене правила винта при той же ориентации площадки ( $dS$ ), т. е. при том же векторе  $\mathbf{n}$ , обход ее контура сменяется на противоположный, а потому циркуляция сменяет знак. Отметим, кстати, что получение нового векторного поля путем определения ротора (вихря) другого векторного поля является специфичным для трехмерного пространства. Между тем получение векторного поля как градиента скалярного поля в пространстве любого числа измерений происходит одинаково. Соотношение здесь такое же, как между векторным и скалярным произведениями (см. конец § 6).

---

\*) Отсюда следует, что направление вектора  $\text{rot } \mathbf{A}$  в пространстве определяется как направление нормали к такой площадке, для которой  $\frac{d\Gamma}{dS}$  максимально. Это определение сходно с определением направления градиента скаляра  $\Phi$  как направления линии ( $l$ ), в котором достигает максимума  $\frac{d\Phi}{dl}$ .

Пусть теперь в пространстве задана уже не бесконечно малая, а конечная ориентированная поверхность  $(S)$  с контуром  $(L)$ . Мы видели выше, что циркуляции, отвечающие отдельным участкам этой поверхности, складываются, т. е. общая циркуляция

$$\Gamma = \int_{(S)} d\Gamma.$$

Из формул (37) и (44) поэтому вытекает

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(S)} (\text{rot}_n \mathbf{A}) dS = \int_{(S)} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (45)$$

т. е. циркуляция поля по замкнутому контуру равна потоку (см. § X.7) ротора этого поля через поверхность, ограниченную указанным контуром. Эта важная формула называется *формулой Стокса*.

Имеется еще одна полезная интегральная формула, включающая ротор, которая преобразует интеграл

$$I = \oint_{(S)} \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

по замкнутой поверхности  $(S)$  (ориентированной естественным образом, т. е. наружной стороной к бесконечности) в интеграл по объему  $(\Omega)$ , ограниченному  $(S)$ . Для ее вывода заметим, что

$$I_x = I \cdot \mathbf{i} = \oint_{(S)} (\mathbf{A} \times d\mathbf{S}) \cdot \mathbf{i} = \oint_{(S)} (\mathbf{i} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S};$$

здесь мы пользуемся тем, что в силу геометрического смысла векторно-скалярного произведения оно при «круговой» перестановке сомножителей не меняется. Однако

$$\mathbf{i} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = -A_z \mathbf{j} + A_y \mathbf{k},$$

т. е.

$$I_x = \oint_{(S)} (-A_z \mathbf{j} + A_y \mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Преобразуя этот интеграл по формуле Остроградского (§ X.7), получим

$$I_x = \int_{(\Omega)} \text{div} (-A_z \mathbf{j} + A_y \mathbf{k}) d\Omega = \int_{(\Omega)} \left( -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) d\Omega.$$

Аналогично находим

$$I_y = \int_{(\Omega)} \left( -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) d\Omega, \quad I_z = \int_{(\Omega)} \left( -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) d\Omega,$$

откуда

$$\oint_{(S)} \mathbf{A} \times d\mathbf{S} = \mathbf{I} = I_x \mathbf{i} + I_y \mathbf{j} + I_z \mathbf{k} = \int_{(\Omega)} \left[ \left( -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \right. \\ \left. + \left( -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] d\Omega = - \int_{(S)} \text{rot } \mathbf{A} d\Omega.$$

### Упражнения

1. Получите с помощью последней формулы инвариантное, не связанное с выбором системы координат определение ротора, аналогичное определениям (X.33) дивергенции и (X.57) градиента.

2. Докажите с помощью формулы Стокса теорему Коши об интеграле от аналитической функции (§ V.8).

Указание. Перейдите к вещественным интегралам и воспользуйтесь условиями Коши—Римана (V.17).

## § 8. Оператор Гамильтона «набла»

Выпишем основные дифференциальные операции (действия), которые можно производить над скалярным полем  $u$  и векторным полем  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ :

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Английский математик У. Гамильтон заметил, что эти три операции можно более просто записать, если ввести символ

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

называемый *набла*. Отдельно взятый, этот символ представляет собой знак действия, т. е. «оператор», причем векторно-дифференциальный, сохраняющий при своем применении как черты вектора, так и черты оператора дифференцирования. (Общее понятие оператора см. в § VI.2.)

«Умножение» (т. е. действие) оператора Гамильтона на скаляр (точнее, на скалярное поле)  $u$  и на вектор  $\mathbf{A}$  производится по

следующим естественным правилам:

$$\begin{aligned}\nabla u &= \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad } u, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (iA_x + jA_y + kA_z) = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{A}, \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = i \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \text{и т. д.} = \text{rot } \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Набла как дифференциальный оператор действует только на множитель, который стоит непосредственно за ним: например,

$$(\nabla u) v = (\text{grad } u) v = v \text{ grad } u, \quad \nabla (uv) = \text{grad } (uv).$$

Поэтому если в каком-либо выражении за наблой нет множителей, то оно представляет собой оператор: например,

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = (iA_x + jA_y + kA_z) \cdot \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$$

— это скалярный дифференциальный оператор, который может действовать на скалярное или векторное поле. Он применяется, в частности, в формуле для скорости изменения поля вдоль траектории (§ IV.1)

$$\frac{du}{dt} = v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) u + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (46)$$

Повторив вывод этой формулы, легко проверить, что и для скорости изменения векторного поля вдоль траектории имеет место аналогичная формула

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

отдельные слагаемые в которой имеют тот же смысл, что и в (46). Это дает, в частности, возможность переписать уравнение (X.54) движения жидкости в форме

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \mathbf{f},$$

от которой уже легко перейти к координатной форме.

При действиях с оператором набла надо пользоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования. Например,

$$\begin{aligned}\text{rot } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B}, \\ \text{div } (\lambda \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\lambda \mathbf{A}) = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \lambda \text{div } \mathbf{A} \quad (\lambda = \text{const}),\end{aligned} \quad (47)$$

так как и умножение на вектор, и дифференцирование обладают этими свойствами линейности. В то же время в формуле (47) нельзя было бы считать  $\lambda$  зависящим от точки пространства (т. е. скалярным полем), так как тогда получилось бы, что мы вынесли переменную величину за знак дифференцирования. Чтобы охватить этот случай, заметим, что в обычной формуле для производной произведения

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (48)$$

первое слагаемое получается, если в процессе дифференцирования считать  $v$  постоянным, а второе — если в этом процессе считать  $u$  постоянным; поэтому дифференцирование (48) можно выполнить так:

$$(uv)' = (u_c v)' + (u v_c)' = u_c v' + u' v_c = uv' + u' v,$$

где индекс  $c$  указывает, что при дифференцировании к данной величине надо относиться, как к постоянной (конечно, если величина стоит вне знака дифференцирования, то индекс  $c$  с нее можно снять). Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (uA) &= \nabla \cdot (uA) = \nabla \cdot (u_c A) + \nabla \cdot (u A_c) = \\ &= u (\nabla \cdot A) + (\nabla u) \cdot A = u \operatorname{div} A + \operatorname{grad} u \cdot A \end{aligned}$$

(эта формула иным путем была выведена в X.8).

После применения дифференциальной операции к полю получается новое поле, к которому можно вновь применять эти операции. Рассмотрим, например, «составную» операцию  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u$ . Ее можно записать в виде  $\nabla \times (\nabla u)$ . Но для «обычного» вектора  $a$  и «обычного» скаляра  $u$  всегда

$$a \times (au) = 0 \quad (49)$$

(почему?). Значит, если вместо  $a$  в левую часть подставить его разложение по декартовым осям и произвести вычисления по формальным правилам векторной алгебры, то мы получим нуль. Но вычисление комбинации  $\nabla \times (\nabla u)$  производится по тем же формальным правилам, что и (49), только вместо  $a_x, a_y, a_z$  надо взять  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ . Значит, и здесь получится нуль, т. е. всегда

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0. \quad (50)$$

Аналогично получаем (проверьте!), что всегда

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0. \quad (51)$$

Это простое свойство имеет важное следствие. Именно, для любого поля  $A$  можно наряду с векторными линиями (§ X.7) рассматривать *вихревые линии*, т. е. векторные линии поля  $\operatorname{rot} A$ . Формула (51) говорит, что вихревые линии не могут иметь ни источников, ни стоков, т. е. они не могут ни начинаться, ни кончаться.

Наконец, комбинация

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(оператор Лапласа  $\Delta$ ) была рассмотрена в § X.9.

### Упражнения

1. Выведите формулы для  $\operatorname{rot}(u\mathbf{A})$ ;  $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ .
2. На основе формул (X.33), (X.57) и решения упражнения 1 § 7 напишите символическое выражение  $\nabla$  в виде интеграла.

## § 9. Потенциальные поля

В § X.3 мы рассмотрели вопрос о существовании потенциала (потенциальной энергии) у силового поля. Сейчас мы рассмотрим этот вопрос в общем виде. Векторное поле  $\mathbf{A}$  называется *потенциальным*, если оно является градиентом некоторого скалярного поля; если обозначить это поле через  $\varphi$ , то

$$\mathbf{A} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (52)$$

(ср. формулу (X.9)). При этом поле  $\varphi$  называется *потенциалом* поля  $\mathbf{A}$ .

Так как градиент постоянного скалярного поля равен нулю, то потенциал любого поля  $\mathbf{A}$ , если он имеется, определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Подбирая это слагаемое, можно сделать значение потенциала равным нулю в любой заданной точке; чаще всего принимается равным нулю значение потенциала на бесконечности. Разность значений потенциала в двух точках уже не зависит от этого небольшого произвола в выборе потенциала, так как постоянные слагаемые в такой разности взаимно уничтожаются.

Далеко не всякое поле является потенциальным. Именно, из (52) сразу следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{0} \quad (53)$$

(см. формулу (50)), т. е. потенциальное поле обязательно является безвихревым. Учитывая выражение (43) для ротора, условие (53) можно переписать в виде

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (54)$$

Условия (54) можно вывести и другим способом. Равенство (52) в координатной форме имеет вид

$$A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right),$$

откуда следует, что

$$\dot{A}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad A_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad A_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Но тогда

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z},$$

и из равенства смешанных частных производных (§ IV.1) получаем первое соотношение (54). Аналогично выводятся и остальные.

Обратно, пусть поле, заданное во всем пространстве, является безвихревым\*). Тогда это поле обязательно является бесциркуляционным, т. е.

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

для любого замкнутого контура  $(L)$ . В самом деле, «натянем» на контур  $(L)$  поверхность  $(S)$ . Применяя к ней формулу Стокса (18), получим, если  $\text{rot } \mathbf{A} \doteq \mathbf{0}$ ,

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(S)} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Иначе говоря, для безвихревого поля циркуляция по любому бесконечно малому контуру равна нулю, а потому и циркуляция по любому конечному контуру равна нулю.

В § X.3 мы показали, что бесциркуляционное поле обязательно имеет потенциал, который строится по формуле (см. формулу (X.8))

$$\varphi(M) = \int_{MM_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (55)$$

где  $M_0$  — какая угодно фиксированная точка, а выбор конкретного пути интегрирования несуществен, так как в бесциркуляционном поле линейный интеграл зависит только от положения начала и конца пути интегрирования. Правда, в § X.3 мы говорили о силовом поле и истолковывали потенциал как работу, но с математической точки зрения такое конкретное истолкование несущественно, можно говорить о любом векторном поле и о его потенциале.

Итак, при рассмотрении векторного поля во всем пространстве требования, чтобы это поле было потенциальным, безвихревым или бесциркуляционным, полностью равносильны, так что из выполнения одного этого требования вытекает выполнение остальных. Из формулы (55) в силу произвольности точки  $M_0$  еще раз вытекает, что потенциал определен с точностью до постоянного слагаемого.

---

\*) Если поле рассматривается не во всем пространстве, а в некоторой его части, то в этом пункте могут быть осложнения, которые будут освещены в § 13.



Если векторное поле  $\mathbf{A}$  является не только безвихревым, но и не имеет источников векторных линий (см. § X.7), т. е. если

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ и } \operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

то из первого следует, что  $\mathbf{A} = -\operatorname{grad} \varphi$ , а из второго — что

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \text{ т. е. } \nabla^2 \varphi = 0.$$

Таким образом, в этом случае потенциал поля должен удовлетворять уравнению Лапласа (которое уже встречалось нам в § X.9) или, как выражают это другими словами, быть гармонической функцией.

Если у безвихревого поля, рассматриваемого во всем пространстве, нет источников не только на конечном расстоянии, но и на бесконечности, то вектор такого поля просто тождественно равен нулю, т. е., по существу, поля нет. Этому соответствует следующее свойство гармонических функций: функция, гармоническая во всем пространстве и равная нулю на бесконечности, тождественно равна нулю. Можно доказать (мы не будем этого делать) более общий факт: функция, гармоническая во всем пространстве и ограниченная на бесконечности, тождественно равна постоянной, т. е. такому потенциалу также отвечает нулевое поле. Таким образом, чтобы теория стала содержательной, нужно либо допустить источники поля на бесконечности, т. е. неограниченность потенциала на бесконечности, либо допустить источники на конечном расстоянии, т. е. считать потенциал гармоническим не во всем пространстве. Например, полю  $\mathbf{A} = \operatorname{const}$  отвечает потенциал  $\varphi = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$  (проверьте!), неограниченный на бесконечности, а ньютонову полю (§ X.3) отвечает потенциал, гармонический всюду, кроме одной точки\*).

Вернемся к рассмотрению силового поля  $\mathbf{F}$ , а буквой  $\mathbf{A}$  будем, как и в § X.3, обозначать работу. Эта сила может обладать потенциалом, но может и не соответствовать никакому потенциалу. Последнее можно выяснить двумя способами: либо проверить, что  $\operatorname{rot} \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ , т. е. что хотя бы одно из условий

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

(см. условия (54)) не выполнено, либо же проверить, что поле не является бесциркуляционным, т. е. что хотя бы для одного замкнутого контура работа силы  $\mathbf{F}$  отлична от нуля.

Рассмотрим пример. Пусть сила  $\mathbf{F}$  лежит в плоскости  $x, y$ , т. е. образует плоское поле, и в каждой точке перпендикулярна прямой, соединяющей эту точку с началом координат (перпендикулярна радиусу-вектору), причем направлена против стрелки часов.

---

\*) В этой точке  $\Delta \varphi$  бесконечен, пропорционален дельта-функции, так что хотя точка «мала» по сравнению с бесконечным объемом, забывать об этой точке нельзя.

Пусть при этом величина силы пропорциональна расстоянию  $r$  от точки до начала координат, т. е.  $|\mathbf{F}| = ar$ , где  $a$  — постоянный коэффициент пропорциональности. (Для нескольких точек плоскости такая сила изображена на рис. 154.) Пусть под действием такой силы тело движется по окружности радиуса  $R$  (рис. 155). Весьма малый путь от точки  $M$  до точки  $N$  (он соответствует

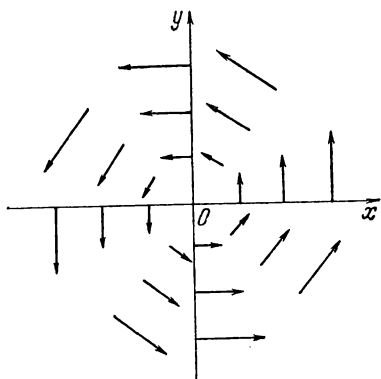


Рис. 154.

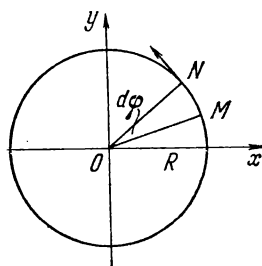


Рис. 155.

повороту на угол  $d\varphi$ ) можно приближенно считать прямолинейным. Он равен  $Rd\varphi$ , как длина дуги окружности, соответствующая центральному углу  $d\varphi$ . Сила направлена вдоль пути, поэтому работа на участке  $MN$  есть

$$dA = R d\varphi \cdot |\mathbf{F}| = R d\varphi \cdot aR = aR^2 d\varphi.$$

Следовательно, работа при обходе точкой всей окружности есть

$$A = \int_0^{2\pi} aR^2 d\varphi = aR^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 \cdot 2a.$$

Работа пропорциональна площади круга и отнюдь не равна нулю. (Можно доказать, что для рассматриваемой силы работа, совершенная при обходе замкнутой линии, пропорциональна площади, ограниченной линией движения, при любой форме этой линии.) Ясно, что такая сила не может соответствовать никакому потенциалу.

Последний вывод можно сделать и с помощью формального подсчета ротора. Так как поле сил получается в данном примере таким же, как поле линейных скоростей при вращении вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $a$ , то можно воспользоваться формулой (5), что даст

$$\mathbf{F} = (a\mathbf{k}) \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & a \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -ay\mathbf{i} + ax\mathbf{j} \quad (56)$$

(это легко получить и непосредственно из рис. 154). Отсюда

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -ay & ax & 0 \end{vmatrix} = a\mathbf{k} + a\mathbf{k} = 2a\mathbf{k} \neq \mathbf{0}.$$

Итак, ротор не равен нулю, и потому поле не потенциальное.

### Упражнение

Докажите, что поле

$$\mathbf{A} = 2xz\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

потенциальное, и постройте его потенциал.

## § 10. Ротор поля скорости

Понятие ротора особенно наглядно при рассмотрении поля линейных скоростей  $\mathbf{v}$  частиц сплошной среды. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть среда движется поступательно, как твердое тело. Тогда  $\mathbf{v} = \text{const}$ , и так как ротор выражается с помощью операций дифференцирования, то  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . В данном случае циркуляция скорости отсутствует.

Пусть среда вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью  $\omega$ , как твердое тело. Воспользуемся тем, что ротор связан с полем инвариантно и, стало быть, при его вычислении мы можем располагать оси координат по своему усмотрению, как нам удобнее; поэтому направим ось  $z$  по оси вращения. Тогда вычисления, аналогичные проведенным в конце § 9, дают

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} &= 2\omega\mathbf{k} = 2\omega. \end{aligned}$$

Итак, в данном случае ротор постоянный во всем пространстве и равен удвоенному вектору угловой скорости. Поэтому циркуляция линейной скорости по малому контуру максимальна, если этот контур расположен перпендикулярно оси вращения (тогда ротор проектируется на нормаль к соответствующей малой площадке своей полной длиной), а если плоскость контура параллельна оси вращения, то циркуляция равна нулю.

Можно доказать, что любое движение твердого тела в каждый момент времени получается в результате наложения поступательного и вращательного движений. В силу двух предыдущих абзацев ротор линейной скорости твердого тела в каждый момент времени одинаков во всех точках тела и равен удвоенному мгновенному вектору угловой скорости.

Перейдем к движению среды, при которых расстояния между ее точками изменяются. Пусть рассматривается «чистое» сжатие газа поршнем вдоль оси  $x$  к плоскости  $x=0$ ; тогда поле скоростей имеет вид

$$\mathbf{v} = -\lambda x \mathbf{i},$$

где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности. Подсчитывая ротор, получаем

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\lambda x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Коши доказал, что любое движение малого объема деформируемой сплошной среды (газа, жидкости или деформируемого твердого тела) в любой момент времени получается в результате наложения поступательного и вращательного движений, а также «чистых» сжатий и растяжений. (Отметим, что и малые порции несжимаемой жидкости могут испытывать одновременно «чистые» сжатия и растяжения по различным направлениям.) Так как ненулевой ротор получается лишь для вращательного движения, то мы видим, что при произвольном движении среды ротор поля линейной скорости  $\mathbf{v}$  частиц равен в каждой точке удвоенному вектору угловой скорости соответствующей частицы. Конечно, в общем случае ротор получается в различных точках различным. Таким образом, при течении жидкости или газа отличие ротора поля линейной скорости от нуля указывает на наличие завихренности, вращения, чем и объясняется название *ротор*.

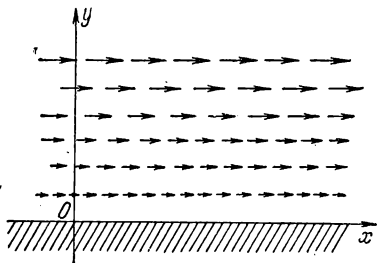


Рис. 156.

Рассмотрим в качестве следующего примера «сдвиговое» течение, изображенное стрелками на рис. 156. Такая картина получается при течении вязкой жидкости вдоль твердой стенки. В этом случае  $\mathbf{v} = ay \mathbf{i}$ , где  $a$  — коэффициент пропорциональности, откуда  $\text{rot } \mathbf{v} = -a \mathbf{k}$  (проверьте!). Итак, это течение завихренное, каждая частица жидкости вращается с угловой скоростью  $a/2$  по часовой стрелке.

Рассмотрим, наконец, простейшую «вихревую линию», т. е. плоскопараллельное поле, определенное в плоскости  $x, y$  равенством

$$\mathbf{v} = (p\mathbf{k}) \times \frac{\mathbf{r}^0}{r} = (p\mathbf{k}) \times \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$

Это поле, показанное на рис. 157, несколько напоминает поле рис. 154, но в данном случае модуль вектора поля не прямо пропорционален, а обратно пропорционален расстоянию от начала координат. Осью вихревой линии в данном случае служит ось  $z$ .

Подобно (56), найдем выражение скорости в координатной форме:

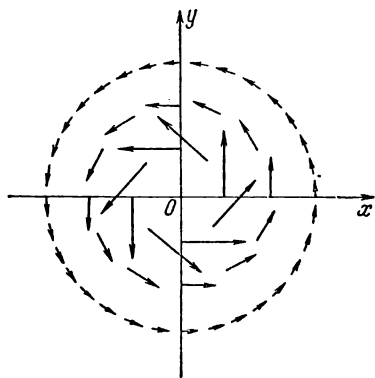


Рис. 157.

$$\mathbf{v} = -\frac{py}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{px}{x^2+y^2} \mathbf{j}, \quad (57)$$

откуда легко с помощью непосредственного вычисления подсчитать, что вне оси  $z$  будет  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$  (проверьте!). Таким образом, частицы жидкости обходят вихревую линию, деформируясь, но не совершая вращательного движения относительно собственной оси. В то же время, так как циркуляция вектора  $\mathbf{v}$  по любой окружности с центром в начале координат равна

$$\frac{p}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi p,$$

то в начале координат имеется «источник циркуляции», плотность которого на плоскости  $x, y$  равна

$$\frac{d\Gamma}{dS} = 2\pi p \delta(\mathbf{r})$$

(где  $\delta$  — дельта-функция \*), см. § VI.3). Так как ротор плоскопараллельного поля перпендикулярен плоскости поля, то мы получаем в данном примере

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\pi p \delta(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \mathbf{k} = 2\pi p \delta(x) \delta(y) \mathbf{k} \quad (58)$$

(по поводу последнего представления см. § VI.3).

### Упражнение

Найдите направления в частице вихревой линии, состоящие инвариантными при бесконечно малом перемещении.

Указание. Исходите из того, что вектор  $d\mathbf{r}$  не должен повернуться.

## § 11. Магнитное поле и электрический ток

Понятия векторного произведения и ротора широко применяются при рассмотрении магнитных полей. Мы ограничимся для простоты рассмотрением полей в вакууме.

\* В данном случае имеется в виду двумерная дельта-функция:  $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y)$ , поскольку интегрирование ведется по плоскости,  $\Gamma = \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ .

Магнитное поле в каждой точке пространства полностью характеризуется вектором  $\mathbf{H}$  «напряженности магнитного поля». Этот вектор во многом аналогичен вектору  $\mathbf{E}$  напряженности электрического поля (§§ X.5 и X.9), но проявляется своим действием не на неподвижные заряды, как  $\mathbf{E}$ , а на постоянные магниты или (что, как мы сейчас увидим, равносильно) на движущиеся заряды. Создается магнитное поле также постоянными магнитами или движущимися зарядами.

Рассмотрим сначала самую простую схему. Пусть магнитное поле создается током  $J$ , текущим вдоль бесконечно длинного (практически весьма длинного) прямолинейного проводника, который мы предположим совпадающим с осью  $z$ . Ясно, что при этом получается плоскопараллельное поле, которое достаточно, таким образом, рассматривать только в плоскости  $x, y$ . Из эксперимента известно, что при этом вектор  $\mathbf{H}$  получается, как на рис. 158: он лежит в плоскости  $x, y$  и перпендикулярен радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ , причем направление  $\mathbf{H}$  определяется по правилу правого винта. Величина напряженности прямо пропорциональна силе тока и обратно пропорциональна расстоянию точки от

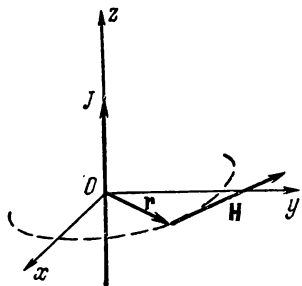


Рис. 158.

проводника, т. е.  $H = a \frac{J}{r}$ , где  $a$  — некоторый коэффициент пропорциональности; при определенном выборе единиц  $H$  и  $J$  он оказывается равным  $2/c$ , где  $c$  — скорость света, так что  $H = \frac{2J}{cr}$ .

Рассматриваемое нами поле  $\mathbf{H}$  имеет в точности вид, изображенный на рис. 157, т. е. имеет формулу (57), где взамен  $\rho$  надо поставить  $\frac{2J}{c}$ . Отсюда по формуле (58)

$$\text{rot } \mathbf{H} = 2\pi \frac{2J}{c} \delta(x) \delta(y) \mathbf{k}.$$

С другой стороны, произведение  $J\delta(x)\delta(y)\mathbf{k}$  представляет собой плотность тока, показанного на рис. 158. Мы будем плотность тока обозначать через  $\mathbf{j}$  (не путать с единичным вектором оси  $y$ !); таким образом, в данном примере

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (59)$$

По этой формуле  $\mathbf{j}$  выражается через  $\mathbf{H}$ . Можно получить и обратную формулу, по которой  $\mathbf{H}$  выражается через  $\mathbf{j}$ . Для этого введем «векторный потенциал»  $\mathbf{A}$  поля  $\mathbf{H}$ , аналогичный скалярному

потенциалу электрического поля (см. § X.5),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\Omega_0. \quad (60)$$

В рассматриваемом примере этот потенциал равен

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J \mathbf{k} d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\xi - z)^2}} = \frac{J}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\xi - z)^2}} \mathbf{k}.$$

Хотя последний интеграл расходится, но мы можем его дифференцировать по параметрам (ср. § X.6); отсюда, в частности,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{J}{c} \int \end{vmatrix} = \\ &= \frac{J}{c} \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\xi - z)^2}} \mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\xi - z)^2}} \mathbf{j} \right) = \\ &= -\frac{J}{c} \int_{-\infty}^{\infty} [x^2 + y^2 + (\xi - z)^2]^{-3/2} d\xi \cdot (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Этот интеграл легко взять с помощью подстановки  $\xi - z = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} s$ , и мы получаем (проверьте!)

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{J}{c} \cdot \frac{2}{x^2 + y^2} (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}).$$

Мы опять пришли к формуле (57) с  $p = \frac{2J}{c}$ , т. е. к  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\Omega_0. \quad (61)$$

При рассмотрении системы бесконечных прямолинейных проводников их магнитные поля  $\mathbf{H}$ , а также плотности токов складываются, т. е. формулы (59) и (61) все равно остаются справедливыми. Мы примем, что они справедливы и при любом стационарном, не обязательно прямолинейном распределении токов в пространстве. (Для формулы (59) это довольно ясно, так как она связывает значения  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{j}$  в одной и той же точке, а формулу (61) можно вывести из (59), на чем мы не будем останавливаться.) Это допущение обосновывается тем, что получающиеся из него следствия согласуются друг с другом и подтверждаются экспериментами.

Из формулы (59) вытекает важное следствие. Для его получения применим к вычислению циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  по любому замкнутому

контур (L), ограничивающему поверхность (σ), формулу Стокса:

$$\oint_{(L)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(\sigma)} (\text{rot } \mathbf{H})_n d\sigma = \frac{4\pi}{c} \int_{(\sigma)} j_n d\sigma. \quad (62)$$

Интеграл в правой части имеет простой физический смысл (ср. § X.4): это количество электричества, проходящее через (σ) за единицу времени с внутренней стороны к наружной, т. е. полный ток  $J$  через (σ). Таким образом, циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  по любому замкнутому контуру пропорциональна полному току через поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Другое важное следствие получится, если взять дивергенцию обеих частей формулы (59). Мы получим

$$\text{div } \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{div rot } \mathbf{H} = 0$$

(см. (51)). Этот «закон сохранения электричества» в стационарном случае можно было вывести независимо от формулы (59): он означает, что в любой объем за единицу времени втекает столько же электричества, сколько вытекает, т. е. полный поток вектора  $\mathbf{j}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю (ср. аналогичные рассуждения в § X.8).

Если взять дивергенцию обеих частей равенства (61), то мы увидим, что

$$\text{div } \mathbf{H} = \text{div rot } \mathbf{A} = 0. \quad (63)$$

Таким образом (см. § X.7), магнитное поле в отличие от электрического не имеет источников векторных линий, т. е. магнитные силовые линии не могут ни начинаться, ни заканчиваться. (Так как при этом мы опирались только на формулу (51), то и в общем случае векторное поле может быть ротором некоторого «векторного потенциала», только если дивергенция этого поля равна нулю, т. е. оно не имеет источников векторных линий; такие поля принято называть *соленоидальными*.)

Вычислим в качестве примера магнитное поле от бесконечной цилиндрической катушки с обмоткой в  $n$  витков на единицу длины, по которой течет ток  $J$ . Толщиной обмотки будем пренебрегать (в дальнейшем мы увидим, что она несущественна) и будем для простоты считать обмотку не винтовой, а кольцевой. Из формулы (60) мы видим, что в данном примере векторный потенциал  $\mathbf{A}$  параллелен плоскости витков и по смыслу задачи образует плоскопараллельное поле. Но тогда из формулы (61) и определения (43) ротора сразу следует, что поле  $\mathbf{H}$  всюду параллельно оси катушки и не меняется вдоль катушки, т. е. также является плоскопараллельным. Применим теперь формулу (62) к прямоугольному контуру  $ABCD$ , показанному на рис. 159. Так как интегралы по отрезкам  $BC$  и  $DA$  равны нулю



и так как через поверхность, ограниченную этим контуром, ток не проходит, то получаем

$$H_1 h - H_2 h = 0$$

( $h$  — высота прямоугольника), откуда  $H_1 = H_2$ . Итак, магнитное поле внутри соленоида (катушки) постоянно не только по высоте, но и в поперечном сечении. Аналогично получаем, что поле и вне катушки постоянно, а так как в бесконечном удалении от катушки оно равно нулю, то оно равно нулю всюду вне катушки. Применив в заключение формулу (62) к прямоугольному контуру  $EKGF$ ,

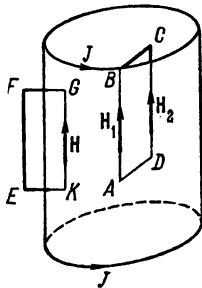


Рис. 159.

мы получим  $Hh = \frac{4\pi}{c} Jnh$ , откуда находим напряженность магнитного поля внутри катушки

$$H = \frac{4\pi}{c} Jn.$$

Мы видим, что она не зависит от радиуса катушки, а только от числа «ампервитков» на единицу длины. Отсюда, в частности, вытекает упомянутая ранее независимость поля от толщины обмотки. Предоставляем читателю получить выражение для потенциала  $A = \frac{H}{2} r e_\phi$  ( $r < r_0$ ),  $A =$

$= \frac{Hr_0^2}{2r} e_\phi$  ( $r > r_0$ ), где  $\mathbf{r} = xi + yj$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{e}_\phi = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ ,  $r_0$  — радиус катушки.

К задаче о построении магнитного поля от заданной системы токов возможен иной подход. Именно, допускается, что магнитное поле в любой точке  $M$  создается каждым «элементом тока»  $d\mathbf{J} = j d\Omega$  в соответствии с законом Био — Савара

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c(M_0 M)^3} (d\mathbf{J} \times \overrightarrow{M_0 M}),$$

где  $M_0$  — точка, в которой расположен элемент тока. Полный вектор  $\mathbf{H}$  в точке  $M$  находится с помощью интегрирования по всем элементам тока. То, что формула для  $d\mathbf{H}$  пишется именно в таком виде, обосновывается согласованностью следствий из этой формулы с экспериментом. Этот подход полностью равносильен разобранному нами выше: из закона Био — Савара можно вывести формулы (59) и (61), и обратно.

#### Упражнение

Получите из закона Био — Савара напряженность магнитного поля: а) от прямолинейного бесконечно длинного проводника; б) на оси соленоида от одного его витка.

### § 12. Электромагнитное поле и уравнения Максвелла

На самом деле в общем случае в одной и той же области пространства существуют и электрическое и магнитное поля; при этом получается *электромагнитное поле*, которое в каждой точке про-

странства (во всяком случае, в вакууме, что мы будем предполагать) характеризуется двумя векторами: электрическим  $\mathbf{E}$  и магнитным  $\mathbf{H}$ . Дифференциальные уравнения, связывающие эти векторы, называются *уравнениями Максвелла* и имеют очень большое значение в физике.

Для стационарного электромагнитного поля соответствующие уравнения были, по существу, уже нами выписаны. Это прежде всего уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

из которых первое вытекает из потенциальности стационарного электрического поля (§§ X.5 и X.9), а второе — это уравнение (X.42). Кроме того, это уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

(см. (59) и (63)).

Для стационарного случая взаимосвязь электрического и магнитного полей еще не сказывается. Не то будет в нестационарном случае, к которому мы сейчас переходим. Оказывается, что всякое изменение электрического поля влияет на магнитное поле, а всякое изменение магнитного поля воздействует на электрическое поле, так что эти поля рассматривать порознь уже нельзя.

При рассмотрении первого воздействия чрезвычайно полезно представление о «токах смещения». Для вывода соответствующих формул рассмотрим сначала конденсатор (рис. 160), обкладки которого заряжены с поверхностной плотностью  $+\nu$  левая и  $-\nu$  правая. Каждая из этих обкладок порождает в пространстве между ними электрическое поле, которое можно подсчитать по формулам (X.29), так что суммарное поле

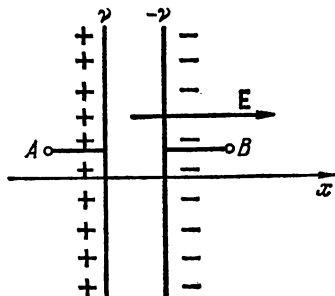


Рис. 160.

$$\mathbf{E} = 4\pi\nu\mathbf{l}. \quad (64)$$

Если  $\nu$  увеличивается, то к левой обкладке подходят извне положительные заряды и оседают на ней со скоростью  $J = \frac{d(S\nu)}{dt}$ , где  $S$  — площадь одной обкладки, а на правой обкладке оседают отрицательные заряды с той же скоростью. Если на минуту представить себе, что точки  $A$  и  $B$  соединены проводником, на котором заряды не оседают, то в силу закона сохранения электричества через любое сечение между  $A$  и  $B$  должен проходить один и тот же ток  $J$ . На самом же деле заряды между обкладками конденсатора не переносятся; однако закон постоянства токов можно сохранить, если ввести понятие *тока смещения* силы  $J$ , который «как будто» течет

от  $A$  к  $B$ . Плотность этого тока смещения в силу формулы (64) равна

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\mathbf{j}}{S} \mathbf{i} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{i} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Оказывается, что и в формулах, связывающих магнитный вектор  $\mathbf{H}$  с током  $\mathbf{j}$ , изменение электрического поля нужно заменить током смещения, плотность которого вычисляется по той же формуле,  $\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ . Поэтому для нестационарного электрического поля взамен (59) надо написать уравнение

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (65)$$

Подобным образом, и в формуле (61) для построения  $\mathbf{H}$  взамен  $\mathbf{j}$  надо поставить  $\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}$ . Но отсюда, рассуждая, как в § 11, мы можем вывести соотношение

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (66)$$

(см. (63)).

Обратимся к переменному магнитному полю. Опыт показывает (Фарадей), что изменение магнитного поля возбуждает (индуцирует) электрическое поле, которое в отличие от поля, порожденного зарядами, является вихревым. Мы сейчас покажем, что соответствующий закон индукции имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (67)$$

В силу § 9 в этом случае электрическое поле не имеет потенциала, т. е. нельзя говорить о разности потенциалов в поле, а работа, совершаемая полем, зависит не только от начала и конца пути, но и от всей трассы.

Для вывода формулы (67) поместим мысленно в поле замкнутый проводник  $(L)$ , ограничивающий поверхность  $(\sigma)$ . Согласно результатам опытов Фарадея изменение магнитного потока  $\int_{(\sigma)} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  влечет за

собой появление ЭДС в контуре  $(L)$ , пропорциональной скорости изменения потока. Однако указанная ЭДС равна сумме элементарных ЭДС в малых участках контура, а эти малые ЭДС, как легко понять, равны  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ . Итак,

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -k \frac{d}{dt} \int_{(\sigma)} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -k \int_{(\sigma)} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\sigma};$$

здесь знак минус взят по правилу Ленца, согласно которому возникающая ЭДС стремится воспрепятствовать изменению потока;  $k$  — коэффициент пропорциональности, который, как можно показать, равен  $\frac{1}{c}$ ; дифференцирование по  $t$  внесено под знак интеграла как

дифференцирование по параметру (§ III.6). Преобразуя левую часть по формуле Стокса, получим

$$\int_{(\sigma)} \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{c} \int_{(\sigma)} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Отсюда в силу произвольности  $(\sigma)$  и вытекает (67).

Случай силы, не соответствующей потенциалу, осуществляется в трансформаторе. Первичная обмотка, когда по ней течет ток, создает магнитное поле. Если ток в первичной обмотке с течением времени изменяется, то создается переменное магнитное поле, которое сопровождается появлением электрического поля как раз такого типа (так называемое вихревое поле), как показано на рис. 154. Значит сила, действующая на заряженное тело, например на электрон, находящийся внутри вторичной обмотки, не соответствует никакому потенциалу.

Двигаясь по кругу, электрон может набирать все большую и большую энергию. Это, конечно, не означает нарушения закона сохранения энергии, так как ускоренное движение электрона в свою очередь влияет на первичную обмотку, вызывая дополнительный расход энергии в питающих ее источниках тока. Но для отдельного электрона закон «сумма кинетической и потенциальной энергии электрона постоянна» не выполняется, так как сила, действующая на электрон, не соответствует никакой потенциальной энергии. Такой принцип ускорения электронов успешно применяется в машине, называемой бетатроном. При этом электрическое поле ускоряет электроны, а магнитное поле надлежащим образом искривляет их путь, обеспечивая движение по окружности.

Так как вихревое электрическое поле появляется только в процессе изменения магнитного поля, то такое электрическое поле не будет постоянным в течение длительного времени: когда магнитное поле достигнет максимума, скорость его изменения станет равной нулю, после чего электрическое поле также исчезнет.

Вследствие малой длительности электрического поля в бетатроне тяжелые частицы, например протоны, не успевают набирать большую энергию. Хорошо набирают энергию легкие электроны. Существуют бетатроны, в которых электроны набирают энергию в десятки миллионов электрон-вольт, т. е. такую же, как если бы они прошли разность потенциалов в десятки миллионов вольт. Быстрые электроны, испускаемые при радиоактивных превращениях, были названы бета-лучами в начале исследования радиоактивности, когда физическая природа этих лучей еще не была ясна. Отсюда и происходит название «бетатрон» для прибора, в котором быстрые электроны получают путем ускорения медленных, без участия явления радиоактивности.

Уравнение

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (68)$$

связывающее электрическое поле и заряды (см. (X.42)), сохраняет силу и в нестационарном случае. Все четыре указанных уравнения (65)—(68) и образуют систему уравнений Максвелла. К ним можно добавить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (69)$$

которое выводится в точности как аналогичное уравнение (X.41) в гидродинамике, а также то или иное соотношение, связывающее  $\mathbf{j}$  с  $\mathbf{E}$  (обобщенный закон Ома, имеющий в простейших случаях вид  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ , где  $\lambda$  — коэффициент электропроводности) и включающее в себя в общем случае действие внешних сил.

### Упражнение

Выведите уравнение (69) из уравнений (65) и (68).

## § 13. Потенциал в многосвязной области

Рассмотрим поле силы  $\mathbf{F}$ . Из обоих условий существования потенциала — условия  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$  (§ 9) и условия равенства нулю работы при обходе замкнутой линии (§ X.3) — видно, что возможность нарушения этих условий, т. е. возможность существования сил непотенциального типа, связана с рассмотрением функции не одной, а двух или трех переменных. В самом деле, в случае одной переменной (движение по прямой) вернуться в точку, из которой вышел, можно лишь при таком движении, когда каждый отрезок пути проходит дважды: один раз в одном направлении, другой раз — в противоположном. Поэтому (если только сила не зависит от времени или от скорости движения, а зависит только от положения тела) при движении вдоль одной прямой работа силы равна нулю, если только путь заканчивается возвращением в исходную точку.

При произвольном движении на плоскости или в пространстве можно, выйдя из начальной точки, пройти по некоторой линии в конечную точку, а затем вернуться в начальную точку по совершенно другой линии. При этом может оказаться, что работа не равна нулю. В этом и заключается различие между движением по одной прямой, когда любой силе  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  соответствует потенциальная энергия  $U(\mathbf{x})$ , и движением в плоскости или в пространстве, когда потенциальной энергии может вовсе и не быть.

Рассмотрим теперь движение тела на плоскости или в пространстве. Если заставить тело двигаться только по одной определенной и притом незамкнутой линии, то мы вернемся к тому же положению, которое имеет место при движении вдоль прямой. Действительно, в этом случае будем характеризовать положение тела на линии величиной пути, пройденного телом вдоль линии (путь отсчитываем

от какой-нибудь выбранной точки на линии). Тогда фактически мы имеем дело с одной переменной — величиной пути вдоль линии. Поэтому, рассматривая незамкнутую вторичную обмотку трансформатора, можно говорить о разности потенциалов (или лучше об электродвижущей силе) на ее концах. Однако если внутри первичной обмотки поместить замкнутое кольцо, то в нем нет определенной разности потенциалов между двумя его точками  $A$  и  $B$  (рис. 161). Работа по перемещению заряда из точки  $A$  в точку  $B$  зависит от того, вдоль какой линии,  $ADB$  или  $ACB$ , происходит движение.

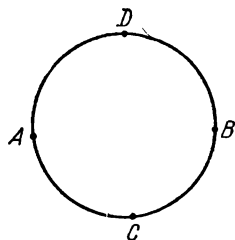


Рис. 161.

Пусть теперь тело не обязано двигаться вдоль фиксированной линии, а может сдвигаться и в стороны. Тогда для существования потенциала прежде всего требуется, чтобы работа силы при перемещении тела по любому бесконечно малому замкнутому контуру была бы равна нулю. Это в силу § 7 равносильно условию  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  (так как такая работа равна циркуляции вектора  $\mathbf{F}$  по указанному контуру), т. е. поле  $\mathbf{F}$  должно быть безвихревым.

Но пусть  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  не во всем пространстве, а только в некоторой его области (части)  $(G)$ . Тогда работа по конечному замкнутому контуру  $(L)$ , лежащему в  $(G)$ , не обязана равняться нулю! Можно только утверждать, что при бесконечно малой деформации замкнутого контура работа не изменится, так как работа по контуру  $AB_1CDA$  (рис. 162) отличается от работы по контуру  $AB_2CDA$  на работу по контуру  $AB_1CB_2A$ , равную нулю. Совершая такие деформации, можно получить контур, лежащий в  $(G)$  и существенно отличающийся от исходного, однако работа силы  $\mathbf{F}$  по этим контурам одинакова.

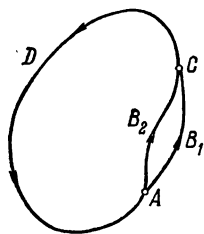


Рис. 162.

Отсюда ясно, что если контур  $(L)$  можно в пределах  $(G)$  путем непрерывной деформации «стянуть в точку», то работа силы по  $(L)$  равна нулю. В самом деле, после такого стягивания работа уже, очевидно, равна нулю (так как перемещение отсутствует). Но так как при деформации контура работа не меняется, то она равнялась нулю и для исходного контура.

Область  $(G)$  может обладать свойством *односвязности*: это значит, что в ней можно любой замкнутый контур путем непрерывной деформации стянуть в точку, не касаясь границ области. Например, внутренность кругового цилиндра, внутренность или внешность сферы — это односвязные области; все пространство или вся плоскость также причисляются к односвязным областям. В отличие от этого внешность бесконечного кругового цилиндра, внутренность или внешность «тора» (поверхности бублика) — это *неодносвязные* области.

Если область  $(G)$  односвязная, то из сказанного выше вытекает, что в этом случае работа силы по конечному замкнутому контуру, лежащему в  $(G)$ , обязательно равна нулю. Если отвлечься от конкретного физического истолкования поля, то можно сделать следующий общий математический вывод (ср. § 9): в односвязной области безвихревое поле обязательно является потенциальным, т. е. бесциркуляционным.

В отличие от этого, если область неодносвязная, то циркуляция безвихревого поля может быть отличной от нуля (если рассматри-

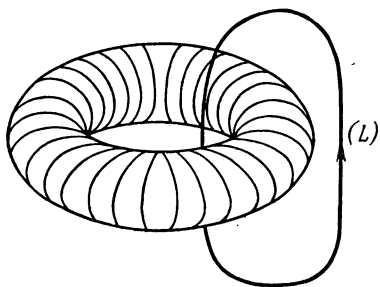


Рис. 163.

ваемый контур нельзя путем непрерывной деформации стянуть в точку, оставаясь в пределах области), т. е. безвихревое поле может быть циркуляционным. Такими будут, например, магнитное поле внутри тороидной катушки (с плоскостями витков, проходящими через ось вращения), по которой проходит постоянный ток; поле скоростей при безвихревом течении жидкости, обтекающей замкнутый канал, и т. д.

Если при этом строить потенциал по формуле (55), то он получится неоднозначным: если обойти замкнутый контур, то из потенциала вычтется циркуляция поля по этому контуру. Когда мы говорим о потенциальном поле, мы имеем в виду только однозначный потенциал; таким образом, безвихревое поле в неодносвязной области не обязано быть потенциальным.

Большой интерес представляет тороидный трансформатор с железным кольцевым сердечником. При пропускании через обмотку переменного тока во внешней части пространства образуется безвихревое электрическое поле, которое, однако, имеет отличную от нуля циркуляцию по контуру  $(L)$ , зацепленному за тор (рис. 163).

### Упражнение

Докажите, что плоское поле, определенное формулой (57) вне окружности  $(L)$  с центром в начале координат, является безвихревым. Что получится, если строить потенциал этого поля по формуле (55)?

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1

$$1. \vec{AB} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}; \vec{AC} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}; \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 6\mathbf{k};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{7^2 + 10^2 + 6^2} = \frac{1}{2} \sqrt{185} = 6,8$$

2. Так как  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9 > 0$ , то тройка правая.

3.  $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = -\mathbf{j}$ , т. е.  $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$ .

## § 2

Если 1)  $\mathbf{b} = 0$ , или 2)  $\mathbf{b}$  приложен к точке  $O$ , или 3)  $\mathbf{b}$  направлен точно на  $O$  или от  $O$ , так что прямая, на которой лежит вектор  $\mathbf{b}$ , проходит через  $O$ . При этом третий случай охватывает первые два.

## § 3

1.  $T = \int dt = \int \frac{dr}{dr/dt}$ ; подстановка  $\frac{dr}{dt}$  из уравнения (15) приводит к интегралу  $T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{\frac{m}{2} \left( E + \frac{k}{r} - \frac{G^2}{2mr^2} \right)^{-1/2}} dr$ ; вычисление при  $-\frac{mk^2}{2G^2} < E < 0$  дает  $T = \pi k \sqrt{-\frac{m}{2E^3}}$ . Большая полуось эллипса  $a$  равна  $\frac{1}{2} \left( \frac{p}{1-\varepsilon} + \frac{p}{1+\varepsilon} \right)$ , или, после преобразований,  $-\frac{k}{2E}$ . При  $k = \kappa M$  получаем, что  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa M}} a^{3/2}$ ; это формулировка третьего закона Кеплера в общем случае.

2. Применение формулы (17) дает в качестве периода изменения радиуса значение  $\sqrt{2m} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left( E - \frac{k}{2} r^2 - \frac{G^2}{2mr^2} \right)^{-1/2} dr = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ . Различие объясняется тем, что в рассматриваемом виде движения период изменения радиуса  $r(t)$  в два раза меньше периода обращения частицы.

## § 4

а) Переходя к полярным координатам  $(\alpha, \varphi)$  (см. конец § IV.7), получим

$$(J_z)_{\text{ц}} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \alpha^2 d\alpha = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} h = \frac{MR^2}{2}.$$

б) Обозначим через  $\lambda$  линейную плотность стержня; тогда

$$(J_z)_{\text{ст}} = 2 \int_0^{L/2} x^2 \lambda dx = 2\lambda \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} \right)^3 = \frac{mL^2}{12}.$$

Эти два результата, между прочим, дают возможность более точно проанализировать вращение танцовщицы.

## § 5

1. В двумерном случае, если базис  $\mathbf{e}'_i$  получен из базиса  $\mathbf{e}_i$  поворотом на угол  $\varphi$ , то  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cos \varphi$ ,  $\alpha_{12} = -\alpha_{21} = \sin \varphi$ . Если тензор  $\rho_{ij}$  симметричный, то

$$\begin{aligned} \rho'_{12} &= \alpha_{1k} \alpha_{2l} \rho_{kl} = (\rho_{22} - \rho_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + \rho_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} (\rho_{22} - \rho_{11}) \sin 2\varphi + \rho_{12} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Выбирая  $\tan 2\varphi = 2\rho_{12}/(\rho_{11} - \rho_{22})$ , получим  $\rho'_{12} = 0$ , что и требуется.



2. Здесь  $\eta_{12} = k$  (малое), прочие  $\eta_{ij} = 0$ ; поэтому  $\beta_{12} = \beta_{21} = \gamma_{12} = -\gamma_{21} = k/2$ , прочие  $\beta_{ij} = \gamma_{ij} = 0$ . Применяя решение задачи 1, получаем, что тензору  $\beta_{ij}$  отвечает растяжение вдоль прямой  $x_1 = x_2$  в  $1 + \frac{k}{2}$  раз и сжатие вдоль прямой  $x_1 = -x_2$  в  $1 - \frac{k}{2}$  раз; тензору  $\gamma_{ij}$  в силу решения третьего упражнения § IX.5 отвечает поворот на угол  $\alpha = -\frac{k}{2}$ . Всю картину можно рассматривать как плоскую (в плоскости  $x_1, x_2$ ) либо как плоскопараллельную.

## § 6

1. Да.

2. Основная формула:  $[e_1, e_2, e_3] = e_4$ . Из нее вытекают три другие формулы с помощью круговых перестановок. При перестановке двух множителей результат множится на  $-1$ . Формула для произведения трех любых векторов аналогична (3), но определитель в ней имеет четвертый порядок. (Можно проверить, что векторное произведение перпендикулярно всем перемножаемым векторам, по модулю равно объему построенного на них параллелепипеда и образует с ними четверку «того же смысла», что четверка  $e_1, e_2, e_3, e_4$ .)

## § 7

$$1. \operatorname{rot} A(M) = - \frac{\oint_{(\Delta S)} A \times dS}{d\Omega} = - \lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \frac{\oint_{(\Delta S)} A \times dS}{\Delta\Omega}.$$

2.  $\oint_{(L)} f(z) dz = \oint_{(L)} (u + iv)(dx + i dy) = \oint_{(L)} (u dx - v dy) + i \oint_{(L)} (v dx + u dy)$ . Если рассмотреть поле  $A = u\mathbf{i} - v\mathbf{j}$ , то интеграл  $\oint_{(L)} (u dx - v dy)$  равен циркуляции этого поля по  $(L)$ , и потому по формуле Стокса  $\oint_{(L)} (u dx - v dy) = \int_{(S)} \operatorname{rot} A \cdot dS$ . Но  $A = A_x(x, y)\mathbf{i} + A_y(x, y)\mathbf{j}$ , т. е. по формуле (43)

$$\operatorname{rot} A = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0,$$

в силу второй формулы (V.17). Значит, последний интеграл равен нулю. Аналогично исследуется интеграл  $\oint_{(L)} (v dx + u dy)$ .

## § 8

1.  $u \operatorname{rot} A + \operatorname{grad} u \times A; B \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} B$ .

2.  $\nabla \cdot = (d\Omega)^{-1} \oint_{(d\sigma)} \cdot d\sigma$ .

## § 9

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & y^2 & x^2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Применяя формулу (55), выберем } M_0 = (0; 0; 0),$$

а путь  $MM_0$  — состоящим из отрезков, соединяющих точки  $(x; y; z)$  с  $(0; y; z)$ ,

(0;  $y$ ;  $z$ ) с (0; 0;  $z$ ) и (0; 0;  $z$ ) с (0; 0; 0). Отсюда

$$\varphi(x, y, z) = \int_x^0 2xz \, dx + \int_y^0 y^2 \, dy + \int_z^0 x^2 \Big|_{x=0} \, dz = -x^2 z - \frac{y^3}{3}.$$

### § 10

Так как за время  $dt$  вектор  $d\mathbf{r}$  перейдет в вектор  $d\mathbf{r} + d\mathbf{v} \, dt$ , то условие инвариантности направления  $d\mathbf{r}$  имеет вид  $d\mathbf{v} \parallel d\mathbf{r}$ . Так как  $\mathbf{v} = (p\mathbf{k}) \times \frac{\mathbf{r}}{r^2}$ , то  $d\mathbf{v} = (p\mathbf{k}) \times \left( \frac{d\mathbf{r}}{r^2} - \frac{2\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \right)$  и из  $d\mathbf{v} \parallel d\mathbf{r}$  получаем  $\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{2\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \perp d\mathbf{r}$ , т. е.  $(r^2 d\mathbf{r} - 2(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ . Поэтому  $r^2 (d\mathbf{r})^2 - 2(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})^2 = 0$ ,  $\cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r |d\mathbf{r}|} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , т. е.  $d\mathbf{r}$  должен с  $\mathbf{r}$  образовывать угол  $\pm 45^\circ$ .

### § 11

а) Пусть ток  $J$  течет по оси  $z$ , и мы подсчитываем вектор  $\mathbf{H}$  в точке плоскости  $xOy$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ . Тогда

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c(r^2 + \xi^2)^{3/2}} (J d\xi \mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \xi \mathbf{k})) = \frac{J r d\xi}{c(r^2 + \xi^2)^{3/2}} (\mathbf{k} \times \mathbf{r}^0),$$

$$\mathbf{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J r d\xi}{c(r^2 + \xi^2)^{3/2}} (\mathbf{k} \times \mathbf{r}^0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{J \cos s \, ds}{rc} (\mathbf{k} \times \mathbf{r}^0) = \frac{2J}{cr} (\mathbf{k} \times \mathbf{r}^0)$$

(здесь мы положили  $\xi = r \operatorname{tg} s$ ). Мы пришли к уже рассмотренному закону.

б) Пусть ток  $J$  течет по окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат, расположенной в плоскости  $xOy$ , и мы подсчитываем напряженность в точке (0; 0;  $z$ ). Тогда, представив окружность в параметрическом виде  $x = R \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \varphi$ , получим

$$\mathbf{H} = \int \frac{1}{c(z^2 + R^2)^{3/2}} (J d\mathbf{r} \times (z\mathbf{k} - \mathbf{r})) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{J}{c(z^2 + R^2)^{3/2}} ((-R \sin \varphi \, \mathbf{i} + R \cos \varphi \, \mathbf{j}) d\varphi (z\mathbf{k} - R \cos \varphi \, \mathbf{i} - R \sin \varphi \, \mathbf{j})) =$$

$$= \frac{JR}{c(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (z \cos \varphi \, \mathbf{i} + z \sin \varphi \, \mathbf{j} + R\mathbf{k}) d\varphi = \frac{2\pi JR^2}{c(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{k}.$$

Отсюда, между прочим, легко вывести формулу для магнитного поля от бесконечного соленоида.

### § 12

Надо взять дивергенцию от обеих частей равенства (65).

### § 13

Равенство  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$  проверяется по формуле (43). Так как левая часть (57) равна  $\operatorname{grad} (p \operatorname{arctg} (y/x))$ , то по формуле (55) получаем  $\varphi(x, y) = -p \operatorname{arctg} (y/x) + \text{const.}$  Этот «потенциал» многозначен, при обходе окружности ( $L$ ) он получает приращение  $-2\pi p$ , т. е. исходное безвихревое поле не является потенциальным.

## ГЛАВА XII

### ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В началах математического анализа (см., например, ВМ, § 1.6) изучается вопрос об отыскании экстремумов функции одной переменной, а в § IV.6 мы рассмотрели вопрос о разыскании экстремумов для функции нескольких переменных, другими словами, для задачи с конечным числом степеней свободы. Основная цель *вариационного исчисления* — получить общие методы разыскания экстремумов для задач с бесконечным числом степеней свободы. В этой главе нам понадобятся сведения из теории функций нескольких переменных (в основном §§ IV.1 и 6).

#### § 1. Пример перехода от конечного числа степеней свободы к бесконечному

Рассмотрим натянутую между двумя неподвижными точками цепочку из материальных частиц, последовательно связанных друг с другом одинаковыми пружинками. Пусть на частицы действуют

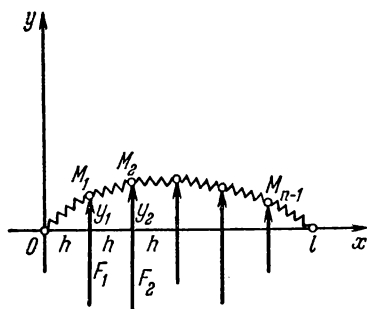


Рис. 164.

малые поперечные силы, вызывающие отклонение цепочки от ненагруженного состояния равновесия (рис. 164), причем для простоты будем считать, что перемещения частиц перпендикулярны линии ненагруженного состояния, т. е. оси  $x$ . Найдем нагруженное состояние равновесия, которое характеризуется отклонениями  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  частиц от оси  $x$ .

Для этого определим потенциальную энергию  $U$  цепочки в любом (необязательно равновесном) отклоненном состоянии, отсчитывая  $U$  от ненагруженного, но уже натянутого состояния цепочки. Эта энергия складывается из двух частей:

$$U = U_{\text{упр}} + U_{\text{внешн}} \quad (1)$$

первая представляет собой работу, затраченную на преодоление упругости пружинок, а вторая — на преодоление внешних сил. Первая пропорциональна удлинению  $\Delta l$  цепочки

$$U_{\text{упр}} = P \Delta l, \quad (2)$$

где  $P$  — сила натяжения цепочки; мы будем считать, что эта сила при отклонениях остается постоянной. Удлинение пружинки, соединяющей частицы  $M_i$  и  $M_{i+1}$ , равно (см. рис. 164)

$$\begin{aligned} \Delta l_i &= \sqrt{h^2 + (\Delta y_i)^2} - h = h \left( \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{h^2}} - 1 \right) = \\ &= h \cdot \frac{1}{2} \frac{(\Delta y_i)^2}{h^2} = \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{2h}; \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались приближенной формулой  $\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2} \alpha$ , справедливой при малых  $|\alpha|$ , т. е. в нашем случае при малых  $\frac{(\Delta y_i)^2}{h^2}$ . В силу формулы (2)

$$U_{\text{упр}} = P \sum_i \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{2h} = \frac{P}{2h} \sum_i (y_{i+1} - y_i)^2.$$

Еще проще находится

$$U_{\text{внешн}} = \sum_i y_i (-F_i) = - \sum_i F_i y_i.$$

Таким образом, в силу (1)

$$U = \frac{P}{2h} \sum_i (y_{i+1} - y_i)^2 - \sum_i F_i y_i. \quad (3)$$

В положении равновесия потенциальная энергия должна иметь «стационарное» значение, т. е. бесконечно малые изменения координат должны приводить к изменениям высшего порядка малости в потенциальной энергии; другими словами, производные от потенциальной энергии по координатам в положении равновесия должны равняться нулю. В самом деле, легко проверить, что производная  $\frac{\partial U}{\partial y_i}$  равна, с противоположным знаком, общей силе, действующей на  $i$ -ю частицу; таким образом, отличие производной от нуля свидетельствовало бы о нескомпенсированной силе, что невозможно при равновесии. В устойчивом же положении равновесия потенциальная энергия должна иметь минимум. Это необходимо для того, чтобы сдвиг из положения равновесия порождал компенсирующую силу, возвращающую систему в положение равновесия, другими словами, чтобы для такого сдвига обязательно требовалось затратить положительную работу.

Так как в правую часть (3) координата  $y_i$  входит в три члена

$$\frac{P}{2h} [(y_i - y_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_i)^2] - F_i y_i,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y_i} &= \frac{P}{2h} [2(y_i - y_{i-1}) - 2(y_{i+1} - y_i)] - F_i = \\ &= -\frac{P}{h} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) - F_i, \end{aligned}$$

и условие стационарности дает

$$\frac{P}{h} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + F_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (4)$$

Получается система из  $n-1$  алгебраических уравнений первой степени с  $n-1$  неизвестными координатами  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ . Отметим, что при  $i=1$  в уравнение (4) входит  $y_0$ , которое надо положить равным нулю (это закрепленная точка), а при  $i=n-1$  входит  $y_n$ , которое также надо положить равным нулю. Решив систему (4), найдем искомое положение равновесия.

Рассмотрим пример. Пусть все силы  $F_i = F$  одинаковы. Перепишем систему (4) в виде

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= -\frac{hF}{P} + y_1, \\ y_3 - 2y_2 + y_1 &= -\frac{hF}{P}, \\ y_4 - 2y_3 + y_2 &= -\frac{hF}{P}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Складывая первое и второе равенства, первое, второе и третье и т. д., получим (проверьте!)

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= -\frac{hF}{P} + y_1, \\ y_3 - y_2 &= -2\frac{hF}{P} + y_1, \\ y_4 - y_3 &= -3\frac{hF}{P} + y_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Перенеся в первом равенстве  $y_1$  из левой части в правую, а затем проведя ту же процедуру сложения, получим, применяя легко проверяемое равенство  $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ ,

$$\begin{aligned} y_2 &= -\frac{hF}{P} + 2y_1, \\ y_3 &= -\frac{2 \cdot 3}{2} \frac{hF}{P} + 3y_1, \\ y_4 &= -\frac{3 \cdot 4}{2} \frac{hF}{P} + 4y_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

в общем виде

$$y_i = -\frac{(i-1)i hF}{2P} + i y_1. \quad (5)$$

Так как  $y_n$  должно получиться равным нулю, то

$$-\frac{(n-1)n hF}{2P} + n y_1 = 0, \text{ откуда } y_1 = \frac{(n-1) hF}{2P}.$$

Подставляя в (5), находим окончательно

$$y_i = -\frac{(i-1)i hF}{2P} + i \frac{(n-1) hF}{2P} = \frac{i(n-i) hF}{2P} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \quad (6)$$

формула верна и при  $i=0$  и при  $i=n$ .

Рассмотренная система определяется отклонениями  $n-1$  ее частиц, т. е. имеет  $n-1$  степеней свободы. Увеличивая  $n$  при заданной длине  $l$  цепочки, мы одновременно бесконечно увеличиваем число степеней свободы, и в пределе получаем из цепочки непрерывную струну, которая представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы (так как при рассмотрении струны можно произвольно задавать отклонения как угодно большого числа ее точек). Итак, из дискретной, точечной системы частиц мы получаем в пределе сплошную среду с непрерывно распределенной массой.

Посмотрим, как преобразуются в пределе выражение для потенциальной энергии и условие статического равновесия. Будем считать, что внешняя поперечная сила распределена по струне с некоторой плотностью  $f(x)$ , так что на малую длину  $h$  струны приходится сила  $f(x)h$ . Перепишем выражение (3) для потенциальной энергии в виде

$$U = \sum_i \left[ \frac{P}{2} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right)^2 - f_i y_i \right] h.$$

При больших  $n$ , т. е. малых  $h$ , можно заменить  $\frac{y_{i+1} - y_i}{h}$  на  $y'_i$  и потенциал принимает вид

$$U = \sum_i \left[ \frac{P}{2} y'^2 - f y \right]_i h = \sum_i \left[ \frac{P}{2} y'^2 - f y \right]_i \Delta x,$$

так как  $h = \Delta x$ . Но это — интегральная сумма, и в пределе при  $h \rightarrow 0$  она переходит в интеграл

$$U = \int_0^l \left[ \frac{P}{2} (y')^2 - f(x) y \right] dx. \quad (7)$$

Это и есть выражение для потенциальной энергии в случае непрерывной струны. Таким образом, задачу об отыскании формы равновесия натянутой нагруженной струны математически можно

сформулировать так: найти функцию  $y(x)$  (описывающую форму струны), удовлетворяющую условиям закрепления

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (8)$$

и придающую интегралу (7) минимально возможное значение. Так как при выборе такой функции имеется бесконечное число степеней свободы, то эта задача относится уже не к теории функций нескольких переменных, а к вариационному исчислению.

Посмотрим теперь, во что в пределе перейдет условие (4) статического равновесия, которое теперь надо переписать в виде

$$P \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + f_i = 0. \quad (9)$$

Для этого напомним (§ II.2), что отношение

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

— так называемая *вторая разнесенная разность*, — при малых  $h$  близко к значению второй производной  $y''$ . Таким образом, в пределе, при  $h \rightarrow 0$ , из (9) мы получаем

$$Py'' + f(x) = 0; \quad \text{т. е.} \quad y'' = -\frac{1}{P} f(x), \quad (10)$$

и нам нужно найти решение  $y(x)$  этого уравнения, удовлетворяющее условиям (8). Эта задача была нами решена в § VIII.8.

Итак, вариационная задача о разыскании минимума интеграла при условиях (8) свелась к решению дифференциального уравнения (10) при тех же условиях. Подчеркнем, что при выводе уравнения (10) мы, по существу, не пользовались тем, что разыскивается именно минимум интеграла (7), так как при выводе условий (4) мы пользовались только условием стационарности выражения (3). Таким образом, уравнение (10) — это условие статического равновесия в рассматриваемой задаче. Однако легко проверить, что в данном примере равновесие устойчивое, и тем самым потенциальная энергия (7) принимает для найденного решения не просто стационарное, но минимальное значение. В самом деле, из физических соображений ясно, что какое-то положение струны, отвечающее минимуму потенциальной энергии, имеется. Но в § VIII.8 мы видели, что уравнение (10) при условиях (8) имеет лишь единственное решение. Значит, это решение и доставляет интегралу (7) минимум.

Рассмотрим пример. Пусть  $f(x) \equiv f_0 = \text{const}$ . Тогда уравнение (10) легко интегрируется:

$$y' = -\frac{f_0}{P} x + C_1, \quad y = -\frac{f_0}{P} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Из условий (8) получаем

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{f_0}{P} \frac{l}{2},$$

откуда окончательно

$$y = -\frac{f_0}{P} \frac{x^2}{2} + \frac{f_0}{P} \frac{l}{2} x = \frac{f_0 x (l-x)}{2P}.$$

(Получите это же выражение из решения (6) для дискретного случая, положив  $F = f_0 h$ ,  $n = \frac{l}{h}$ ,  $i = \frac{x}{h}$ .)

Упомянем в заключение о более общем случае, когда на частицы  $M_i$  (а в пределе на точки струны) действует ещё и упругая сила, стремящаяся вернуть их в ненагруженное состояние равновесия, с коэффициентом упругости  $K$  (упругая подкладка). В этом случае на преодоление упругости подкладки затрачивается работа

$$\sum_i \int_0^{y_i} (Ky) dy = \sum_i \frac{Ky_i^2}{2},$$

и потому выражение для потенциальной энергии, взамен (3), приобретает вид

$$U = \frac{P}{2h} \sum_i (y_{i+1} - y_i)^2 + \frac{K}{2} \sum_i y_i^2 - \sum_i F_i y_i.$$

Условие стационарности, т. е. статического равновесия, дает

$$\begin{aligned} \frac{P}{h} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) - Ky_i + F_i &= 0 \\ (i = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

При переходе к непрерывной струне естественно ввести понятие «линейной плотности коэффициента упругости»  $k$ , так что сила упругости, приходящаяся на длину  $h$  струны, равна  $khy$ . Тогда взамен (7) и (10) мы получаем соотношения

$$U = \int_0^l \left[ \frac{P}{2} (y')^2 + \frac{k}{2} y^2 - f(x)y \right] dx, \quad (11)$$

$$Py'' - ky + f(x) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, решение вариационной задачи и здесь свелось к решению краевой задачи для дифференциального уравнения.

### Упражнение

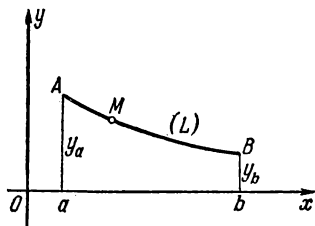
Найдите решение системы (4) при условиях (8) в общем случае. Получите при  $n \rightarrow \infty$  решение для сплошной струны.



## § 2. Функционал

Следующая вариационная задача, возникшая в конце XVII века и решенная Лейбницем, Лопиталем и Ньютоном независимо друг от друга, показала силу создаваемого в то время математического анализа.

Пусть материальная частица  $M$  под действием силы тяжести скатывается без трения с нулевой начальной скоростью от точки  $A$  до точки  $B$  по линии  $(L)$  (рис. 165); как выбрать эту линию, чтобы падение произошло в минимальное время? Для аналитической формулировки задачи обозначим неизвестное уравнение линии через  $y = y(x)$ ; тогда функция  $y(x)$  прежде всего должна удовлетворять условиям:



$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad (13)$$

где  $y_a$  и  $y_b$  — ординаты заданных точек  $A$  и  $B$ . Скорость движения частицы  $M$  в любой текущий момент легко определить, исходя из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(y_a - y), \text{ откуда } v = \sqrt{2g(y_a - y)}.$$

Горизонтальная составляющая скорости равна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dx}{ds} = v \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sqrt{2g(y_a - y)} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Выражая отсюда  $dt$  и интегрируя, получим полное время падения

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}} dx. \quad (14)$$

Таким образом, требуется из всех функций, удовлетворяющих условиям (13), выбрать такую, для которой интеграл (14) принимает наименьшее возможное значение.

Разобранная задача, как и задачи, поставленные в § 1 для непрерывной струны, являются типичными задачами вариационного исчисления. Для таких задач характерны два обстоятельства. Прежде всего это — задачи на экстремум (максимум или минимум), т. е. задачи, в которых требуется придать экстремальное значение некоторому числовому параметру ( $U$  в задачах § 1,  $T$  в задаче о линии наискорейшего спуска). Задачи на экстремум мы уже решали, причем для функций одной переменной искомым являлось некоторое число, а именно значение независимой переменной, а для функций нескольких переменных искомым являлся набор чисел. В отличие

от этого в разобранных задачах этой главы искомой является не число или набор чисел, а функция  $y(x)$ , через все значения которой выражается указанный числовой параметр (по формулам (7) или (11) в § 1 и (14) в последней задаче).

Имеется много других задач на экстремум, в которых ищется функция (геометрически—линия или поверхность) или набор функций. Все такие задачи и составляют предмет вариационного исчисления.

На задачи вариационного исчисления можно взглянуть также со следующей точки зрения. При подборе значения независимой переменной имеется одна степень свободы. Если ищется набор  $n$  значений таких переменных (как в гл. IV), то имеется  $n$  степеней свободы. Если же произвольно меняется функциональная зависимость, то имеется бесконечное число степеней свободы: в самом деле, можно произвольно задавать значения функции для как угодно большого числа значений независимой переменной. Значит, задачи вариационного исчисления—это задачи на экстремум для случая бесконечного числа степеней свободы в выборе искомого объекта.

Итак, для задач вариационного исчисления характерна следующая схема. Имеется некоторый скалярный параметр  $I$  (это  $U$  в § 1 и  $T$  в последней задаче), выражающийся по определенной формуле ((7), (11) или (14)) через неизвестную функцию  $y(x)$  (мы пока ограничимся функциями одного переменного), которую нужно подобрать. Эта функция является более или менее произвольной, хотя и удовлетворяет тем или иным условиям: например, условиям (8) в § 1 и (13) в задаче этого параграфа, а также требованию непрерывности.

Такой закон, согласно которому каждой функции из определенного класса функций соответствует значение некоторого скалярного параметра, называется *функционалом*. Таким образом, основная задача вариационного исчисления—это задача о нахождении экстремума заданного функционала.

Чтобы пояснить понятие функционала, вспомним еще раз понятие функции. Рассмотрим, например, формулу  $y = x^2$ . В силу этой формулы каждому значению  $x$  отвечает некоторое значение  $y$ : например, при  $x = 2$  получается  $y = 4$ , при  $x = -\frac{1}{3}$  получается  $y = \frac{1}{9}$  и т. д. Таким образом, мы имеем закон, согласно которому числам  $x$  отвечают числа  $y$ . Формула  $y = x^3$  определяет другой закон зависимости, т. е. другую функцию, формула  $y = \sin x$  — третью и т. д.

Простейшим примером функционала является определенный интеграл. Рассмотрим, например, формулу

$$I = \int_0^1 y^2 dx \quad (y = y(x)). \quad (15)$$

Если вместо  $y(x)$  подставлять различные конкретные функции, то будут получаться конкретные числовые значения  $I$ . Например, выбрав  $y = x^2$ , получим

$$I = \int_0^1 (x^2)^2 dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} = 0,2;$$

выбрав  $y = x^3$ , получим  $I = \frac{1}{7} = 0,143$ ; выбрав  $y = \sin x$ , получим

$I = \frac{2 - \sin^2 1}{4} = 0,273$  и т. д. Таким образом, формула (15) задает закон, согласно которому каждой функции  $y(x)$  соответствует значение  $I$ , т. е. формула (15) определяет функционал. Формула

$$I = \int_0^1 xy' dx \quad (y = y(x); y' = dy/dx) \quad (16)$$

определяет другой функционал; формула

$$I = \int_{-1}^3 y^2 dx \quad (y = y(x))$$

— третий (обратите внимание на пределы интегрирования) и т. д.

Итак, если числам ставятся в соответствие числа, то мы говорим, что задана функция. Если функциям ставятся в соответствие числа, то задан функционал. Напомним, кстати (§ VI.2), что если функциям ставятся в соответствие функции, то говорят, что задан оператор.

Функционал (16) — *линейный*; это значит, что при сложении функций  $y(x)$  значения функционала  $I$  также складываются:

$$\int_0^1 x(y_1 + y_2)' dx = \int_0^1 xy_1' dx + \int_0^1 xy_2' dx.$$

Функционал (15) — *нелинейный (квадратичный)*.

При исследовании функционала бывает важно выяснить, как меняется его значение при малом изменении функции, от которой он зависит. Рассмотрим этот вопрос на примере функционала (15). Пусть в правую часть была сначала подставлена некоторая функция  $y(x)$ , а затем некоторая новая функция  $y(x) + \delta y(x)$ , где  $\delta y(x)$  — *вариация  $y$*  — произвольная функция, принимающая малые значения. (Например, могло быть сначала  $y = x^2$ , а затем  $y = x^2 + \alpha x^3$ , где постоянная  $\alpha$  мала.) Тогда и значение функционала немного изменится и станет равным

$$\int_0^1 [y + \delta y]^2 dx = \int_0^1 y^2 dx + 2 \int_0^1 y \delta y dx + \int_0^1 (\delta y)^2 dx.$$

Таким образом, приращение этого значения равно

$$\Delta I = 2 \int_0^1 y \delta y \, dx + \int_0^1 (\delta y)^2 \, dx. \quad (17)$$

Если временно зафиксировать функцию  $y(x)$  и менять ее вариацию, то мы видим, что в правой части (17) в зависимости от  $\delta y$  первый член — линейный, тогда как второй — квадратичный (в общем случае присутствуют также и члены более высоких степеней). Так как значения  $\delta y$  малы, то главную роль в правой части играет линейный член, а квадратичный имеет высший порядок малости. Этот линейный член в приращении функционала называется *вариацией функционала* и обозначается  $\delta I$ , т. е. для примера (15)

$$\delta I = 2 \int_0^1 y \delta y \, dx. \quad (18)$$

Таким образом, с точностью до членов высшего порядка малости

$$\Delta I \approx \delta I. \quad (19)$$

В тех случаях, когда членами второго и следующих порядков малости можно пренебречь, говорят просто, что вариация функционала — это его бесконечно малое приращение, полученное за счет бесконечно малого изменения («варьирования») функции, от которой зависит значение функционала. (Однако при немалых  $\delta y$ , конечно,  $\Delta I \neq \delta I$ !) Если вспомнить основы дифференциального исчисления, то можно усмотреть полную аналогию между понятиями дифференциала функции и вариации функционала.

### Упражнения

1. Найдите вариацию функционалов  $I = \int_0^1 \frac{x}{y^2} \, dx$ ;  $y^2(0) + \int_0^1 (xy + y'^2) \, dx$ .
2. Для функционала  $I = \int_0^1 y^2 \, dx$  положите  $y = 2x$ ,  $\delta y = \alpha x^2$  и сравните  $\delta I$  с  $\Delta \delta$  при  $\alpha = 1$ ;  $-0,1$ ;  $0,01$ .

### § 3. Необходимое условие экстремума

Пусть функция  $y(x)$  реализует экстремум функционала  $I$ ; другими словами, значение функционала для функции  $y(x)$  больше (в случае максимума) или меньше (в случае минимума) значений этого функционала для всех функций, достаточно близких к  $y(x)$ . (Последняя оговорка связана с тем, что функционал, вообще говоря, может иметь несколько экстремумов, подобно тому как функция может

иметь несколько точек экстремума.) При этом  $\Delta I$  будет отрицательным в случае максимума и положительным в случае минимума для всех указанных функций, т. е. в обоих случаях не меняет знака. Но отсюда следует, что

$$\delta I = 0. \quad (20)$$

В самом деле, из формулы (19) вытекает, что если  $\delta I \neq 0$ , то  $\Delta I$  и  $\delta I$  имеют одинаковый знак; но в силу линейной зависимости  $\delta I$  от  $\delta y$  при перемене знака у  $\delta y$  и  $\delta I$  изменит знак (см., например, формулу (18)), что противоречит предыдущему.

Итак, условие (20) и является необходимым условием экстремума; кстати сказать, оно совершенно аналогично необходимому условию экстремума функции, известному в дифференциальном исчислении. Если функция  $y(x)$  осуществляет экстремум по сравнению со всеми близкими функциями, то  $\delta y$  в левой части (20) может быть произвольной (даже не требуется малость этой функции, так как из-за линейности  $\delta I$ , если  $\delta I = 0$  для малых  $\delta y$ , то это же верно и для любых  $\delta y$ ). Если же экстремум осуществляется по сравнению с функциями некоторого класса (см., например, условия (8) и (13)), то  $\delta y$  должна быть такой, чтобы  $y + \delta y$  принадлежала этому классу.

Условие (20)—это условие стационарности функционала  $I$  при изменении вида функции  $y(x)$ , от которой этот функционал зависит. Во многих задачах нас могут интересовать все стационарные, а не только экстремальные значения функционала. Так, на примерах задач § 1 мы видели, что если в качестве функционала рассматривается потенциальная энергия сплошной среды, то каждому стационарному значению отвечает статическое положение равновесия, тогда как минимальным значениям функционала отвечают устойчивые состояния равновесия.

Покажем применение условия (20) на простейшей задаче об отыскании экстремума функционала вида

$$I = \int_a^b F(x, y) dx, \quad (21)$$

где в качестве  $y$  подставляется любая функция  $x$ . Чтобы найти  $\delta I$ , подставим  $y + \delta y$  вместо  $y$  и разложим результат по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} I + \Delta I &= \int_a^b F(x, y + \delta y) dx = \\ &= \int_a^b F(x, y) dx + \int_a^b F'_y(x, y) \delta y dx + \int_a^b F''_{yy} \frac{(\delta y)^2}{2!} dx + \dots \end{aligned}$$

Вариация функционала, т. е. линейная часть приращения, равна

$$\delta I = \int_a^b F'_y(x, y) \delta y \, dx.$$

Отсюда в силу произвола в выборе  $\delta y(x)$  вытекает, что

$$F'_y(x, y) = 0. \quad (22)$$

В самом деле, если положить  $\delta y = \alpha F'_y(x, y(x))$  ( $\alpha$  малое), то последний интеграл будет равен

$$\alpha \int_a^b (F'_y)^2 \, dx.$$

Но он должен равняться нулю, откуда и следует наше утверждение. (Если непрерывная функция не принимает отрицательных значений, а интеграл от нее равен нулю, то функция тождественно равна нулю.)

К условию (22) можно прийти иначе. Если интеграл (21) должен иметь экстремальное, например минимальное, значение, то и подынтегральная функция должна быть минимально возможной. Другими словами, если мы складываем не зависящие друг от друга слагаемые, то для минимальности суммы каждое слагаемое должно быть минимально возможным. Таким образом, при каждом  $x$  значение  $y$  надо подобрать из условия минимальности функции  $F$ , что немедленно приводит к (22). Итак, в этом случае по сравнению с задачами, разбираемыми в основах дифференциального исчисления, не возникает ничего принципиально нового.

К функционалу вида (21) мы приходим, в частности, если в рассмотренных § 1 положим, что точки струны не обладают упругой связью друг с другом, а подвержены только действию внешней силы и упругости подкладки. Ясно, что при этом каждая точка струны расположится независимо от положения остальных точек, так что принципиально нового по сравнению со статикой точки здесь ничего нет. Функционал в этом примере имеет вид

$$U = \int_0^l \left[ \frac{k}{2} y^2 - f(x) y \right] dx$$

(т. е. (11) при  $P=0$ ), а условие равновесия (22) дает

$$ky - f(x) = 0, \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{1}{k} f(x);$$

тот же результат получается из (12) при  $P=0$ . Интересно, что это решение получается, вообще говоря, разрывным, как из-за возможных разрывов  $y$  функции  $f(x)$  (так будет, например, если внешняя

нагрузка приложена лишь к части струны), так и из-за граничных условий (8). Конечно, так и должно быть, если точки струны друг с другом ничем не связаны; собственно говоря, о «струне» в такой ситуации можно говорить с очень большой натяжкой.

### Упражнение

Найти функции  $y(x)$ , придающие минимальное значение функционалу:

$$а) \int_0^1 (1-x)(y-2x)^2 dx; \quad б) \int_0^2 (1-x)(y-2x)^2 dx.$$

## § 4. Уравнение Эйлера

Вернемся к рассмотренной в § 1 задаче о равновесии упругой струны под действием внешней силы. Мы видели, что эта задача сводится к нахождению экстремума (или даже просто стационарного значения) функционала в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям (8). Попробуем найти решение с помощью условия (20), для чего сначала подсчитаем  $\delta U$ . Пусть  $y$  получит приращение  $\delta y$ ; тогда  $y'$  получит приращение  $\delta(y')$ . Однако нетрудно проверить, что  $\delta(y') = (\delta y)'$ : в самом деле, если  $\delta y = Y(x) - y(x)$ , то  $\delta(y') = Y'(x) - y'(x) = [Y(x) - y(x)]' = (\delta y)'$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_0^l \left[ \frac{P}{2} (y' + \delta y')^2 - f(x)(y + \delta y) \right] dx - \int_0^l \left[ \frac{P}{2} (y')^2 - f(x)y \right] dx = \\ &= \int_0^l \left[ P y' \delta y' + \frac{P}{2} (\delta y')^2 - f(x) \delta y \right] dx. \end{aligned}$$

Отбрасывая член второго порядка малости, получаем

$$\delta U = \int_0^l [P y' \delta y' - f(x) \delta y] dx.$$

Необходимое условие (20) дает

$$P \int_0^l y' \delta y' dx - \int_0^l f(x) \delta y dx = 0, \quad (23)$$

причем это равенство должно выполняться для любой вариации  $\delta y$ , удовлетворяющей условиям

$$\delta y(0) = 0, \quad \delta y(l) = 0, \quad (24)$$

которые нужны для того, чтобы  $y + \delta y$  удовлетворяла тем же условиям (8), что и  $y$ .

Новым в условии (23) является то, что в него наряду с  $\delta y$  входит и  $\delta y'$ , а эти две величины нельзя считать независимыми. Поэтому проинтегрируем первый член по частям, применяя равенства (24):

$$0 = P y' \delta y \Big|_{x=0}^l - P \int_0^l y'' \delta y \, dx - \int_0^l f(x) \delta y \, dx = - \int_0^l [P y'' + f(x)] \delta y \, dx.$$

Воспользовавшись теперь произвольностью в выборе  $\delta y$  и рассуждая, как в § 3, получим отсюда

$$P y'' + f(x) = 0,$$

т. е. уравнение (10).

Таким образом, наличие  $y'$  в выражении функционала связывает соседние значения  $y$  (ср. пример с пружинками, разобранный в § 1). В этом случае нельзя подбирать каждое значение  $y$  независимо от соседних, как для функционала (21), и мы получаем не конечное уравнение, как в § 3, а дифференциальное.

Выведем теперь аналогичное дифференциальное уравнение для функционала более общего вида:

$$I = \int_a^b F(x, y, y') \, dx \quad (y = y(x), \, y' = dy/dx), \quad (25)$$

где  $F$ —заданная функция, а  $a$  и  $b$ —заданные пределы интегрирования. Пусть ищется экстремум этого функционала при заданных краевых условиях

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (26)$$

Рассуждая, как в только что разобранном примере, и пользуясь общей формулой (IV.2), в которой роль  $x$ ,  $dx$ ,  $y$ ,  $dy$  играют соответственно  $y$ ,  $\delta y$ ,  $y'$ ,  $\delta y'$ , получим вариацию функционала (25)

$$\delta I = \int_a^b [F'_y(x, y, y') \delta y + F'_{y'}(x, y, y') \delta y'] \, dx.$$

(По этому образцу составляется вариация и функционалов иной формы). Если теперь некоторая функция  $y(x)$ , удовлетворяющая условиям (26), реализует экстремум функционала (25) по сравнению со всеми близкими функциями, удовлетворяющими тем же условиям, то по признаку (20) должно быть

$$\int_a^b [F'_y(x, y, y') \delta y + F'_{y'}(x, y, y') \delta y'] \, dx = 0. \quad (27)$$

Это равенство должно выполняться для любой вариации  $\delta y$ , удовлетворяющей соотношениям

$$\delta y(a) = 0, \quad \delta y(b) = 0, \quad (28)$$



которые нужны для того, чтобы  $y + \delta y$  удовлетворяла тем же условиям (26), что и  $y$ .

Можно ли удовлетворить уравнению (27), положив  $F'_y = 0$ ,  $F'_{y'} = 0$ ? Мы при этом получим два уравнения для одной искомой функции  $y(x)$  (напомним, что выражение  $F(x, y, y')$  задано). В общем случае два уравнения с одной искомой функцией общего решения не имеют. Решение нашей задачи, однако, существует по той причине, что  $\delta y$  и  $\delta y'$  не являются величинами независимыми друг от друга. Можно найти такое  $y(x)$  или, лучше сказать, такое одно уравнение для  $y(x)$ , чтобы при любом  $\delta y$  и соответствующем ему  $\delta y'$  один член, т. е.  $\int F'_y \delta y dx$ , в точности компенсировался бы другим членом,  $\int F'_{y'} \delta y' dx$ , хотя в отдельности они и не равны нулю. Покажем, как это сделать.

Интегрируя по частям второе слагаемое (27) и применяя соотношения (28), получим

$$0 = \int_a^b F'_y \delta y dx + F'_{y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} (F'_{y'}) \delta y dx = \int_a^b \left[ F'_y - \frac{d}{dx} (F'_{y'}) \right] \delta y dx.$$

Отсюда в силу произвола в выборе  $\delta y$  вытекает, что последняя квадратная скобка тождественно равна нулю. В самом деле, если взять  $\delta y$  равной этой скобке и лишь вблизи точек  $a$  и  $b$  заставить быстро спадать до нуля (это нужно, чтобы удовлетворить соотношениям (28)), то последний интеграл будет приближенно равен  $\int_a^b \left[ F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right]^2 dx$ . Но он должен равняться 0, откуда и следует утверждение.

Итак, мы пришли к так называемому *уравнению Эйлера*

$$F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') = 0. \quad (29)$$

Отметим, что в нем при дифференцировании  $\frac{d}{dx}$  величина  $y$  рассматривается как функция  $x$ ; более подробно, по правилу дифференцирования сложной функции, уравнение Эйлера можно переписать в виде

$$F'_y(x, y, y') - F''_{xy'}(x, y, y') - F''_{yy'}(x, y, y') y' - F''_{y'y'}(x, y, y') y'' = 0. \quad (30)$$

Здесь частные производные от  $F(x, y, y')$  берутся уже без учета зависимости  $y$  и  $y'$  от  $x$ . Видно, что это — дифференциальное уравнение второго порядка, и потому его общее решение содержит две произвольные постоянные, которые определяются с помощью краевых

условий (26). Уравнение Эйлера обобщает уравнения статического равновесия (10) и (12), разобранные в § 1.

Приведем еще один вывод уравнения Эйлера (29), не использующий формальный прием интегрирования по частям. Для этого разобьем интервал  $a \leq x \leq b$  с помощью точек  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  на маленькие участки равной длины  $h$  и запишем приближенно интегралы от каждого из слагаемых в левой части (27) в виде интегральных сумм, причем первую сумму возьмем по «целым», а вторую — по «полуцелым» точкам деления (§ II.1—2). Если затем заменить производную на разностное отношение, то взамен (27) мы получим условие

$$\sum_k (F'_y)_k \delta y_k + \sum_k (F'_{y'})_{k+1/2} \frac{\delta y_{k+1} - \delta y_k}{h} = 0. \quad (31)$$

На первый взгляд может показаться, что коэффициент при  $\delta y_k$  во второй сумме существенно превосходит соответствующий коэффициент в первой сумме, так как при малом  $h$   $|(F'_{y'})_{k+1/2}|/h \gg |(F'_y)_k|$ . Но надо учесть, что во второй сумме  $\delta y_k$  участвует в двух соседних слагаемых: с  $(F'_{y'})_{k+1/2}$  и  $(F'_{y'})_{(k-1)+1/2}$ ; поэтому общий коэффициент при  $\delta y_k$  в левой части (31) равен

$$(F'_y)_k - \frac{1}{h} [(F'_{y'})_{k+1/2} - (F'_{y'})_{k-1/2}] \approx (F'_y)_k - \left[ \frac{d}{dx} (F'_{y'}) \right]_k. \quad (32)$$

Итак,  $h$  сократилось, т. е. оба члена в правой части (32) имеют одинаковый порядок.

В силу произвольности  $\delta y_k$  из условия (31) получаем, что этот коэффициент должен равняться нулю, т. е. приходим к (29).

Рассмотрим в качестве примера задачу § 2 о линии наибыстрейшего спуска. В этом случае (см. (14)) надо положить

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}}. \quad (33)$$

Так как в правую часть не входит непосредственно  $x$ , то в левой части (30) отсутствует второе слагаемое, и после умножения обеих частей (30) на  $y'$  его можно переписать в виде  $(F - F'_{y'} y')' = 0$ . Отсюда, интегрируя, получаем

$$F - F'_{y'} y' = C_1, \quad (34)$$

что для конкретного примера (33) даст

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}} - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2} \sqrt{2g(y_a - y)}} y' = C_1,$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2} \sqrt{2g(y_a - y)}} = C_1.$$

Для интегрирования этого уравнения введем искусственный параметр  $t$  по формуле

$$y_a - y = r(1 - \cos t), \quad \text{где } r = 1/4gC_1^2.$$

Тогда, преобразуя, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} &= C_1 \sqrt{2g(y_a - y)} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}; \\ 1 + y'^2 &= \frac{2}{1 - \cos t}; \quad y'^2 = \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} = \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}; \\ \frac{dy}{dx} &= \pm \frac{\sin t}{1 - \cos t}; \quad dx = \pm \frac{1 - \cos t}{\sin t} dy = \pm r(1 - \cos t) dt; \\ x &= \pm r(t - \sin t) + C_2. \end{aligned}$$

Это выражение вместе с предыдущим выражением для  $y$  дают параметрические уравнения так называемой циклоиды (см., например,

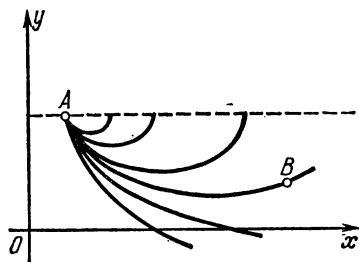


Рис. 166.

ВМ, § IV.8), т. е. линии, которую описывает точка окружности радиуса  $r$ , катящейся снизу без скольжения по горизонтальной прямой, проведенной через  $A$ . Таким образом, линией наискорейшего спуска служит циклоида с острием в точке  $A$ ; радиус  $r$  при этом должен быть подобран так, чтобы первая арка циклоиды прошла через конечную точку. На рис. 166 показано несколько таких арок, из которых

через конечную точку проходит четвертая; интересно отметить, что эта арка частично проходит ниже конечной точки, чего можно было заранее не предвидеть. Впрочем, глядя на ответ, это легко понять: чтобы пройти большой путь по горизонтали, выгодно опуститься пониже, набрать большую скорость, а уже под конец пути подняться к месту назначения. Точка  $B$  должна быть ниже точки  $A$ , иначе, естественно, решения вообще не существует.

Вернемся к общему функционалу (25) при граничных условиях (26). Пусть, зафиксировав эти условия, мы получили какое-то решение  $y(x)$  задачи на экстремум. Представим теперь, что эти условия могут изменяться. Тогда экстремальное значение функционала  $I$  будет зависеть от этих условий

$$I = I(a, b, y_a, y_b). \quad (35)$$

При этом мы в  $I$  подставляем только функции, придающие ему экстремальное значение для фиксированных граничных условий; если бы это не было сделано, то  $I$  зависело бы, помимо граничных условий, еще от произвольной функции  $y(x)$ .

Может оказаться необходимым изучить функциональную зависимость (35) значения  $I$  при изменении граничных условий  $y(a) = y_a$ ,  $y(b) = y_b$ . Так как функция (35) зависит уже от конечного числа независимых переменных, то эта задача решается средствами обычного анализа, с помощью вычисления производных. Покажем, например, как вычисляется производная  $\frac{\partial I}{\partial y_a}$ . Если зафиксировать  $a, b, y_b$  и изменять  $y_a$ , то решение  $y(x)$  задачи на экстремум изменится, получит приращение  $\delta y(x)$ . При этом, с точностью до малых высшего порядка,

$$\Delta I = \int_a^b (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y') dx = F'_{y'} \delta y \Big|_a^b + \int_a^b \left[ F'_y - \frac{d}{dx} (F'_{y'}) \right] \delta y dx.$$

Но так как  $y(x)$  была решением задачи на экстремум, то она удовлетворяет уравнению Эйлера, и потому последний интеграл обращается в нуль. Кроме того,  $\delta y(b) = 0$  (так как  $y_b$  не меняется), и мы получаем

$$\Delta I = -(F'_{y'})_a \delta y(a); \quad \frac{\partial I}{\partial y_a} = -(F'_{y'})_a.$$

Аналогично вычисляются остальные производные функции (35).

### Упражнения

1. Найдите решение задач: а)  $I = \min \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ ;  
б)  $I = \min \int_0^1 y y'^2 dx$ ,  $y(0) = p > 0$ ,  $y(1) = q > 0$ .
2. В последней задаче найдите  $\frac{\partial I}{\partial p}$  непосредственно и по формуле, выведенной в тексте.
3. Выведите с помощью вариационного исчисления уравнение прямой как кратчайшей линии, соединяющей две заданные точки.

## § 5. Всегда ли существует решение поставленной задачи?

Условие (20) является только необходимым для экстремума. Достаточные условия довольно сложны, однако в большинстве практических задач они не требуются. Например, в задаче, разобранной в § 4, мы не проверяли, что для построенной арки циклоиды осуществляется именно минимальное время падения. Однако из физических соображений ясно, что какое-то решение задачи о минимуме при  $y_a > y_b$  имеется и его только надо найти. А так как с помощью применения необходимого условия (уравнения Эйлера) получилось лишь одно решение, то оно и является искомым. Конечно, не вдаваясь в смысл задачи, мы могли поставить вопрос об отыскании

линии с максимальным временем падения и прийти к тому же уравнению Эйлера и к тому же решению. Но этот ответ был бы ошибочным, так как мы видим теперь, что построенное решение (которое является единственным) дает именно минимум времени падения.

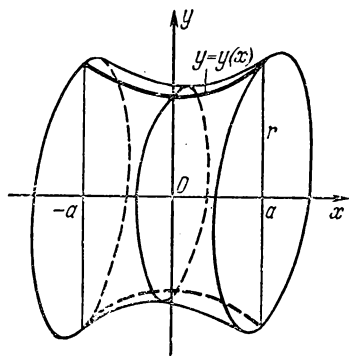


Рис. 167.

Что касается соответствующей задачи на максимум, то она вовсе не имеет решения и легко построить линии с как угодно большим временем падения.

Таким образом, задача на экстремум может не иметь решения; в некоторых случаях это более или менее сразу ясно из формулировки задачи (как в предыдущем примере при рассмотрении задачи на максимум), тогда как в других случаях вытекает из результатов вычислений. Покажем это на примере.

Пусть требуется найти форму пленки минимальной площади, если эта пленка натянута на два равных колечка, расположенных перпендикулярно их линии центров. Такую форму принимает мыльная пленка, натянута на эти колечки (рис. 167, где жирными линиями изображено осевое сечение пленки). Так как из соображений симметрии ясно, что искомая поверхность будет поверхностью вращения, а площадь поверхности вращения, как известно (см., например, ВМ, § III.7), равна

$$S = 2\pi \int_{-a}^a y \, dl = 2\pi \int_{-a}^a y \sqrt{1+y'^2} \, dx, \quad (36)$$

то дело сводится к отысканию функции  $y(x)$ , реализующей минимум интеграла (36) при граничных условиях:

$$y(-a) = r, \quad y(a) = r. \quad (37)$$

И здесь  $x$  под знак интеграла не входит непосредственно, так что можно воспользоваться промежуточным интегралом (34), что даст

$$2\pi y \sqrt{1+y'^2} - \frac{2\pi y y'}{\sqrt{1+y'^2}} y' = C_1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{C_1}{2\pi}.$$

Обозначив правую часть через  $\frac{1}{k}$  и проводя преобразования, получим

$$\frac{y^2}{1+y'^2} = \frac{1}{k^2}, \quad k^2 y^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{k^2 y^2 - 1},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{k^2 y^2 - 1}} = \pm dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{k^2 y^2 - 1}} = \pm (x + C). \quad (38)$$

Последний интеграл при  $k=1$  приведен в ВМ, стр. 167 (№ 31), он равен  $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ . Попробуем вычислить производную от

функции  $\ln(ky + \sqrt{(ky)^2 - 1})$ , она равна  $k/\sqrt{k^2 y^2 - 1}$  (проверьте!). Поэтому из (38) мы получаем  $\frac{1}{k} \ln(ky + \sqrt{k^2 y^2 - 1}) = \pm (x + C)$ , откуда после несложных преобразований, которые мы предоставляем читателю,  $y = \frac{e^{k(x+C)} + e^{-k(x+C)}}{2k}$  (знак  $\pm$  здесь несуществен).

Чтобы линия была симметрична относительно  $x = 0$ , должно быть  $C = 0$ , т. е. окончательно

$$y = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}.$$

Это — так называемая *цепная линия*; название объясняется тем, что форму этой линии принимает тяжелая цепь, подвешенная за концы (см. упражнение 2 к § 8). Итак, искомая поверхность мыльной пленки получается в результате вращения цепной линии.

Чтобы удовлетворялись граничные условия (37), требуется, чтобы

$$\frac{e^{ka} + e^{-ka}}{2k} = r, \text{ т. е. } \frac{e^{ak} + e^{-ak}}{2} = rk, \quad (39)$$

откуда и следует найти пока неизвестное значение параметра  $k$ . Попробуем решить эту задачу графически, для чего изобразим при заданных  $a$  и  $r$  графики изменения левой и правой частей

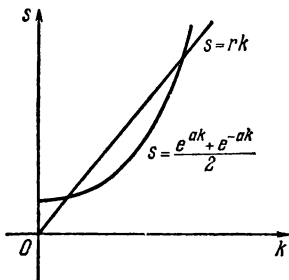


Рис. 168.

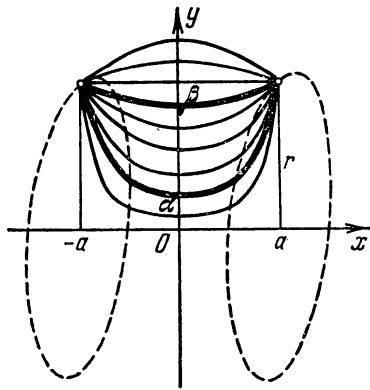


Рис. 169.

уравнения (39) (рис. 168) и найдем точку пересечения обоих графиков. Мы с удивлением обнаруживаем, что получается не одно решение, как можно было бы ожидать, а два (при сравнительно малых  $a$ , т. е. при сближении колечек) или ни одного (при удалении колечек). Какую же форму примет пленка на самом деле?

Пусть сначала  $a$  сравнительно мало, т. е. имеется два решения, изображенных жирными линиями на рис. 169 (на этом же рисунке

пунктиром обозначены колечки). Если мысленно представить себе другие формы пленки, изображенные на рис. 169 тонкими линиями, то площади соответствующих поверхностей вращения будут иметь значения, изображенные графически на рис. 170. Мы видим, что из двух решений именно для верхнего реализуется минимум площади, а для нижнего — максимум. Поэтому верхнее решение дает устойчивую форму равновесия пленки, а нижнее — неустойчивую.

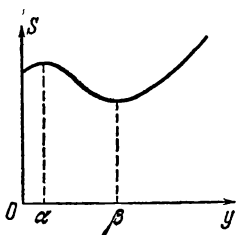


Рис. 170.

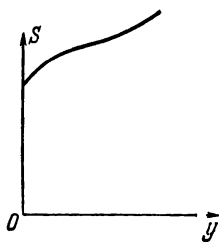


Рис. 171.

Если теперь  $a$  увеличивать (при данном  $r$ ), т. е. отодвигать колечки друг от друга, то точки экстремума  $\alpha$  и  $\beta$  сближаются и для достаточно больших  $a$  график площадей принимает вид, изображенный на рис. 171. Таким образом, в этом случае пленка, стремясь уменьшить свою площадь, стягивается к линии центров, расщепляется и приобретает вид двух отдельных кружков, каждый из которых натянут на свое колечко. (Кстати, так же ведет себя пленка при малых  $a$ , если она начинает деформироваться, имея слишком тонкий перешеек.) Итак, в этом случае единой поверхности действительно не будет. Вид графиков на рис. 170 и 171 подтверждается тем, что при  $y=0$  будет  $S=2\pi r^2$ , а при  $y=r$  будет  $S=4\pi r a$ , так что при малых  $a$  последнее значение меньше  $S|_{y=0}$ , а при больших  $a$  — больше. При больших  $a$  форму, состоящую из двух отдельных кружков, можно считать обобщенным решением нашей задачи. Это решение имеет характер «концевого», «острого» минимума, для него уравнение Эйлера не выполняется (ср. § 9).

Мы видим, что в результате вычислений мы приходим к выводам, которые заранее можно было и не предвидеть.

Легко подсчитать, какое значение  $\frac{a}{r}$  является критическим в том смысле, что при меньших значениях равновесие возможно, а при больших — невозможно. Это будет, когда на рис. 168 оба графика касаются друг друга, т. е. производные от обеих функций по  $k$  равны

$$\frac{ae^{ak} - ae^{-ak}}{2} = r.$$

Комбинируя это равенство с (39) и обозначая  $\frac{a}{r} = \lambda$  (это и есть

критическое значение), получим

$$\begin{aligned}\frac{e^{ak} - e^{-ak}}{2} &= \frac{1}{\lambda}; & e^{ak} &= rk + \frac{1}{\lambda}; & e^{-ak} &= rk - \frac{1}{\lambda}; \\ 1 &= \left(rk + \frac{1}{\lambda}\right) \left(rk - \frac{1}{\lambda}\right) = r^2 k^2 - \frac{1}{\lambda^2}; \\ k &= \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{r\lambda} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{a}; & \frac{e^{\sqrt{1+\lambda^2}} - e^{-\sqrt{1+\lambda^2}}}{2} &= \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Итак,  $\lambda$  находится из последнего уравнения. Грубый численный расчет дает приближенное значение  $\lambda = 0,7$ .

Интересно отметить, что если верхнее решение на рис. 169 реализует абсолютный минимум площади поверхности вращения, то нижнее решение реализует максимум только в изображенном семействе поверхностей. Если выйти за рамки этого семейства, то нижнее решение будет стационарным, так как оно удовлетворяет уравнению Эйлера, но отнюдь не максимальным, а имеет характер минимакса (ср. § IV.6). Если выбрать на нижнем решении любые две достаточно близкие точки и рассматривать их как граничные условия, то дуга, заключенная между ними, является устойчивой, т. е. реализует решение задачи на минимум. Значит, при любом изменении нижнего решения на достаточно малом интервале площадь будет возрастать. Задача на максимум поверхности вращения решения не имеет. (Это ясно также из возможности «гофрировать» любую поверхность.)

То соображение, что малый участок стационарного решения является не только стационарным, но и экстремальным, оказывается полезным во многих задачах.

### Упражнение

Рассмотрите задачу на минимум функционала  $I = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx$  ( $a > 0$ ) при граничных условиях  $y(0) = y(a) = 0$ . Этим условиям удовлетворяют, в частности, функции  $y = Cx(a-x)$  и  $y = C \sin \frac{\pi x}{a}$ . Какой отсюда можно сделать вывод о существовании решения задачи?

## § 6. Варианты основной задачи

Имеется большое число других типов вариационных задач, которые разбираются в курсах вариационного исчисления. Некоторые из этих задач исследуются подобно тому, как мы рассмотрели в § 4 задачу об экстремуме функционала (25) при условии (26). Например, под знак интеграла могут входить производные более высокого, чем первого, порядка от искомой функции; тогда и уравнение Эйлера имеет более высокий порядок, чем второй



(а именно, в два раза более высокий, чем наивысший порядок производных, входящих в функционал). Под знак интеграла может войти несколько неизвестных функций; тогда для их отыскания получается система дифференциальных уравнений Эйлера, причем число уравнений в системе равно числу искомых функций, так как надо приравнять нулю вариации функционала, полученные в результате варьирования каждой из этих функций. Так получится, в частности, при разыскании линии в пространстве, потому что такая линия определяется двумя функциями, например  $y(x)$  и  $z(x)$ .

Рассмотрим теперь вариационную задачу для функции нескольких, для определенности двух, независимых переменных. Пусть ищется функция  $z(x, y)$ , придающая экстремальное значение интегралу

$$\iint_{(\sigma)} F(x, y, z, z'_x, z'_y) dx dy, \quad (40)$$

где  $(\sigma)$  — некоторая заданная область с границей  $(L)$ , при условии на границе

$$z|_{(L)} = \varphi \text{ (задано)}. \quad (41)$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 4, приводят к уравнению Эйлера, которое в данном случае имеет вид

$$F'_z - \frac{\partial}{\partial x} F'_{z'_x} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{z'_y} = 0; \quad (42)$$

при этом надо иметь в виду, что при вычислении  $\frac{\partial}{\partial x}$  и  $\frac{\partial}{\partial y}$  здесь  $z$  рассматривается как функция переменных  $x$  и  $y$ . Таким образом, для нахождения решения получается дифференциальное уравнение второго порядка (42) с частными производными при граничном условии (41). Решение таких уравнений выходит за рамки этой книги, однако один физически важный пример будет нами разобран (другой см. в § 12).

Найдем уравнение для формы равновесия мембраны, натянутой на жесткий контур. Будем считать мембрану однородной (одинаковой во всех точках), изотропной (одинаковой во всех направлениях) и натянутой с силой  $T$  на единицу длины. Потенциальная энергия мембраны, получающаяся при натяжении ее на контур, возникает из-за увеличения ее площади по сравнению с горизонтальным положением. В интегральном исчислении доказывается, что площадь  $Q$  поверхности, описываемой уравнением  $z = z(x, y)$ , равна

$$\iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy,$$

так что увеличение  $\Delta Q$  площади мембраны равно

$$\iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy - \sigma = \iint_{(\sigma)} [\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} - 1] dx dy.$$

Считая отклонение малым (для этого нужно, чтобы заданный контур мембраны мало отклонялся от плоскости  $z=0$ ), а потому и величины  $z'_x$  и  $z'_y$  малыми, разложим подинтегральную функцию в ряд и отбросим члены высшего порядка малости:

$$\Delta Q = \iint_{(\sigma)} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{2} [(z'_x)^2 + (z'_y)^2] + \text{чл. высш. пор. малости} \right] - 1 \right\} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} [(z'_x)^2 + (z'_y)^2] dx dy.$$

Приняв, что в процессе растяжения мембраны ее натяжение остается неизменным, получим, что в этом процессе совершается работа

$$\Delta A = \frac{T}{2} \iint_{(\sigma)} [(z'_x)^2 + (z'_y)^2] dx dy. \quad (43)$$

Значит, такой будет и накопленная потенциальная энергия.

Однако из физики известно, что из всех возможных форм равновесия мембрана выбирает такую, для которой потенциальная энергия минимальна. Таким образом, получается задача о минимуме интеграла (43). В силу общего уравнения Эйлера (42) получаем

$$0 - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T}{2} 2z'_x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T}{2} 2z'_y \right) = 0, \text{ т. е. после сокращения}$$

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 0. \quad (44)$$

Итак, форма равновесия мембраны описывается функцией  $z = z(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа (см. § V.7). Для нахождения этой формы в конкретном случае надо найти решение уравнения (44) при граничном условии (41).

#### Упражнения

1. Выведите уравнение Эйлера для функционала  $I = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx$  при граничных условиях  $y(a) = y_a, y'(a) = y'_a, y(b) = y_b, y'(b) = y'_b$ .
2. Запишите уравнение (42) в развернутом виде, наподобие (30).

### § 7. Условный экстремум для конечного числа степеней свободы

Вернемся к задачам на экстремум для систем с конечным числом степеней свободы. В задачах, рассмотренных в § IV.6, независимые переменные не были связаны между собой никакими соотношениями; такой экстремум называется *безусловным*. Встречаются также задачи на *условный* экстремум, в которых независимые переменные связаны между собой определенными равенствами. Начнем с функций от двух переменных.

Пусть ищется максимум или минимум функции  $z = f(x, y)$  при условии, что переменные  $x$  и  $y$  не являются независимыми, а связаны соотношением

$$F(x, y) = h. \quad (45)$$

Это означает, что значения функции  $f$  рассматриваются и сравниваются только для точек (в плоскости аргументов), лежащих на линии с уравнением (45). Например, на рис. 172 изображены линии уровня некоторой функции  $f(x, y)$ , имеющей безусловный максимум

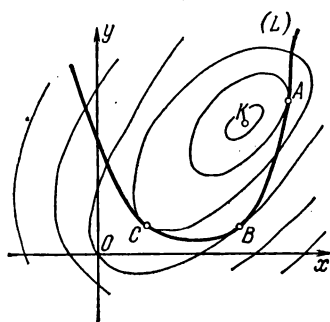


Рис. 172.

к точке  $K$ ; там же изображена жирная линия  $(L)$  с уравнением (43). Следуя вдоль  $(L)$ , мы в точке  $A$  подходим к линии уровня с наивысшей отметкой и сразу же затем отходим в область с более низкими отметками, т. е. в область меньших высот. Значит, в точке  $A$  функция  $f$  имеет условный максимум; он не является безусловным, так как, уйдя с  $(L)$  в сторону  $K$ , мы могли бы вблизи  $A$  найти еще более высокие значения  $f$ . Аналогично проверяем, что в точке  $B$  будет условный минимум, а в точке  $C$  — другой условный

максимум, т. е. здесь имеется три условных экстремума. Итак, безусловный максимум — это как бы вершина горы, а условный — это самая высокая точка заданной горной тропы (проекция этой тропы на плоскость  $x, y$  имеет уравнение (45)).

Если из «уравнения связи» (45) можно выразить  $y$  через  $x$ , то этот результат можно подставить в выражение для  $z$ ,

$$z = f[x, y(x)], \quad (46)$$

и получить, таким образом,  $z$  как функцию одного независимого переменного. Так как условия больше нет (оно учтено подстановкой  $y = y(x)$ ), то задача об отыскании экстремума  $z$  становится задачей на безусловный экстремум. Аналогичный результат получится, если уравнение (45) можно разрешить относительно  $x$  или если уравнение линии (45) можно представить в параметрическом виде.

Однако такое разрешение уравнения (45) не всегда возможно и целесообразно. Тогда можно рассуждать так. Уравнение связи (45) определяет принципиально некоторую зависимость  $y = y(x)$ , хотя бы нам явно и не известную. Таким образом,  $z$  является сложной функцией (46) независимого переменного  $x$ , и необходимое условие экстремума дает по формуле производной сложной функции

$$\frac{dz}{dx} = f'_x + f'_y \frac{dy}{dx} = 0. \quad (47)$$

Здесь  $dy/dx$  означает производную неявной функции  $y(x)$ , определенной из условия (45). По правилам § IV.3 получаем, что  $F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0$ , т. е.  $\frac{dy}{dx} = -F'_x/F'_y$ . Подставляя это выражение в (47), видим, что в точке условного экстремума

$$f'_x - \frac{F'_x}{F'_y} f'_y = 0, \text{ т. е. } -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{f'_x}{f'_y}, \text{ или } \frac{f'_x}{F'_x} = \frac{f'_y}{F'_y}.$$

(Среднее равенство, в силу § IV.3, означает, что линия (45) в точке условного экстремума касается линии уровня функции  $f$ , ср. рис. 172.) Обозначим величину последнего отношения в рассматриваемой точке буквой  $\lambda$ . Тогда получим в точке условного экстремума

$$\frac{f'_x}{F'_x} = \frac{f'_y}{F'_y} = \lambda, \quad (48)$$

т. е.

$$f'_x - \lambda F'_x = 0, \quad f'_y - \lambda F'_y = 0. \quad (49)$$

Обозначим

$$f^*(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y), \quad (50)$$

где  $\lambda$  — неизвестный параметр, который называется *множителем Лагранжа*. Тогда уравнения (49) можно записать так:

$$f^{*'}_x = 0, \quad f^{*'}_y = 0. \quad (51)$$

Таким образом, получаются те же уравнения, как и в случае безусловного экстремума (см. (IV.28)), однако они составляются не для самой функции  $f$ , а для измененной функции  $f^*$ , определенной по формуле (50). Уравнения (51) вместе с уравнением связи (45) образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$ ; из этих уравнений и находятся точки условного экстремума.

Множитель Лагранжа  $\lambda$  имеет простой смысл. Для выяснения его обозначим координаты точки условного экстремума и само экстремальное значение соответственно через  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  и  $\bar{z}$ . До сих пор мы считали  $h$  зафиксированным, но если менять  $h$ , то эти три величины будут зависеть от  $h$ . Вычислим, с какой скоростью меняется экстремальное значение  $z$  при изменении  $h$ . Так как  $\bar{z}(h) = f(\bar{x}(h), \bar{y}(h))$ , то

$$\frac{d\bar{z}}{dh} = f'_x \frac{d\bar{x}}{dh} + f'_y \frac{d\bar{y}}{dh}. \quad (52)$$

С другой стороны, в силу (45)

$$F'_x \frac{d\bar{x}}{dh} + F'_y \frac{d\bar{y}}{dh} = 1. \quad (53)$$

Из (52), (48) и (53) получим

$$\frac{d\bar{z}}{dh} = \lambda F'_x \frac{d\bar{x}}{dh} + \lambda F'_y \frac{d\bar{y}}{dh} = \lambda \left( F'_x \frac{d\bar{x}}{dh} + F'_y \frac{d\bar{y}}{dh} \right) = \lambda.$$

Итак, множитель  $\lambda$  равен скорости изменения экстремального значения при изменении параметра  $h$  в условии. Метод Лагранжа замечателен тем, что производную  $d\bar{z}/dh$  удается найти, не выписывая в явном виде функцию  $\bar{z}(h)$ , которая может быть очень сложной.

Постановка задачи на условный экстремум типична для экономики: ищем максимум количества  $z$  продукта при заданных затратах  $h$ ; известна зависимость  $z$  и  $h$  от способа действий, характеризуемого переменными  $x, y$ . При наилучшем способе действий каждому  $h$  соответствует одно определенное  $\bar{z}$ . Производная  $dh/d\bar{z}$  есть себестоимость (добавочного) продукта в идеально налаженном хозяйстве, где уже сделаны затраты  $h$  и произведено  $\bar{z}$ , а теперь потребовалось увеличить производство.

Для функций любого числа переменных и для любого числа связей исследование условного экстремума проводится аналогично. Например, если ищется экстремум функции  $f(x, y, z, u, v)$  при условиях

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, u, v) &= 0, & F_2(x, y, z, u, v) &= 0, \\ F_3(x, y, z, u, v) &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

то надо поступать так, как если бы мы искали безусловный экстремум для функции  $f^* = f - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 - \lambda_3 F_3$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — неизвестные множители Лагранжа. Необходимое условие экстремума для  $f^*$  дает  $f^*_{x'} = 0, f^*_{y'} = 0, f^*_{z'} = 0, f^*_{u'} = 0, f^*_{v'} = 0$ , что вместе с (54) дает  $5 + 3$  уравнений с  $5 + 3$  неизвестными  $x, y, z, u, v, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

### Упражнение

Найдите условный экстремум функции  $u(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 2x$ : а) при условии  $x + 2y - z = 3$ ; б) при условиях  $x + y - z = 0, x + 2y = 1$ .

## § 8. Условный экстремум в вариационном исчислении

Задачи на условный экстремум в вариационном исчислении ставятся и решаются аналогично тому, как это было сделано в § 7 для задач с конечным числом степеней свободы. Рассмотрим, например, задачу о нахождении экстремума функционала (25) при граничных условиях (26) и дополнительном интегральном условии

$$\int_a^b G(x, y, y') dx = K, \quad (55)$$

где  $G$ —заданная функция, а  $K$ —заданное число. Если разбить интервал интегрирования на большое количество мелких частей и заменить интегралы (25) и (55) на суммы, зависящие от значений  $y_i$  искомой функции в точках деления (т. е. совершить как бы переход, обратный сделанному в § 1), то мы приходим к задаче на условный экстремум функции от конечного числа переменных  $y_i$ . В силу результатов § 7 эта задача равносильна задаче о безусловном экстремуме выражения

$$\int_a^b F(x, y, y') dx - \lambda \int_a^b G(x, y, y') dx = \int_a^b (F - \lambda G) dx$$

(мы от сумм опять перешли к интегралам), где  $\lambda$ —неизвестный заранее постоянный множитель Лагранжа. Таким образом, взамен уравнения (29) надо написать аналогичное уравнение Эйлера для функции  $F^* = F - \lambda G$ ; после решения этого уравнения две постоянные интегрирования и постоянную  $\lambda$  находим из трех условий (26) и (55). При этом в силу § 7 величина  $\lambda$  имеет важное значение, так как она равна

$$\lambda = \frac{dI_{\text{экстр}}}{dK}. \quad (56)$$

Это равенство дает возможность выяснить характер зависимости экстремального (в общем случае стационарного) значения  $I_{\text{экстр}}$  функционала в том случае, если параметр  $K$  в условии (55) может изменяться (тогда, конечно, это значение  $I_{\text{экстр}}$  зависит от  $K$ ).

Рассмотрим в качестве примера знаменитую задачу Дидо. Легенда рассказывает, что в древности жила финикийская царица Дидо. Преследуемая властителем соседнего государства, она бежала в Северную Африку и обратилась к местному племени с просьбой приютить ее, выделив для этого столько земли, сколько можно охватить шкурой вола. Когда эта просьба была удовлетворена, Дидо разрежала шкуру на тончайшие ремешки и, связав их последовательно один с другим, получила длиннейшую нить. Охватив на глазах у изумленной публики этой нитью изрядный по тем временам участок земли, Дидо развернула там строительство и основала знаменитый город Карфаген.

Уже античная наука заинтересовалась задачей: как следовало Дидо расположить свою нить, чтобы охватить наибольшую площадь, другими словами, как выбрать из всех линий заданной длины ту, которая охватывает наибольшую площадь. Оказалось, что решением этой *изопериметрической* задачи служит окружность (если линия берется замкнутой) или дуга окружности (если линия берется незамкнутой, например, если Дидо расположила свою нить концами у моря, см. рис. 173). Однако доказать это строго совсем не просто.

Посмотрим, как сформулировать задачу Дидо аналитически. Для этого допустим для простоты, что берег прямой, и расположим оси координат, как на рис. 173. Рассмотрим вариант, в котором зафиксировано положение концов нити. Тогда форма нити задается уравнением  $y = y(x)$ , причем функция  $y(x)$  заранее не известна, однако должна удовлетворять условиям

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (57)$$

Кроме того, задана длина линии

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = L \quad (58)$$

(формула для длины линии выводится в интегральном исчислении, см., например, ВМ, § III.5). При этом требуется, чтобы площадь, т. е.

$$S = \int_a^b y dx, \quad (59)$$

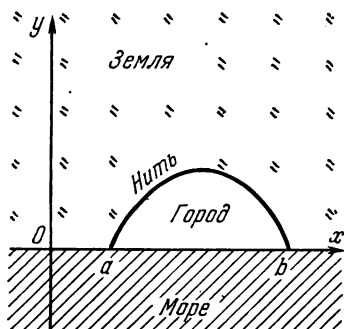


Рис. 173.

была максимальной. Итак, получается следующая задача: среди всех функций  $y = y(x)$ , удовлетворяющих условиям (57) и (58), надо выбрать такую, для которой интеграл (59) имеет наибольшее возможное значение.

Задача Дидо была впервые решена геометрическими методами, с привлечением очень остроумных, но не очевидных соображений. На основе аппарата вариационного исчисления она решается совершенно стандартно. В силу сказанного в начале этого параграфа просто требуется решить уравнение Эйлера для функции

$$F^* = y - \lambda \sqrt{1 + y'^2}. \quad (60)$$

Пользуясь промежуточным интегралом (34), находим

$$y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y' = C_1.$$

Преобразуя, получим

$$\begin{aligned} y - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} &= C_1; \quad \lambda^2 = (1 + y'^2) (C_1 - y)^2; \quad y'^2 = \frac{\lambda^2}{(C_1 - y)^2} - 1; \\ \frac{dy}{dx} &= \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}}{y - C_1}; \quad \frac{(y - C_1) dy}{\pm \sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}} = dx; \\ \mp \sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2} &= x + C_2; \quad (x + C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2. \end{aligned} \quad (61)$$

Итак, получилось уравнение окружности, т. е. решением задачи Дидо служит дуга окружности, как и было уже указано. Поскольку длина  $L$  дуги окружности и ее концы заданы, то не представляет труда найти центр окружности и изобразить саму дугу.

Задача Дидо имеет варианты. Так, если длина  $L$  задана, но концы  $a, b$  дуги не заданы, то из всех дуг данной длины надо выбрать такую, которая ограничивает наибольшую площадь. Можно проверить, что искомая дуга окружности должна подходить к берегу перпендикулярно; в частности, если берег прямой, то надо взять полуокружность. Если же моря нет, и линия берется замкнутой, то как было сказано выше, получается окружность. Проверим в этом случае соотношение (56). Здесь  $I_{\text{экстр}} = \pi R^2$ ,  $K = L = 2\pi R$  ( $R$  — радиус окружности), откуда

$$\frac{dI}{dK} = \frac{d(\pi R^2)}{d(2\pi R)} = R.$$

Это как раз соответствует формуле (61), из которой видно, что радиус окружности равен  $|\lambda|$  (ниже мы увидим, что  $\lambda = R$ , так что и знаки в формуле (56) согласуются).

Задача Дидо имеет простое физическое истолкование. Представим себе горизонтальную жесткую рамку, на которую натянута мыльная пленка, и пусть на этой пленке плавает тонкая нить, прикрепленная концами к рамке (рис. 174, а) в точках  $a$  и  $b$ . Если

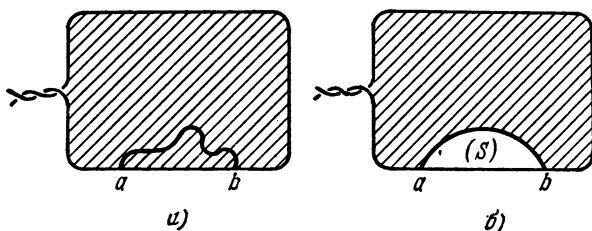


Рис. 174.

проколоть иглой пленку внутри нити, то в силу поверхностного натяжения пленки она натянется так (рис. 174, б), чтобы ее площадь была по возможности меньшей, а значит, чтобы свободная от пленки площадь была по возможности большей. Мы приходим как раз к задаче Дидо.

Такая физическая картина дает возможность истолковать уравнение Эйлера, подобно § 1, как уравнение статического равновесия. Если длина  $L$  нити задана, то потенциальная энергия  $U$  системы пропорциональна поверхности пленки, т. е.

$$U = 2\sigma (S_0 - S),$$



где  $\sigma$  — «коэффициент поверхностного натяжения» (множитель 2 связан с тем, что пленка имеет две стороны), а  $S_0$  — площадь, охваченная рамкой, так что  $S_0 - S$  есть площадь пленки. Условие статического равновесия, как мы видели, сводится к стационарности потенциальной энергии  $U$ , что равносильно стационарности величины  $S$  (причем максимальность  $S$  означает минимальность  $U$ , т. е. устойчивость равновесия). Таким образом, мы приходим к уравнению Эйлера для функции  $F^*$ .

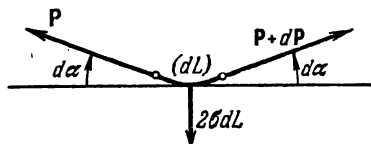


Рис. 175.

Найденное нами решение также можно получить из физических соображений. Рассмотрим (рис. 175) элемент  $(dL)$  нити, на который действует сила  $2\sigma dL$  поверхностного

натяжения и силы натяжения нити  $P$  и  $P + dP$ , приложенные к его концам. Проектируя эти силы на касательную к элементу и отбрасывая члены выше первого порядка малости, получим

$$-P + P + dP = 0$$

(при этом надо учесть, что косинус малого угла отличается от единицы на величину второго порядка малости). Отсюда  $dP = 0$ , т. е. вдоль нити  $P = \text{const}$ . Проектируя силы на нормаль, получим

$$2P \sin d\alpha = 2P d\alpha = 2\sigma dL, \quad (62)$$

откуда

$$\frac{2d\alpha}{dL} = \frac{2\sigma}{P} = \text{const}.$$

Отношение  $\frac{2d\alpha}{dL}$  представляет собой кривизну  $k$  нити (§ IX.4). Таким образом, нить в положении равновесия имеет постоянную кривизну, т. е. представляет

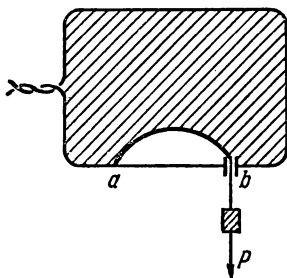


Рис. 176.

собой дугу окружности радиуса  $R = \frac{1}{k} = \frac{P}{2\sigma}$ . (Впрочем, постоянство  $P$  можно получить и из формулы (62), которую можно переписать в виде  $P = 2\sigma R$ , исходя из найденного решения (61) задачи на условный экстремум, причем  $R = \lambda$ , т. е.  $P = 2\sigma\lambda$ .)

К решению задачи о мыльной пленке можно подойти иначе. Именно, будем считать натяжение  $P$  нити заданным, а ее длину  $L$  не заданной, т. е. рассмотрим схему, изображенную на рис. 176. В этом случае потенциальная энергия системы равна

$$U = \text{const} - 2\sigma S + PL = \text{const} - 2\sigma \left( S - \frac{P}{2\sigma} L \right),$$

так как при увеличении  $L$  на  $\Delta L$  груз поднимается на  $\Delta L$ , т. е.  $U$  возрастет на  $P\Delta L$ . Таким образом, мы приходим к задаче на безусловный экстремум функционала

$$S - \frac{P}{2\sigma}L = \int_a^b \left( y - \frac{P}{2\sigma} \sqrt{1 + y'^2} \right) dx.$$

Для этого надо составить уравнение Эйлера для функции (60) с  $\lambda = \frac{P}{2\sigma}$ ; как мы видели, решением уравнения служит линия с уравнением (61), т. е. дуга окружности радиуса

$$R = |\lambda| = \frac{P}{2\sigma}. \quad (63)$$

Итак, решение задачи на условный экстремум при новом истолковании можно рассматривать как решение задачи на безусловный экстремум, причем этот переход имеет физический, а не только формальный смысл.

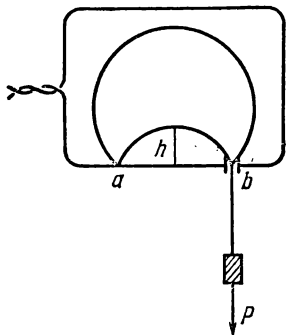


Рис. 177.

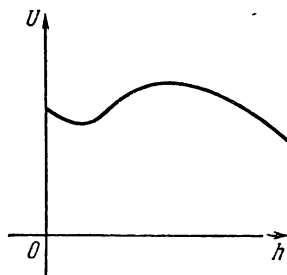


Рис. 178.

Интересно, что при второй трактовке задача имеет два решения: из (63) мы получаем значение радиуса искривленной нити, но ведь имеется два возможных положения нити с заданным радиусом (рис. 177)! Если рассмотреть семейство окружностей, проходящих через точки  $a$  и  $b$ , то график зависимости  $U$  от  $h$  имеет вид, изображенный на рис. 178. Таким образом, из двух возможных положений груза более низкое является устойчивым, а более высокое — неустойчивым. При этом, как и в конце § 5, минимум имеет абсолютный характер, а максимум экстремален только среди дуг окружностей; в действительности для более высокого положения энергия имеет минимакс.

Можно обобщить задачу Дидо, предположив, что требуется охватить наиболее ценный участок, причем стоимость единицы площади не постоянна, а зависит, например, от расстояния до моря. Элементарно решить такую обобщенную задачу уже нельзя. Однако ее можно решить с помощью уравнения Эйлера, заметив, что

вместо (59) в данном случае надо максимизировать интеграл  $\int_a^b F(y) dx$ , где  $F(y) = \int_0^y \varphi(\eta) d\eta$ , а  $\varphi(\eta)$  — стоимость единицы площади на расстоянии  $\eta$  от моря. (Если  $\varphi(\eta) \equiv 1$ , то мы возвращаемся к (59).)

Рассмотрим еще одну задачу на условный экстремум, именно задачу о распределении зарядов в проводнике. Представим себе единственный проводник ( $\Omega$ ) любой формы, на который помещено количество электричества  $q$ . Это количество разместится на проводнике с плотностью  $\rho$ , которую и нужно найти.

Для решения этой задачи вспомним формулу (X.23) для потенциала, порожденного распределенным зарядом, которую перепишем в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{(\Omega)} \frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\Omega_0.$$

Поэтому полная потенциальная энергия заряда равна

$$U = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \varphi(\mathbf{r}) d\varrho = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \varphi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \int_{(\Omega)} \frac{\rho(\mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}) d\Omega d\Omega_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Согласно общему принципу статического равновесия этот интеграл должен принимать минимальное (или, во всяком случае, стационарное) значение при условии

$$\int_{(\Omega)} \rho(\mathbf{r}) d\Omega = q (= \text{const}),$$

так как заряды могут только перераспределяться, но не порождаться или исчезать. Таким образом, получилась задача на условный экстремум. Чтобы ее решить, надо приравнять нулю вариацию  $\delta(U - \lambda q)$ , где  $\lambda$  — множитель Лагранжа.

Однако по формуле дифференциала произведения

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \int_{(\Omega)} \frac{\delta \rho(\mathbf{r}_0) \cdot \rho(\mathbf{r}) d\Omega d\Omega_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \int_{(\Omega)} \frac{\rho(\mathbf{r}_0) \delta \rho(\mathbf{r}) d\Omega d\Omega_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Если в первом интеграле обозначить  $\mathbf{r}$  через  $\mathbf{r}_0$ , а  $\mathbf{r}_0$  — через  $\mathbf{r}$ , то мы видим, что он равен второму, откуда

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(U - \lambda q) = \\ &= \int_{(\Omega)} \int_{(\Omega)} \frac{\rho(\mathbf{r}_0) \delta \rho(\mathbf{r}) d\Omega d\Omega_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \lambda \int_{(\Omega)} \delta \rho(\mathbf{r}) d\Omega = \int_{(\Omega)} [\varphi(\mathbf{r}) - \lambda] \delta \rho(\mathbf{r}) d\Omega. \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\delta \rho(\mathbf{r})$  отсюда получаем  $\varphi(\mathbf{r}) - \lambda = 0$ , т. е.  $\varphi(\mathbf{r}) = \lambda = \text{const}$ .

Итак, мы видим, что свободный заряд в проводнике располагается так, что потенциал  $\varphi_0$  во всех точках проводника одинаков; при этом

видно также, что множитель Лагранжа в этой задаче равен  $\varphi_0$  (выведите последний результат из формулы (56)). К выводу о постоянстве потенциала можно было прийти и из физических соображений: если бы потенциал был в разных точках различным, то заряды, свободно перемещающиеся в проводнике, перетекали бы от областей с большим потенциалом в области с меньшим потенциалом, так что статическое равновесие при таких условиях невозможно.

Так как потенциал связан с зарядами известным уравнением Пуассона (X.43), то из постоянства потенциала можно сделать вывод, что внутри проводника  $\rho = 0$ , т. е. весь заряд располагается на поверхности проводника. Впрочем, и к этому выводу можно прийти из физических соображений.

При переходе через поверхность проводника потенциал имеет «излом» (рис. 179), т. е. разрыв в первой производной. Если выбрать оси координат так, чтобы начало координат находилось в некоторой точке проводника, а ось  $z$  пошла в направлении внешней

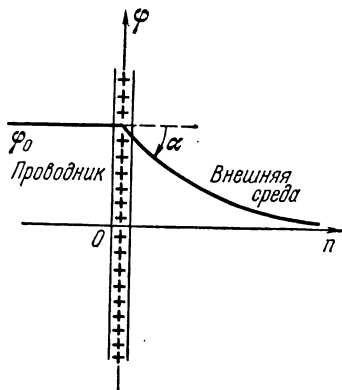


Рис. 179.

нормали к поверхности проводника, то производная  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  будет иметь скачок  $-\operatorname{tg} \alpha$ . Поэтому  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ , а с ней и  $\Delta \varphi$  будет иметь дельтообразную особенность вида  $-\operatorname{tg} \alpha \delta(z)$ . С другой стороны, если заряд расположен на поверхности с плотностью  $\sigma$ , то вблизи рассматриваемой точки будет  $\rho = \sigma \delta(z)$ . Поэтому уравнение (X.43) дает  $-\operatorname{tg} \alpha \delta(z) = -4\pi \sigma \delta(z)$ , т. е.  $\operatorname{tg} \alpha = 4\pi \sigma$ .

В заключение отметим, что решение задачи на условный экстремум всегда одновременно является решением некоторой «сопряженной» задачи на условный экстремум. Например, в задаче Дидо тот же ответ получится, если искать минимальную длину шнура, охватывающего заданную площадь. В самом деле, если бы некруговой контур  $(L_1)$  охватывал ту же площадь, что и круг  $(L)$ , причем  $L_1 < L$ , то, подобно увеличивая контур  $(L_1)$ , мы могли бы получить контур  $(L_2)$ ,  $L_2 = L$ , охватывающий большую площадь, чем  $(L)$ , а это противоречит решению задачи Дидо. Аналогично в задаче на потенциал можно было искать максимальный заряд, который умещается на проводнике при заданном значении потенциальной энергии. В общем случае оказывается, что задача о стационарном значении величины  $A$  при условии постоянства величины  $B$  и задача о стационарном значении величины  $B$  при условии постоянства величины  $A$  приводят к одним и тем же решениям. В самом деле,

они сводятся к задачам о стационарности величины  $A + \lambda B$  или  $B + \mu A = \mu (A + \lambda_1 B)$  ( $\lambda_1 = 1/\mu$ ), т. е., в силу постоянства  $\mu$ , величины  $A + \lambda_1 B$ ; значит, обе задачи равносильны.

### Упражнения

1. Найдите тело вращения наибольшего объема, имеющее заданную площадь поверхности.

2. Найдите форму равновесия однородной тяжелой нити, подвешенной за концы.

У к а з а н и е. Нить должна располагаться так, чтобы ее центр тяжести был по возможности ниже.

3. В обеих задачах укажите смысл множителя Лагранжа.

## § 9. Задачи на экстремум с ограничениями

Остановимся еще на одном классе задач на экстремум, получивших широкое распространение в последние годы. Речь идет о задачах, в которых на искомые величины или на искомую функцию наложены дополнительные ограничения, имеющие вид неравенств.

Начнем с самого простого случая. Пусть ищется экстремум функции  $y = f(x)$ , причем изменение независимой переменной  $x$  ограничено

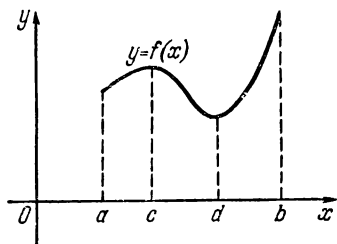


Рис. 180

неравенствами  $a \leq x \leq b$  (рис. 180). Тогда возможны как внутренние экстремумы (на рис. 180 максимум при  $x=c$  и минимум при  $x=d$ ), так и *концевые* экстремумы (на рис. 180 концевой минимум при  $x=a$  и концевой максимум при  $x=b$ ). При нахождении внутренних экстремумов можно воспользоваться условием стационарности  $y' = 0$ , тогда как для концевых экстремумов это условие не действует, т. е. эти последние имеют характер «острых» экстремумов (ср., например, ВМ, § III.2).

Пусть теперь ищется экстремум функции двух переменных  $z = f(x, y)$ , причем независимые переменные связаны ограничением  $F(x, y) \geq 0$ ; мы предположим, что это неравенство определяет в плоскости аргументов  $x, y$  некоторую конечную область  $(S)$  с границей  $(L)$  (рис. 181), на которой  $F \equiv 0$ . Функция  $f$  может иметь как внутренние экстремумы, достигающиеся внутри  $(S)$ , так и граничные экстремумы, достигающиеся на  $(L)$ . Для нахождения первых можно воспользоваться условиями стационарности, разобранными в § IV.6. Однако, как и в одномерном случае, для граничных экстремумов эти условия не действуют. Для нахождения граничных экстремумов можно заметить, что если в некоторой точке  $M$  (рис. 181) функция  $f$  имеет экстремум, например минимум, то значение  $f(M)$

меньше всех значений  $f$  на  $(L)$  вблизи  $M$ . Поэтому в точке  $M$  одновременно достигается минимум функции  $f$  при условии  $F=0$ , а такие точки можно разыскать по методу § 7. Итак, граничные экстремумы ищутся по правилу нахождения условных экстремумов.

Задачи на экстремум с ограничениями встречаются и в вариационном вычислении. Рассмотрим в качестве примера задачу о кривой наискорейшего спуска, решенную в § 4, но предположим дополнительно, что точке в процессе падения запрещено скатываться

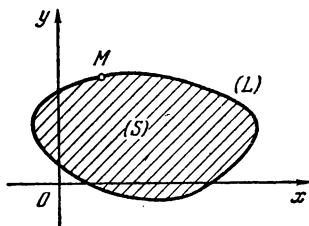


Рис. 181.

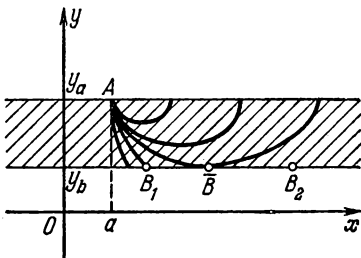


Рис. 182.

ниже конечной точки, т. е. на искомое решение наложено неравенство  $y \geq y_b$ . Изобразим циклоиды с острием в начальной точке  $A$  (рис. 182); при этом искомая линия должна целиком пройти в заштрихованной зоне. Ясно, что если конечная точка лежит левее  $\bar{B}$ , например в положении  $B_1$ , то искомой линией служит дуга циклоиды  $AB_1$ , так как это решение является наилучшим для всех линий и удовлетворяет поставленному неравенству. Но что будет, если конечная точка лежит правее  $\bar{B}$ , например в положении  $B_2$ ?

Прежде всего заметим, что та часть искомой линии, которая лежит строго внутри (не на границе) заштрихованной зоны, удовлетворяет уравнению Эйлера и потому представляет собой циклоиду. В самом деле, если вся линия служит решением поставленной задачи, то и любая ее дуга служит линией наискорейшего спуска между своими концами\*). Таким образом, искомая линия может состоять из интегральных линий уравнения Эйлера (такие линии называются экстремалиями) и линий, лежащих на границе заштрихованной зоны. Но теперь можно понять, что искомая линия состоит из дуги циклоиды  $A\bar{B}$  и отрезка  $\bar{B}B_2$ . В самом деле, возьмем любую другую возможную линию, например  $AB_1\bar{B}B_2$ . Тогда и на своем участке

\*) Дуга  $AC$  между точкой  $A$  и любой точкой  $C$ , лежащей между  $A$  и  $B$ , есть линия наискорейшего спуска с нулевой начальной скоростью, т. е. решает такую же задачу, которая ставилась при определении  $AB$ . Дуга между двумя промежуточными точками  $C'$  и  $C''$  решает задачу наискорейшего спуска при заданной, ненулевой начальной скорости в  $C'$ , соответствующей разности высот  $A$  и  $C'$ .

$AB_1\bar{B}$  она должна быть решением задачи на минимум, что несправедливо, так как дуга циклоиды  $A\bar{B}$  дает меньшее время падения. Легко убедиться, что нужно взять дугу именно той циклоиды, для которой  $B$  наиболее сдвинуто вправо, т. е. циклоиды, касавшейся нижней прямой.

Таким образом, решение вариационной задачи с ограничениями может лишь частично или совсем не удовлетворять условию стационарности (уравнению Эйлера); это решение, как и для функций одного переменного, имеет характер острого экстремума.

Задачи на экстремум с ограничениями могут возникать в процессах управления. Например, при управлении движением какого-либо объекта может быть поставлена задача так поворачивать рули, чтобы за кратчайшее время вывести его на заданную траекторию. Так как искомым является закон поворота рулей во времени, то получается вариационная задача. При этом если рули имеют ограничители поворота (предназначенные, например, для ограничения центробежных сил), то получается задача с ограничениями. При оптимальном процессе управления, полученном в результате решения вариационной задачи, имеются интервалы времени, когда рули лежат на ограничителях, т. е. решение проходит по границе области, в которой оно может находиться. При подходе к этой границе решение должно удовлетворять определенным условиям, которые мы здесь не рассматриваем.

### Упражнения

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 - y^2 - x + y$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 2$ .
2. Найдите положение однородной тяжелой нити длины  $L > 2$ , подвешенной в точках  $(-1; 1)$  и  $(1; 1)$ , если эта нить расположена в верхней полуплоскости  $y \geq 0$ .

## § 10. Вариационные принципы. Принцип Ферма в оптике

Помимо отдельных задач вариационного характера, примеры которых были разобраны в предыдущих параграфах, имеются вариационные принципы, каждый из которых применим к анализу широкого класса явлений. Каждый из этих принципов обычно утверждает, что из всех состояний, процессов и т. п., которые допустимы при имеющихся связях, ограничениях в рассматриваемой физической системе, на самом деле реализуется такое состояние, такой процесс и т. п., для которых некоторый (вполне определенный для данного принципа) функционал принимает стационарное значение. Каждый из этих принципов дает возможность единообразного рассмотрения многих задач, включения их в единую теорию и поэтому часто является значительным научным достижением.

Один из наиболее важных и общих принципов физики был уже продемонстрирован нами на большом числе примеров. Он состоит

в том, что из всех возможных положений физической системы, допустимых при заданных связях, равновесным является такое, при котором потенциальная энергия рассматриваемой системы имеет стационарное значение (а при устойчивом равновесии системы имеет минимальное значение). Если система имеет конечное число степеней свободы, то потенциальную энергию можно выразить в виде функции конечного числа обобщенных координат (см. § IV.8), так что применение указанного принципа сводится к нахождению минимума функции нескольких переменных (см. § IV.6). Если же рассматривается сплошная среда, состояние которой описывается некоторой функцией координат (или системой таких функций), то потенциальная энергия является функционалом, и применение этого принципа производится на основе методов вариационного исчисления, подобно тому как это было сделано ранее.

Одним из первых в истории науки был вариационный принцип Ферма в оптике, который утверждает, что из всех мыслимых путей, соединяющих две заданные точки, луч света избирает такой, который он проходит за минимальное время. Чтобы записать принцип Ферма математически, напомним, что скорость света  $c$  в пустоте имеет вполне определенное значение, тогда как в прозрачной среде эта скорость равна  $\frac{c}{n}$ , где  $n > 1$  — «показатель преломления» среды, зависящий, вообще говоря, не только от среды, но и от длины световой волны. Мы будем для простоты рассматривать случай, когда  $n$  не зависит от длины волны и потому в каждой среде будет иметь вполне определенное значение. Так как путь  $dL$  проходимся светом за время  $dt = dL : \frac{c}{n} = \frac{n}{c} dL$ , то время  $t$  прохождения данного пути ( $L$ ) вычисляется по формуле

$$t = \frac{1}{c} \int_{(L)} n dL. \quad (64)$$

Таким образом, мы имеем функционал, зависящий от выбора пути, соединяющего две точки, так что задача о нахождении формы светового луча является вариационной задачей.

Из принципа Ферма можно вывести основные законы распространения света.

Например, в случае распространения света в среде с постоянной *оптической плотностью*, т. е. постоянной скоростью света, принцип Ферма приводит к выводу, что свет распространяется по прямой линии (рис. 183, где через  $I$  обозначен источник света, а через  $A$  — точка наблюдения), так как прямая  $IA$  короче любой другой линии, соединяющей точки  $I$  и  $A$ .



Рис. 183.



Отсюда в свою очередь вытекает, что если путь света состоит из нескольких участков (например, между последовательными отражениями, преломлениями и т. д.), каждый из которых проходит в среде постоянной оптической плотности, то каждый из этих участков представляет собой отрезок прямой, а весь путь — ломаную линию. Для определения этого пути требуется найти координаты вершин ломаной, т. е. здесь имеется лишь конечное число степеней свободы. Поэтому такие задачи решаются средствами дифференциального исчисления. В частности, таким способом, при помощи решения задачи на минимум, легко вывести законы отражения света от плоской поверхности и преломления его при переходе через плоскую поверхность раздела двух сред (см., например, ВМ, § III.1).

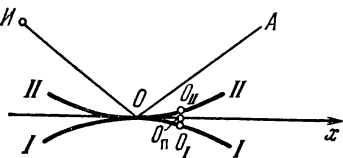


Рис. 184.

Таким образом, действительно, принцип Ферма приводит к правильным, согласующимся с опытом выводам для отражения и преломления света.

Рассмотрим теперь отражение света от искривленной поверхности, касающейся плоскости в той точке  $O$ , в которой происходило бы отражение в случае плоскости (рис. 184). На рисунке показаны два примера таких поверхностей, изогнутых в противоположные стороны:  $IOI$ , касающаяся снизу, и  $IOII$ , касающаяся сверху оси абсцисс. (Мы рассматриваем цилиндрические поверхности с образующими, перпендикулярными плоскости чертежа.)

Можно показать, что при этом достаточно рассматривать лучи, лежащие в плоскости рисунка, и сечения отражающих поверхностей плоскостью чертежа. Поэтому в дальнейшем будем говорить не об отражающей плоскости, а об отражающей прямой, не об отражающих кривых поверхностях, а об отражающих кривых линиях  $IOI$  и  $IOII$  в плоскости рис. 184.

Для рассмотрения задачи не надо конкретных вычислений. Известно (см., например, ВМ, § II.17), что расстояние между кривой и касательной пропорционально  $(x - x_0)^2$ , где  $x_0$  обозначает абсциссу точки касания  $O$ .

Рассмотрим длины ломаных  $L_{II}(IIO_A)$ ,  $L_I(IO_I A)$  и  $L_{II}(IO_{II} A)$ . Сами эти ломаные на рис. 184 не показаны, чтобы не затенять чертеж, точки  $O_P$ ,  $O_I$ ,  $O_{II}$ , как видно на рисунке, лежат правее точки касания  $O$ , при одном и том же значении  $x$ ; при этом  $O_P$  лежит на прямой,  $O_I$  — на нижней линии  $I$ ,  $O_{II}$  — на верхней линии  $II$ . Видя на рисунке точки  $I$ ,  $A$ ,  $O_P$ ,  $O_I$ ,  $O_{II}$ , нетрудно представить себе и ломаные линии.

Абсциссы  $O_P$ ,  $O_I$ ,  $O_{II}$  одинаковы. Ординаты  $O_P$ ,  $O_I$  и  $O_{II}$  отличаются на величину, пропорциональную  $(x - x_0)^2$ . Следовательно, и длины  $L_P$ ,  $L_I$ ,  $L_{II}$  отличаются только на величину, пропорциональную  $(x - x_0)^2$ . Запишем разложения  $L_P$ ,  $L_I$  и  $L_{II}$  в ряд Тейлора по

степеням  $(x - x_0)$ :

$$L_{II}(x) = L_{II}(x_0) + (x - x_0) L'_{II}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} L''_{II}(x_0) + \dots,$$

$$L_I(x) = L_I(x_0) + (x - x_0) L'_I(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} L''_I(x_0) + \dots,$$

$$L_{II}(x) = L_{II}(x_0) + (x - x_0) L'_{II}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} L''_{II}(x_0) + \dots$$

Раз  $L_{II}$ ,  $L_I$  и  $L_{II}$  отличаются только на величину порядка  $(x - x_0)^2$ , значит,

$$L_{II}(x_0) = L_I(x_0) = L_{II}(x_0), \quad (65)$$

$$L'_{II}(x_0) = L'_I(x_0) = L'_{II}(x_0) (= 0), \quad (66)$$

$$L''_{II}(x_0) \neq L''_I(x_0) \neq L''_{II}(x_0). \quad (67)$$

Первые из этих равенств, (65), суть очевидные следствия того, что все три линии—прямая  $II$ , кривая  $I$  и кривая  $II$ —проходят через одну точку  $O$ ,  $x = x_0$ .

Вторые равенства, (66), получились благодаря тому, что в точке  $O$  указанные три линии касаются друг друга, а угол падения луча равен углу его отражения.

Мы знаем, что равенство нулю производной означает, что  $L_{II}$ ,  $L_I$  и  $L_{II}$  как функции  $x$  могут иметь при  $x = x_0$  минимум или максимум. Будет ли это именно минимум, а не максимум, определяется знаком второй производной.

Для прямой мы имеем минимум,  $L''_{II} > 0$ . Однако, мы видим из (67), что отсюда нельзя сделать вывод для кривых линий  $I$  и  $II$ . В частности, для линии  $II$  при достаточной кривизне ее длина  $L_{II}$  имеет в точке  $O$ , при  $x = x_0$ , именно *максимум*, а не минимум. Благодаря подъему кривой  $II$  слева и справа от  $O$  путь  $IO_{II}A$  короче  $IOA$ , путь  $IOA$  является наиболее длинным из всех соседних путей из точки  $I$  в какую-либо точку линии  $II$  и оттуда в точку  $A$ .

Опыт показывает, что и в случае кривой  $II$  отражение происходит в точке  $O$ , т. е. в той точке, где длина пути имеет максимум; очевидно, в этой точке по-прежнему угол падения равен углу отражения.

Тот факт, что длина пути может быть не минимумом, а максимумом, очень важен для понимания смысла и происхождения принципа Ферма. Очевидно, что этот принцип не есть следствие какого-то «стремления» света выбирать кратчайшие пути: в случае такого «стремления» свету было бы безразлично, имеем ли мы дело с минимумом или с максимумом.

На самом деле принцип Ферма есть следствие того, что распространение света есть распространение волн, в которых электрическое и магнитное поля очень быстро ( $10^{15}$  раз в секунду в случае видимого света) меняют свой знак. Соответственно очень мала и длина

волны света. В данный момент в точках, находящихся на расстоянии половины длины волны друг от друга, знак поля противоположный. Пусть в определенный момент в точке  $I$  (источнике света) поле имело отрицательный знак. Знак поля в точке  $A$  зависит от того, сколько раз успевает измениться знак на пути от  $I$  до  $A$ . Если мы рассмотрим два соседних пути от  $I$  до  $A$ , то при одинаковой длине путей те поля, которые придут в точку  $A$  из  $I$  по этим путям, будут иметь одинаковый знак; они сложатся, усиливая друг друга.

Если длины путей разные, то поля могут оказаться с одинаковым знаком, а могут оказаться с разным знаком и в среднем взаимно уничтожатся. В этом причина того, что для распространения света играют роль пучки лучей одинаковой длины, с одинаковым временем распространения.

Равенство нулю производной длины пути по координате точки отражения означает, что по крайней мере с точностью до членов порядка  $(x - x_0)^2$  длины путей одинаковы, волны, прошедшие через точку  $O$  и ближайшие, соседние к ней, взаимно усиливаются. С этой точки зрения, очевидно, безразлично, имеем мы дело с минимумом или максимумом,  $L'' > 0$  или  $L'' < 0$ . Более того, очевидно, что наилучшие условия отражения получаются, когда длина пути на возможно большем участке отражающей поверхности одинакова. Значит, желательно, чтобы было  $L'' = 0$ ; тогда зависимость  $L$  от  $x$ , при малых  $x$ , еще слабее — только в членах  $(x - x_0)^3$  и более высоких. Физически  $L'' = 0$  соответствует такой кривизне отражающей линии, при которой зеркало собирает, фокусирует в точке  $A$  лучи, вышедшие из  $I$ .

В геометрической оптике лучи рассматриваются как геометрические линии. На примере отражения мы только что видели, что законы геометрической оптики являются следствием волновой природы света. При этом рассматривался не один луч, а пучок соседних лучей.

Можно дать оценку толщины этого пучка. Складываются между собой амплитуды тех волн, у которых длина пути от  $I$  до  $A$  отличается меньше, чем на половину длины волны. Составим условие

$$|L(x) - L(x_0)| = \frac{\lambda}{2}. \text{ Вблизи точки отражения } L'(x_0) = 0, \quad |L(x) - L(x_0)| = \frac{(x - x_0)^2}{2} |L''(x_0)|, \text{ откуда } |x - x_0| = \sqrt{\frac{\lambda}{|L''(x_0)|}}.$$

Таким образом, в действительности свет отражается не в одной точке зеркала, а на пятнышке, размеры которого, как видно из формулы, только стремятся к нулю при стремлении к нулю длины волны.

На основании принципа Ферма можно рассмотреть и более сложную задачу о форме луча света в среде с постепенно меняющейся оптической плотностью, например луча света, идущего от звезды к наблюдателю, если учитывать постепенное изменение плотности атмосферы. Форма луча в этом случае будет криволинейная и оп-

ределится из условия стационарного значения (обычно минимума) интеграла (64). В некоторых случаях интегрирование соответствующего уравнения Эйлера можно довести до квадратур. Рассмотрим, например, распространение света в плоскости  $x, y$ , если скорость света зависит только от высоты  $y$ , т. е.  $n = n(y)$ . Перепишав (64) в виде

$$ct = \int_{(L)} n(y) \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

можно воспользоваться промежуточным интегралом (34) уравнения Эйлера, что даст

$$n(y) \sqrt{1 + y'^2} - n(y) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} y' = C_1, \text{ т. е. } \frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1.$$

Отсюда легко находим

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{[n(y)]^2 - C_1^2}}{C_1}, \quad \frac{C_1 dy}{\sqrt{[n(y)]^2 - C_1^2}} = dx,$$

$$C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{[n(y)]^2 - C_1^2}} = x + C_2.$$

Если последний интеграл при том или ином специальном виде функции  $n(y)$  удастся взять, то мы получим уравнение луча в конечном виде; в противном случае интеграл можно вычислить приближенно (гл. I). Интересно, что при  $n = \frac{n_0}{\sqrt{y_0 - y}}$  получается задача, решенная в § 4, т. е. свет распространяется по циклоидам, а при  $n = n_0 y$  получается задача, решенная в § 5, т. е. свет распространяется по цепным линиям.

Заметим, что в общем случае, когда показатель преломления зависит от частоты света, необходимо различать так называемые групповую и фазовую скорости света в среде.

Фазовая скорость света  $c_\phi$  дает соотношение между длиной волны и периодом колебаний

$$\lambda = c_\phi T.$$

При этом все поля зависят от  $x$  и  $t$  гармонически

$$H, E \propto \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (c_\phi t - x) \right]$$

( $\propto$  знак пропорциональности). Величина, стоящая под знаком косинуса, может быть названа фазой. Отсюда и происходит название «фазовая скорость». Показатель преломления непосредственно характеризует именно фазовую скорость  $c_\phi = \frac{c}{n}$ , где  $c$  — скорость света в пустоте.

От  $c_\Phi$  надо отличать так называемую групповую скорость света  $c_r$ . Групповая скорость входит в ответ на такой вопрос: через какое время после открытия заслонки в точке 1 свет придет в точку 2, распространяясь в однородной среде? Ответ гласит  $t = r_{12}/c_r$ , а величина  $c_r$  выражается через показатель преломления так:

$$c_r = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}.$$

Следовательно, выражение  $c_r$  равно  $c_\Phi$  лишь в том частном случае, когда  $n$  не зависит от  $\omega$ ,  $c_r = c_\Phi$ ; в общем случае они различны.

Например, для рентгеновых лучей в среде  $n = 1 - \frac{a}{\omega^2}$ , показатель преломления меньше 1. Значит,  $c_\Phi > c$ . Но это не значит, что сигнал может распространяться со скоростью больше скорости света! В самом деле, легко найдем

$$n + \omega \frac{dn}{d\omega} = 1 - \frac{a}{\omega^2} + \omega \frac{2a}{\omega^3} = 1 + \frac{a}{\omega^2},$$

так что  $c_r < c$ .

Опыт показывает, что в принцип Ферма входят именно  $n$  и  $c_\Phi$ ; тем самым еще раз видно, что принцип Ферма не есть результат стремления света поскорей дойти из одной точки в другую. Дело именно в условии сложения волн, зависящем от фазы волны.

Разницу между минимальностью и стационарностью значения функционала в реальном процессе можно понять также на следующем простом примере, взятом из статьи «Принцип наименьшего действия» знаменитого немецкого физика-теоретика Макса Планка (1858—1947). Путь свободной материальной точки, движущейся по поверхности без воздействия внешних сил, представляет собой кратчайшую линию, соединяющую начальную и конечную точки пути. В частности, на сфере такой линией служит дуга большого круга. Но если путь длиннее, чем половина окружности большого круга, то значение его длины будет, хотя и стационарным, но уже, как легко понять, не минимальным по сравнению с длинами соседних путей. Это значение не будет и максимальным, так как с помощью внесения извилин всегда можно, оставив начало и конец пути без изменения, увеличить его длину. Это значение имеет характер минимакса (см. § IV.6). Вспомнив высказывающуюся одно время идею, что в природе господствует божественный промысел и что в основе всякого явления природы лежит сознательное намерение, направленное к определенной цели, причем эта цель достигается кратчайшим путем и наилучшими средствами, Планк по этому поводу не без ехидства замечает: «Значит, за пределами полуокружности божественное провидение уже не действует».

## Упражнения

1. Как известно, уравнение эллипса выводится из условия, что сумма расстояний любой его точки  $K$  от двух точек  $F_1$  ( $x_1 = -c$ ,  $y = 0$ ) и  $F_2$  ( $x_2 = c$ ,  $y = 0$ ), т. е. сумма  $F_1K + F_2K = L$ , одинакова для всех точек (рис. 185). Найдите касательную и нормаль к эллипсу в произвольной его точке  $K$ . Найдите углы между линиями  $F_1K$ ,  $F_2K$  и нормалью в точке  $K$ . Покажите, что все лучи, вышедшие из  $F_1$ , проходят после отражения через  $F_2$ , а следовательно, фокусируются в  $F_2$ .

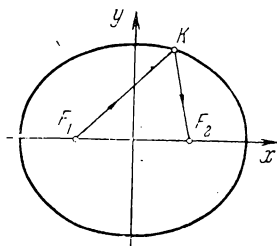


Рис. 185.

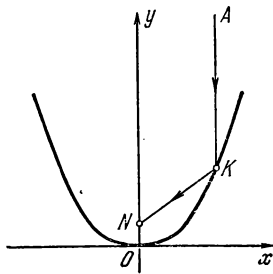


Рис. 186.

2. Рассмотрите отражение от параболы  $y = x^2$  параллельного пучка света, идущего вниз по оси ординат (рис. 186). Считая, что свет идет из точки  $A$ ,  $x_A = 0$ ,  $y_A = Y$ , и считая  $Y$  большим, замените на  $Y - y_K$  расстояние  $AK$ , равное  $\sqrt{x_K^2 + (Y - y_K)^2}$ . Найдите длину  $L = AKN$  и найдите точку  $N$ , для которой  $\frac{dL}{dx_K} = 0$ . Найдите касательную и нормаль к параболе в точке  $K$  и убедитесь в том, что для точки  $N$  удовлетворяется условие равенства углов падения углу отражения.

3. Точки  $H$  и  $A$  находятся на высоте 1 см над зеркалом и на расстоянии 2 см друг от друга. Найдите  $L''(x_0)$  и при  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см найдите размеры отражающей области.

## § 11. Принцип наименьшего действия

Успех универсального принципа минимума потенциальной энергии, с помощью которого определяются положения равновесия системы, побудил к поискам аналогичного универсального принципа, с помощью которого можно было бы определять возможные движения системы. Это привело к открытию «принципа наименьшего действия».

Рассмотрим сначала частный пример. Пусть частица массы  $m$  движется по оси  $x$  под действием силы с потенциалом  $U(x)$ . Как известно (см., например, ВМ, § VI.8), уравнение движения при этом имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -U'(x), \quad \text{т. е.} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + U'(x) = 0. \quad (68)$$

Нетрудно подобрать функционал, для которого последнее уравнение

было бы как раз уравнением Эйлера (§ 4). Обозначив  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ , перепишем (68) в форме

$$\frac{dU}{dx} + \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0, \text{ т. е. } \frac{d(-U)}{dx} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} \right) \right] = 0. \quad (69)$$

Последнее уравнение по форме напоминает уравнение Эйлера, которое в случае искомой функции  $x(t)$  должно иметь вид (ср. (29))

$$\frac{\partial}{\partial x} F(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} F(t, x, \dot{x}) \right] = 0. \quad (70)$$

Однако в уравнении (70) в обоих членах дифференцируется одна и та же функция, тогда как в уравнении (69) это не так. Поэтому «подгоним» уравнение (69) под вид (70), добавив под знаками производных слагаемые, производная которых равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right] - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[ \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right] \right\} = 0.$$

Мы видим (ср. формулы (25) и (29)), что искомым функционалом является

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right] dt.$$

Заметим, что член  $\frac{m\dot{x}^2}{2}$  как раз равен кинетической энергии  $T$  движущейся частицы, и обозначим подынтегральную функцию

$$L = T - U; \quad (71)$$

это так называемая *функция Лагранжа*. Тогда вариационная задача состоит в отыскании стационарного значения интеграла

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (72)$$

который называется *действием*. Здесь  $t_1$  и  $t_2$  — начальный и конечный моменты движения, а сравниваются между собой все мыслимые виды движений с одинаковыми начальными условиями, а также с одинаковыми конечными условиями. Можно проверить, что в целом ряде случаев, например, если промежуток времени  $t_2 - t_1$  достаточно мал, интеграл (72) имеет для реального движения не просто стационарное, а минимальное значение. Поэтому возможность отыскать это движение, исходя из вариационной задачи для интеграла (72), называется *принципом наименьшего действия*.

Оказывается, что вариационный принцип наименьшего действия имеет универсальный характер и выполняется для любых замкнутых систем без диссипации энергии (т. е. рассеяния, потери энергии — например, из-за наличия трения; впрочем, систему с диссипацией

можно в определенном смысле считать незамкнутой). Согласно этому принципу из всех мыслимых (при данных связях) способов перехода из некоторого состояния в момент  $t_1$  в некоторое другое состояние в момент  $t_2$  система выбирает такой способ, для которого действие, т. е. интеграл (72), принимает стационарное (как правило, минимальное) значение. При этом функция Лагранжа  $L$  представляет собой разность (71) между кинетической и потенциальной энергиями системы, а каждая из этих энергий выражается через обобщенные координаты системы (см. § IV.8) и производные от них по времени. Принцип наименьшего действия применим как к системам с конечным числом степеней свободы, так и к сплошным средам, причем не только к механическим, но и к электромагнитным и иным явлениям.

Применим принцип наименьшего действия к выводу уравнения поперечных малых колебаний натянутой мембраны, рассмотренной в конце § 6. Так как кинетическая энергия элемента ( $d\sigma$ ) мембраны равна

$$\frac{1}{2} \rho d\sigma \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2,$$

где  $\rho$  — поверхностная плотность мембраны, то общая кинетическая энергия мембраны равна

$$E = \frac{1}{2} \rho \iint_{(\sigma)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx dy.$$

Пользуясь выражением (43) для потенциальной энергии, получаем функцию Лагранжа и действие

$$L = \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} \left\{ \rho \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - T \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy,$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \iint_{(\sigma)} \left\{ \rho \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - T \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dt.$$

Применяя уравнение Эйлера по трем независимым переменным (ср. § 6), получаем уравнение колебаний мембраны

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = a^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad \left( a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \right).$$

На первый взгляд выражение (71) для функции Лагранжа представляется формальным, неестественным, так как непонятно, какой смысл может иметь разность энергий. Положение проясняется на следующем простом примере. При движении частицы с заданной



энергией  $E$  в заданном стационарном потенциальном поле  $U$  траектория определяется условием минимума  $\int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$  вдоль пути, где  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  — импульс, а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор. В самом деле,

$$T - U = 2T - (T + U) = 2T - E.$$

Значит,

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt - \int_{t_1}^{t_2} E dt = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt - E(t_2 - t_1),$$

где член  $E(t_2 - t_1)$  постоянен. Запишем  $2T = 2 \frac{mv^2}{2} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$

и отсюда получим, что условие экстремума  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  совпадает с условием экстремума  $\int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$  при заданных начале и конце пути и заданной энергии. При этом  $p^2 = 2m(E - U)$ .

В то же время условие стационарности  $\int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$  полностью аналогично принципу Ферма. Дело в том, что в квантовой механике длина волны, связанная с движением тела, равна  $\lambda = 2\pi\hbar/p$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\hbar = 10^{-27} \frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{сек}}$ . При этом вероятность найти частицу в данной точке пропорциональна квадрату амплитуды волны, а волны, прошедшие по разным путям, складываются. Условие стационарности  $\int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$  вдоль траектории, вычисленной в классической механике, как раз и представляет собой условие сложения с одинаковой фазой волн, прошедших по путям, близким к траектории.

Аналогия между механическими принципами наименьшего действия и принципом Ферма сыграла большую роль в становлении квантовой механики.

Известен целый ряд других вариационных принципов в различных областях, в том числе даже столь далеких от физики, как, например, экономика. При решении экономической задачи мы обычно располагаем теми или иными ресурсами (деньгами, материалами и т. д.), которые должны использовать так, чтобы в том или ином смысле получить максимальную пользу. Таким образом, получается задача на максимум, в которой искомым является оптимальный план использования ресурсов, а максимизируется польза. В зависимости от характера задачи при выборе плана может быть либо конечное число степеней свободы, т. е. искомым является набор параметров, определяющих план, либо же может быть бесконечное число степеней свободы, так что искомой является некоторая функция. В первом случае задача иногда решается средствами дифференциального исчисления (§ IV.6 и § 7), а иногда, если число искомых величин и наложенных на них ограничений велико, — средствами новой мате-

матической дисциплины, которая называется «теорией математического программирования». Во втором случае задача принадлежит вариационному исчислению. Аналогичные экстремальные принципы мы постоянно применяем и в своем поведении, хотя не всегда это четко осознаем и не всегда применяем их наилучшим образом.

### Упражнение

Исходя из выражения (11) для потенциальной энергии однородной струны на упругой подкладке, выведите уравнение движения такой струны, не учитывая кинетической энергии подкладки.

## § 12. Прямые методы

Долгое время почти единственным путем решения вариационных задач считался переход к дифференциальным уравнениям Эйлера. Однако решение получающихся краевых задач для дифференциальных уравнений оказывается очень часто довольно сложным делом; явное решение в квадратурах удается получить редко, и приходится пользоваться приближенными методами. Еще реже получается явное решение уравнений Эйлера для вариационных задач с несколькими независимыми переменными.

Поэтому в последнее время часто применяется ряд эффективных приближенных методов непосредственного решения вариационных задач, не связанных с переходом к дифференциальным уравнениям; эти методы получили наименование *прямых методов вариационного исчисления*. Большинство из них основано на переходе к задачам на экстремум функции нескольких переменных, т. е. к задачам с конечным числом степеней свободы. Мы рассмотрим здесь два таких метода.

Первый метод основан на процессе, противоположном тому, который был описан в § 1. Там мы перешли от задачи с конечным числом степеней свободы к вариационной задаче с помощью измельчения разбиения интервала, в результате чего сумма (3) перешла в интеграл (7). С помощью обратного процесса можно перейти от интеграла к сумме и тем самым свести задачу об экстремуме функционала к задаче об экстремуме функции нескольких переменных.

Пусть, например, рассматривается экстремум функционала (25) при краевых условиях (26). Разбив интервал интегрирования на  $n$  равных частей с помощью точек деления  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  и обозначив  $y(x_i) = y_i$ , заменим приближенно  $y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$  ( $h = \frac{b-a}{n}$ ),

$$\int_a^b F(x, y, y') dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, y'_i) h \approx h \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right). \quad (73)$$

(Как и в §§ I.1 и II.2, можно было бы воспользоваться более точными формулами численного дифференцирования и интегрирования, но мы здесь не будем на этом останавливаться.) Так как значения  $y_0 = y_a$  и  $y_n = y_b$  заданы, то задача сводится к отысканию экстремума функции  $n-1$  переменных  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ , стоящей в правой части (73). Как было показано в § 1, эту задачу иногда бывает трудно довести до конца.

Одним из наиболее распространенных прямых методов вариационного исчисления является сейчас так называемый *метод Рунца*\*), состоящий в том, что искомая функция ищется в виде, включающем несколько произвольных постоянных (параметров); например, в случае одного независимого переменного в виде

$$y = \varphi(x; C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (74)$$

При этом правая часть выбирается так, чтобы для любых значений этих параметров удовлетворялись поставленные граничные условия. Подставляя (74) в выражение для заданного функционала, получаем, что значение функционала оказывается зависящим от  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Тем самым задача об экстремуме функционала сводится к задаче об экстремуме функции от  $n$  независимых параметров  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , последняя же задача решается по методам гл. IV. Конечно, получающееся при этом решение является лишь приближенным решением исходной задачи, так как в виде (74) можно представить далеко не любую функцию. Чем больше введено параметров  $C_i$ , тем более «гибкой» является формула (74), т. е. тем точнее можно представить этой формулой искомое решение, но тем сложнее получаются вычисления. Поэтому на практике число этих параметров берется небольшим, иногда бывает достаточно даже принять  $n = 1$ .

Приведем примеры. Пусть ищется минимум функционала

$$I = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx \quad (75)$$

при краевых условиях

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (76)$$

Будем искать приближенное решение в виде

$$y = x + Cx(1-x). \quad (77)$$

(Первое из этих слагаемых удовлетворяет условиям (76), а второе —

---

\*) Этот метод был предложен в 1908 г. немецким физиком и математиком Ф. Ритцем. В 1915 г. русский механик Б. Г. Галеркин (1871—1945) применил более общий метод, пригодный для краевых задач не обязательно вариационного происхождения; поэтому описанный метод иногда называют *методом Ритца-Галеркина*.

соответствующим однородным условиям, не нарушающимся при умножении на произвольную постоянную, так что вся сумма также удовлетворяет условиям (76); по такому образцу часто составляется функция (74) и в других примерах.) Подстановка (77) в (75) дает после вычислений

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [(1+C-2Cx)^2 + (x+Cx-Cx^2)^2] dx = \\ &= \left(1 + C^2 + 4C^2 \frac{1}{3} + 2C - 4C \frac{1}{2} - 4C^2 \frac{1}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{3} + C^2 \frac{1}{3} + C^2 \frac{1}{5} + 2C \frac{1}{3} - 2C \frac{1}{4} - 2C^2 \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{6}C + \frac{11}{30}C^2. \end{aligned}$$

Чтобы найти минимум этой функции от  $C$ , приравняем нулю производную:

$$\frac{1}{6} + \frac{11}{15}C = 0,$$

откуда найдем  $C = -\frac{5}{22} = -0,227$ , т. е. приближенное решение (77) имеет вид

$$y_I = x - 0,227x(1-x) = 0,773x + 0,227x^2.$$

Более точный результат получится, если искать приближенное решение в виде  $y = x + C_1x(1-x) + C_2x^2(1-x)$ , включающем два параметра. Подстановка в (75) и приравнивание нулю производных по  $C_1$  и  $C_2$  приводят (соответствующие вычисления мы предоставляем читателю) к значениям  $C_1 = -0,146$ ,  $C_2 = -0,163$ , т. е. к приближенному решению

$$\begin{aligned} y_{II} &= x - 0,146x(1-x) - 0,163x^2(1-x) = \\ &= 0,854x - 0,017x^2 + 0,163x^3. \end{aligned}$$

В разобранным примере легко получить точное решение. В самом деле, уравнение Эйлера для функционала (75) имеет вид

$$2y - \frac{d}{dx}(2y') = 0, \quad \text{т. е.} \quad y'' - y = 0,$$

и обладает общим решением (§ VII.3)

$$y = Ae^x + Be^{-x},$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. При условиях (76) получаем

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}}.$$

Это точное решение легко сравнить с обоими приближенными решениями (см. таблицу).

$x$	$y_I$	$y_{II}$	$y_{\text{точн}}$	$x$	$y_I$	$y_{II}$	$y_{\text{точн}}$
0,0	0,000	0,000	0,000	0,6	0,546	0,541	0,542
0,1	0,080	0,085	0,085	0,7	0,652	0,645	0,645
0,2	0,164	0,171	0,171	0,8	0,764	0,756	0,754
0,3	0,252	0,259	0,259	0,9	0,880	0,874	0,873
0,4	0,346	0,349	0,350	1,0	1,000	1,000	1,000
0,5	0,443	0,443	0,444				

Таким образом, даже в простейшем варианте метод Ритца дает в данном примере очень хорошую точность.

Еще лучшую точность дает метод Ритца, если требуется найти не функцию, реализующую экстремум, а само экстремальное значение функционала. В самом деле, малая вариация функции вблизи стационарного значения функционала приводит к еще меньшему изменению значения функционала. (Сравните изменения независимого и зависимого переменных вблизи стационарного значения функции, например изменения  $x$  и  $y$  вблизи значения  $x=c$  на рис. 180.) Поэтому погрешность в значении функционала будет высшего порядка малости по сравнению с погрешностью в функции, которая реализует экстремум. Так, в разобранный только что примере при подстановке функции  $y_I(x)$  функционал (75) дает приближенное минимальное значение 1,314, тогда как точное значение равно 1,313. Ошибка составляет 0,1%. А чтобы уловить ошибку при подстановке  $y_{II}(x)$ , потребовались бы вычисления с значительно большей точностью.

Если проделать аналогичные вычисления для функционала

$$I = \int_0^1 (y'^2 + xy^2) dx, \quad (78)$$

что мы предоставим сделать читателю, то почти при том же объеме вычислений мы также получим приближенное решение с хорошей точностью, хотя в данном случае точное решение уже не выражается через элементарные функции. Для прямых методов это обстоятельство не является препятствием.

Приведем еще пример на экстремальную задачу для функции двух переменных. Пусть ищется экстремум функционала

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2u \right] dx dy \quad (79)$$

среди функций, обращающихся в нуль на границе квадрата, ограниченного прямыми  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ . В этом случае уравнение Эйлера не решается точно с помощью элементарных функций. Приближенное решение по методу Ритца ищем в виде

$$u = C(1-x^2)(1-y^2).$$

Подстановка в (79) дает

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{[-2Cx(1-y^2)]^2 + [-2Cy(1-x^2)]^2 + \\ &\quad + 2C(1-x^2)(1-y^2)\} dx dy = \\ &= 4C^2 \frac{2}{3} \cdot 2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + 4C^2 \frac{2}{3} \cdot 2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \\ &\quad + 2C \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{256}{45} C^2 + \frac{32}{9} C. \end{aligned}$$

Приравнивание производной нулю дает минимум при  $C = -\frac{5}{16}$ . Значит, решение задачи о минимуме функционала (79) при заданных граничных условиях приближенно имеет вид

$$u = -\frac{5}{16}(1-x^2)(1-y^2).$$

Сравнение с точной формулой (имеющей вид бесконечного ряда) показывает, что погрешность этого приближенного решения в среднем равна 1,5%; погрешность в значении функционала  $I$  около 0,2%.

### Упражнения

1. Найдите приближенное решение задачи о минимуме функционала (75) при условиях (76), выбрав приближенное решение в форме  $y = x + C \sin \pi x$ . Сравните полученные значения  $I$  и  $y(0,5)$  с точными.

2. Найдите приближенное решение задачи о минимуме функционала (78) при условиях (76), выбрав приближенное решение в виде (77).

3. Найдите приближенное решение разобранной в основном тексте задачи о минимуме функционала (79), выбрав приближенное решение в виде  $u = C \cos \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2}$ . Сравните полученные значения  $I$  и  $u(0, 0)$  с найденными в основном тексте.

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1

Рассуждая, как в тексте, находим

$$y_i = -\frac{h}{P} [(i-1)F_1 + (i-2)F_2 + \dots + F_{i-1}] + y_1;$$

$$0 = -\frac{h}{P} [(n-1)F_1 + (n-2)F_2 + \dots + F_{n-1}] + ny_1,$$

откуда

$$y_i = \frac{h(n-i)}{Pn} [1F_1 + 2F_2 + \dots + (i-1)F_{i-1}] + \\ + \frac{hi}{Pn} [(n-i)F_i + (n-i-1)F_{i+1} + \dots + 1F_{n-1}].$$

Полагая  $n = \frac{l}{h}$ ,  $i = \frac{x_i}{h}$ ,  $F_i = f(x_i)h$ ,  $h \rightarrow 0$ , получим в пределе

$$y = \frac{l-x}{Pl} \int_0^x \xi f(\xi) d\xi + \frac{x}{Pl} \int_x^l (l-\xi) f(\xi) d\xi \quad (\text{ср. § VI.2}).$$

## § 2

$$1. \delta I = - \int_0^1 \frac{2x\delta y}{y^3} dx; \quad 2y(0)\delta y(0) + \int_0^1 (x\delta y + 2y'\delta y') dx.$$

$$2. \text{ В данном примере } \Delta I = \int_0^1 (2x + \alpha x^2)^2 dx - \int_0^1 (2x)^2 dx = \alpha + \frac{\alpha^2}{5}; \quad \delta I = \alpha.$$

Результаты подсчета:

$\alpha$	$\Delta I$	$\delta I$	относительная ошибка
$\frac{1}{-0,1}$	$\frac{1,2}{-0,098}$	$\frac{1}{-0,1}$	-17%
$\frac{0,01}{0,01}$	$\frac{0,01002}{0,01002}$	$\frac{0,01}{0,01}$	-2%
			-0,2%

## § 3

Уравнение (22) в обоих случаях имеет вид  $(1-x)2(y-2x)=0$ , откуда  $y=2x$ . Это решение придает функционалу стационарное значение  $I=0$ , которое лишь в случае а) является минимальным. В случае б) решение имеет характер минимакса (ср. § IV.6), а задача на минимум решения не имеет.

## § 4

1. а) Уравнение Эйлера имеет вид  $2y - \frac{d}{dx}(2y') = 0$ , т. е.  $y'' - y = 0$ , откуда  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$  (см. § VII.3). Из граничных условий получаем  $0 = C_1 + C_2$ ,  $1 = C_1 e + C_2 e^{-1}$ , откуда  $C_1 = \frac{1}{e - e^{-1}}$ ,  $C_2 = -\frac{1}{e - e^{-1}}$  и окончательно

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}};$$

б) по формуле (34)  $yy'^2 - 2yy' \cdot y' = C$ ,  $yy'^2 = -C$ ,  $\sqrt{-y} dy = \pm \sqrt{-C} dx$ ,  $y^{3/2} = \pm \frac{3}{2} \sqrt{-C} x + C_2 = C_1 x + C_2$ . Из граничных условий  $p^{3/2} = C_2$ ,  $q^{3/2} = C_1 + C_2$ , откуда  $y^{3/2} = (q^{3/2} - p^{3/2})x + p^{3/2}$  и окончательно  $y = [(q^{3/2} - p^{3/2})x + p^{3/2}]^{2/3}$ .

2. Подстановка последнего решения в  $I$  дает после вычислений значение  $\frac{4}{9} (q^{3/2} - p^{3/2})^2$ ; откуда  $\frac{\partial I}{\partial p} = -\frac{4}{3} p^{1/2} (q^{3/2} - p^{3/2})$ . По формуле, выведенной в тексте,  $\frac{\partial I}{\partial p} = -(2yy') \Big|_{x=0} = -2p \frac{2}{3} [(q^{3/2} - p^{3/2})x + p^{3/2}]^{-1/3} (q^{3/2} - p^{3/2}) \Big|_{x=0} = -\frac{4}{3} p^{1/2} (q^{3/2} - p^{3/2})$ , т. е. то же.

3. Так как длина графика  $y=f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) равна  $\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$ , то задача сводится к определению линии, придающей этому функционалу минимальное значение при условиях (26). Из (34) получаем  $\sqrt{1+y'^2} - \frac{2y'y'}{2\sqrt{1+y'^2}} = C$ , откуда  $y' = C_1$ ,  $y = C_1x + C_2$ . Это — уравнение прямых.

## § 5

Из уравнения Эйлера получается, что при  $a \neq \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  единственной функцией, удовлетворяющей граничным условиям и придающей функционалу стационарное значение, служит  $y \equiv 0$ . Подставляя  $y = Cx(a-x)$ , получим  $I = C^2 \frac{a^3}{30}(10-a^2)$ , откуда видим, что при  $a > \sqrt{10}$  задача на минимум решения не имеет. Подставляя  $y = C \sin \frac{\pi x}{a}$ , получаем  $I = \frac{C^2}{1a}(\pi^3 - a^2)$ , откуда видим, что при  $a > \pi$  задача на минимум решения не имеет. Можно доказать, что так будет и при  $a = 2\pi, 3\pi, \dots$ , а при  $a < \pi$  функция  $y \equiv 0$  служит решением задачи на минимум.

## § 6

1. Аналогично (27) приходим к равенству  $\int_a^b (F'_y \delta y + F''_{yy} \delta y' + F''_{yy''} \delta y'') dx = 0$ .

Интегрируя по частям второе слагаемое один раз, а третье — два раза, получим

$$\int_a^b \left( F''_{yy} - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} \right) \delta y dx = 0,$$

откуда приходим к искомому уравнению

$$F''_{yy} - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} = 0.$$

2. Обозначим для краткости  $z'_x = p$ ,  $z'_y = q$ ; получим уравнение

$$F'_z - F''_{px} - F''_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} - F''_{pp} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2F''_{pq} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - F''_{qy} - F''_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} - F''_{qq} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

## § 7

а)  $u^* = x^2 - y^2 + z^2 - 2x - \lambda(x + 2y - z)$ ; откуда условия стационарности дают

$$2x - 2 - \lambda = 0, \quad -2y - 2\lambda = 0, \quad 2z + \lambda = 0.$$

Выражая отсюда  $x, y, z$  через  $\lambda$  и подставляя в уравнение связи, получаем  $\lambda = -2$ , откуда координаты точки условного экстремума  $x = 0, y = 2, z = 1$ ;

б)  $u^* = x^2 - y^2 + z^2 - 2x - \lambda_1(x + y - z) - \lambda_2(x + 2y)$ . Отсюда  $2x - 2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ ,  $-2y - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$ ,  $2z + \lambda_1 = 0$ . Привлекая уравнения связи, получаем  $x = \frac{1}{2}$ ,

$$y = \frac{1}{4}, \quad z = \frac{3}{4}.$$



## § 8

1. Пусть  $Ox$ —ось вращения, а  $y = y(x) \geq 0$  ( $a \leq x \leq b$ )—уравнение контура осевого сечения; тогда объем и поверхность тела вращения выражаются по формулам (см. например, ВМ, § III.7)  $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ ,  $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$ .

Промежуточный интеграл (34) для функции  $\pi(y^2 - 2\lambda y \sqrt{1+y'^2})$  имеет вид  $\pi(y^2 - 2\lambda y \sqrt{1+y'^2}) + \frac{2\pi\lambda y y'}{\sqrt{1+y'^2}} y' = C_1$ , т. е.  $\pi\left(y^2 - \frac{2\lambda y}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = C_1$ . Так как  $y$  может равняться нулю, то  $C_1 = 0$ , и мы получаем  $y - \frac{2\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$ ,

откуда, интегрируя, находим  $(x+C)^2 + y^2 = 4\lambda^2$ . Искомым телом является шар.

2. Так как длина  $L$  подвешенной нити ( $L$ ) с уравнением  $y = y(x)$  задана, а высота центра тяжести, как вытекает из § XI.2, определяется формулой  $y_{ц.г.} = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dL$ , то задача сводится к минимизации интеграла  $B = \int_{(L)} y dL = \int_{(L)} y \sqrt{1+y'^2} dx$  при заданном  $L = \int_{(L)} \sqrt{1+y'^2} dx$ . Уравнение Эйлера надо писать для функции  $y \sqrt{1+y'^2} - \lambda \sqrt{1+y'^2} = (y - \lambda) \sqrt{1+y'^2}$ , которая после подстановки  $y - \lambda = \bar{y}$  переходит в функцию, исследованную в примере § 5. Решением задачи служит цепная линия с уравнением  $y = \frac{1}{2k} [e^{k(x+C)} + e^{-k(x+C)}] + \lambda$ , где  $k$ ,  $C$ ,  $\lambda$ —произвольные постоянные.

3. В первом примере  $\lambda = \frac{1}{2R}$ , где  $R$ —радиус шара. Во втором примере  $\lambda$  равно разности между ординатой крайней нижней точки цепной линии и радиусом кривизны в этой точке.

## § 9

1. Функция  $z$  имеет стационарное значение  $z = 0$  в точке  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . На катетах имеется по одному условному стационарному значению  $z = \frac{1}{4}$  в точке  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$  и  $z = -\frac{1}{4}$  в точке  $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ . В вершинах значения равны 0, -2 и 2. Значит,  $z_{\max} = 2$  достигается в точке  $(2; 0)$ ,  $z_{\min} = -2$  достигается в точке  $(0; 2)$ .

2. В упражнении 2 § 8 мы получили уравнение висящих участков нити. Здесь возможны два случая. Если нить достаточно коротка,  $L < L_0$ , так что она не достает до «пола», т. е. прямой  $y = 0$ , получаем  $y = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k} - \frac{e^k + e^{-k}}{2k} + 1$ . При этом  $L = \frac{e^k - e^{-k}}{k}$ , так что при заданном  $L$  можно численно найти  $k$ . Так как  $y_{\min} = \frac{2 + 2k - e^k - e^{-k}}{2k}$ , то  $L_0$  определяется по тому  $k > 0$ , для которого  $2 + 2k = e^k + e^{-k}$ . При  $L > L_0$  линия состоит из двух провисающих участков и одного, лежащего на полу. Правый провисающий участок имеет уравнение  $y = \frac{e^{k(x-C)}}{2k} + \frac{e^{-k(x-C)}}{2k} - \frac{1}{k}$ , причем  $\frac{e^{k(1-C)} + e^{-k(1-C)}}{2k} -$

$-\frac{1}{k}=1$ , откуда можно выразить  $C$  через  $k$ . Длина всей линии равна  $L=2C+\frac{e^{k(1-C)}-e^{-k(1-C)}}{k}$ .

## § 10

1. Уравнение эллипса  $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=L$ , после преобразований  $4(L^2-4c^2)x^2+4L^2y^2=L^2(L^2-4c^2)$ . Уравнения касательной и нормали в произвольной точке  $(x_0; y_0)$  соответственно

$$y-y_0=-\frac{(L^2-4c^2)x_0}{L^2y_0}(x-x_0) \text{ и } y-y_0=\frac{L^2y_0}{(L^2-4c^2)x_0}(x-x_0).$$

Искомые углы находятся по формуле  $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg} \beta-\operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ . Для первого угла надо положить  $\operatorname{tg} \alpha=\frac{y_0}{x_0+c}$ ,  $\operatorname{tg} \beta=\frac{L^2y_0}{(L^2-4c^2)x_0}$ , откуда находим после преобразований  $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{4cy_0}{L^2-4c^2}$ . Тому же оказывается равным тангенс второго угла, откуда и вытекает последнее утверждение упражнения 1.

2. Если точка  $N$  имеет координаты  $(0; y_N)$ , то

$$L=Y-y_K+\sqrt{x_K^2+(y_K-y_N)^2}=Y-x_K^2+\sqrt{x_K^2+(x_K^2-y_N)^2}.$$

Из условия  $\frac{dL}{dx}=0$  находим, что  $y_N=\frac{1}{4}$ . Уравнения касательной и нормали в точке  $K$  имеют соответственно вид

$$y-x_K^2=2x_K(x-x_K) \text{ и } y-x_K^2=-\frac{1}{2x_K}(x-x_K),$$

а уравнение прямой  $NK$  имеет вид  $y-x_K^2=\frac{x_K^2-\frac{1}{4}}{x_K}(x-x_K)$ . Равенство требуемых углов доказываем подобно упражнению 1.

3. Пусть точки  $H$  и  $A$  имеют координаты  $(-1; 1)$  и  $(1; 1)$ . Тогда  $L=\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{(x-1)^2+1}$ ,  $x_0=0$ ,  $L''(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$  см, откуда отражающая область имеет диаметр  $2\sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-6}}{1/\sqrt{2}}}=1,7 \cdot 10^{-2}$  см  $=0,17$  мм.

## § 11

В данном примере

$$L=T-U=\frac{1}{2} \int_0^l \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx - \int_0^l \left[ \frac{P}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} y^2 - f(x)y \right] dx.$$

Выписывая интеграл действия, а затем применяя уравнение Эйлера из § 6, получим искомое уравнение в виде  $-ky+f(x)-\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0$ ,

т. е.  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{k}{\rho} y + \frac{1}{\rho} f(x)$ .

## § 12

1. Подставляя  $y = x + C \sin \pi x$  в (75), получаем  $I = \frac{4}{3} + \frac{2}{\pi} C + \frac{\pi^2 + 1}{2} C^2$ .

Из условия  $\frac{dI}{dC} = 0$  находим  $C = \frac{-2}{\pi(\pi^2 + 1)} = -0,0588$ . Значения  $I$  и  $y(0,5)$  получаются равными 1,315 (ошибка 0,2%) и 0,441 (ошибка 0,7%).

2. Подставляя, получаем  $I = \frac{5}{4} + \frac{C}{10} + \frac{7C^2}{20}$ . Из условия минимальности  $C = -\frac{1}{7}$ ,  $I = \frac{87}{70} = 1,247$ .

3. Подставляя, получаем  $I = \frac{\pi^2 C^2}{2} + \frac{32C}{\pi^3}$ . Из условия минимальности  $C = -\frac{32}{\pi^4} = -0,331$ . Значения  $I$  и  $u(0, 0)$  получаются равными  $-0,537$  и  $-0,331$  вместо  $-0,556$  и  $-0,312$ .

## ГЛАВА XIII

### ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

#### § 1. Постановка вопроса

В природе и в технике часто встречаются явления, изучение которых требует знания особой отрасли математики, так называемой *теории вероятностей*.

Простейший пример, который всегда приводится по этому поводу, состоит в следующем. Будем подбрасывать монету. При падении она ложится на стол либо вверх гербом, либо вверх стороной, на которой обозначена стоимость (решкой). Если бросить монету так, чтобы она сделала в воздухе много оборотов, то в среднем монета будет падать одинаково часто вверх гербом и вверх решкой. Если произвести большое число  $N$  подбрасываний, то получим приблизительно  $\left(\frac{1}{2}\right)N$  раз герб и  $\left(\frac{1}{2}\right)N$  раз решку. Множители при  $N$  одинаковые и равны  $\frac{1}{2}$  как для случая выпадания герба, так и для случая выпадания решки. Их в данном случае называют *вероятностями*. Таким образом, говорят, что при отдельном бросании вероятность  $w_g$  получить герб равна  $\frac{1}{2}$ , вероятность  $w_p$  получить решку также равна  $\frac{1}{2}$ .

Возьмем еще пример. Рассмотрим кубик, одна грань которого выкрашена в белый цвет, а остальные пять сторон—в черный. При бросании такого кубика большое число  $N$  раз мы получим приблизительно  $\left(\frac{1}{6}\right)N$  раз сверху белую сторону и  $\left(\frac{5}{6}\right)N$  раз—черную\*). Поэтому говорят, что вероятность появления наверху белой грани  $w_6 = \frac{1}{6}$ , а вероятность появления наверху черной грани  $w_ч = \frac{5}{6}$ . Ясно, что если есть два взаимно исключающих исхода отдельного испытания (герб или решка в первом примере, белая

---

\*) Мы предполагаем, что кубик изготовлен из однородного материала.

или черная грань во втором примере), то сумма их вероятностей равна 1.

Следующий пример связан с вопросом о радиоактивном распаде. (Подробно радиоактивный распад был рассмотрен в ВМ, гл. V.) Будем наблюдать за отдельным атомом радиоактивного вещества. Вероятность того, что за малое время  $\tau$ , прошедшее после того, как мы начали наблюдать за этим атомом, он распадается, равна  $\omega\tau$ , где  $\omega$  — постоянная величина, т. е. эта вероятность пропорциональна продолжительности промежутка времени  $\tau$ . Вероятность того, что за это время радиоактивного распада не произойдет, равна, следовательно,  $1 - \omega\tau$ . Постоянная  $\omega$  характеризует данное радиоактивное вещество. Она имеет размерность  $\frac{1}{\text{сек}}$  и связана со средним временем жизни  $T$  данного элемента соотношением  $\omega = \frac{1}{T}$ .

Ясно, что вероятность распада может быть равна  $\omega\tau$  лишь для весьма малых промежутков времени  $\tau$ . Действительно, для больших  $\tau$  мы можем получить, например,  $\omega\tau > 1$ , что явно бессмысленно. Поэтому мы должны рассматривать весьма малый промежуток времени  $dt$ . При этом мы будем иметь дело с весьма малой вероятностью распада  $\omega \cdot dt$  и с весьма близкой к единице  $(1 - \omega dt)$  вероятностью атома не испытать распада. Отсюда в § 5 получится вероятность  $a$  не распасться за конечное время  $t$ ,  $a = (1 - \omega dt)^{t/dt} = e^{-\omega t}$ , и вероятность  $b$  распада за это время,  $b = 1 - a = 1 - e^{-\omega t}$ .

Бывает так, что возможно несколько (больше двух) исходов отдельного испытания. Так, например, при бросании обычной игральной кости (кубика с различными цифрами от 1 до 6 на его гранях) возможны шесть различных исходов: может выпасть грань с цифрой 1, может грань с цифрой 2 и т. д. до цифры 6. Вероятность каждого исхода равна  $\frac{1}{6}$ .

Наконец, результат отдельного испытания может характеризоваться величиной, которая принимает непрерывный ряд значений. Таков, например, при ловле рыбы удочкой вес  $p$  отдельной выловленной рыбы. Грубо можно подразделить рыб, например, на мальков весом до 100 г\*, средних, весом от 100 г до 1 кг, и больших, весом больше 1 кг. Тогда возможный исход вытаскивания из пруда одной рыбы будет характеризоваться тремя числами: вероятностью вытащить малька  $\omega_m$ , вероятностью вытащить среднюю рыбу  $\omega_c$  и вероятностью вытащить большую рыбу  $\omega_g$ . При этом

$$\omega_m + \omega_c + \omega_g = 1.$$

Однако такое описание рыбной ловли является очень грубым. Так, например, ответ «поймана большая рыба» может означать, что выловлена рыба в 1,1 кг, а может означать, что выловлена рыба в 20 кг.

\* Мы создаем, что такое определение малька является довольно спорным с точки зрения профессионального рыболова.

Вероятность вытащить рыбу, вес которой лежит в пределах от  $p$  до  $p + dp$ , где  $dp$  — весьма малое приращение веса, будем обозначать через  $d\omega$ . Естественно, эта вероятность пропорциональна  $dp$ . Кроме того,  $d\omega$  зависит и от  $p$ .

В самом деле, нет никаких оснований считать, что вероятность поймать рыбу, вес которой заключен в пределах от 100 до 110 г, такова же, как вероятность поймать рыбу, вес которой лежит в пределах от 1000 до 1010 г. Положим поэтому

$$d\omega = F(p) dp.$$

Входящая сюда функция  $F(p)$  называется *функцией распределения вероятностей*.

Мы знаем, что сумма всех вероятностей выловить ту или иную рыбу равна 1, это дает

$$\int_0^{\infty} F(p) dp = 1.$$

Можно несколько видоизменить задачу и рассматривать не вылавливание какой-либо рыбы, а в качестве отдельного испытания рассматривать забрасывание крючка. Это забрасывание крючка иногда сопровождается вылавливанием рыбы, а иногда (к сожалению, нередко) и не приводит к вылавливанию рыбы. Можно ввести вероятность вытаскивания пустого крючка  $k$  и вероятность вытаскивания рыбы (любого веса), равную  $1 - k$ , а затем уже подразделять случаи вытаскивания той или иной рыбы в соответствии с функцией  $F(p)$ . Можно пойти по другому пути. Вытаскивание пустого крючка можно назвать «вылавливанием рыбы, вес которой равен нулю». Тогда не надо будет явно упоминать о таком печальном случае, как вытаскивание пустого крючка. При этом получится новая функция распределения вероятностей  $f(p)$ . Это будет функция, для которой нуль является особой точкой. Интеграл  $\int_0^{\infty} f(p) dp = 1$ , но

в этот интеграл точка  $p = 0$  дает конечный вклад; это значит, что  $f(p)$  содержит член вида  $k\delta(p)$  (см. о понятии дельта-функции в гл. VI). Новая функция  $f(p)$ , относящаяся к одному забрасыванию крючка, связана со старой функцией  $F(p)$  (которая относилась к одной настоящей, с  $p > 0$ , выловленной рыбе) соотношением

$$f(p) = k\delta(p) + (1 - k)F(p).$$

На нескольких примерах мы обрисовали тот материал, с которым имеет дело теория вероятностей. Ниже будет рассматриваться ряд вопросов, возникающих при этом.

Например, пусть монета брошена пять раз. Какова вероятность того, что во всех пяти бросаниях выпадает герб? Какова вероятность того, что в четырех случаях будет герб, а в одном — решка

(причем безразлично, в каком именно по порядку бросания появилась решка—в первом, втором и т. д. или в последнем)? При этом мы считаем, что вероятность получить герб в одном бросании равна  $\frac{1}{2}$ . Решение такого рода задач требует известной алгебраической сноровки, а при очень больших числах бросания приходится применять методы высшей математики, так как иначе расчеты становятся практически невыполнимыми. Следующий круг вопросов—явление радиоактивного распада. Основываясь на вероятности распада за время  $dt$ , требуется найти вероятность распада за время  $t$ , которое может быть каким угодно, а вовсе не обязательно малым. При решении этого вопроса нам потребуется аппарат высшей математики. (Мы получим, в частности, ряд результатов ВМ, гл. V, применяя, однако, несколько иной ход рассуждений.)

В главе V ВМ рассматривалось большое число атомов  $N$  и получился закон изменения  $N$  со временем. По существу, там рассматривались только средние величины. Новый подход позволит решить гораздо более тонкие вопросы, например: какова вероятность наблюдать в некотором приборе то или иное число распадов, отличающееся от среднего?

В задаче о рыбной ловле можно ставить вопрос о вероятности получить тот или иной улов в результате вылавливания 2, 3, ...,  $n$  рыб или в результате забрасывания крючка 2, 3, ...,  $n$  раз. Последняя задача требует довольно высокой математической техники.

При выводе законов теории вероятностей нам понадобится формула Стирлинга (§ III.3), а также формула  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , выведенная в § IV.7.

### Упражнение

При игре в «подкидного дурака» пользуются колодой из 36 карт, распределенных по четырем мастям. Какова вероятность того, что первой сданной картой будет карта пиковой масти? дама? дама пик? козырь (козырной слугит масть первой карты, оставшейся после сдачи)?

## § 2. Умножение вероятностей

Основой решения задач, поставленных в § 1, является правило *умножения вероятностей* независимых событий.

Поясним это правило на простом примере. Пусть один кубик имеет одну белую и пять черных граней, так что вероятность появления белой грани  $w_6 = \frac{1}{6}$ , а вероятность появления черной грани  $w_ч = \frac{5}{6}$ . Пусть имеется еще один кубик, у которого две грани окрашены в зеленый цвет, а четыре—в красный. Для этого кубика вероятности появления зеленой и красной граней

соответственно равны

$$w_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad w_k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Положим оба кубика в один стакан, потрясем его и бросим кубики на стол. Возможны четыре различных исхода опыта, а именно, на одном кубике белая грань, на другом—зеленая; на одном кубике белая грань, на другом—красная; на одном кубике черная грань, на другом—зеленая, и, наконец, на одном кубике черная грань, на другом—красная. Будем эти исходы обозначать коротко так: бз, бк, cz, чк. Число случаев, в которых осуществляются эти исходы, обозначаем через  $N_{бз}$ ,  $N_{бк}$ ,  $N_{cz}$ ,  $N_{чк}$ , а соответствующие вероятности через  $w_{бз}$ ,  $w_{бк}$ ,  $w_{cz}$ ,  $w_{чк}$ . Поставим задачу определить эти вероятности.

Пусть мы проделали очень большое число опытов  $N$ . Разделим все опыты на две группы: те, в которых на первом кубике появилась белая грань (б) (независимо от цвета грани на втором кубике), и те, в которых на первом кубике появилась черная грань (ч) (независимо от цвета грани на втором кубике). Таким образом,  $N = N_б + N_ч$ . Так как  $w_б = \frac{N_б}{N}$ , то  $N_б = w_б \cdot N = \frac{1}{6} N$ . Точно так же  $N_ч = w_ч \cdot N = \frac{5}{6} N$ .

С другой стороны, ясно, что  $N_б = N_{бз} + N_{бк}$ . Дальше нам необходимо воспользоваться понятием независимости событий. Мы предполагаем, что тот факт, что на первом кубике выпала именно белая грань, не влияет на вероятность появления зеленой или красной грани на втором кубике. Иначе говоря, мы считаем, что два события—появление грани определенного цвета на первом кубике и появление грани определенного цвета на втором кубике—*независимы*. Исход одного из этих событий никак не влияет на исход другого. Ввиду этого вероятность появления на втором кубике зеленой грани  $w_з = \frac{N_{бз}}{N_б}$ , а вероятность появления на втором кубике красной грани  $w_k = \frac{N_{бк}}{N_б}$ . Отсюда находим  $N_{бз} = w_з \cdot N_б = w_з \cdot w_б \cdot N$ . С другой стороны,  $w_{бз} = \frac{N_{бз}}{N}$ , поэтому

$$w_{бз} = w_б \cdot w_з.$$

Таким образом, вероятность сложного события (появление на одном кубике белой, а на другом зеленой граней) равна произведению вероятностей простых независимых событий.

Теперь ясно, что

$$w_{бк} = w_б \cdot w_k, \quad w_{cz} = w_ч \cdot w_з, \quad w_{чк} = w_ч \cdot w_k.$$

Мы уже отмечали, что при одновременном бросании двух кубиков, о которых идет речь, возможны лишь четыре следующих исхода: бз, бк, cz, чк.



Поэтому должно быть

$$w_{бз} + w_{бк} + w_{чз} + w_{чк} = 1.$$

Нетрудно убедиться, что это действительно так. В самом деле,

$$\begin{aligned} w_{бз} + w_{бк} + w_{чз} + w_{чк} &= w_б \cdot w_з + w_б \cdot w_к + w_ч \cdot w_з + w_ч \cdot w_к = \\ &= w_б \cdot (w_з + w_к) + w_ч \cdot (w_з + w_к) = (w_з + w_к) (w_б + w_ч). \end{aligned}$$

В каждой из последних двух скобок написана сумма вероятностей двух простых событий, каждое из которых исключает другое и какое-то одно из которых обязательно произойдет. (Если выпадет белая грань, то не выпадет черная, и наоборот. Либо черная, либо белая грань появятся обязательно). Ясно, что такая сумма вероятностей равна единице:

$$w_б + w_ч = 1, \quad w_з + w_к = 1,$$

откуда и следует, что

$$w_{бз} + w_{бк} + w_{чз} + w_{чк} = 1.$$

Перейдем к следующему примеру. Пусть имеется кубик с некоторым (неважно, каким именно) количеством белых и некоторым количеством черных граней. Обозначим вероятности появления белой и черной граней при одном бросании кубика через  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Пусть опыт состоит в трехкратном бросании такого кубика. Так как в каждом бросании возможны два исхода, то в результате нашего опыта возможно  $2^3 = 8$  различных исходов \*).

Перечислим их в следующей схеме:

Первое бросание	Второе бросание	Третье бросание	Исход трех бросаний	Вероятность исхода
б	б	б	1б; 2б; 3б	$\alpha^3$
		ч	1б; 2б; 3ч	$\alpha^2\beta$
	ч	б	1б; 2ч; 3б	$\alpha^2\beta$
		ч	1б; 2ч; 3ч	$\alpha\beta^2$
ч	б	б	1ч; 2б; 3б	$\alpha^2\beta$
		ч	1ч; 2б; 3ч	$\alpha\beta^2$
	ч	б	1ч; 2ч; 3б	$\alpha\beta^2$
		ч	1ч; 2ч; 3ч	$\beta^3$

\*) Если опыт состоит в бросании кубика  $n$  раз, то возможны  $2^n$  различных исходов.

Проследив за каждой стрелкой схемы, мы видим все восемь возможных исходов. В предпоследнем столбце схемы эти исходы записаны кратко: цифра означает номер бросания, а буква — исход этого бросания. Так, например, запись 1ч; 2б; 3ч означает, что в первом бросании появилась черная грань, во втором бросании — белая, в третьем — опять черная. В последнем столбце выписаны вероятности каждого из этих восьми исходов. Эти вероятности легко подсчитываются по правилу умножения вероятностей.

В составленной выше таблице мы различаем, например, случаи 1б, 2б, 3ч и 1ч, 2б, 3б; в обоих этих случаях один раз выпала черная грань и два раза белая, только в первом случае черная грань появилась при третьем бросании, а во втором случае — при первом. Обычно в конкретных задачах такого типа нас интересует только общее количество появлений белой грани и общее количество появлений черной грани, а порядок появлений безразличен.

С этой точки зрения восемь рассмотренных случаев разбиваются на четыре группы:

$$б = 3, ч = 0; б = 2, ч = 1; б = 1, ч = 2; б = 0, ч = 3^*).$$

Эти обозначения понятны:  $б = 2, ч = 1$  означает группу, состоящую из всех случаев, в которых два раза выпала белая грань и один раз черная. (Порядок выпадения безразличен.) Составим таблицу, в которой выписаны все эти группы, все случаи, на которые распадается каждая группа, вероятности каждого случая и вероятности каждой группы.

Для того чтобы подсчитать вероятность группы, заметим следующее.

Если какая-нибудь группа событий объединяет несколько несовместных случаев, то вероятность группы, т. е. вероятность того, что произойдет какой-либо один из этих случаев, равна сумме вероятностей независимых случаев, составляющих группу. Поясним сказанное примером. Пусть мы бросаем кубик, у которого есть белые, черные и красные грани, причем вероятности появления граней этих цветов соответственно равны

$$w_б, w_ч, w_к \quad (w_б + w_ч + w_к = 1).$$

Рассмотрим группу событий, состоящую в том, что появилась либо белая, либо черная грань. Вероятность этой группы обозначим через  $w_{б+ч}$ . Найдем  $w_{б+ч}$ .

Так как  $w_б = \frac{N_б}{N}$ ,  $w_ч = \frac{N_ч}{N}$ , то  $N_б = w_б \cdot N$ ,  $N_ч = w_ч \cdot N$ , где  $N$  — общее число бросаний кубика. Ясно, что  $w_{б+ч} = \frac{N_б + N_ч}{N} = \frac{w_б \cdot N + w_ч \cdot N}{N} = w_б + w_ч$ . Итак,  $w_{б+ч} = w_б + w_ч$ .

\*) Если опыт состоит в бросании кубика  $n$  раз, то  $2^n$  случаев разбиваются на  $n+1$  группу

$$б = n, ч = 0; б = n-1, ч = 1; б = n-2, ч = 2; \dots; б = 0, ч = n.$$

Теперь приводим таблицу, о которой шла речь выше.

Группа	Случай	Вероятность случая	Вероятность группы
$b=3, c=0$	1б; 2б; 3б	$\alpha^3$	$\alpha^3$
$b=2, c=1$	1б; 2б; 3ч	$\alpha^2\beta$	$3\alpha^2\beta$
	1б; 2ч; 3б	$\alpha^2\beta$	
	1ч; 2б; 3б	$\alpha^2\beta$	
$b=1, c=2$	1б; 2ч; 3ч	$\alpha\beta^2$	$3\alpha\beta^2$
	1ч; 2б; 3ч	$\alpha\beta^2$	
	1ч; 2ч; 3б	$\alpha\beta^2$	
$b=0, c=3$	1ч; 2ч; 3ч	$\beta^3$	$\beta^3$

Нетрудно убедиться, что при  $n$ -кратном бросании кубика вероятность появления  $m$  белых и  $k$  черных граней ( $m+k=n$ ) при заданном законе чередования белых и черных граней равна  $\alpha^m\beta^k$ . Группа  $b=m, c=k$  включает в себя все случаи, в которых выпало  $m$  белых и  $k$  черных граней с различным порядком чередования белых и черных граней.

Вероятность группы  $b=m, c=k$  равна тому члену разложения бинома Ньютона

$$(\alpha + \beta)^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta + \frac{n!}{(n-2)!2!}\alpha^{n-2}\beta^2 + \dots + \beta^n,$$

который содержит множитель  $\alpha^m\beta^k$ , т. е. равна  $\frac{n!}{m!k!}\alpha^m\beta^k$ .

В самом деле, что представляет собой коэффициент при  $\alpha^m\beta^k$  в разложении  $(\alpha + \beta)^n$  по формуле бинома Ньютона? Это число способов, которыми можно набрать  $m$  множителей  $\alpha$  и  $k$  множителей  $\beta$ , раскрывая скобки в произведении

$$\underbrace{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)(\alpha + \beta) \dots (\alpha + \beta)}_{n \text{ раз}}$$

Точно так же число случаев в группе есть число способов, которыми можно осуществить  $m$  белых граней и  $k$  черных граней, чередуя в различном порядке белые и черные грани. Следовательно, коэффициент при  $\alpha^m\beta^k$  в разложении  $(\alpha + \beta)^n$  по биному Ньютона равен числу случаев в группе. Вероятность каждого определенного случая  $b=m, c=k$  равна согласно правилу умножения вероятностей  $\alpha^m\beta^k$ . Поэтому вероятность группы равна соответствующему члену разложения по биному Ньютона.

Ясно, что сумма вероятностей всех групп должна быть равна 1, так как все группы охватывают все возможные случаи. Проверим это.

Так как  $\alpha + \beta = 1$ , то  $(\alpha + \beta)^n = 1$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)^n &= \alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta + \frac{n!}{(n-2)!2!} \alpha^{n-2}\beta^2 + \dots + \beta^n = \\
 &= w(\beta = n, \quad \text{ч} = 0) + w(\beta = n-1, \quad \text{ч} = 1) + \\
 &\quad + w(\beta = n-2, \quad \text{ч} = 2) + \dots + w(\beta = 0, \quad \text{ч} = n)^*).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$w(\beta = n, \quad \text{ч} = 0) + w(\beta = n-1, \quad \text{ч} = 1) + \dots + w(\beta = 0, \quad \text{ч} = n) = 1.$$

### Упражнения

1. Какова вероятность, что при двукратном бросании монеты она оба раза ляжет гербом вверх.
2. Монета брошена три раза. Какова вероятность, что все три раза монета ляжет гербом вверх; два раза вверх гербом и один раз вверх решкой?
3. Четыре грани кубика окрашены в черный цвет, а две — в белый. Какова вероятность, что при двукратном бросании выпадут оба раза белые грани; оба раза черные грани; один раз белая, другой раз черная грань?
4. Кубик предыдущей задачи бросают три раза. Какова вероятность того, что два раза появится белая грань и один раз черная; два раза черная и один раз белая?
5. Производится стрельба по мишени. При каждом выстреле вероятность попасть равна 0,1, а вероятность промахнуться равна 0,9. Произведено два выстрела. Какова вероятность того, что будет одно попадание и один промах?
6. В условиях упражнения 5 произведено три выстрела. Какова вероятность того, что среди них одно попадание и два промаха; два попадания и один промах?
7. Производится стрельба, описанная в упражнении 5. Какова вероятность попасть в мишень один раз, если сделано четыре выстрела; если сделано пять выстрелов?

## § 3. Анализ результатов многих испытаний

В предыдущем параграфе получены общие формулы для случая  $n$  одинаковых испытаний, в каждом из которых возможны два различных исхода с вероятностями  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.

При небольших значениях числа испытаний  $n$  эти формулы достаточно просты и наглядны.

Однако если  $n$  велико, то формулы перестают быть наглядными. Поэтому необходимо проделать дополнительную работу для того, чтобы записать эти формулы в удобном и наглядном виде. Только после такой работы, подобной извлечению драгоценного камня из породы <sup>\*)</sup> и шлифовке его, результаты станут яркими, запоминающимися, зовущими к дальнейшим обобщениям.

<sup>\*)</sup> Запись  $w(\beta = m, \quad \text{ч} = k)$  означает вероятность той группы, в которой белая грань появляется  $m$  раз, а черная  $k$  раз.

<sup>\*\*)</sup> «Наука та же добыча радия — в грамм добыча, в год труды, изводишь единой формулы ради тысячу тонн словесной руды», мог бы сказать Маяковский.

Рассмотрим сначала простейший случай  $\alpha = \beta = 1/2$ , соответствующий, например, бросанию монеты или бросанию кубика с тремя белыми и тремя черными гранями.

Возьмем, например,  $n = 100$ . Ясно, что вероятность получить при ста бросаниях монеты все 100 раз герб (или все 100 раз решку) весьма мала. Согласно результатам § 2 она равна  $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}} \approx$

$\approx \frac{1}{10^{30}}$ . Если машина производит 100 бросаний монеты в секунду, то потребуетсѧ в среднем  $10^{28}$  сек  $\approx 3 \cdot 10^{20}$  лет, чтобы получить один такой случай, когда 100 раз подряд выпадет герб. Ясно, что в подавляющем большинстве случаев в результате ста бросаний выпадет примерно 50 раз герб и 50 раз решка. Но совершенно не очевидно, какова вероятность того, что в ста бросаниях получится точно 50 раз герб и точно 50 раз решка. Неясно, какова вероятность исхода, отличного от среднего. Например, какова вероятность, что выпадет 55 гербов и 45 решек или 60 гербов и 40 решек?

Постараемся ответить на поставленные вопросы.

Прежде всего заметим, что вероятность каждого определенного случая появления 50 решек и 50 гербов, например, когда в первом бросании появляется герб, во втором—решка, затем опять герб, потом опять решка и т. д. (герб и решка появляются по очереди), равна  $\frac{1}{2^{100}} \approx \frac{1}{10^{30}}$ , как было установлено в § 2, т. е. эта вероятность равна вероятности появления герба 100 раз подряд. Значительно большая вероятность появления 50 гербов и 50 решек (в любом порядке) происходит за счет того, что это событие, эта «группа», как мы говорили в § 2, состоит из очень большого числа различных случаев разного чередования гербов и решек.

В § 2 мы выяснили, что эта вероятность равна

$$\frac{n!}{m! k!} \alpha^m \beta^k,$$

где  $\alpha$ —вероятность герба,  $\beta$ —вероятность решки,  $n$ —число бросаний,  $m$ —число появлений герба,  $k$ —число появлений решки ( $m + k = n$ ). Будем рассматривать четное  $n$  (в нашем конкретном примере  $n = 100$ ). Тогда нас интересует появление  $\frac{n}{2}$  решек и  $\frac{n}{2}$  гербов.

Поэтому

$$\frac{n!}{m! k!} = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2},$$

а вероятность интересующего нас события есть

$$w\left(r = \frac{n}{2}, p = \frac{n}{2}\right) = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

При больших  $n$  это выражение крайне неудобно для вычислений. Упростим его, используя приближенную формулу Стирлинга для выражения  $n!$  (см. § III.3).

По формуле Стирлинга  $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ ,  $\left(\frac{n}{2}\right)! = \sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$ , поэтому получаем

$$w\left(r = \frac{n}{2}, p = \frac{n}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

В частности, для  $n = 100$  находим  $w = \sqrt{\frac{2}{100\pi}} \approx 0,08$ . Вероятность появления 50 гербов и 50 решек в определенном порядке равна приблизительно  $10^{-30}$ . Поэтому число различных случаев, в которых в различном порядке осуществляется одинаковый результат, равно

$$\frac{0,08}{10^{-30}} = 8 \cdot 10^{28}.$$

Теперь постараемся научиться определять вероятность исхода испытания, мало отличающегося от наиболее вероятного. (В рассматриваемом примере наиболее вероятный исход — 50 решек и 50 гербов.) Обозначим через  $\delta$  отклонение исхода от наиболее вероятного,  $\delta = m - \frac{n}{2}$ . Так, например,  $\delta = 5$  соответствуют 55 гербов, 45 решек,  $\delta = -5$  соответствуют 45 гербов, 55 решек,  $\delta = 3$  соответствуют 53 герба, 47 решек и т. д. Вероятность соответствующего исхода испытания обозначим через  $w(\delta)$ . Наиболее вероятному результату соответствует  $\delta = 0$ , так что

$$w(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}. \quad (1)$$

Подсчитаем вероятность  $w(\delta)$ . Эта вероятность появления  $m = \frac{n}{2} + \delta$  гербов и  $k = \frac{n}{2} - \delta$  решек, поэтому она равна

$$w(\delta) = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2} + \delta\right)! \left(\frac{n}{2} - \delta\right)!} \alpha^{\frac{n}{2} + \delta} \beta^{\frac{n}{2} - \delta}, \text{ где } \alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$w(\delta) = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2} + \delta\right)! \left(\frac{n}{2} - \delta\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Увеличим теперь  $\delta$  на единицу, т. е. подсчитаем  $w(\delta + 1)$ , получим

$$w(\delta + 1) = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2} + \delta + 1\right)! \left(\frac{n}{2} - \delta - 1\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Поэтому

$$\frac{w(\delta+1)}{w(\delta)} = \frac{\left(\frac{n}{2} + \delta\right)! \left(\frac{n}{2} - \delta\right)!}{\left(\frac{n}{2} + \delta + 1\right)! \left(\frac{n}{2} - \delta - 1\right)!}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{2} + \delta + 1\right)! &= \left(\frac{n}{2} + \delta + 1\right) \left(\frac{n}{2} + \delta\right)!, \\ \left(\frac{n}{2} - \delta\right)! &= \left(\frac{n}{2} - \delta\right) \left(\frac{n}{2} - \delta - 1\right)!, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{w(\delta+1)}{w(\delta)} = \frac{\frac{n}{2} - \delta}{\frac{n}{2} + \delta + 1} = \frac{1 - \frac{2\delta}{n}}{1 + \frac{2(\delta+1)}{n}}.$$

Логарифмируя правую и левую части, находим

$$\ln w(\delta+1) - \ln w(\delta) = \ln \left(1 - \frac{2\delta}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{2(\delta+1)}{n}\right). \quad (2)$$

Мы рассматриваем большое число опытов  $n$  и предполагаем, кроме того, что величина  $\delta \ll \frac{n}{2}$ , т. е. мы изучаем малые отклонения от наиболее вероятного результата. Поэтому величины  $\frac{2\delta}{n}$  и  $\frac{2(\delta+1)}{n}$  малые и, следовательно, логарифмы, стоящие справа в (2), можно разложить в ряд. Выполним это разложение, ограничиваясь первыми членами ряда. Получим

$$\ln \left(1 - \frac{2\delta}{n}\right) = -\frac{2\delta}{n}, \quad \ln \left(1 + \frac{2(\delta+1)}{n}\right) = \frac{2(\delta+1)}{n}.$$

Формула (2) принимает вид

$$\ln w(\delta+1) - \ln w(\delta) = -\frac{4\left(\delta + \frac{1}{2}\right)}{n}.$$

Заметим, что  $\ln w(\delta+1) - \ln w(\delta)$  можно приближенно заменить на значение производной функции  $\ln w(z)$ , вычисленной в середине промежутка, т. е. при значении аргумента, равном  $\delta + \frac{1}{2}$ , так что

$$\ln w(\delta+1) - \ln w(\delta) = \frac{d}{d\delta} \left[ \ln w \left( \delta + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Конечно,  $w\left(\delta + \frac{1}{2}\right)$  — это уже не вероятность того, что отклонение числа гербов от наиболее вероятного станет равным  $\delta + \frac{1}{2}$ , так как это отклонение обязательно целое; это результат интер-

поляции (§ II.1) функции  $w(\delta)$  с целых значений аргумента на полуцелые. Итак,

$$\frac{d}{d\delta} \left[ \ln w \left( \delta + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{4 \left( \delta + \frac{1}{2} \right)}{n}.$$

Положим здесь  $\delta + \frac{1}{2} = z$ , тогда  $d\delta = dz$ , получим

$$\frac{d}{dz} \ln w(z) = -\frac{4z}{n}.$$

Проинтегрируем это соотношение от  $z=0$  до  $z=\delta$ , получим  $\ln w(\delta) - \ln w(0) = -\frac{2\delta^2}{n}$ , или, потенцируя,

$$w(\delta) = w(0) e^{-\frac{2\delta^2}{n}}.$$

Используя (1), находим окончательно

$$w(\delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{2\delta^2}{n}}. \quad (3)$$

Легко убедиться, что результат согласуется с требованием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(\delta) d\delta = 1. \quad (4)$$

Зная вид зависимости  $w \propto e^{-2\delta^2/n}$ , можно было определить  $w(0)$ , не пользуясь формулой Стирлинга, из условия (4). В действительности  $\delta$  является целым числом и меняется лишь в пределах  $-\frac{n}{2} \leq \delta \leq \frac{n}{2}$ , но  $w(\delta)$  при большом  $n$  меняется столь медленно и на краях так мало, что мы не вносим заметной ошибки, заменяя сумму интегралом и интегрируя от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

График зависимости  $w$  от  $\delta$ —это график как раз такого типа, который был рассмотрен в § VI.1 в связи с определением дельта-функции. При  $n=2$  получается график  $y_{(2)}(x)$ , показанный на рис. 68, а при других  $n$  график  $y_{(2)}(x)$  надо сжать в  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  раз к оси абсцисс и растянуть в  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  раз от оси ординат. Кривая, соответствующая формуле (3), называется кривой распределения вероятностей. Она имеет характерный колоколообразный вид. Из формулы (3) видно, что  $w(-\delta) = w(\delta)$ . Этого следовало ожидать: вероятность появления 55 гербов и 45 решек ( $\delta=5$ ) равна вероятности появления 45 гербов и 55 решек.

\*) С помощью аналогичных рассуждений, обозначив  $f(n) = \ln(n!)$  и исходя из равенства  $f(n+1) - f(n) = \ln(n+1)$ , можно вывести саму формулу Стирлинга, с точностью до постоянного множителя. (Прodelайте это!)



Пользуясь формулой (3), находим для случая  $n=100$ , когда, как мы знаем,  $w(0)=0,08$ :

$$w(1) = w(0) \cdot e^{-0,02} = 0,98w(0),$$

$$w(2) = w(0) \cdot e^{-0,08} = 0,92w(0),$$

$$w(5) = w(0) \cdot e^{-0,5} = 0,61w(0),$$

$$w(10) = w(0) \cdot e^{-2} = 0,14w(0),$$

$$w(20) = w(0) \cdot e^{-8} = 0,00034w(0).$$

Условимся называть ожидаемыми такие исходы испытания, для которых  $\frac{1}{e} w(0) \leq w(\delta) \leq w(0)$ . Случаи с меньшей вероятностью будут осуществляться редко. Таким образом, ожидаемыми являются события, для которых  $-\delta_1 \leq \delta \leq \delta_1$ , где  $\delta_1$  определяется из условия

$w(\delta_1) = \frac{1}{e} w(0)$  (рис. 187). Последнее дает  $w(0) \cdot e^{-\frac{2\delta_1^2}{n}} = \frac{1}{e} w(0)$ ,

или  $\frac{2\delta_1^2}{n} = 1$ , откуда окончательно

$\delta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2n}$ . Следовательно, ожидаемы такие исходы, в которых

$$-\frac{1}{2} \sqrt{2n} \leq \delta \leq \frac{1}{2} \sqrt{2n}.$$

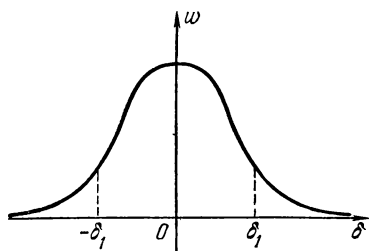


Рис. 187.

В нашем примере наиболее вероятен исход, соответствующий  $\delta=0$  (50 гербов и 50 решек).

Однако вероятность его невелика,

она равна 0,08 и ненамного больше вероятности близких исходов. Например, вероятность получить 51 герб и 49 решек (или 49 гербов и 51 решку) почти такая же, а именно  $0,98 \cdot 0,08 = 0,078$ .

Значительно меньше вероятность получить 57 гербов и 43 решки (или 43 герба и 57 решек). Эта вероятность равна  $\frac{0,08}{e} = 0,029$ .

Поэтому можно считать ожидаемым получение результата с числом гербов в пределах от 43 до 57, т. е.  $50 \pm \delta$ , где  $0 \leq \delta \leq \delta_1 = 7$ .

Величина  $\delta_1$  пропорциональна  $\sqrt{n}$ , поэтому чем больше  $n$ , тем шире границы для ожидаемого исхода. Так, например, для  $n=10\,000$  получаем  $\delta_1 = \frac{\sqrt{20\,000}}{2} \approx 70$ , так что следует ожидать результата с числом гербов от 4930 до 5070. Однако доля числа  $\delta_1$  по отношению к числу опытов  $n$  убывает с ростом  $n$ , так как величина  $\frac{\delta_1}{n}$  пропорциональна  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , т. е. тем меньше, чем больше  $n$ .

Пусть мы хотим, бросая монету, установить опытным путем вероятность появления герба. При этом мы заранее не знаем, не является ли монета погнутой, ввиду чего одна ее сторона выпадает чаще, чем другая. Пусть на самом деле монета ровная, и вероятность появления герба  $w_r = 0,5$ .

Проделав 100 бросаний, мы скорее всего получим от 43 до 57 гербов, т. е. получим  $0,43 \leq w_r \leq 0,57$ . Ошибка в определении вероятности будет не более 0,07 в ту или другую сторону. Значит, получив, например, из ста бросаний 44 решки и 56 гербов, не следует делать заключения о большей вероятности герба, — для этого недостаточно точен опыт, отклонение от 50 лежит, как говорят, в пределах статистической ошибки. Можно сказать лишь, что вероятность выпадания герба лежит в пределах  $w = 0,56 \pm 0,07$ , т. е. между 0,49 и 0,63;  $0,49 \leq w \leq 0,63$ ;  $w = 0,50$  отнюдь не исключено. Для уточнения нужно увеличить число бросаний. Проделав 10 000 бросаний, мы скорее всего получим от 4930 до 5070 гербов, т. е. получим  $0,4930 \leq w_2 \leq 0,5070$ . В этом случае ошибка в определении вероятности будет не более 0,007 в ту или другую сторону. Ясно, что ошибка  $\frac{\delta_1}{n}$  в определении вероятности пропорциональна  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Поэтому для того, чтобы уменьшить в 10 раз ошибку в определении вероятности, надо в 100 раз увеличить число опытов.

Формула (3) получена в предположении, что  $\delta$  мал. Поэтому можно ожидать, что при больших  $\delta$  эта формула дает значительные ошибки. Подсчитаем, например, для случая  $n = 100$  вероятность  $w(50)$ , т. е. вероятность того, что все 100 раз получится герб и ни одного раза не выпадет решка. По формуле (3) находим

$$w(50) = w(0) e^{-\frac{2 \cdot 50^2}{100}} = 0,08 \cdot e^{-50} \approx 10^{-23}.$$

С другой стороны, мы уже вычисляли эту вероятность по точной формуле и нашли, что она равна  $10^{-30}$ . Таким образом, приближенная формула (3) действительно при больших  $\delta$  дает значительные ошибки. Однако ошибки эти маловажны, так как при больших  $\delta$  сами значения вероятностей ничтожны.

Какова вероятность  $w_{\text{ок}}$  получить какой-нибудь из ожидаемых результатов, т. е. такой результат, для которого  $\delta$  заключена в пределах от  $-\delta_1$  до  $+\delta_1$ ? Очевидно, что эта вероятность равна

$$w_{\text{ок}} = \int_{-\delta_1}^{+\delta_1} w(\delta) d\delta$$

или, пользуясь (3),

$$w_{\text{ок}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \int_{-\frac{1}{2} \sqrt{2n}}^{+\frac{1}{2} \sqrt{2n}} e^{-\frac{2\delta^2}{n}} d\delta.$$

В последнем интеграле выполним замену переменной по формуле

$$\delta = \frac{t\sqrt{n}}{2} \left( t = \frac{2\delta}{\sqrt{n}} \right),$$

тогда  $d\delta = \frac{\sqrt{n}}{2} dt$ . Интеграл будет в пределах от  $-t_1$  до  $+t_1$ , где

$$t_1 = \frac{2\delta_1}{\sqrt{n}} = 2 \frac{\sqrt{2n}}{2\sqrt{n}} = \sqrt{2}.$$

Поэтому

$$w_{\text{ож}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\sqrt{n}}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для функции  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  (она называется *интегралом вероятностей*) составлены таблицы. Таблица приведена в конце главы. Пользуясь таблицей, находим

$$w_{\text{ож}} = \Phi(\sqrt{2}) = \Phi(1,414) = 0,842.$$

Следовательно, те случаи, которые мы назвали ожидаемыми\*), составляют 84% всевозможных исходов испытания, а на долю всех остальных случаев приходится лишь 16%.

В некоторых задачах представляет интерес вероятность получить результат, для которого величина  $\delta$  не превосходит данного  $\delta_0$ . Эта

$$\text{вероятность } w = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \int_{-\infty}^{\delta_0} e^{-\frac{2\delta^2}{n}} d\delta.$$

Выполнив замену переменной, такую же, как в предыдущем случае, получим

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ где } t_0 = \frac{2\delta_0}{\sqrt{n}},$$

так что

$$w(\delta < \delta_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(t_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{2\delta_0}{\sqrt{n}}\right),$$

где  $\Phi$  см. в таблице.

Рассмотрим теперь случай  $\alpha \neq \beta$ . Если производится  $n$  бросаний кубика, причем вероятность появления в отдельном бросании белой

\*) Ясно, что выражение «ожидаемое» применяется здесь в условном смысле, поскольку вероятность получить не «ожидаемый» результат (вряд ли его можно назвать «неожиданным») не так мала, равна 16% при принятом определении.

грани равна  $\alpha$ , а черной  $\beta$ , то вероятность появления  $m$  белых и  $k$  черных граней ( $m+k=n$ ) согласно § 2 есть  $w = \frac{n!}{m!k!} \alpha^m \beta^k$ .

Найдем максимум  $w$  в зависимости от  $m$ . Нам удобнее искать не максимум  $w$ , а максимум  $\ln w$ . (Ясно, что  $w$  и  $\ln w$  достигают максимума при одном и том же значении  $m$ .) Имеем  $\ln w = \ln n! - \ln m! - \ln k! + m \ln \alpha + k \ln \beta$ , или, вспоминая, что  $k = n - m$ , получаем

$$\ln w = \ln n! - \ln m! - \ln (n-m)! + m \ln \alpha + (n-m) \ln \beta.$$

Будем считать, что число бросаний  $n$  фиксировано, а потому  $\ln w$  зависит только от  $m$ . Найдем производную  $\frac{d \ln w}{dm}$ , не смущаясь тем, что по смыслу задачи величина  $m$  принимает лишь целые значения. Получим

$$\frac{d \ln w}{dm} = -\frac{d \ln m!}{dm} - \frac{d \ln (n-m)!}{dm} + \ln \alpha - \ln \beta.$$

Первое слагаемое в правой части вычислим так:

$$\frac{d \ln m!}{dm} = \frac{\ln (m+1)! - \ln m!}{(m+1) - m} = \ln (m+1) = \ln m + \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Так как при большом числе опытов  $n$  число  $m$  чаще всего также будет большим, то величиной  $\ln \left(1 + \frac{1}{m}\right) \approx \frac{1}{m}$  пренебрегаем по сравнению с  $\ln m$ . Следовательно,

$$\frac{d \ln m!}{dm} = \ln m.$$

Поэтому

$$\frac{d \ln w}{dm} = -\ln m + \ln (n-m) + \ln \alpha - \ln \beta = \ln \frac{\alpha (n-m)}{m\beta}. \quad (5)$$

Условие максимума — равенство нулю производной дает

$$\ln \frac{\alpha (n-m)}{m\beta} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\alpha}{\beta} \frac{n-m}{m} = 1,$$

наконец,

$$\frac{m}{n-m} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Последний результат легко понять: наиболее вероятен такой исход опыта, при котором число белых ( $m$ ) так относится к числу черных ( $n-m$ ), как вероятность получения в одном отдельном опыте белого ( $\alpha$ ) относится к вероятности получения в одном отдельном опыте черного ( $\beta$ ).

Из последнего соотношения находим  $m\beta = \alpha(n-m)$ , откуда  $m(\alpha + \beta) = \alpha n$ . Так как  $\alpha + \beta = 1$ , то отсюда  $m = \alpha n$ . Следовательно,

$k = n - m = n(1 - \alpha) = n\beta$ . Итак, наиболее вероятен исход, при котором  $\alpha n$  раз выпадет белая грань и  $\beta n$  раз — черная \*).

Обозначим вероятность этого исхода через  $w(n\alpha)$ . Тогда

$$w(n\alpha) = \frac{n!}{(\alpha n)! (\beta n)!} \alpha^{n\alpha} \beta^{n\beta}. \quad (6)$$

По формуле Стирлинга получаем

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n; \quad (\alpha n)! = \sqrt{2\pi n\alpha} \left(\frac{\alpha n}{e}\right)^{\alpha n}, \\ (\beta n)! = \sqrt{2\pi n\beta} \left(\frac{\beta n}{e}\right)^{\beta n},$$

поэтому

$$\frac{n!}{(\alpha n)! (\beta n)!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha\beta}} \frac{1}{\alpha^{n\alpha}} \frac{1}{\beta^{n\beta}}.$$

Пользуясь формулой (6), находим

$$w(n\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha\beta}}. \quad (7)$$

Поставим задачу — определить вероятность исхода, мало отклоняющегося от наиболее вероятного. Более точно, найдем вероятность того, что число белых граней будет равно  $m = n\alpha + \delta$ , где  $\delta$  невелико по сравнению с  $n$ .

Будем исходить из формулы (5), в которой полагаем  $m = n\alpha + \delta$ ,  $dm = d\delta$ . Тогда (5) принимает вид

$$\frac{d \ln w(n\alpha + \delta)}{d\delta} = \ln \frac{\alpha(\beta n - \delta)}{(\alpha n + \delta)\beta}.$$

Преобразуем правую часть следующим образом:

$$\ln \frac{\alpha(\beta n - \delta)}{(\alpha n + \delta)\beta} = \ln \frac{\alpha\beta n \left(1 - \frac{\delta}{\beta n}\right)}{\alpha n \left(1 + \frac{\delta}{\alpha n}\right)\beta} = \ln \left(1 - \frac{\delta}{n\beta}\right) - \ln \left(1 + \frac{\delta}{n\alpha}\right).$$

Так как величины  $\frac{\delta}{n\beta}$  и  $\frac{\delta}{n\alpha}$  малы по сравнению с единицей, то можно положить

$$\ln \left(1 - \frac{\delta}{n\beta}\right) = -\frac{\delta}{n\beta}, \quad \ln \left(1 + \frac{\delta}{n\alpha}\right) = \frac{\delta}{n\alpha},$$

откуда получаем

$$\frac{d \ln w(n\alpha + \delta)}{d\delta} = -\frac{\delta}{n\beta} - \frac{\delta}{n\alpha} = -\frac{\delta}{n\alpha\beta}.$$

---

\*) Заметим, что числа  $\alpha n$  и  $\beta n$  могут оказаться нецелыми. Тогда наиболее вероятное число появлений белой грани принимаем равным целому числу, ближайшему к  $\alpha n$ .

Итак,

$$\frac{d \ln w(n\alpha + \delta)}{d\delta} = -\frac{\delta}{n\alpha\beta}.$$

Интегрируя последнее равенство от 0 до  $\delta$ , находим

$$\ln w(n\alpha + \delta) - \ln w(n\alpha) = -\frac{\delta^2}{2n\alpha\beta},$$

откуда

$$w(n\alpha + \delta) = w(n\alpha) e^{-\frac{\delta^2}{2n\alpha\beta}}.$$

Вспоминая, что  $w(n\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\beta n}}$ , получаем окончательно

$$w(n\alpha + \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\beta n}} e^{-\frac{\delta^2}{2\alpha\beta n}}. \quad (8)$$

Это и есть вероятность исхода, в котором число белых граней отличается на  $\delta$  от наиболее вероятного.

Будем снова условно называть ожидаемыми такие исходы, для которых  $\frac{1}{e} w(n\alpha) \leq w(n\alpha + \delta) \leq w(n\alpha)$ , т. е. для которых  $-\delta_1 \leq \delta \leq \delta_1$ , где  $\delta_1$  определяется из условия  $w(n\alpha + \delta_1) = \frac{1}{e} w(n\alpha)$ . Пользуясь (7) и (8), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\beta n}} e^{-\frac{\delta_1^2}{2\alpha\beta n}} = \frac{1}{e \sqrt{2\pi\alpha\beta n}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\delta_1^2}{2\alpha\beta n} = 1,$$

окончательно  $\delta_1 = \sqrt{2\alpha\beta n}$ .

Пользуясь (8), легко проверить, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} w(n\alpha + \delta) d\delta = 1$ . Легко проверить также, что при  $\alpha = \beta = 1/2$  мы получаем формулы, выведенные в начале этого параграфа.

### Упражнения

1. Монета брошена 1000 раз. Какова вероятность получить ровно 500 раз герб; ровно 510 раз герб?

2. Монета брошена 1000 раз. Какова вероятность получить при этом не менее 500 гербов; не менее 510 гербов?

3. Произведено 100 выстрелов, причем вероятность попадания равна 0,1, а вероятность промаха равна 0,9. Какова вероятность того, что цель будет поражена ровно 10 раз; ровно 8 раз?

4. Какова в условиях упражнения 3 вероятность того, что цель будет поражена не менее 8 раз; не менее 10 раз; не менее 12 раз?

5. По цели выпущено 1000 снарядов, причем вероятность попадания равна 0,01. Какова вероятность того, что хотя бы 8 снарядов поразили цель; 11 снарядов поразили цель?

## § 4. Энтропия

Итак, мы видели, что диапазон ожидаемых исходов пропорционален  $\sqrt{n}$ , тогда как диапазон всех мыслимых исходов равен  $n$ . При нашем определении ожидаемых исходов, когда требовалось, чтобы их вероятность была больше  $\frac{1}{e}$  от максимальной, они составляют при большом числе испытаний 84% от всех исходов. Можно было бы задаться другим определением ожидаемых исходов, например, заменив коэффициент  $\frac{1}{e}$  на 0,001; тогда бы мы получили, что  $\delta_1$  всё равно пропорционально  $\sqrt{n}$  (с другим коэффициентом пропорциональности), а ожидаемые исходы составляют уже около 99,98% от всех и т. д. В то же время интервал ожидаемых исходов при очень больших  $n$  составляет лишь ничтожную часть интервала всех мыслимых исходов, так как

$$\frac{\sqrt{n}}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Этот закон, согласно которому значения *случайной величины* (в данном примере число появлений белой грани) при достаточно большом числе испытаний с как угодно высокой относительной точностью группируются вокруг ее наиболее вероятного среднего значения, имеет многие важные приложения в физике. При этом обычно пользуются принципом, согласно которому взамен большого числа испытаний над единичным объектом можно провести одно испытание над *статистическим массивом*, т. е. системой из большого числа одинаковых объектов. Например, вместо многократного бросания одного кубика можно рассматривать одновременное бросание многих кубиков, при этом число выпавших белых граней будет подчиняться тому же закону, т. е. так же концентрироваться вокруг наиболее вероятного значения.

Рассмотрим сначала простой мысленный пример. Пусть имеется колода из огромного количества  $N$  (например,  $N = 10^{12}$ ) карт, среди которых  $\alpha N$  красных и  $\beta N$  черных ( $\alpha + \beta = 1$ ). Карты одного цвета мы не будем различать друг от друга. Если считать состоянием колоды порядок расположения в ней красных и черных карт, то легко понять, что общее число  $\Omega = \Omega(N, \alpha)$  возможных состояний равно числу сочетаний из  $N$  элементов по  $\alpha N$ , т. е.

$$\Omega = \frac{N!}{(\alpha N)! (\beta N)!}.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга, получим (см. вычисления на стр. 476)

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \alpha \beta}} \frac{1}{\alpha^{\alpha N}} \frac{1}{\beta^{\beta N}}.$$

Мы видели, что далеко не все эти состояния равновероятны. Например, легко подсчитать вероятность того, что при  $N=10^{12}$ ,  $\alpha=0,5$  средняя плотность красных карт в первых  $10^{10}$  картах больше чем на 1% превысит (при добросовестном тасовании) среднюю плотность их во всей колоде, равную 0,5. Так как  $10^{10}$  составляет лишь небольшую часть от  $10^{12}$ , то можно принять, что несколько повышенная частота появления красных карт в этой первой части колоды не меняет вероятности 0,5 каждой следующей карте оказаться красной. Значит, искомая вероятность равна рассмотренной в § 3 вероятности того, что при  $10^{10}$ -кратном бросании монеты герб выпадет  $\geq 1,01 \cdot 0,5 \cdot 10^{10} = (0,5 \cdot 10^{10} + 0,5 \cdot 10^8)$  раз. В силу формулы (3) искомая вероятность равна

$$\int_{0,5 \cdot 10^8}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot 10^{10}}} e^{-2\delta^2 \cdot 10^{-10}} d\delta = \int_{10^8}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} [1 - \Phi(10^8)].$$

(Здесь мы положили  $2 \cdot 10^{-8} \delta = t$ .)

Для таких больших значений аргумента значения интеграла вероятностей в нашей таблице отсутствуют, но с помощью метода, описанного на стр. 65, легко получить, что при больших  $x$

$$1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x^2/2}.$$

Поэтому искомая вероятность равна  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 10^{-8} e^{-10^8/2} \approx 10^{-2 \cdot 10^8}$ . Это число невообразимо мало. Можно быть уверенным, что если колода тасуется и проверяется миллиарды раз в секунду в течение всего времени существования солнечной системы, то описанное повышение средней плотности красных карт в первой части колоды ни разу не представится. Состояние колоды должно быть таким, что любой ее участок, состоящий из весьма большого числа  $n$  карт, содержит примерно  $\alpha n$  красных и  $\beta n$  черных карт с диапазоном ошибки порядка  $\sqrt{n}$ . Конечно, при небольшом  $n$ , например  $n=10$  или 100, средняя плотность красных карт в таком участке может оказаться существенно отличной от  $\alpha$ , т. е. эта плотность может иметь *локальные флуктуации*.

Назовем *энтропией* рассматриваемой колоды число  $S = \ln \Omega$ , т. е. логарифм числа ее возможных состояний. Из предыдущего мы получаем

$$S \approx \alpha N \ln \frac{1}{\alpha} + \beta N \ln \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} \ln (2\pi\alpha\beta N) \approx N \left( \alpha \ln \frac{1}{\alpha} + \beta \ln \frac{1}{\beta} \right),$$

причем в правой части мы пренебрегли членом порядка  $\ln N \ll N$ . Энтропия в расчете на отдельную карту равна  $\frac{S}{N} = \alpha \ln \frac{1}{\alpha} + \beta \ln \frac{1}{\beta}$ .



Представим себе теперь две колоды с характеристиками  $N_1, \alpha_1$  и  $N_2, \alpha_2$  соответственно, причем между этими колодами обмен картами невозможен. Такая система имеет  $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$  возможных состояний (любое состояние первой колоды комбинируется с любым состоянием второй колоды), откуда соответствующая энтропия

$$S = \ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2 = S_1 + S_2,$$

т. е. энтропия системы из нескольких не взаимодействующих компонент равна сумме энтропий этих компонент. Если же эти две колоды перетасовываются совместно, то они составляют одну общую колоду с числом карт  $N = N_1 + N_2$ , из них красных  $\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 = \alpha N$ , где  $\alpha = \frac{\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2}{N}$ . Соответствующая энтропия равна

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= N \left( \alpha \ln \frac{1}{\alpha} + \beta \ln \frac{1}{\beta} \right) = \\ &= (\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2) \ln \frac{N}{\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2} + (\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2) \ln \frac{N}{\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что при  $\alpha_2 = \alpha_1$  (и, следовательно,  $\beta_2 = \beta_1$ ) будет  $\tilde{S} = S$ ; это ясно и из того, что при  $\alpha_2 = \alpha_1$  взаимодействие между колодами, т. е. их совместное перетасовывание ничего нового не дает. Если же  $\alpha_2 \neq \alpha_1$ , то, как мы сейчас проверим, обязательно  $\tilde{S} > S$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \tilde{S} - S &= (\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2) \ln \frac{N}{\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2} + (\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2) \ln \frac{N}{\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2} - \\ &- N_1 \left( \alpha_1 \ln \frac{1}{\alpha_1} + \beta_1 \ln \frac{1}{\beta_1} \right) - N_2 \left( \alpha_2 \ln \frac{1}{\alpha_2} + \beta_2 \ln \frac{1}{\beta_2} \right). \end{aligned}$$

Если считать  $N_1, N_2$  и  $\alpha_1$  заданными, а  $\alpha_2$  переменным и учесть, что  $\beta_2 = 1 - \alpha_2$ , то легко непосредственно подсчитать, что

$$\begin{aligned} \frac{d(\tilde{S} - S)}{d\alpha_2} &= N_2 \ln \frac{(\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2) \alpha_2}{(\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2) \beta_2}, \\ \frac{d^2(\tilde{S} - S)}{(d\alpha_2)^2} &= \frac{\alpha_1 N_1 N_2}{\alpha_2 (\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2)} + \frac{\beta_1 N_1 N_2}{\beta_2 (\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2)}. \end{aligned}$$

При  $\alpha_2 = \alpha_1$  получается  $\tilde{S} - S = 0$ ,  $\frac{d(\tilde{S} - S)}{d\alpha_2} = 0$ , а так как из выражения второй производной вытекает, что она положительна при всех  $\alpha_2$ , а потому график зависимости  $\tilde{S} - S$  от  $\alpha_2$  выпуклый книзу, то при  $\alpha_2 \neq \alpha_1$  будет  $\tilde{S} - S > 0$ , т. е.  $\tilde{S} > S$ , что и утверждалось.

Если представить себе, что две колоды с характеристиками  $N_1, \alpha_1$  и  $N_2, \alpha_2$  приложены друг к другу, но из-за их большого объема производится лишь «локальное перетасовывание» сравнительно небольших участков объединенной колоды, то при  $\alpha_2 > \alpha_1$  по мере такого перетасовывания будет происходить постепенное «диффунди-

равнение» красных карт из второй колоды в первую, средняя плотность красных карт будет постепенно выравниваться. Поставив в любой момент этого процесса перегородку между первыми  $N_1$  и последними  $N_2$  картами, мы можем остановить диффузию и подсчитать энтропию в промежуточном состоянии после такого разделения. По мере выравнивания средней плотности красных карт эта энтропия возрастает.

После выравнивания энтропия остается практически постоянной. Конечно, из-за постоянного перемешивания можно представить себе, что в одной части колоды средняя плотность красных карт станет существенно больше, чем во второй. Однако выше мы показали, что при большом числе карт вероятность такого события невообразимо мала. Таким образом, процесс возрастания энтропии является *необратимым*.

Рассмотренная колода является простейшей моделью статистической физической системы. Эта модель одномерна (карты расположены в ряд), а каждая карта могла быть всего в двух состояниях — быть красной или черной. (Для объекта, который может быть в несколь-

ких состояниях с вероятностями  $p_i$ , энтропия в расчете на один экземпляр получается равной  $\sum_i p_i \ln \frac{1}{p_i}$ .) Аналогичные свойства имеют

более сложные реальные статистические системы, например система молекул газа, содержащегося в определенном объеме.

Согласно квантовой механике, каждому значению энергии  $E$  отвечает определенное, весьма большое число  $\Omega$  квантовых состояний рассматриваемой системы, внутренняя энергия которой не превосходит  $E$ . Чтобы представить себе порядок этого числа, воспользуемся доказываемой в квантовой механике приближенной оценкой числа  $\Omega_1$  состояний отдельной молекулы в объеме  $V$ , импульс которой не превосходит некоторого значения  $p$ :  $\Omega_1 = p^3 V / 6\pi^2 \hbar^3$  ( $\hbar \approx 10^{-27}$  эрг·сек — постоянная Планка). Средний импульс одной молекулы связан с температурой  $\tau$  газа формулой  $p = \sqrt{3k m \tau}$ , где  $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/град — постоянная Больцмана, а  $m$  — масса молекулы, равная  $\frac{\mu}{N_0}$ , где  $\mu$  — молекулярный вес, а  $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$  (число Авогадро) — число молекул в грамм-молекуле газа. Для кислорода ( $\mu = 32$ ) в  $1 \text{ л} = 10^3 \text{ см}^3$  при  $\tau = 0^\circ \text{C} = 273^\circ \text{K}$  получаем

$$\Omega_1 = \left( 3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{32}{6,02 \cdot 10^{23}} \cdot 273 \right)^{3/2} \cdot 10^3 / 6\pi^2 (10^{-27})^3 \approx 2,5 \cdot 10^{20}.$$

Однако в  $1 \text{ л}$  газа при нормальных условиях содержится около  $N = 3 \cdot 10^{22}$  молекул. Поэтому за общее число всех квантовых состояний такой порции кислорода можно приближенно принять

$$\Omega = \Omega_1^N = (2,5 \cdot 10^{20})^{3 \cdot 10^{22}} \approx 10^{10^{24}},$$

Это число невообразимо велико. Впрочем, как будет видно из дальнейшего, реально в расчеты входит не само оно, а его логарифм (который тоже очень велик) и даже, более того, разность значений этого логарифма для системы в различных условиях.

Величина  $S = k \ln \Omega$  называется энтропией системы; здесь  $k$  — принципиально несущественный коэффициент пропорциональности, равный постоянной Больцмана. Появление этого коэффициента объясняется тем, что понятие энтропии было первоначально введено из других соображений, в связи с изучением тепловых процессов. Поэтому единица измерения энтропии выбирается такой, чтобы она сохраняла то же значение, что и в термодинамике. Другими словами, коэффициент  $k$  дает возможность получать температуру не в эргах, а в градусах.

При изменении  $E$  меняется и  $\Omega$ , а потому и  $S$ , причем в случае неизменного объема газа отношение  $\frac{dE}{dS} = \tau$  называется его *температурой*. При совместном рассмотрении двух систем  $a$  и  $b$ , пока они не взаимодействуют, для общей системы будет  $\Omega = \Omega_a \Omega_b$ , а потому  $S = S_a + S_b$ . Если системы могут обмениваться энергией, но в остальном независимы (порции газа разделены тонкой перегородкой), то сохраняются те же соотношения, но участвующие величины будут меняться с течением времени. Если система в целом изолирована от окружающей среды, то энергия сохраняется,  $E = E_a + E_b = \text{const}$ , откуда  $\dot{E}_a + \dot{E}_b = 0$ , где точкой обозначена производная по времени. Отсюда

$$\dot{S} = \dot{S}_a + \dot{S}_b = \frac{1}{\tau_a} \dot{E}_a + \frac{1}{\tau_b} \dot{E}_b = \left( \frac{1}{\tau_a} - \frac{1}{\tau_b} \right) \dot{E}_a.$$

Значит, при  $\tau_a = \tau_b$  будет  $\dot{S} = 0$ , при равных температурах взаимодействующих порций газа энтропия не меняется. Если же температура системы  $a$  меньше температуры системы  $b$ ,  $\tau_a < \tau_b$ , то  $\dot{E}_a > 0$  и  $\dot{S} > 0$ , т. е. система  $a$  приобретает энергию от системы  $b$ , энтропия общей системы возрастает. Аналогичное возрастание энтропии будет и в случае  $\tau_a > \tau_b$ . Этот процесс перекачки энергии и возрастания энтропии продолжается до выравнивания температур. После этого энтропия практически остается постоянной. Логически возможен случай, когда из-за обмена энергиями в какой-то момент температура одной части системы снова станет выше температуры другой ее части, однако это еще неизмеримо менее вероятно, чем разобранное выше изменение плотности красных карт. Впрочем, в весьма малых порциях газа возможны флуктуации температур и связанных с ними скоростей частиц: эти флуктуации можно наблюдать на известном явлении броуновского движения.

Так как энтропия статистической системы может лишь возрастать или оставаться постоянной, то процессы, при которых энтропия возрастает, являются необратимыми. Эти процессы становятся

невозможными, если, засняв их на кинопленку, прокручивать ленту в обратном направлении. (Такой способ обращения необратимого процесса был применен при съемке фильма «Веселые ребята» для показа стада коров, выстраивающихся по команде пастуха — Леонида Утесова: коров выстроили в шеренгу, сняли, как они разбежались, а затем заснятую пленку вклеили в обратном направлении.) Математически обращение процесса сводится к замене времени  $t$  на  $-t$ . Таким образом, если закон развития процесса записан в виде линейного дифференциального уравнения, не содержащего явно времени  $t$ , то условие обратимости заключается в наличии в этом уравнении производных по  $t$  только четного порядка. Это можно проиллюстрировать на примере линейного осциллятора, рассмотренного в § VII.3: в уравнении (VII.21) член  $\hbar \frac{dy}{dt}$  отвечал силе трения в системе, а наличие трения приводит к диссипации энергии и тем самым к необратимости процесса.

В заключение отметим, что закон неубывания энтропии — так называемый второй закон термодинамики — имеет вероятностный характер и в конечном счете связан с тем, что каждое состояние встречается в природе тем чаще, чем оно вероятнее. Другими словами, процессы, связанные с убыванием энтропии, реально не наблюдаются не из-за их логической, формальной противоречивости, а из-за их крайне малой вероятности.

## § 5. Радиоактивный распад. Формула Пуассона

Рассмотрим явление радиоактивного распада. Как известно (см., например, ВМ, § V.3), вероятность того, что один отдельный атом распадается на весьма малое время  $t_1$ , равна  $\omega t_1$ ; вероятность того, что за это время распада не произойдет, равна  $1 - \omega t_1$ . (Здесь  $\omega$  — постоянная, характеризующая данное радиоактивное вещество.)

Рассмотрим большой промежуток времени  $t$ . Найдем вероятность  $\omega(t)$  того, что в течение этого промежутка времени распада не произойдет. Для этого разобьем весь промежуток  $t$  на малые промежутки длительности  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Вероятность того, что распад не произошел за промежуток  $t_i$ , равна

$$1 - \omega t_i.$$

Вероятность  $\omega(t)$  равна произведению вероятностей того, что распад не произошел ни за один из промежутков времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Поэтому

$$\omega(t) = (1 - \omega t_1) \cdot (1 - \omega t_2) \cdot \dots \cdot (1 - \omega t_n).$$

Рассмотрим  $\ln \omega(t)$ . Ясно, что

$$\ln \omega(t) = \ln(1 - \omega t_1) + \ln(1 - \omega t_2) + \dots + \ln(1 - \omega t_n).$$

Так как величины  $\omega t_1, \omega t_2, \dots, \omega t_n$  малы по сравнению с 1, то логарифмы, стоящие справа, можно разложить в ряд. Ограничиваясь первым членом разложения, находим

$$\ln w(t) = -\omega t_1 - \omega t_2 - \dots - \omega t_n = -\omega t.$$

Потенцируя, получаем

$$w(t) = e^{-\omega t}.$$

Таким образом, мы получили хорошо известный результат: отношение числа атомов, не распавшихся за время  $t$ , к первоначальному числу атомов есть  $e^{-\omega t}$ .

Вероятность того, что атом не распадается за время  $t$ , обозначим через  $\beta$ , тогда  $\beta = e^{-\omega t}$ . Вероятность  $\alpha$  того, что за время  $t$  атом распадается, есть  $\alpha = 1 - e^{-\omega t}$ .

Если имеется  $n$  атомов, то вероятность  $w(m; n)$  того, что  $m$  из них распадется, а  $k = n - m$  не распадется, выражается формулой

$$w(m; n) = \frac{n!}{m! k!} \alpha^m \beta^k, \quad (9)$$

где  $\alpha = 1 - e^{-\omega t}$ ,  $\beta = e^{-\omega t}$  (см. § 2).

Рассмотрим важный частный случай: пусть общее число радиоактивных атомов  $n$  весьма велико, а вероятность распада за время  $t$  весьма мала, так что наиболее вероятное число распадов за промежуток времени  $t$  — конечное число. Обозначим его через  $\mu$ , тогда  $\mu = \alpha n$ , как было установлено в § 3.

Итак, нас интересует, какой вид примет формула (9), если  $n$  неограниченно увеличивается,  $\alpha$  неограниченно приближается к нулю, а их произведение  $\alpha n = \mu$  (как и  $m$ ) остается конечным числом.

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим множитель } \frac{n! \alpha^m}{k!} &= \frac{n! \alpha^m}{(n-m)!}; \text{ запишем его так:} \\ \frac{n! \alpha^m}{(n-m)!} &= n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) \cdot \alpha^m = \\ &= (n\alpha)(n\alpha - \alpha)(n\alpha - 2\alpha) \dots [n\alpha - (m-1)\alpha] = \\ &= \mu(\mu - \alpha)(\mu - 2\alpha) \dots [\mu - (m-1)\alpha]. \end{aligned}$$

Поэтому для весьма больших  $n$  при зафиксированном  $m$  будет

$$\frac{n! \alpha^m}{(n-m)!} \approx \mu^m.$$

Теперь рассмотрим величину  $\beta^k = \beta^{n-m} = (1-\alpha)^{n-m}$ . Так как  $\alpha$  — весьма малая величина, то  $\beta$  близка к единице. Однако показатель степени  $n-m$  велик, поэтому, заменив  $\beta^{n-m}$  на 1, мы можем допустить значительную ошибку.

Поступим следующим образом:

$$\beta^{n-m} = (1-\alpha)^{n-m} = \frac{(1-\alpha)^n}{(1-\alpha)^m} \approx (1-\alpha)^n,$$

так как величина  $(1-\alpha)^n$  близка к 1. Вспоминая, что  $n\alpha = \mu$ , находим

$$(1-\alpha)^n = \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-\frac{n}{\mu}}\right]^{-\mu} \approx e^{-\mu},$$

так как величина  $\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-\frac{n}{\mu}}$  тем ближе к  $e$ , чем больше  $n$ .

Окончательно из (9) при  $n \rightarrow \infty$  находим

$$w(m; n) = w_\mu(m; n) \rightarrow w_\mu(m) = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}. \quad (10)$$

Новое обозначение  $w_\mu(m)$  означает вероятность наблюдать  $m$  распадов, если наиболее вероятное число распадов есть  $\mu$ , а число атомов  $n$  весьма велико, так что число распадов составляет малую долю числа атомов.

Закон, выражаемый формулой (10), называется *распределением Пуассона*.

Убедимся, что сумма вероятностей  $w_\mu(m)$  для всех значений  $m$  равна 1, т. е. что

$$\sum_{m=0}^{\infty} w_\mu(m) = 1.$$

В самом деле,

$$\sum_{m=0}^{\infty} w_\mu(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^m}{m!} = e^{-\mu} \cdot e^{\mu} = 1.$$

Распределение Пуассона показывает, какова вероятность наблюдать  $m$  распадов, если наиболее вероятное число распадов есть  $\mu$ , причем отдельные распады независимы, т. е. тот факт, что уже получено некоторое число распадов, не меняет вероятности получить еще распад (для этого мы оговорили, что общее число радиоактивных атомов  $n$  велико, так что  $\mu \ll n$ ,  $m \ll n$ ).

В отличие от задач предыдущих параграфов, здесь общее число распадов никак не ограничено. В предыдущих параграфах мы рассматривали случаи, когда продельвается определенное, хотя, может быть, и очень большое, число опытов  $n$ . Это число  $n$  мы задавали, и оно входило в окончательные результаты. В этом параграфе  $n$  (число атомов или, что то же самое, число опытов, причем опыт состоит в испытании—распадется атом или нет) предполагается неограниченным. Следовательно, неограниченно и число актов распада. В принципе возможно, хотя и маловероятно, наблюдать любое, сколь угодно большое число распадов при одном и том же наиболее вероятном числе распадов  $\mu$ .

Если  $\mu$  мал, а именно  $\mu \ll 1$ , то, пользуясь (10), находим, что вероятность не наблюдать ни одного распада равна  $e^{-\mu} \approx 1 - \mu$ ,

т. е. весьма близка к единице. Вероятность наблюдать один распад значительно меньше, а именно  $\mu \cdot e^{-\mu} \approx \mu(1-\mu) \approx \mu$ . Вероятности наблюдать два, три и т. д. распадов убывают очень быстро (эти вероятности равны  $\mu^2/2$ ,  $\mu^3/6$  и т. д.).

Если  $\mu$  велико, то наиболее вероятно наблюдать  $\mu$  распадов. Действительно, найдем, при каком  $m$  ( $\mu$  постоянно!) величина  $w_\mu(m)$  имеет максимум. Удобнее искать максимум  $\ln w_\mu(m)$ . Так как  $\ln w_\mu(m) = -\mu + m \ln \mu - \ln m!$ , то

$$\frac{d \ln w_\mu(m)}{dm} = \ln \mu - \frac{d}{dm}(\ln m!) = \ln \mu - \ln m$$

(см. § 3). Поэтому равенство  $\frac{d \ln w_\mu(m)}{dm} = 0$  дает  $m = \mu$ .

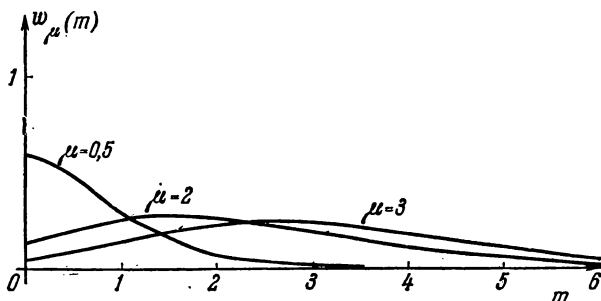


Рис. 188.

На рис. 188 представлены диаграммы распределения Пуассона для случаев  $\mu = 0,5$ ;  $\mu = 2$ ;  $\mu = 3$ . Нужно заметить, что рис. 188, в сущности, сделан не точно: ведь на самом деле величина  $w$  задана только для целых значений  $m$ , так что кривая, дающая  $w(m)$  при всех  $m$ , т. е., в частности, и при дробных  $m$ , не имеет смысла. Следовало бы для каждого  $\mu$  дать частоты величин  $w_\mu(0)$ ,  $w_\mu(1)$ ,  $w_\mu(2)$  и т. д., изображаемых вертикальными отрезками, опирающимися на целые точки на оси абсцисс. Кривая  $w_\mu(m)$  проходит через вершины этих отрезков.

Вид функции  $w_\mu(m)$  при больших  $\mu$  будет описан в § 8.

#### Упражнения

1. Сделайте вывод о максимуме  $w_\mu(m)$  при данном  $\mu$ , рассматривая отношение  $w_\mu(m)$  к  $w_\mu(m-1)$ .

2. Пусть некоторая величина  $x$  может принимать в результате испытания значения  $x_1, \dots, x_n$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_n$ . Докажите, что среднее значение  $x$  этой величины в одном испытании равно  $x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$ . Опираясь на это, докажите, что среднее значение  $m$  числа распадов за время  $t$  как раз равно  $\mu$ .

### § 6. Другой вывод распределения Пуассона

Дадим теперь другой вывод распределения Пуассона, исходя из соображений, отличных от тех, которыми мы пользовались в § 5. Представим себе большое число приборов (счетчиков), каждый из которых регистрирует распады в одинаковых образцах, содержащих долгоживущее радиоактивное вещество.

Для удобства вычислений будем считать, что в среднем в единицу времени в каждом образце происходит один распад. Тогда за время  $t$  в среднем в каждом образце произошло  $t$  распадов. Обозначим через  $x_0$  число счетчиков, которые не зарегистрировали ни одного распада ( $m=0$ ), через  $x_1$  — число счетчиков, которые зарегистрировали по одному распаду ( $m=1$ ), через  $x_2$  — число счетчиков, которые зарегистрировали по два распада ( $m=2$ ), и т. д. Ясно, что величины  $x_0, x_1, x_2 \dots$  зависят от времени, прошедшего с начала опыта. Пусть в определенный момент времени  $t$  известны величины  $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \dots$ , т. е. известно количество счетчиков, зарегистрировавших 0, 1, 2, ... распадов.

Как изменятся эти количества счетчиков, когда пройдет малый промежуток времени  $dt$ ?

В любой группе из  $n$  счетчиков за единицу времени произойдет  $n$  распадов, а за время  $dt$  произойдет  $ndt$  распадов. Значит, в этой группе  $ndt$  счетчиков зарегистрируют по одному распаду.

Рассмотрим группу счетчиков, не зарегистрировавших ни одного распада. В  $x_0(t) dt$  из этих счетчиков произойдет по одному распаду, и эти счетчики перейдут в другую группу, а именно в группу  $x_1$ . Поэтому число счетчиков, не зарегистрировавших ни одного распада по истечении промежутка времени  $t+dt$ , есть

$$x_0(t+dt) = x_0(t) - x_0(t) dt.$$

Отсюда

$$x_0(t+dt) - x_0(t) = -x_0(t) dt, \quad \text{или} \quad \frac{dx_0}{dt} = -x_0.$$

Рассмотрим группу  $x_1(t)$ . Аналогично предыдущему,  $x_1(t) dt$  из этих счетчиков перейдут в группу  $x_2$ , однако в рассматриваемую группу перейдут  $x_0(t) dt$  счетчиков из группы  $x_0$ . Поэтому

$$x_1(t+dt) = x_1(t) - x_1(t) dt + x_0(t) dt,$$

откуда

$$\frac{dx_1}{dt} = x_0 - x_1.$$

Продолжая эти рассуждения, мы приходим к цепочке дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -x_0, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_0 - x_1, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



Ясно, что в начальный момент времени  $t=0$  будет  $x_0=N$ , где  $N$ —полное число счетчиков,  $x_1=x_2=x_3=\dots=0$ . Уравнения (11) легко решаются одно за другим (см. § VII.2). Получаем

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= Ne^{-t}, \\ x_1 &= Nte^{-t}, \\ x_2 &= N\frac{t^2}{2}e^{-t}, \\ x_3 &= N\frac{t^3}{3!}e^{-t}, \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$

Пусть прошло  $\mu$  единиц времени после начала процесса. За это время в каждом образце в среднем произошло  $\mu$  распадов, а в каждом счетчике группы  $m$ , численность которой равна  $x_m(\mu) = N\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}$ , произошло по  $m$  распадов. Поэтому вероятность того, что в наудачу взятом счетчике наблюдалось  $m$  распадов, равна отношению числа счетчиков группы  $x_m(\mu)$  к общему числу счетчиков, т. е.

$$w_\mu(m) = \frac{x_m(\mu)}{N} = \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}.$$

Мы получили тот же результат, что и в § 5.

### Упражнение

Рассмотрите следующее обобщение разобранной задачи. Пусть некоторый объект может быть в состояниях  $\dots, C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, \dots$ , причем в момент  $t=0$  он находился в состоянии  $C_0$ , а за время  $dt$  он переходит с вероятностью  $\omega dt$  в следующее состояние и с вероятностью  $\alpha dt$ —в предыдущее. Укажите систему уравнений, которой удовлетворяют вероятности  $p_i(t)$  находиться в момент  $t$  в состоянии  $C_i$ , найдите приближенные выражения для  $p_i(t)$  по методу последовательных приближений, найдите среднее значение номера состояния в момент  $t$ . При каких значениях  $\alpha$  и  $\omega$  получается разобранная в основном тексте задача?

## § 7. Непрерывно распределенные величины

Обратимся к задаче о рыбной ловле, которая была поставлена в § 1.

Пусть вероятность вытащить рыбу, вес которой заключен в пределах от  $p$  до  $p+dp$ , равна  $f(p)dp$  (\*). Функция  $f(p)$  называется *функцией распределения вероятностей*. Она удовлетворяет условию  $\int_0^{+\infty} f(p)dp = 1$ , так как этот интеграл есть сумма вероятностей всех возможных произойти событий.

\*) Мы считаем, что вытаскивание пустого крючка—это вылавливание рыбы весом  $p=0$ ; см, грустные шутки по этому поводу на стр. 461.

Заметим, что на самом деле в любом водоеме нет рыб, вес которых больше некоторого числа  $P$ . Однако мы ставим верхний предел интегрирования не  $P$ , а  $+\infty$ . Это можно делать, взяв функцию  $f(p)$  равной 0 при  $p > P$  или, во всяком случае, быстро убывающей при возрастании  $p$  и со столь малыми значениями при  $p > P$ , что на величину интеграла эти значения практически не влияют \*).

Важно отметить следующее. Мы считаем, что в процессе ловли вылавливается лишь весьма малая часть всей рыбы, имеющейся в водоеме. Поэтому вероятность выловить рыбу, вес которой заключен в пределах от  $p$  до  $p + dp$ , не зависит от того, сколько рыб и какого веса уже поймано. Говоря другими словами, функция  $f(p)$  не зависит от того, какие рыбы были уже пойманы. Эта функция характеризует данный достаточно большой водоем.

Поставим прежде всего следующую задачу. Пусть было выловлено большое число  $n$  рыб (точнее, крючок вынут  $n$  раз). Каков будет средний вес одной выловленной рыбы? Вероятность поймать рыбу, вес которой лежит в пределах от  $p$  до  $p + dp$ , где  $dp$  малое, равна  $f(p)dp$ . Поэтому из общего числа  $n$  в  $n \cdot f(p)dp$  случаях будет поймана рыба веса  $p$  \*\*). Вес всех таких рыб равен  $p \cdot n f(p) dp$ . Интегрируя последнее выражение по всем  $p$ , т. е. от  $p=0$  до  $p=+\infty$ , мы получим общий вес улова после  $n$  забросов крючка

$$P_n = n \int_0^{\infty} p f(p) dp.$$

Разделив общий вес улова  $P_n$  на число  $n$  забросов крючка, мы получим средний вес рыбы в расчете на один заброс крючка

$$\bar{p}_1 = \frac{P_n}{n} = \int_0^{\infty} p f(p) dp. \quad (12)$$

Теперь поставим более сложную задачу. Пусть выловлено  $n$  рыб. Вероятность, что при этом общий вес улова будет заключен в границах от  $p$  до  $p + dp$ , есть  $F_n(p) dp$ . Функция  $F_n(p)$  является функцией распределения по весу улова, состоящего из  $n$  рыб. Поставим

\*) В других задачах рассматриваемая величина (в данном случае это вес рыбы) может принимать и отрицательные значения. В этом случае  $f(p)$

удовлетворяет условию  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(p) dp = 1$ .

\*\*) Точнее говоря, рыба, вес которой весьма близок к  $p$ , а именно находится в интервале  $dp$  около  $p$ . Заметьте, что для величины, меняющейся непрерывно, которая не обязана принимать определенные целые (в общем случае — дискретные) значения, бессмысленно спрашивать, какова вероятность того, что величина примет точно определенное значение: эта вероятность, очевидно, равна нулю. Имеет смысл только вероятность попасть в определенный интервал — и эта вероятность пропорциональна длине интервала, когда интервал мал.

задачу найти эту функцию. Для этого прежде всего составим уравнение, связывающее величины  $F_{n+1}(p)$  и  $F_n(p)$ .

Пусть после  $n$  вытаскиваний получилось распределение  $F_n(p)$ . Каким образом после  $n+1$  вытаскиваний может получиться общий вес улова, лежащий в пределах от  $p$  до  $p+dp$ ?

Если вес последней  $(n+1)$ -й рыбы лежит в пределах от  $\mu$  до  $\mu+d\mu$ , где  $d\mu$  гораздо меньше, чем  $dp$ , то для того, чтобы сумма весов  $n$  рыб и  $(n+1)$ -й рыбы попала в заданные границы от  $p$  до  $p+dp$ , нужно, чтобы вес  $n$  рыб лежал в пределах от  $p-\mu$  до  $p+dp-\mu$  (при этом мы пренебрегаем малой величиной  $d\mu$ ).

Вероятность выловить  $(n+1)$ -ю рыбу весом от  $\mu$  до  $\mu+d\mu$  равна, как мы знаем,  $f(\mu) d\mu$ . Вероятность того, что вес  $n$  первых рыб лежит в пределах от  $p-\mu$  до  $p-\mu+dp$ , равна  $F_n(p-\mu) dp$ .

Вероятность события, состоящего в том, что вес первых  $n$  рыб оказался в указанных пределах и вес  $(n+1)$ -й рыбы оказался также в указанных пределах, равна произведению вероятностей этих отдельных событий и, следовательно, равна

$$f(\mu) d\mu \cdot F_n(p-\mu) dp. \quad (13)$$

Заметим, что получить окончательно вес всех выловленных рыб, лежащий в указанных пределах, можно множеством способов, так как вес  $\mu$  последней рыбы может иметь всевозможные значения от 0 до  $+\infty$ . Поэтому общая вероятность того, что вес всех выловленных рыб лежит в указанных пределах, равна сумме выражений (13), записанных для различных значений  $\mu$ . При этом так как  $\mu$  принимает всевозможные значения, то вместо суммы появляется интеграл. Таким образом, эта вероятность есть

$$\int_0^{\infty} f(\mu) d\mu F_n(p-\mu) dp = dp \int_0^{\infty} f(\mu) F_n(p-\mu) d\mu. \quad (14)$$

Но, согласно определению, вероятность того, что общий вес  $n+1$  рыб лежит в пределах от  $p$  до  $p+dp$ , равна  $F_{n+1}(p) dp$ . Приравняв последнее выражение правой части (14) и сокращая на  $dp$ , получим

$$F_{n+1}(p) = \int_0^{\infty} f(\mu) F_n(p-\mu) d\mu. \quad (15)$$

Формула (15) дает возможность, зная функцию  $F_1(\mu) = f(\mu)$  (так как  $F_1(p)$  относится к случаю улова, состоящего из одной рыбы) и зная  $F_n$ , находить  $F_{n+1}(p)$ , т. е. переходить последовательно от индекса  $n$  к индексу  $n+1$  \*).

\* Фактически в формуле (15) выполняется интегрирование от 0 до  $p$ , так как  $F_n(p-\mu)$  при  $\mu > p$  равна нулю, и потому  $\mu$  может принимать значения только от 0 до  $p$ . Если взамен веса рыбы рассматривается величина, которая может принимать значения обоих знаков, то в формуле (15) интегрирование проводится от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Рассмотрим простейший пример.

Пусть  $f(p) = \frac{1}{q}$ , если  $0 < p < q$  и  $f(p) = 0$  при всех остальных значениях  $p$ . Это означает, что в водоеме нет рыб, вес которых больше  $q$ , а вероятность выловить любую рыбу, вес которой меньше  $q$ , одинакова; поэтому нет и «нулевых» рыб (в  $f(p)$  нет  $\delta$ -слагаемого). Средний вес выловленной рыбы равен

$$\bar{p}_1 = \int_0^q p \frac{1}{q} dp = \frac{q}{2}.$$

Ясно, что условие  $\int_0^\infty f(p) dp = 1$  выполняется. Действительно,

$$\int_0^\infty f(p) dp = \int_0^q f(p) dp = \int_0^q \frac{1}{q} dp = \frac{1}{q} \cdot q = 1.$$

Как было указано выше,  $F_1(p) = f(p)$ . Найдём  $F_2(p)$ . Пользуясь (15), получаем

$$F_2(p) = \int_0^\infty f(\mu) \cdot f(p - \mu) d\mu.$$

Так как  $f(\mu)$  отлична от нуля и при этом равна  $\frac{1}{q}$  только при  $0 < \mu < q$ , то  $F_2(p) = \int_0^q \frac{1}{q} f(p - \mu) d\mu$ . В последнем интеграле положим  $p - \mu = t$ , тогда  $dt = -d\mu$ ; получим

$$F_2(p) = -\frac{1}{q} \int_p^{p-q} f(t) dt = \frac{1}{q} \int_{p-q}^p f(t) dt.$$

Теперь рассмотрим отдельно случай  $0 < p < q$  и случай  $q < p < 2q$ . Если  $0 < p < q$ , то  $p - q < 0$ . Учитывая, что функция  $f(t)$  отлична от нуля (и при этом равна  $1/q$ ) лишь при  $0 < t < q$ , получаем

$$F_2(p) = \frac{1}{q} \int_0^p \frac{1}{q} dt = \frac{p}{q^2}.$$

Если же  $q < p < 2q$ , то интегрируем от  $p - q$  до  $q$ . Поэтому в этом случае  $F_2(p) = \frac{1}{q} \int_{p-q}^q \frac{1}{q} dt = \frac{2q-p}{q^2}$ . Таким образом,

$$F_2(p) = \begin{cases} \frac{p}{q^2}, & \text{если } 0 < p < q, \\ \frac{2q-p}{q^2}, & \text{если } q < p < 2q. \end{cases}$$

Отметим еще, что  $F_2(p) \equiv 0$ , если  $p < 0$  и если  $p > 2q$ , так как

вес улова не может быть отрицательным и вес улова, состоящего из двух рыб, не может быть больше  $2q$ , потому что в водоеме нет рыб, вес которых больше  $q$ . График функции  $F_2(p)$  изображен на

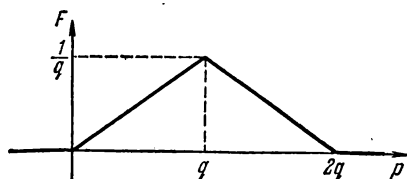


Рис. 189.

рис. 189. Предлагаем читателю получить функцию  $F_3(p)$  и построить ее график. (См. упражнение.)

Сообщим два простейших свойства функций  $F_n(p)$ .

$$1. \int_0^{\infty} F_n(p) dp = 1 \quad (\text{при лю-}$$

бом  $n$ ). Это свойство очевидно,

исходя из того, что  $F_n(p)$  есть функция распределения вероятностей. Читатель легко проверит, что это соотношение справедливо для функций  $F_2(p)$ ,  $F_3(p)$  предыдущего примера.

2. Обозначим через  $\bar{p}_{n+1}$  средний вес улова, состоящего из  $(n+1)$  рыб. Это надо понимать так. Пусть мы многократно производили забрасывание крючка  $(n+1)$  раз подряд, а затем подсчитали средний вес улова, состоящего из  $(n+1)$  рыб. Тогда  $\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_n + \bar{p}_1$ , т. е. средний вес улова из  $(n+1)$  рыб равен сумме среднего веса улова из  $n$  рыб и среднего веса улова, состоящего из одной рыбы. Поэтому  $\bar{p}_2 = \bar{p}_1 + \bar{p}_1 = 2\bar{p}_1$ ;  $\bar{p}_3 = \bar{p}_2 + \bar{p}_1 = 3\bar{p}_1$  и т. д., т. е.

$$\bar{p}_n = n\bar{p}_1. \quad (16)$$

Отметим в заключение несколько общих свойств случайных величин, т. е. величин, которые принимают определенные значения в результате «испытания». (Например, случайной величиной является вес рыбы, пойманной при испытании — вытягивании крючка.) Пусть имеются две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ ; обозначим через  $p$  и соответственно  $q$  возможные значения этих величин, а через  $f(p)$  и  $\varphi(q)$  — соответствующие функции распределения. Как мы видели, среднее значение  $\bar{\xi}$  (можно писать также  $\bar{p}$ ) величины  $\xi$  можно вычислить по формуле  $\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} pf(p) dp$ , аналогично выражается  $\bar{\eta}$ . Легко

доказать, что всегда

$$\overline{\xi + \eta} = \bar{\xi} + \bar{\eta}, \quad \overline{C\xi} = C\bar{\xi} \quad (C = \text{const}). \quad (17)$$

В самом деле, если обозначить через  $p_i$  и  $q_i$  значения величин  $\xi$  и  $\eta$  в  $i$ -м испытании, то при весьма большом числе  $N$  испытаний можно написать

$$\overline{\xi + \eta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p_i + q_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i = \bar{\xi} + \bar{\eta}.$$

Аналогично проверяется второе равенство (17).

Если величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то можно доказать также, что  $\overline{\xi\eta} = \overline{\xi} \cdot \overline{\eta}$ . В самом деле, вероятность того, что  $\xi$  примет значение между  $p$  и  $p + dp$ , а  $\eta$  — значение между  $q$  и  $q + dq$ , в силу условия независимости, равна  $f(p) dp \varphi(q) dq$ ; соответствующее же значение  $\xi\eta$  равно  $pq$ . Поэтому среднее значение  $\overline{\xi\eta}$  получается по формуле

$$\overline{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} pq [f(p) dp \varphi(q) dq] = \int_{-\infty}^{\infty} pf(p) dp \cdot \int_{-\infty}^{\infty} q\varphi(q) dq = \overline{\xi} \cdot \overline{\eta},$$

что и требовалось доказать.

Рассеяние величины  $\xi$  вокруг ее среднего значения характеризуется средним квадратом разности  $\Delta_{\xi}^2 = \overline{(\xi - \overline{\xi})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (p - \overline{\xi})^2 f(p) dp$ , который называется *дисперсией* величины  $\xi$ . (Заметим, что последний интеграл действительно есть положительное число, так как подынтегральная функция положительна.) Легко проверить, что дисперсия суммы независимых величин равна сумме их дисперсий:

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi+\eta}^2 &= \overline{[(\xi + \eta) - (\overline{\xi} + \overline{\eta})]^2} = \overline{[(\xi - \overline{\xi}) + (\eta - \overline{\eta})]^2} = \\ &= \overline{(\xi - \overline{\xi})^2} + 2 \overline{(\xi - \overline{\xi})(\eta - \overline{\eta})} + \overline{(\eta - \overline{\eta})^2} = \Delta_{\xi}^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + \Delta_{\eta}^2, \end{aligned}$$

так как  $\overline{(\xi - \overline{\xi})(\eta - \overline{\eta})} = \overline{\xi - \overline{\xi}} \cdot \overline{\eta - \overline{\eta}} = 0$ . Это свойство немедленно распространяется на сумму любого числа независимых случайных величин.

Отсюда, в частности, вытекает, что для суммы  $\xi$  из  $n$  независимых значений величины  $\xi_1$  дисперсия  $\Delta_n^2$  будет равна  $\Delta_n^2 = n\Delta_1^2$ .

### Упражнение

Найдите функцию  $F_3(p)$  для случая

$$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{если } 0 < p < q, \\ 0, & \text{если } p < 0 \text{ или } p > q. \end{cases}$$

Постройте график этой функции.

## § 8. Случай весьма большого числа испытаний

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о поведении функции  $F_n(p)$ , введенной в § 7, при весьма больших значениях  $n$ . При этом мы будем для простоты сначала взамен веса рыбы рассматривать какую-то величину  $\xi_1$ , среднее значение которой равно нулю; конечно, такая величина может принимать значения обоих знаков.  $F_n(p)$  — это функция распределения суммы  $n$  независимых значений величины  $\xi_1$ .

Будем исходить из полученной в § 7 формулы (15); однако, как было сказано в сноске на стр. 490, интеграл в этой формуле надо брать в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . Разложим  $F_n(p-\mu)$  в ряд по степеням  $\mu$ , ограничиваясь членом, содержащим  $\mu^2$ . Получим

$$F_n(p-\mu) = F_n(p) - \mu \frac{dF_n(p)}{dp} + \frac{1}{2} \mu^2 \frac{d^2 F_n(p)}{dp^2}. \quad (18)$$

Пользуясь этим разложением, из (15) находим

$$F_{n+1}(p) = F_n(p) \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) d\mu - \frac{dF_n(p)}{dp} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) \mu d\mu + \\ + \frac{1}{2} \frac{d^2 F_n(p)}{dp^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) \mu^2 d\mu. \quad (19)$$

Заметим, что  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) d\mu = 1$ , так как  $f(p)$  — функция распределения вероятностей. Кроме того,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) \mu d\mu = 0$ , так как в силу § 7 этот интеграл равен среднему значению величины  $\xi_1$ . Наконец, введем дисперсию  $\Delta_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 f(\mu) d\mu$  величины  $\xi_1$ .

Теперь формула (19) дает

$$F_{n+1}(p) = F_n(p) + \frac{1}{2} \Delta_1^2 \frac{d^2 F_n(p)}{dp^2}. \quad (20)$$

Будем теперь рассматривать  $F_n(p)$  как функцию двух переменных  $p$  и  $n$  и записывать  $F_n(p) = F(p; n)$ . При этом мы будем пользоваться частными производными как по  $p$ , так и по  $n$ , не смущаясь тем, что  $n$  принимает только целые значения, так как при больших  $n$  изменение  $n$  на одну единицу можно считать весьма малым по сравнению с  $n$ . Формулу (20) перепишем так:

$$F(p; n+1) = F(p; n) + \frac{1}{2} \Delta_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}. \quad (21)$$

Разложим теперь левую часть по формуле Тейлора, ограничиваясь двумя первыми членами, это даст

$$F(p; n+1) = F(p; n) + \frac{\partial F}{\partial n} \cdot 1. \quad (22)$$

Приравняв правые части (21) и (22), а затем отбрасывая слагаемое  $F(p; n)$ , приходим к основному уравнению для функции  $F$ :

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{1}{2} \Delta_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}. \quad (23)$$

Прежде чем указать решение этого уравнения, проведем дополнительное исследование функции  $F(p; n)$ , которое внесет большую ясность в применение формулы Тейлора. Рассмотрим график функции  $F(p; n) = F_n(p)$ , которая является функцией распределения случайной величины  $\xi$ . Так как  $\bar{\xi} = n\bar{\xi}_1 = 0$ , то центр тяжести графика при всех  $n$  расположен в начале координат. За ширину графика можно принять *среднее квадратичное уклонение*  $\Delta_n = \sqrt{\Delta_n^2}$ , имеющее ту же размерность, что  $\xi$ . Однако в конце § 7 мы показали, что  $\Delta_n^2 = n\Delta_1^2$ , т. е.  $\Delta_n = \sqrt{n}\Delta_1$ ; ширина графика имеет порядок  $\sqrt{n}$ . Но тогда из условия нормировки  $\int F dp = 1$  вытекает, что  $F \sim n^{-1/2}$ . Отсюда  $\frac{\partial F}{\partial n} \sim n^{-3/2}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \sim n^{-5/2}$  и т. д. А из оценки ширины графика вытекает, что

$$\frac{\partial F}{\partial p} \sim n^{-1/2} : \sqrt{n} = n^{-1}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \sim n^{-1} : \sqrt{n} = n^{-3/2} \text{ и т. д.}$$

Значит, разложения (21) и (22) доведены до членов одного асимптотического порядка, а потому уравнение (23) является асимптотически точным.

Любопытно, что асимптотический порядок ширины графика  $F_n$  можно было бы получить непосредственно из уравнения (23) с помощью дифференцирования по параметру под знаком интеграла (§ III.6) и интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \Delta_n^2 &= \frac{d}{dn} \int p^2 F_n(p) dp = \int p^2 \frac{\partial F}{\partial n} dp = \frac{1}{2} \Delta_1^2 \int p^2 \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} dp = \\ &= \frac{1}{2} \Delta_1^2 \left[ p^2 \frac{\partial F}{\partial p} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int 2p \frac{\partial F}{\partial p} dp \right] = -\Delta_1^2 \left[ pF \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int F dp \right] = \Delta_1^2. \end{aligned}$$

(При этом мы принимаем, что  $F \rightarrow 0$  достаточно быстро при  $p \rightarrow \pm \infty$ .) Отсюда  $\Delta_n^2 \sim n\Delta_1^2$ .

Не надо жалеть времени, потраченного на такой анализ. С одной стороны, попутно было получено еще без решения важное общее свойство  $F$ , а именно выражение  $\sqrt{n} \Delta_1$  ширины. Кроме того,— и это немаловажно,— повысилась Ваша бдительность. Вы лучше усвоили общее правило: чтобы вводить приближения (оставлять одни члены и отбрасывать другие в ряде Тейлора), нужно узнать о функции все, что возможно.

Обратимся к решению уравнения (23). Можно показать, что асимптотически при больших  $n$  решением уравнения (23) является функция  $F(p; n) = A \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-p^2/2n\Delta_1^2}$ , где  $A$ —любая постоянная. Мы

сообщаем это без вывода. Тот факт, что указанная функция удовлетворяет (23), нетрудно проверить, составляя  $\partial F/\partial n$ ,  $\partial^2 F/\partial p^2$  и подставляя полученные выражения в (23). Значение постоянной  $A$  выберем



из условия, чтобы выполнялось требование  $\int F dp = 1$ :

$$\frac{A}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/2n\Delta_1^2} dp = 1. \quad (24)$$

Выполним замену переменной  $p/\Delta_1 \sqrt{2n} = t$ ,  $dp/\Delta_1 \sqrt{2n} = dt$ . Тогда

$$\frac{A}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/2n\Delta_1^2} dp = A\Delta_1 \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = A \cdot \Delta_1 \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

Итак,  $A\Delta_1 \sqrt{2\pi} = 1$ , откуда  $A = 1/\Delta_1 \sqrt{2\pi}$ , и окончательно:

$$F(p; n) = \frac{1}{\Delta_1 \sqrt{2\pi n}} e^{-p^2/2n\Delta_1^2}. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь случай, когда среднее значение  $\bar{\xi}_1$  не обязательно равно нулю. Тогда обозначим  $\xi_1 - \bar{\xi}_1 = \xi'_1$ , откуда  $\xi_1 = \bar{\xi}_1 + \xi'_1$ , где  $\bar{\xi}'_1 = 0$ . Поэтому сумма  $\xi$  из  $n$  независимых значений величины  $\xi_1$  равна результату сложения постоянной  $n\bar{\xi}_1$  с суммой  $\xi'$  из  $n$  независимых значений величины  $\xi'_1$ . При большом  $n$  сумма  $\xi'$  имеет закон распределения (25). Но если к случайной величине прибавить постоянную, то соответствующая функция распределения просто сдвинется на эту постоянную, т. е. в результате мы получим функцию распределения

$$F(p; n) = \frac{1}{\Delta_1 \sqrt{2\pi n}} e^{-(p - n\bar{p}_1)^2/2n\Delta_1^2}, \quad (26)$$

где мы вернулись к обозначению § 7:  $\bar{p}_1$  вместо  $\bar{\xi}_1$ .

Можно было бы получить решение (26) непосредственно, минуя частный случай (25). Для этого нужно с помощью разложений (19) и (22) получить уравнение для функции  $F$ , уже не предполагая, что  $\bar{p}_1 = 0$ . Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -\bar{p}_1 \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{2} \Delta_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \quad (27)$$

(при  $\bar{p}_1 = 0$  оно переходит в уравнение (23)). После этого уже нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что функция (26) удовлетворяет уравнению (27).

На рис. 190 дан график  $F(p; n)$  для случая  $n=4$ ,  $\Delta_1=1$ ,  $\bar{p}_1=1$ ; для наглядности на осях выбраны разные масштабы.

Функция  $F(p; n)$  при каждом конкретном  $n$  представляет собой колоколообразную кривую, симметричную относительно вертикальной прямой, проходящей через точку максимума. Максимум получается, как видно из (26), при  $p = n\bar{p}_1$ , что совпадает с найденным в § 7

средним значением  $\bar{p}_n$ . Высота максимума есть  $1/\Delta_1 \sqrt{2\pi n}$ , т. е. пропорциональна  $1/\sqrt{n}$ , как было сказано выше. Таким образом, при увеличении  $n$  максимум смещается вправо.

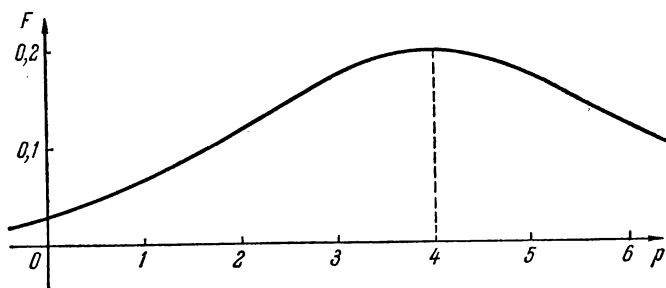


Рис. 190.

Определим ширину кривой, т. е. узнаем, насколько следует отступить от  $p_{\max} = \bar{p}_1$ , чтобы высота кривой уменьшилась в  $e$  раз по сравнению с максимальной. Для этого надо определить  $p$  из условия

$$\frac{1}{\Delta_1 \sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(p - \bar{p}_1)^2}{2n\Delta_1^2}} = \frac{1}{\Delta_1 \sqrt{2\pi n}} \frac{1}{e},$$

откуда  $\frac{(p - \bar{p}_1)^2}{2n\Delta_1^2} = 1$ , или  $p - \bar{p}_1 = \pm \Delta_1 \sqrt{2n}$ .

Таким образом,  $p - p_{\max} = \pm \Delta_1 \sqrt{2n}$ , т. е. ширина кривой пропорциональна  $\sqrt{n}$ , как указывалось выше. Естественно, что высота максимума обратно пропорциональна ширине кривой, как и должно быть при сохранении площади под кривой.

Отметим, что даже если по своему смыслу изучаемая величина принимает лишь положительные значения, то функция (26) дает отличные от нуля значения при  $p < 0$ , что, конечно, не соответствует действительности. Однако  $F(p; n)$  при  $p < 0$  настолько мало при сколько-нибудь больших  $n$ , что этот недостаток не имеет практического значения.

На рис. 191 показано, как точные кривые  $F(p; n)$ , полученные по формуле (15) и показанные сплошными линиями, сближаются с приближенными кривыми, полученными из формулы (26) при  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$  и показанными пунктиром \*). Эти рисунки соответствуют

\*) На рис. 191 было трудно показать, что  $F(p; 1)$  — функция разрывная — изображается ступенькой с вертикальным падением при  $p=1$ . Функция  $F(p; 2)$  изображается прямоугольным треугольником, лежащим на гипотенузе. Точки  $p=1$ ,  $F=1$  у  $F(p; 1)$  и  $F(p; 2)$  совпадают.

случаю

$$f(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < p < 1, \\ 0, & \text{если } p > 1 \end{cases} \quad (\text{см. пример § 7}).$$

Рассмотрим еще пример, когда случайная величина  $\xi_1$  может принимать лишь два значения: 1 с некоторой вероятностью  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) и 0 с вероятностью  $\beta = 1 - \alpha$ . Тогда сумму  $\xi$  из  $n$  независимых значений величины  $\xi_1$  можно истолковать как количество появлений некоторого события при  $n$  независимых испытаниях, если вероятность его появления при каждом испытании равна  $\alpha$ . Задача о вычислении

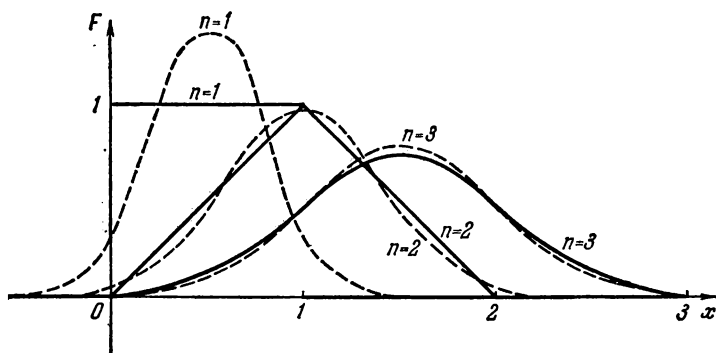


Рис. 191.

вероятности различных значений для  $\xi$  была решена в пп. 2 и 3. В п. 3 с помощью формулы Стирлинга мы показали (формула (8)), что для больших  $n$  вероятность того, чтобы  $\xi$  приняла некоторое целое значение  $n\alpha + \delta$  от 0 до  $n$ , равна

$$w(n\alpha + \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\beta n}} e^{-\delta^2/2\alpha\beta n}.$$

Так как при больших  $n$  расстояния между соседними возможными значениями величины  $\xi$  малы по сравнению с интервалом всех ее значений и даже с интервалом ее ожидаемых значений (см. § 3), то при таких  $n$  можно считать  $\xi$  непрерывной случайной величиной с плотностью распределения  $F(p; n)$ . Тогда вероятность того, что  $\xi$  примет значение  $n\alpha + \delta$ , можно приближенно подсчитать по формуле

$$w(n\alpha + \delta) = \int_{n\alpha + \delta - \frac{1}{2}}^{n\alpha + \delta + \frac{1}{2}} F(p; n) dp = F(n\alpha + \delta; n).$$

Сравнивая две последние формулы и обозначая  $n\alpha + \delta = p$ , получаем

$$F(p; n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\beta n}} e^{-(p-n\alpha)^2/2\alpha\beta n}.$$

Однако для рассматриваемой случайной величины будет

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= \bar{\xi}_1 = 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta = \alpha, \\ \Delta_1^2 &= (\bar{\xi}_1 - \xi_1)^2 = (1 - \alpha)^2 \alpha + (0 - \alpha)^2 \beta = \alpha\beta.\end{aligned}$$

Заменяя в последнем выражении для  $F(p; n)$   $\alpha\beta$  на  $\Delta_1^2$ , а  $n\alpha$  на  $n\bar{p}_1$ , мы вновь приходим к формуле (26), полностью доказав ее, таким образом, для случайных величин рассматриваемого специального вида.

Пусть величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимо принимают случайные значения из промежутка  $-\infty, \infty$ , причем каждая из этих величин имеет свое распределение вероятностей

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x).$$

Их сумма  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  также будет принимать те или иные случайные значения. Пусть ее распределение вероятности есть  $F(x)$ .

В теории вероятностей доказывается, что в этом случае, если  $n$  велико, то

$$F(x) = \frac{1}{\Delta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\Delta^2}}. \quad (28)$$

Такой закон распределения вероятностей носит название *нормального закона*. Для того чтобы задать формулу (28), нужно указать две величины:  $\bar{x}$  и  $\Delta$ .

Множитель, стоящий перед  $e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\Delta^2}}$ , определяется из условия  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 1$ . Действительно, пусть  $F(x) = A e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\Delta^2}}$ , тогда  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\Delta^2}} dx$ . Найдем последний интеграл. Полагая  $\frac{x-\bar{x}}{\Delta \sqrt{2}} = t$ ,  $dx = \Delta \sqrt{2} dt$ , получим  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\Delta^2}} dx = \Delta \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \Delta \sqrt{2\pi}$ . Из условия  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 1$  находим  $A \cdot \Delta \sqrt{2\pi} = 1$ , откуда  $A = \frac{1}{\Delta \sqrt{2\pi}}$ .

Предлагаем читателю проверить (см. упражнения), что для  $F(x)$ , определенной формулой (28), справедливы соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x F(x) dx = \bar{x}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 F(x) dx = \Delta^2,$$

т. е.  $\bar{x}$  и  $\Delta^2$  представляют собой среднее значение и дисперсию случайной величины  $\xi$ .

Выше все эти соотношения были выведены для частного случая суммы  $n$  величин с одинаковым распределением вероятностей  $f(p)$ .

### Упражнения

1. Найдите  $\int_{-\infty}^{+\infty} xF(x) dx$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 F(x) dx$ , где  $F(x)$  дается формулой (28).

$$2. \quad f(p) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{если } 0 < p < q, \\ 0, & \text{если } p > q \text{ и если } p < 0. \end{cases}$$

Найдите по формуле (26) распределение вероятностей  $F(p; n)$  для случая  $n=10$ ;  $n=20$ .

Указание. Предварительно найдите величины  $\bar{p}_1$  и  $\Delta_1^2$ .

3. Рыболов ловит рыбу в пруду, где имеются рыбы весом не более 2 кг. Пусть при каждом забрасывании крючка равновероятно поймать любую рыбу весом от 0 до 2 кг.

а) Каков средний вес улова, состоящего в забрасывании крючка 20 раз подряд?

б) Какова вероятность того, что при 20 забрасываниях крючка вес улова будет не больше 20 кг; 22 кг; 25 кг?

## § 9. Корреляционная зависимость

Теория вероятностей имеет важные приложения к изучению зависимостей величин друг от друга. До сих пор мы рассматривали только функциональные зависимости, т. е. такие, при которых, задав значения одних величин, мы полностью, точно получали значения других. Однако рассмотрим, например, такие величины, как длина  $l$  и вес  $p$  выловленной рыбы. Естественно ожидать, что чем больше  $l$ , тем больше и  $p$ , т. е. какая-то зависимость здесь имеется. Однако эта зависимость осуществляется лишь «в среднем», так как длина  $l$  рыбы не определяет ее вес  $p$  однозначно — рыбы одинаковой длины могут иметь разный вес, длинная рыба может оказаться настолько тощей, что ее вес будет меньше веса короткой, и т. д.

Такая «мягкая» зависимость между величинами, которая осуществляется лишь в среднем, называется *корреляционной*, в отличие от «жесткой», функциональной. Корреляционными являются зависимости между возрастом человека и его ростом, между знаниями студента и его оценкой на экзамене и т. д.; утверждают также, что имеется корреляционная зависимость между успехами в картах и в любви.

Корреляционная зависимость получается в случае, когда сказывается влияние факторов, которые почему-либо не учитываются, например из-за сложного характера этого влияния. Однако такая

зависимость может получиться и по необходимости, независимо от сложности этих факторов. Дело в том, что если, скажем, две величины  $x$  и  $y$  функционально зависят от одного параметра:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , то эти два соотношения определяют жесткую функциональную зависимость между  $x$  и  $y$  (см. стр. 111). Но если таких параметров два или более, т. е.

$$x = x(t_1, t_2, \dots, t_n), \quad y = y(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

то эти соотношения в принципе уже не определяют функциональной зависимости между  $x$  и  $y$ . И только если учитывать частоту реализаций различных комбинаций значений параметров  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , то можно говорить о зависимости между  $x$  и  $y$ , которая, однако, будет лишь корреляционной. Именно такова ситуация для величин  $l$  и  $p$ , указанных выше, где, впрочем, полный набор существенных параметров было бы трудно указать.

Важный пример корреляционной зависимости получается при подборе эмпирических формул (§ II.3—4). Даже если истинная зависимость  $y = f(x)$  между физическими величинами  $x$  и  $y$  является функциональной, зависимость между измеренными значениями  $x$  и  $y$  при наличии ошибок измерения оказывается лишь корреляционной.

Рассмотрим общий случай. Пусть имеются две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ , как-то связанные между собой. Как мы доказали выше, если эти величины независимы, то  $\overline{\xi\eta} = \overline{\xi}\overline{\eta}$ , т. е.  $\overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\overline{\eta} = 0$ . Поэтому последнюю разность можно принять за самую грубую меру зависимости между  $\xi$  и  $\eta$ . Однако чаще переходят к безразмерному коэффициенту корреляции

$$r = r(\xi, \eta) = \frac{\overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\overline{\eta}}{\Delta_\xi \Delta_\eta},$$

где в знаменателе стоят средние квадратичные отклонения величин  $\xi$  и  $\eta$ .

В силу сказанного выше, для независимых величин этот коэффициент равен нулю. (Обратное, вообще говоря, неверно.) Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда между  $\xi$  и  $\eta$  имеется функциональная и притом линейная зависимость, т. е.  $\eta = a\xi + b$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные. Тогда легко проверить, что  $\Delta_\eta^2 = a^2 \Delta_\xi^2$ , т. е.  $\Delta_\eta = |a| \Delta_\xi$ ; из равенства  $\Delta_\xi^2 = \overline{(\xi - \overline{\xi})^2} = \overline{\xi^2} - 2\overline{\xi}\overline{\xi} + \overline{\xi^2} = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2$  вытекает, что

$$\frac{\overline{\xi\eta} - \overline{\xi}\overline{\eta}}{\Delta_\xi \Delta_\eta} = \frac{\overline{(a\xi + b)\xi} - \overline{\xi}(a\overline{\xi} + b)}{\Delta_\xi |a| \Delta_\xi} = \frac{a\overline{\xi^2} + b\overline{\xi} - a\overline{\xi}^2 - b\overline{\xi}}{|a| \Delta_\xi^2} = \frac{a}{|a|},$$

т. е.  $r(\xi, \eta) = 1$ , если  $a > 0$ , и  $r(\xi, \eta) = -1$ , если  $a < 0$ .

Можно доказать (мы не будем этого делать), что во всех случаях, кроме линейной функциональной зависимости, коэффициент корреляции заключен строго между  $-1$  и  $1$ ,  $-1 < r(\xi, \eta) < 1$ .

Этот коэффициент характеризует степень отклонения зависимости между  $\xi$  и  $\eta$  от линейной функциональной.

Рассмотрим пример. Пусть физические величины  $x$  и  $y$  связаны между собой линейной зависимостью  $y = ax + b$ , однако значения коэффициентов  $a$  и  $b$  нам неизвестны и получаются в результате эксперимента, в котором мы задаемся значениями  $x$  и измеряем значения  $y$ . Будем для простоты считать, что значения  $x$  известны совершенно точно, а степень точности в определении соответствующего значения  $y$  одна и та же при всех  $x$ . Обозначив через  $\xi$  измеренное значение  $x$ , а через  $\eta$  измеренное значение  $y$  ( $\xi$ ,  $\eta$  — это случайные величины), примем, что  $\xi$  с равной вероятностью принимает все значения между  $-l$  и  $l$ , т. е. соответствующая функция распределения имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2l} & (-l \leq x \leq l), \\ 0 & (|x| > l). \end{cases} \quad (29)$$

Кроме того, примем, что при каждом значении  $\xi = x$  величина  $\eta$  распределена по нормальному закону вокруг значения  $ax + b$  с дисперсией  $\Delta^2$ , не зависящей от  $x$ . (Предположение о нормальности закона распределения естественно принять, если ошибка в определении  $y$  складывается из большого числа независимых ошибок, объясняющихся различными причинами.) Функцию распределения величины  $\eta$  при заданном значении  $\xi = x$  будем обозначать  $\psi_x(y)$ , так что

$$\psi_x(y) = \frac{1}{\Delta \sqrt{2\pi}} e^{-[y - (ax+b)]^2 / 2\Delta^2}.$$

Обозначим, далее, через  $f(x, y)$  функцию совместного распределения величин  $\xi$ ,  $\eta$ ; это значит, что вероятность одновременного попадания  $\xi$  между  $x$  и  $x + dx$ , а  $\eta$  — между  $y$  и  $y + dy$  равна  $f(x, y) dx dy$ . Для подсчета функции  $f(x, y)$  заметим, что если произведено большое число  $N$  испытаний, то число случаев одновременного попадания  $\xi$  между  $x$  и  $x + dx$ , а  $\eta$  — между  $y$  и  $y + dy$  равно  $[f(x, y) dx dy] N$ . С другой стороны, можно рассуждать так: при  $N$  испытаниях число случаев, когда  $\xi$  попадет между  $x$  и  $x + dx$ , равно  $N_1 = [\varphi(x) dx] N$ . Но из этих  $N_1$  случаев число случаев, когда  $\eta$  попадет между  $y$  и  $y + dy$ , равно

$$[\psi_x(y) dy] N_1 = \psi_x(y) \varphi(x) dx dy \cdot N.$$

Приравнявая оба результата, получаем, что  $f(x, y) = \varphi(x) \psi_x(y)$ , т. е. в наших предположениях

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2l\Delta \sqrt{2\pi}} e^{-[y - (ax+b)]^2 / 2\Delta^2} & (|x| \leq l), \\ 0 & (|x| > l). \end{cases} \quad (30)$$

Вычислим коэффициент корреляции  $r(\xi, \eta)$ . Из соображений симметрии ясно, что  $\bar{\xi} = 0$ ,  $\bar{\eta} = b$ . Среднее значение  $\bar{\xi\eta}$  вычисляется по общему правилу (сумма произведений значений случайной величины на их вероятности), т. е.  $\bar{\xi\eta} = \iint xyf(x, y) dx dy$ , или

$$\bar{\xi\eta} = \int_{-l}^l dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xy}{2l\Delta \sqrt{2\pi}} e^{-[y-(ax+b)]^2/2\Delta^2} dy = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l x(ax+b) dx = \frac{l^2}{3} a.$$

Из формул (29) получаем  $\Delta_{\xi}^2 = \int_{-l}^l x^2 \frac{1}{2l} dx = \frac{l^2}{3}$ . Чтобы вычислить  $\Delta_{\eta}$ ,

найдем сначала функцию распределения  $\psi(y)$  величины  $\eta$  (это не то же самое, что  $\psi_x(y)!$ ). Так как  $\psi(y) dy$  есть вероятность того, что  $\eta$  окажется между  $y$  и  $y+dy$ , а  $\xi$  примет произвольное значение, то

$$\psi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, y) dy] dx. \text{ Поэтому}$$

$$\psi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-l}^l \frac{1}{2l\Delta \sqrt{2\pi}} e^{-[y-(ax+b)]^2/2\Delta^2} dx,$$

откуда

$$\Delta_{\eta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y-b)^2 \psi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-l}^l (y-b)^2 \frac{1}{2l\Delta \sqrt{2\pi}} e^{-[y-(ax+b)]^2/2\Delta^2} dx.$$

После перестановки порядка интегрирования и вычислений, которые мы предоставляем читателю, получается  $\Delta_{\eta}^2 = \Delta^2 + \frac{l^2 a^2}{3}$ . Отсюда находим искомый коэффициент

$$r(\xi, \eta) = \frac{l^2 a}{3 \sqrt{\frac{l^2}{3} \left( \Delta^2 + \frac{l^2 a^2}{3} \right)}} = \frac{\frac{al}{\Delta}}{\sqrt{\left( \frac{al}{\Delta} \right)^2 + 3}}.$$

Хорошо видно, что  $|r| < 1$ ; при  $\frac{al}{\Delta} \rightarrow \infty$  (например, при  $a = \text{const} \neq 0$ ,  $l = \text{const}$ ,  $\Delta \rightarrow 0$ ) будет  $r \rightarrow \pm 1$ , т. е. корреляция экстремальна; при  $\frac{al}{\Delta} \rightarrow 0$  (например, при  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ ,  $\Delta \rightarrow \infty$ ) будет  $r \rightarrow 0$ , корреляция теряется.

Пусть в результате эксперимента, после  $N$  замеров, мы получили при значениях  $x = x_1, x_2, \dots, x_N$  соответствующие значения  $y = y_1, y_2, \dots, y_N$ . Если замеры независимы, то такой набор значений имеет функцию совместного распределения, равную в силу (30)

$$f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) \cdot \dots \cdot f(x_N, y_N) = \frac{1}{(2l\Delta \sqrt{2\pi})^N} e^{-\sum [y_i - (ax_i + b)]^2 / 2\Delta^2}. \quad (31)$$



(Здесь суммирование  $\sum$  производится по  $i$  от 1 до  $N$ .) Если нам известен результат эксперимента, и мы исходим из линейной зависимости  $y = ax + b$ , но коэффициенты  $a$  и  $b$  неизвестны, то естественно их выбрать так, чтобы этот результат оказался в зоне наибольшей возможной плотности распределения, т. е. чтобы он был в определенном смысле наиболее вероятным. Это означает, что коэффициенты  $a$  и  $b$  подбираются из условия максимизации правой части (31), т. е. минимизации суммы  $\sum [y_i - (ax_i + b)]^2$ . Мы приходим к методу наименьших квадратов, уже разобранный в § II.3. Итак, метод наименьших квадратов получает обоснование на основе соображений теории вероятности.

После указанного эксперимента коэффициент корреляции можно вычислить по формуле (заметим, что  $\bar{\xi}\bar{\eta} - \bar{\xi}\bar{\eta} = (\bar{\xi} - \bar{\xi})(\bar{\eta} - \bar{\eta})$ ):

$$r = \frac{(\bar{\xi} - \bar{\xi})(\bar{\eta} - \bar{\eta})}{\sqrt{(\bar{\xi} - \bar{\xi})^2(\bar{\eta} - \bar{\eta})^2}} \approx \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/N}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2/N^2}},$$

где  $\bar{x} = \sum x_i/N$ ,  $\bar{y} = \sum y_i/N$ . Умножив на  $N$  числитель и знаменатель, получаем

$$r \approx r_N = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Если  $|r_N|$  получится малым, то может возникнуть подозрение, что на самом деле  $r = 0$ , а отличие  $r_N$  от нуля получилось из-за естественного разброса экспериментальных значений. Можно доказать (мы этого делать не будем), что если истинное значение  $r = 0$ , то при большом  $N$  наблюдаемое значение  $r_N$  приближенно подчиняется нормальному закону со средним значением  $\bar{r}_N = 0$  и дисперсией  $\Delta_N^2 = \frac{1}{N-1}$ . Рассуждая, как в § 3, получаем, что вероятность неравенства  $|r_N| < \varepsilon$  равна

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\Delta_N \sqrt{2\pi}} e^{-r^2/2\Delta_N^2} dr = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_N}\right) = \Phi(\varepsilon\sqrt{N-1}).$$

Приравняв, например, правую часть 0,95, мы по таблице находим, что с вероятностью 0,95 будет  $|r_N| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon\sqrt{N-1} = 1,96 \approx 2$ .

Итак, если в результате эксперимента получится, что  $|r_N| \geq \frac{2}{\sqrt{N-1}}$ , то с вероятностью, не меньшей 0,95, можно утверждать, что коэффициент корреляции между изучаемыми физическими величинами отличен от нуля, т. е. между этими величинами имеется определенная корреляционная зависимость.

Подчеркнем в заключение, что если коэффициент корреляции оказывается равным нулю, то это еще не говорит об отсутствии

зависимости, так как эта зависимость может оказаться нелинейной. Поэтому эмпирическое выявление зависимости  $y(x)$  всегда надо начинать с нанесения результатов эксперимента на координатную плоскость  $x, y$ . При этом может оказаться, что эмпирические точки с достаточной точностью лягут на параболу или на какую-либо иную простую линию; тогда эта линия определит функциональную зависимость  $y(x)$ . И лишь если эмпирические точки образуют «облако», то надо проводить их статистическую обработку. При этом применение понятия корреляции целесообразно, если это «облако» напоминает линейную зависимость, как на рис. 12. Нелинейную зависимость можно исследовать на небольших интервалах изменения  $x$ , приближенно полагая ее линейной, либо же можно добиться линейности с помощью предварительного преобразования переменных по методам § II.4.

### § 10. О распределении простых чисел

Приведем интересный пример применения теории вероятностей к теории чисел. Рассмотрим вопрос о распределении простых чисел в натуральном ряде чисел. Этот вопрос очень сложный, и поэтому наши рассуждения не будут вполне строгими, но они все же правильно передают общую картину.

Еще в древности было доказано, что не существует самого большого простого числа, т. е. что простых чисел существует бесчисленное множество. Даже беглый взгляд на несколько первых сотен чисел натурального ряда убеждает нас в том, что простые числа распределены крайне неравномерно. Так, например, после простого числа 113 идет 13 составных чисел, а четырнадцатое число 127 — простое. Между 127 и следующим простым числом 131 находятся лишь три составных числа. Между соседними простыми числами 131 и 137 имеется пять чисел, а после 137 через одно число идет опять простое число 139.

Поэтому интересен такой вопрос. Сколько простых чисел имеется между числами  $n$  и  $n + \Delta$ ? Отношение числа простых чисел, лежащих между  $n$  и  $n + \Delta$ , к числу  $\Delta$  мы будем называть плотностью распределения простых чисел. Определению зависимости плотности распределения простых чисел от  $n$  и посвящен этот параграф.

Будем считать, что  $\Delta$  мало по сравнению с  $n$ , но значительно больше 1. (Тем самым мы предполагаем, что  $n$  достаточно большое число.) При этом предположении между  $n$  и  $n + \Delta$  имеется много простых чисел. Обозначим плотность распределения простых чисел через  $f(n)$ . Тогда в промежутке от  $n$  до  $n + \Delta$  содержится  $f(n)\Delta$  простых чисел.

Можно составить список всех простых чисел, не превышающих данного числа  $n$ , следующим образом.

Напишем подряд все натуральные числа от 2 до  $n$ . Затем вычеркнем все числа, делящиеся на 2 (не считая самого числа 2), после этого вычеркнем все числа, делящиеся на 3 (не считая числа 3), затем все числа, делящиеся на 5 (не считая числа 5) и т. д. В итоге все составные числа будут зачеркнуты и останутся лишь простые числа. Этот способ известен под названием *решето Эратосфена*.

Ясно, что  $1/2$  всех чисел от 2 до  $n$  делится на 2; на 3 делится лишь  $1/3$  этих чисел; на 5 делится  $1/5$  часть и т. д. Таким образом, если мы рассматриваем натуральные числа от 2 до  $n$ , то  $\left(\frac{1}{p}\right)$ -я часть их делится на простое число  $p$ , а  $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ -я часть не делится на  $p$ . При этом мы предполагаем, что  $p \ll n$ .

Пусть даны два простых числа,  $p_1$  и  $p_2$ . Возьмем любое натуральное число  $n$ . Оно может делиться на  $p_1$ , а может и не делиться на него. Точно так же оно либо делится на  $p_2$ , либо нет. Будем считать, что два события, первое из которых состоит в том, что  $n$  не делится на  $p_1$ , а второе в том, что  $n$  не делится на  $p_2$ , являются независимыми.

Среди чисел от 2 до  $n$  доля чисел, не делящихся на 2, равна  $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ , доля чисел, не делящихся на 3, равна  $\left(1 - \frac{1}{3}\right)$ , доля чисел, не делящихся на 5, равна  $\left(1 - \frac{1}{5}\right)$ , вообще доля чисел, не делящихся на простое число  $p$ , равна  $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ . Так как события, состоящие в том, что число не делится на различные меньшие его простые числа, мы предполагаем независимыми, то по правилу умножения вероятностей доля простых чисел, содержащихся между 2 и  $n$ , равна

$$f(n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (32)$$

(Мы приравняли эту долю плотности распределения простых чисел  $f(n)$  на основании приближенного равенства  $F(n)/n \approx F'(n)$  при больших  $F(n)$  и  $n$ .)

Если  $p > 1$ , то  $e^{-\frac{1}{p}} \approx 1 - \frac{1}{p}$  (мы пренебрегаем членами  $1/p^2$ ,  $1/p^3$ , ...). Поэтому

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} &\approx e^{-\frac{1}{2}}, \\ 1 - \frac{1}{3} &\approx e^{-\frac{1}{3}}, \\ \dots &\dots \dots \dots \\ 1 - \frac{1}{p} &\approx e^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned} \right\}$$

Формула (32) принимает вид  $f(n) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{3}} \dots e^{-\frac{1}{p}}$ , откуда

$$\ln f(n) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{p}\right) = -\sum_i \frac{1}{p_i}. \quad (33)$$

В промежутке от  $v$  до  $v+dv$  (где  $dv$  мало по сравнению с  $v$ ) имеется  $f(v)dv$  простых чисел. Ввиду того, что длина промежутка невелика, можно считать, что все простые числа из этого промежутка приблизительно равны  $v$ , и поэтому  $\frac{1}{p_i}$  для этого промежутка есть  $\frac{1}{v}$ . Тогда  $\sum_i \frac{1}{p_i}$  для чисел из промежутка от  $v$  до  $v+dv$  принимает вид  $\frac{1}{v} f(v) dv$ . Следовательно, для суммы  $\sum_i \frac{1}{p_i}$ , соответствующей промежутку от 2 до  $n$ , получаем

$$\sum_i \frac{1}{p_i} = \int_a^b \frac{f(v)}{v} dv.$$

Каковы пределы интегрирования в этом интеграле? Нас интересуют все простые числа, не превосходящие  $n$ . Поэтому верхний предел интегрирования берем равным  $n$ . Заметим, что равенство  $1 - \frac{1}{p_i} = e^{-\frac{1}{p_i}}$  хорошо только при больших  $p_i$ . Если  $p_i$  невелико, то последняя формула дает заметные ошибки. Так, например, для  $p=2$  получаем  $1 - \frac{1}{2} = 0,5$ ;  $e^{-\frac{1}{2}} = 0,61$  (ошибка более 20%). Замена суммы интегралом тоже хороша лишь для тех промежутков, где  $p_i$  достаточно велико. Поэтому указать величину нижнего предела интегрирования не представляется возможным. Оставим нижний предел неопределенным. Формула (33) принимает вид

$$\ln f(n) = -\int_a^n \frac{f(v)}{v} dv. \quad (34)$$

Возьмем производную от обеих частей этого равенства, получим  $\frac{1}{f(n)} \frac{df(n)}{dn} = -\frac{f(n)}{n}$ . Мы получили уравнение с разделяющимися переменными, которое нетрудно решить. Перепишем его так:

$$\frac{df(n)}{f^2(n)} = -\frac{dn}{n}.$$

Проинтегрируем обе части от  $n_0$  до  $n$ , получим

$$\int_{n_0}^n \frac{df}{f^2} = -\int_{n_0}^n \frac{dn}{n}, \text{ или } -\frac{1}{f(n)} + \frac{1}{f(n_0)} = -\ln n + \ln n_0,$$

откуда

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(n_0)} - \ln n_0 + \ln n = C + \ln n,$$

где положено  $C = \frac{1}{f(n_0)} - \ln n_0$ .

Окончательно получаем

$$f(n) = \frac{1}{C + \ln n}. \quad (35)$$

При больших  $n$  постоянной  $C$  можно пренебречь по сравнению с  $\ln n$ . Поэтому при весьма больших  $n$  будет

$$f(n) = \frac{1}{\ln n}. \quad (36)$$

Наш вывод был весьма груб, и легко указать некоторые его неточности. Например, нужно ли испытывать, делится ли  $n$  на все простые числа меньше  $n$ ? Конечно, нет. На самом деле достаточно испытать лишь те простые числа, которые не превосходят  $\sqrt{n}$ . Действительно, пусть  $n$  не делится ни на одно простое число, меньшее  $\sqrt{n}$ . Допустим, что  $n$  делится на простое число  $p_1 > \sqrt{n}$ . Тогда  $n/p_1 = k$ , причем, так как  $p_1 > \sqrt{n}$ , то  $k < \sqrt{n}$ . Заметим, что  $n = p_1 k$ , откуда  $n/k = p_1$ . Следовательно,  $n$  делится на  $k < \sqrt{n}$ , что противоречит условию.

Оказывается, что выражение (36) удовлетворяет (если отбросить все члены, кроме главного) также и видоизмененному соотношению (34), в котором верхний предел  $n$  интеграла заменен на  $\sqrt{n}$ . Исходя из совершенно иных идей, гораздо более сложным путем показано, что точность формулы (36) при больших  $n$  весьма велика, лучше, чем это могло бы следовать из наших рассуждений. В частности, оказалось, что формула (35) дает наилучшее асимптотическое представление  $f(n)$  именно при  $C = 0$ .

Часто рассматривается вопрос не о плотности простых чисел, а о числе  $A(n)$  простых чисел, не превосходящих данного числа  $n$ .

Ясно, что  $A(n) = \int_a^n f(v) dv$ , где нижний предел интегрирования  $a$  нам неизвестен. Итак,

$$A(n) = \int_a^n \frac{dv}{\ln v}.$$

Положим здесь  $v = ny$ ,  $dv = n dy$ , тогда

$$A(n) = n \int_{\frac{a}{n}}^1 \frac{dy}{\ln n + \ln y}.$$

Заметим, что при больших  $n$

$$\frac{1}{\ln n + \ln y} = \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\ln y}{\ln n}} = \frac{1}{\ln n} \left[ 1 - \frac{\ln y}{\ln n} + \frac{\ln^2 y}{\ln^2 n} - \dots \right].$$

Поэтому

$$A(n) = \frac{n}{\ln n} \int_{\frac{a}{n}}^1 \left[ 1 - \frac{\ln y}{\ln n} + \frac{\ln^2 y}{\ln^2 n} - \dots \right] dy.$$

Ограничиваясь первым членом разложения и заменяя  $\frac{a}{n}$  при больших  $n$  на 0, получаем отсюда

$$A(n) = \frac{n}{\ln n}. \quad (37)$$

Если взять большое число членов, то получим более точную формулу. Например, ограничиваясь тремя членами разложения, находим

$$A(n) = \frac{n}{\ln n} \left[ 1 + \frac{1}{\ln n} + \frac{2}{\ln^2 n} \right] *). \quad (38)$$

Оказывается, что ошибка любой из таких формул асимптотически мала по сравнению с последним «точным» членом.

### Упражнения

1. Подсчитайте приближенно количество простых чисел, содержащихся в промежутке от 3000 до 3100; от 3000 до 3200; от 3000 до 3500. Сравните результат с истинным, подсчитав количество простых чисел в указанных промежутках при помощи таблицы простых чисел.

2. Найдите количество простых чисел, меньших 4000, по формуле (37). Затем уточните результат, удерживая в формуле (38) сперва член, содержащий  $\frac{1}{\ln n}$ , а затем и член, содержащий  $\frac{1}{(\ln n)^2}$ . Результат сравните с точным подсчетом количества простых чисел, меньших 4000, по таблице простых чисел.

3. Подсчитайте количество простых чисел, содержащихся в промежутке от 2000 до 5000. Выполните подсчет различными способами:

а) считая, что  $n = 2000$ ,  $\Delta = 3000$ ;

б) находя разность между  $A(5000)$  и  $A(2000)$ . Последние величины подсчитайте сперва по формуле (37), а затем более точно, удерживая член, содержащий  $\frac{1}{\ln n}$ .

---

\*) При этом нам пришлось находить  $\int_0^1 \ln y \, dy$  и  $\int_0^1 \ln^2 y \, dy$ . Оба интеграла легко берутся интегрированием по частям. Следует учесть, что  $y \ln^k y = 0$  при  $y=0$  для любого  $k$ .

Таблица интеграла вероятности

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,000						
01	0,008	0,36	0,281	0,71	0,522	1,06	0,711
02	0,016	37	0,289	72	0,528	07	0,715
03	0,024	38	0,296	73	0,535	08	0,720
04	0,032	39	0,303	74	0,541	09	0,724
05	0,040	40	0,311	75	0,547	10	0,729
06	0,048	41	0,318	76	0,553	11	0,733
07	0,056	42	0,326	77	0,559	12	0,737
08	0,064	43	0,333	78	0,565	13	0,742
09	0,072	44	0,340	79	0,570	14	0,746
10	0,080	45	0,347	80	0,576	15	0,750
11	0,088	46	0,354	81	0,582	16	0,754
12	0,096	47	0,362	82	0,588	17	0,758
13	0,103	48	0,369	83	0,593	18	0,762
14	0,111	49	0,376	84	0,599	19	0,766
15	0,119	50	0,383	85	0,605	20	0,770
16	0,127	51	0,390	86	0,610	21	0,774
17	0,135	52	0,397	87	0,616	22	0,778
18	0,143	53	0,404	88	0,621	23	0,781
19	0,151	54	0,411	89	0,627	24	0,785
20	0,159	55	0,418	90	0,632	25	0,789
21	0,166	56	0,425	91	0,637	26	0,792
22	0,174	57	0,431	92	0,642	27	0,796
23	0,182	58	0,438	93	0,648	28	0,799
24	0,190	59	0,445	94	0,653	29	0,803
25	0,197	60	0,451	95	0,658	30	0,806
26	0,205	61	0,458	96	0,663	31	0,810
27	0,213	62	0,465	97	0,668	32	0,813
28	0,221	63	0,471	98	0,673	33	0,816
29	0,228	64	0,478	99	0,678	34	0,820
30	0,236	65	0,484	1,00	0,683	35	0,823
31	0,243	66	0,491	01	0,687	36	0,826
32	0,251	67	0,497	02	0,692	37	0,829
33	0,259	68	0,503	03	0,697	38	0,832
34	0,266	69	0,510	04	0,702	39	0,835
35	0,274	70	0,516	05	0,706	40	0,838

Продолжение

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
1,41	0,841	1,66	0,903	1,91	0,944	2,55	0,989
42	0,844	67	0,905	92	0,945	60	0,991
43	0,847	68	0,907	93	0,946	65	0,992
44	0,850	69	0,909	94	0,948	70	0,993
45	0,853	70	0,911	95	0,949	80	0,995
46	0,856	71	0,913	96	0,950	90	0,996
47	0,858	72	0,915	97	0,951	3,00	0,997
48	0,861	73	0,916	98	0,952	10	0,998
49	0,864	74	0,918	99	0,953	20	0,999
50	0,866	75	0,920	2,00	0,954	30	0,999
51	0,869	76	0,922	05	0,960	40	0,999
52	0,871	77	0,923	10	0,964	3,50	$1-0,5 \cdot 10^{-3}$
53	0,874	78	0,925	15	0,968	3,9	$1-10^{-4}$
54	0,876	79	0,927	20	0,972	4,4	$1-10^{-5}$
55	0,879	80	0,928	25	0,976	4,9	$1-10^{-6}$
56	0,881	81	0,930	30	0,979	5,3	$1-10^{-7}$
57	0,884	82	0,931	35	0,981		
58	0,886	83	0,933	40	0,984		
59	0,888	84	0,934	45	0,986		
60	0,890	85	0,936	50	0,988		
61	0,893	86	0,937				
62	0,895	87	0,939				
63	0,897	88	0,940				
64	0,899	89	0,941				
65	0,901	90	0,943				

## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

## § 1

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}; \quad \frac{4}{36} = \frac{1}{9}; \quad \frac{1}{36}; \quad \frac{8}{35}.$$

## § 2

$$1. \frac{1}{4}. \quad 2. \frac{1}{8}; \quad \frac{3}{8}.$$

3. Вероятность появления черной грани равна

$$w_4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

а вероятность появления белой грани

$$w_6 = \frac{1}{3}.$$



Так как  $w_{66} = w_6 \cdot w_6$ , то  $w_{66} = \frac{1}{9}$ . Аналогично

$$w_{44} = w_4 \cdot w_4 = \frac{4}{9}.$$

Вероятность того, что один раз появится белая грань, а другой раз — черная (безразлично, в каком порядке), можно подсчитать по общей формуле  $\frac{n!}{m! k!} \alpha^m \beta^k$ . Получим  $\frac{4}{9}$ .

4. Пользуясь общей формулой, находим  $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ .

5. 0,18. 6. 0,243; 0,027. 7. 0,29; 0,33.

### § 3.

1. Пользуясь формулой (3) и полагая в ней  $n = 1000$ ,  $\delta = 0$ , а затем  $n = 1000$ ,  $\delta = 10$ , получаем 0,025; 0,020.

2. Вероятность того, что выпадает какое-то количество гербов, не превосходящее 500, равна

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}.$$

Вероятность получить не меньше 500 гербов равна

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Вероятность получить не больше 510 гербов ( $\delta = 10$ ) равна

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2}{\sqrt{10}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0,63} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^{0,63} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0,63} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,471 = 0,74. \end{aligned}$$

Поэтому вероятность получить число гербов не меньше 510 равна  $1 - 0,74 = 0,26$ .

3. Полагая в (8)  $\delta = 0$  (10 попаданий), получаем  $w = 0,13$ ; полагая  $\delta = -2$  (8 попаданий), получаем  $w = 0,11$ .

4. Обозначим через  $\delta$  отклонение числа попаданий от наиболее вероятного числа. Тогда вероятность того, что осуществится одно из событий, для которого  $\delta \leq \delta_0$ , равна

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \alpha \beta}} \int_{-\infty}^{\delta_0} e^{-\frac{\delta^2}{2n\alpha\beta}} d\delta.$$

Полагая здесь  $\frac{\delta}{\sqrt{n\alpha\beta}} = t$ ,  $d\delta = \sqrt{n\alpha\beta} dt$ , получим  $w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ,

где положено  $t_0 = \frac{\delta_0}{\sqrt{n\alpha\beta}}$ . В рассматриваемом случае  $n = 100$ ;  $\alpha = 0,1$ ;  $\beta = 0,9$ .

Наиболее вероятное число попаданий есть  $n\alpha = 100 \cdot 0,1 = 10$ . Подсчитаем, какова вероятность того, что число попаданий не более 8 ( $\delta = -2$ ). Получим

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-0,67} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0,67}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^{0,67} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] = 0,5 - 0,5\Phi(0,67) = 0,25. \end{aligned}$$

Следовательно, вероятность того, что число попаданий не меньше 8, равна  $1 - 0,25 = 0,75$ .

Для двух других случаев вероятности соответственно равны 0,5 и 0,25. б. 0,73; 0,37.

### § 5

1.  $\frac{w_\mu(m)}{w_\mu(m-1)} = \frac{\mu^m e^{-\mu} (m-1)!}{m! \mu^{m-1} e^{-\mu}} = \frac{\mu}{m}$ . Отсюда  $w_\mu(m) > w_\mu(m-1)$ , пока  $m < \mu$ , и  $w_\mu(m) < w_\mu(m-1)$ , когда  $m > \mu$ . Значит, если  $\mu$  не целое, то  $w_\mu(m)$  наибольшее, когда  $m$  равно целой части  $\mu$ . Если же  $\mu = 1, 2, \dots$ , то наибольшими являются  $w_\mu(\mu-1) = w_\mu(\mu)$ .

2. Если проведено большое число  $N$  испытаний, то величина  $x$  приняла  $p_1 N$  раз значение  $x_1$ ,  $p_2 N$  раз значение  $x_2$ , ...,  $p_n N$  раз значение  $x_n$ . Поэтому среднее ее значение, в расчете на одно испытание, равно

$$\bar{x} = \frac{p_1 N \cdot x_1 + p_2 N \cdot x_2 + \dots + p_n N \cdot x_n}{N} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

Для закона Пуассона это дает

$$\bar{m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} m = e^{-\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu^m}{(m-1)!} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{k+1}}{k!} = e^{-\mu} \mu e^{\mu} = \mu,$$

где положено  $m-1=k$ .

### § 6

Система уравнений имеет вид

$$\frac{dp_i}{dt} = -(\alpha + \omega) p_i + \omega p_{i-1} + \alpha p_{i+1} \quad (i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Эту систему надо решить при начальном условии  $p_0(0) = 1$ ,  $p_i(0) = 0$  ( $i \neq 0$ ). При применении метода последовательных приближений удобно сначала сделать замену переменных  $p_i = e^{-(\alpha + \omega)t} q_i$ , откуда

$$\frac{dq_i}{dt} = \omega q_{i-1} + \alpha q_{i+1} \quad (i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Нулевое приближение:

$$q_0 = 1, \quad \text{прочие } q_i = 0.$$

Первое приближение:

$$q_{-1} = \alpha t, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = \omega t, \quad \text{прочие } q_i = 0.$$

Второе приближение:

$$q_{-2} = \frac{\alpha^2 t^2}{2}, \quad q_{-1} = \alpha t, \quad q_0 = 1 + \alpha \omega t^2, \quad q_1 = \omega t,$$

$$q_2 = \frac{\omega^2 t^2}{2}, \quad \text{прочие } q_i = 0$$

и т. д. Среднее значение номера состояния  $\bar{i} = (\omega - \alpha)t$ . Задача, разобранная в основном тексте, получается при  $\alpha = 0$ ,  $\omega = 1$ .

### § 7

$$F_3(p) = \begin{cases} \frac{p^2}{2q^3}, & \text{если } 0 < p < q, \\ \frac{1}{2q^3} (-2p^2 + 6pq - 3q^2), & \text{если } q < p < 2q, \\ \frac{1}{2q^3} (p^2 - 6pq + 9q^2), & \text{если } 2q < p < 3q. \end{cases}$$

Если  $p < 0$  и если  $p > 3q$ , то  $F_3(p) \equiv 0$ . График функции  $F_3(p)$  при  $q = 1$  см. на рис. 191.

### § 8

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} x F(x) dx = \frac{1}{\Delta \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\Delta^2}} dx.$$

Положим  $\frac{x-\bar{x}}{\Delta \sqrt{2}} = t$ ,  $dx = \Delta \sqrt{2} dt$ . Тогда последний интеграл принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} + \Delta \sqrt{2} t) e^{-t^2} dt = \bar{x} + \frac{\Delta \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt.$$

Интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = 0$ , потому что подынтегральная функция нечетная, так что ее график симметричен относительно начала координат.

Для нахождения  $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 \frac{1}{\Delta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\Delta^2}} dx$  выполним замену пере-

менной  $\frac{x-\bar{x}}{\Delta \sqrt{2}} = t$ ,  $dx = \Delta \sqrt{2} dt$ . Тогда исходный интеграл перейдет в такой:

$$\frac{2\Delta^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt. \text{ Проинтегрируем по частям, полагая } t e^{-t^2} dt = dg, \quad t = f. \text{ Тогда}$$

$$g = -\frac{1}{2} e^{-t^2}, \quad df = dt. \text{ Получаем}$$

$$\frac{2\Delta^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{2\Delta^2}{\sqrt{\pi}} \left[ -\frac{1}{2} t e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right] = \Delta^2.$$

2. Находим  $\bar{p}_1 = \frac{q}{2}$ ;  $\Delta_1^2 = \frac{q^2}{12}$ , поэтому

$$F(p; 10) = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} e^{-\frac{3(p-5q)^2}{5q^2}}; \quad F(p; 20) = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{3}{10\pi}} e^{-\frac{3(p-10q)^2}{10q^2}}.$$

3. а) Так как  $\bar{p}_1 = 1$  кг, а  $\bar{p}_n = n\bar{p}_1$ , то  $\bar{p}_{20} = 20 \cdot 1$  кг = 20 кг.

б) Воспользуемся результатом пункта а), полагая в выражении для  $F(p; 20)$  величину  $q$  равной 2. Получим

$$F(p; 20) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{10\pi}} e^{-\frac{3(p-20)^2}{40}}.$$

или

$$F(p; 20) = 0,154 e^{-0,075(p-20)^2}.$$

Вероятность того, что вес улова будет не больше 20 кг, есть  $w = 0,154 \int_0^{20} e^{-0,075(p-20)^2} dp$ . Чтобы свести этот интеграл к табличной функции  $\Phi(x)$ , положим  $\frac{1}{2} x^2 = 0,075(p-20)^2$ , откуда  $x = 0,387(p-20)$ ,  $dx = 0,387 dp$ . Поэтому

$$w = \frac{0,154}{0,387} \int_{-7,7}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,4 \int_0^{7,7} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,4 \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \Phi(7,7) = 0,5.$$

Вероятность того, что вес улова окажется не больше 22 кг, равна

$$\begin{aligned} w &= 0,4 \int_{-7,7}^{+0,77} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,4 \left( \int_{-7,7}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{0,77} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \\ &= 0,4 \frac{\sqrt{2\pi}}{2} [\Phi(7,7) + \Phi(0,77)] = 0,78. \end{aligned}$$

Вероятность того, что вес улова будет не больше 25 кг, равна 0,98.

### § 10

1. Приняв  $n=3000$ ,  $\Delta=100, 200, 500$ , получаем приближенные значения 12, 25, 62. Точные значения соответственно равны 12, 22, 59.

2. По формуле (37)  $A(4000)=482$ . По сокращенной формуле (38)  $A=540$ . По полной формуле (38)  $A=554$ . Точное значение  $A(4000)=550$ .

3. Приняв  $n=2000$ ,  $\Delta=3000$ , получаем количество  $N=395$ . По формуле (37)  $N=322$ . По сокращенной формуле (38)  $N=358$ . Точное значение  $N=366$ .

## ГЛАВА XIV ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ\*)

### § 1. Введение

В главах VII—VIII, при рассмотрении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также систем таких уравнений (другими словами, при рассмотрении линейных однородных во времени процессов с конечным числом степеней свободы), мы видели, какую важную роль играет функция  $e^{pt}$ . Дело в том, что если подставить эту функцию в левую часть уравнения и произвести все действия, то в результате получится эта же функция, умноженная на некоторый постоянный множитель. Поэтому решение однородного уравнения выражалось через функции вида  $e^{pt}$ , через них же выражалась функция Грина, да и решение неоднородного уравнения имело наиболее простой вид, когда в правой части стояла функция  $e^{pt}$ . Мы включаем сюда как частный случай и функции вида  $\cos \omega t$  или  $e^{it} \sin \omega t$ , которые по формуле Эйлера непосредственно выражаются через экспоненты  $e^{pt}$  с комплексным  $p$  (см. формулы (3)).

Во многих задачах независимая переменная  $t$ , которой обычно служит время, может принимать всевозможные значения, т. е.  $-\infty < t < \infty$ , причем рассматриваемые решения, по смыслу задачи, должны оставаться конечными как при конечных  $t$ , так и при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Так как при  $p = \gamma + i\omega$   $e^{pt} = e^{\gamma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$ ,  $|\cos \omega t + i \sin \omega t| = 1$ , то при  $\gamma > 0$  будет  $|e^{pt}| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ , а при  $\gamma < 0$  будет  $|e^{pt}| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty$ . Значит, если требовать ограниченности экспоненты  $e^{pt}$  при  $t \rightarrow \pm \infty$ , то должно быть  $\gamma = 0$ , т. е. надо пользоваться лишь «гармониками», функциями

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t. \quad (1)$$

---

\*) В этой главе нам потребуются сведения о комплексных числах (§§ V.1—3) и о  $\delta$ -функции (§§ VI.1—3). В § 7 применяется понятие многомерного векторного пространства (§ IX.6).

При наложении друг на друга гармоник с различными амплитудами и частотами, т. е. при рассмотрении сумм вида

$$f(t) = \sum_k a_k e^{i\omega_k t}, \quad (2)$$

могут получаться функции значительно более сложного вида. Набор рассматриваемых здесь частот  $\omega_k$  называется *спектром* функции  $f(t)$ ; в данном случае мы имеем *дискретный спектр*\*). Можно пользоваться также суммами синусов или косинусов с различными частотами и амплитудами, так как по формуле (1) можно перейти от экспонент к косинусам и синусам, а по формулам

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (3)$$

— от косинусов и синусов к экспонентам. Мы будем для единообразия в основном пользоваться экспонентами (ср. § V.5).

Еще более широкий класс функций  $f(t)$  получится, если вместо суммы по отдельным частотам воспользоваться интегралом по всем частотам, т. е. воспользоваться представлением вида

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Здесь мы имеем *непрерывный спектр*; он может занимать всю ось  $\omega$ , но может занимать и некоторый интервал  $J$  этой оси, если вне этого интервала функция  $F(\omega)$  равна нулю, т. е. фактически интегрирование (4) производится лишь по  $J$  (тогда  $J$  называется *носителем* функции  $F(\omega)$ ). Впрочем, в § VI.1 мы видели, что если функция  $F(\omega)$  представляет собой сумму дельтообразных слагаемых, то и весь интеграл (4) переходит в сумму (2), т. е. спектр будет дискретным и будет состоять из набора тех значений  $\omega$ , в которых дельтообразные слагаемые имеют особенности. В общем случае спектр может обладать как непрерывной, так и дискретной частями.

Нетрудно понять смысл функции  $F(\omega)$  в представлении (4). Так как в этом представлении на малый интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  приходится слагаемое  $F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = [F(\omega) d\omega] e^{i\omega t}$ , то, сравнивая с (2), мы видим, что  $F(\omega) d\omega$  — это амплитуда, отвечающая указанному интервалу частот. Значит,  $F(\omega)$  можно рассматривать как «плотность амплитуды», отвечающей малому интервалу частот и рассчитанной на единицу длины этого интервала. Поэтому функцию  $F(\omega)$  называют *спектральной плотностью* функции  $f(t)$ . Переход от суммы (2) к интегралу (4) аналогичен переходу (ср. § XII.1) от дискретной модели струны в виде упруго связанных друг с другом бусинок к непрерывной модели, у которой масса «размазана» по всей длине струны с определенной плотностью. Так и в представлении (4)

\* ) От спектра функции, с которым мы будем иметь дело в этой главе, надо отличать спектр краевой задачи (стр. 272).

амплитуда гармоник «размазана» по всему спектру частот с плотностью  $F(\omega)$ .

В физических задачах мы в большинстве случаев встречаемся с вещественными функциями  $f(t)$ , например, когда  $f(t)$  представляет собой силу  $f$ , действующую на какую-то систему в зависимости от времени  $t$ .

Условие вещественности  $f(t)$  можно записать так:

$$f(t) \equiv f^*(t), \text{ т. е. } \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

У величины  $\omega$  знак сопряжения мы не ставим, так как подразумевается, что  $\omega$  вещественно. Для того чтобы были равны суммы гармоник при любых значениях  $t$ , нужно, чтобы были равны соответствующие амплитуды. Найдем множитель при  $e^{i\omega_0 t}$ ; в левом интеграле это  $F(\omega_0)$ . В правом интеграле из условия  $e^{-i\omega t} = e^{i\omega_0 t}$  найдем  $\omega = -\omega_0$ ; значит, множитель при  $e^{i\omega_0 t}$  в правом интеграле равен  $F^*(\omega) = F^*(-\omega_0)$ . Итак, условие вещественности функции  $f(t)$  дает

$$F^*(-\omega_0) = F(\omega_0).$$

Это равенство относится к любому  $\omega_0$ , так что можно опустить индекс «0» и записать

$$F^*(-\omega) = F(\omega). \quad (5)$$

Функция  $F(\omega)$  — комплексная. Запишем в явном виде ее вещественную и мнимую части с помощью двух вещественных функций  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ :

$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega).$$

Условие вещественности исходной функции  $f(t)$ , которое нам дало формулу (5), приводит к

$$A(-\omega) - iB(-\omega) = A(\omega) + iB(\omega),$$

т. е.

$$A(-\omega) = A(\omega), \quad B(-\omega) = -B(\omega). \quad (6)$$

Итак, вещественная часть  $F$  есть четная функция  $\omega$ , а мнимая часть  $F$  — нечетная функция  $\omega$ .

Теперь перейдем от представления с помощью  $e^{i\omega t}$  к представлению с помощью  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\omega) + iB(\omega)] [\cos \omega t + i \sin \omega t] d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega + \\ &\quad + i \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega + i \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим частный, но важный случай вещественной функции  $f(t)$ . Тогда условия (6) приведут к обращению в нуль двух последних интегралов. В них входит произведение четной функции на нечетную, так что  $\int_{-\infty}^0 k d\omega = -\int_0^{\infty} k d\omega$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} k d\omega = 0$ , где  $k$  — подынтегральная функция третьего или четвертого интегралов.

Напротив, в первых двух интегралах подынтегральное выражение симметрично,

$$n(\omega) = n(-\omega), \quad \int_{-\infty}^0 n(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} n(\omega) d\omega, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} n(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} n(\omega) d\omega,$$

так что окончательно

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega - 2 \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (7)$$

Итак, вещественная функция  $f(t)$  представляется в виде интеграла от вещественных функций  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , причем соответствующая спектральная плотность  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  тоже вещественна. Интегрирование в этом случае ведется только по положительным частотам с  $\omega$ , меняющимся от 0 до  $\infty$ .

Замечательно, что в форме (4) оказывается возможным представить практически любую функцию  $f(t)$ , остающуюся конечной при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Это будет показано в § 2, где будет также дан ответ на основной вопрос: как найти спектральную плотность  $F(\omega)$  заданной функции  $f(t)$ ? Мы сейчас увидим, что вопрос имеет далеко не только теоретический интерес.

Напомним простые факты из теории колебаний (§ VII.3,5; см. также ВМ, гл. VI и VIII). Пусть рассматривается осциллятор с малым затуханием, т. е. малым трением, если речь идет о механической колебательной системе, или с малым сопротивлением, если это — электрический колебательный контур, и т. д. Если такой осциллятор испытывает гармоническое внешнее воздействие с частотой  $\omega_k$ , то в нем возбуждаются гармонические вынужденные колебания с той же частотой. Амплитуда этих колебаний тем больше, чем  $\omega$  ближе к частоте  $\omega_0$  собственных колебаний осциллятора. Эта «избирательность» осциллятора по отношению к частоте внешнего воздействия тем резче выражена, чем затухание меньше. В пределе, когда рассматривается осциллятор без затухания, при  $\omega = \omega_0$  наступает резонанс, т. е. амплитуда вынужденных колебаний возрастает неограниченно.



Пусть теперь гармоническое внешнее воздействие прилагается к системе осцилляторов с малым затуханием, обладающих различными собственными частотами. Тогда на это воздействие «отзовется» наиболее сильно тот осциллятор, собственная частота которого равна частоте внешнего воздействия. Если, наконец, на такую систему осцилляторов воздействует «смесь» гармоник, т. е. функция вида (2), то на их воздействие отзовутся те осцилляторы, собственная частота которых совпадает с какой-либо из внешних частот  $\omega_k$ . При этом амплитуда вынужденных колебаний осциллятора с собственной частотой  $\tilde{\omega}_0$  пропорциональна амплитуде воздействия, т. е. пропорциональна тому  $a_k$ , для которого  $\omega_k = \tilde{\omega}_0$ . Таким образом, указанная система осцилляторов осуществит «гармонический анализ» (говорят также «спектральный анализ») внешнего воздействия, как бы разложит его на гармоники. Аналогичная картина получится при наложении внешнего воздействия вида (4). Амплитуда осциллятора с собственной частотой  $\tilde{\omega}_0$  пропорциональна  $F(\tilde{\omega}_0)$ , где  $F$  — спектральная плотность (см. формулу (4)). Точная формулировка условий, необходимых для этого, будет дана ниже. Располагая набором осцилляторов со всевозможными значениями  $\tilde{\omega}_0$ , можно «прощупать», т. е. определить весь ход функции  $F(\omega)$ .

Описанный гармонический анализ может быть реально осуществлен. Например, в акустике пользуются системой «резонаторов», каждый из которых настроен на определенную частоту. Если на эту систему воздействует акустическое (звуковое) колебание, которое всегда можно представить как смесь «чистых звуков», т. е. гармонических колебаний, то откликнутся те резонаторы, собственная частота которых отвечает спектру этого воздействия. Определяя амплитуду колебания резонаторов, мы тем самым осуществляем гармонический анализ внешнего воздействия.

### Упражнения

1. Чему должна быть равна функция  $F(\omega)$ , чтобы интеграл (4) перешел в сумму (2)?
2. При каком условии сумма (2) будет периодической функцией  $t$ ?

## § 2. Формулы преобразования Фурье

Начнем с выяснения вопроса, который нам понадобится в дальнейшем: что будет, если амплитуда колебания равномерно «размазана» по всей оси частот, другими словами, какая функция  $f(t)$  в формуле (4) имеет спектральную плотность  $F(\omega) \equiv 1$ ? Это значит, что нам надо исследовать интеграл

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega.$$

Хотя этот интеграл и расходящийся (§ III.1), но его можно представить как предел интеграла по конечному промежутку

$$I(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N(t),$$

где

$$I_N(t) = \int_{-N}^N e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{itN} - e^{-itN}}{it} = 2 \frac{\sin tN}{t}$$

(в последнем переходе мы пользовались второй формулой (3)). Полученный результат можно представить в виде

$$I_N(t) = 2\pi N \frac{\sin tN}{\pi tN} = 2\pi N F_1(tN), \quad (8)$$

где  $F_1(t) = \frac{\sin t}{\pi t}$ .

График функции  $F_1(t)$  показан на рис. 192. Можно показать (см. решение упражнения 2 § III.6), что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi, \text{ т. е. } \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t} dt = 1.$$

Функция  $F_1$  имеет главный максимум при  $t=0$ ,  $F_1(0) = \frac{1}{\pi}$ ; слева и справа она, колеблясь, убывает (см. рис. 192).

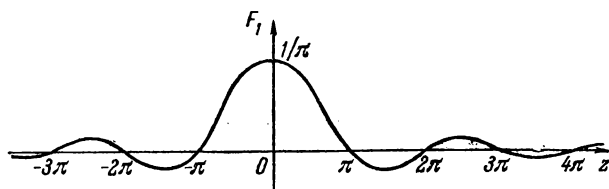


Рис. 192.

Из формул (8) мы видим, что  $I_N(t)$ , с точностью до постоянного множителя  $2\pi$ , получается из функции  $F_1(t)$  в результате того самого преобразования, которое в § VI.1 привело к понятию дельта-функции. Таким образом, переходя к пределу, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = I(t) = 2\pi \delta(t). \quad (9)$$

В этом выводе два пункта нуждаются в уточнении. Прежде всего, при определении дельта-функции в § VI.1 мы пользовались в качестве примеров только функциями, не принимающими отрицательных значений. Однако это условие, по существу, не использовалось,

так что отрицательные значения можно допускать. Во-вторых, что более важно, функция  $F_1(t)$  не является быстро убывающей. В самом деле, при большом  $N$  график функции  $F_N(t) = NF_1(Nt)$  показан на рис. 193; мы видим, что на любом конечном фиксированном интервале  $t_1, t_2$ , не содержащем точки  $t=0$ , он часто колеблется, но амплитуда колебаний не является малой, т. е. функция  $F_N(t)$  не близка к нулю, как в примерах

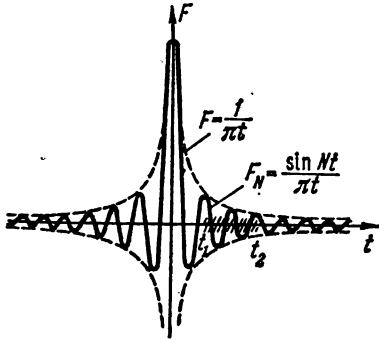


Рис. 193.

§ VI.1. Если бы мы взяли  $\int_{-\infty}^{+\infty} |F_N| dt$ , то такой интеграл расходился бы.

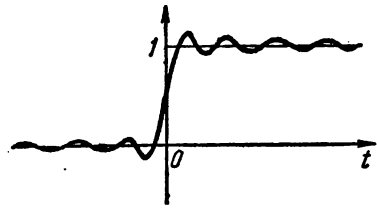


Рис. 194.

Однако и это несущественно, так как интеграл от функции  $F_N(t)$  при увеличении  $N$  ведет себя следующим образом

$$\int_{-\infty}^t F_N(t) dt = \int_{-\infty}^t N \frac{\sin Nt}{\pi Nt} dt = \int_{-\infty}^{Nt} \frac{\sin s}{\pi s} ds \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ 1 & (t > 0). \end{cases}$$

График этого интеграла показан на рис. 194. Таким образом, при больших  $N$  будет

$$\int_{-\infty}^t F_N(t) dt \approx e(t) \quad (\text{см. § VI.3}), \quad \text{т. е. } F_N(t) \approx e'(t) = \delta(t).$$

Итак, дельтообразность функции  $F_N(t)$  при больших  $N$  обеспечивается не ее быстрым убыванием, а ее частыми колебаниями, из-за которых она на конечном расстоянии от  $t=0$  при интегрировании «все равно что тождественный нуль».

Точно такими же рассуждениями можно было бы показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) F_N(t-t_0) dt \rightarrow Q(t_0) \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad \text{в соответствии со свой-$$

ствами дельта-функции. В таком интеграле вклад дает главный максимум  $F_N$  при  $t=t_0$ , где  $F_N = N/\pi$ ; «крылья», т. е. области  $t < t_0 - \varepsilon$  и  $t > t_0 + \varepsilon$ , дают мало, потому что мал интеграл от знакопеременной функции.

С помощью формулы (9) легко рассмотреть случай спектральной плотности, заданной выражением  $F(\omega) = Ae^{i\omega\tau}$  ( $A = \text{const}$ ,  $\tau = \text{const}$ ): подставляя в (4), найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{i\omega\tau} e^{i\omega t} d\omega = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+\tau)} d\omega = 2\pi A \delta(t + \tau).$$

Обратно, отсюда следует, что функции  $f(t) = B\delta(t - \tau)$  соответствует плотность  $F(\omega) = \frac{B}{2\pi} e^{-i\omega\tau}$ .

Теперь можно перейти к случаю произвольной функции  $f(t)$  в интеграле (4). Как мы видели в § VI.2, каждую функцию  $f(t)$  можно представить в виде суммы (более точно, интеграла) дельта-образных функций

$$f(t) = \sum_{\tau} [f(\tau) d\tau] \delta(t - \tau).$$

В силу только что доказанного каждому слагаемому отвечает спектральная плотность  $\frac{f(\tau) d\tau}{2\pi} e^{-i\omega\tau}$ ; значит, всей сумме, т. е. функции  $f(t)$ , отвечает спектральная плотность

$$F(\omega) = \sum_{\tau} \frac{f(\tau) d\tau}{2\pi} e^{-i\omega\tau}.$$

Если вспомнить, что на самом деле это не сумма, а интеграл, и, кроме того, обозначить переменную интегрирования через  $t$ , мы приходим к формуле

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (10)$$

Формулы (10) и (4) называются *формулами преобразования Фурье*. По ним мы переходим от любой функции  $f(t)$ , конечной при  $t \rightarrow \pm\infty$  (это нужно для того, чтобы интеграл (10) имел смысл), к ее спектральной плотности и, обратно, по спектральной плотности восстанавливаем функцию. Эти формулы удивительно симметричны, с точностью до постоянного множителя  $\frac{1}{2\pi}$  и знака в показателе.

Если  $f(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$ , то интеграл (10) в принципе всегда можно вычислить, хотя бы численно.

Рассмотрим частный случай вещественной функции  $f(t)$ . Запишем

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t,$$

получим

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Каждый из интегралов представляет собой вещественную функцию. Вспомним, как мы писали  $F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$ . Ясно, что

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \\ B(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \, dt. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Отсюда легко проверить свойства (5) и (6) плотности  $F(\omega)$  при вещественной функции  $f(t)$ .

Сравнивая (7) и (11), убеждаемся, что коэффициент при  $\cos \omega t$ , т. е.  $A(\omega)$ , в свою очередь, выражается через интеграл от функции  $f(t)$ , умноженной на  $\cos \omega t$ ; аналогичное утверждение относится к  $B(\omega)$ .

Отметим два частных случая интеграла (10). Пусть  $f(t) = C = \text{const.}$  Из формулы

$$f(t) = C = \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ясно, что для того, чтобы получить слева  $C$ , т. е.  $Ce^0 = Ce^{i0t}$ , нужно взять  $F(\omega) = C\delta(\omega)$ . По общему правилу

$$\int \delta(\omega) \psi(\omega) d\omega = \psi(0), \quad \int \delta(\omega) e^{i\omega t} d\omega = e^{i0t} \equiv 1.$$

Аналогично разберем  $f(t) = De^{i\omega_0 t}$ . В этом случае  $F(\omega) = D\delta(\omega - \omega_0)$ , что также легко проверить подстановкой в (4). Те же результаты можно получить и с помощью формулы (9):

$$\frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt = C\delta(-\omega) = C\delta(\omega), \quad \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = D\delta(\omega - \omega_0).$$

Однако такие интегралы взять непосредственно нельзя, приходится рассматривать незатухающую функцию  $C$  или  $De^{i\omega_0 t}$  как предел затухающей, например  $Ce^{-\alpha t^2}$  или  $De^{i\omega_0 t - \alpha|t|}$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Получается довольно длинная и сложная цепь рассуждений. Лучше получить эти формулы как выше, из (9), и запомнить их.

Пусть на осциллятор без затухания с собственной частотой  $\omega_0$  действует сила  $f(t)$ , так что уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x + f(t).$$

Предполагаем, что  $f(t) = 0$  при  $t = -\infty$ , и осциллятор покоился в положении равновесия,  $x = \frac{dx}{dt} = 0$ . Легко построить решение задачи (ср. § VII.5)

$$x = \frac{1}{m\omega_0} \int_{-\infty}^t \sin \omega_0(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Это решение построено с помощью функции Грина этой задачи: толчок, т. е. сила  $\delta(t-\tau)$ , действовавший на покоящийся осциллятор, придает ему скорость  $\frac{1}{m}$ , и начинаются свободные колебания,  $x(t > \tau) = \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau)$ .

Пусть сила  $f(t)$  действует в течение ограниченного времени,  $f=0$  при  $t > T$ . Как будет колебаться осциллятор по окончании действия силы? Разложим

$$\sin \omega_0(t-\tau) = \sin \omega_0 t \cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 \tau,$$

получим

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0} \left[ \sin \omega_0 t \int_{-\infty}^T f(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau - \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^T f(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau \right].$$

Так как  $f(\tau)=0$  при  $t > T$ , то можно вместо  $\int_{-\infty}^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau$  писать

$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau$ ; то же относится к интегралу с синусом. Вспомогательные формулы (11), получим для колебаний после окончания действия силы

$$x(t) = \frac{2\pi}{m\omega_0} [A(\omega_0) \sin \omega_0 t + B(\omega_0) \cos \omega_0 t] \text{ при } t > T. \quad (12)$$

Амплитуда незатухающих колебаний осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$  по окончании действия силы равна

$$x_m = \frac{2\pi}{m\omega_0} \sqrt{A^2(\omega_0) + B^2(\omega_0)} = \frac{2\pi}{m\omega_0} |F(\omega_0)|. \quad (13)$$

Амплитуда зависит, следовательно, только от спектральной плотности действующей силы  $F(\omega)$  при резонансной частоте, т. е. при  $\omega = \omega_0$ . Это и доказывают сделанные в § 1 утверждения.

В физике часто называют *спектральной плотностью* именно  $|F(\omega)|^2$ , а не  $F(\omega)$ . Если сила  $f(t)$  есть, например, давление в звуковой волне или электрическое поле в электромагнитной волне, то  $|F(\omega)|^2 d\omega$  есть величина, пропорциональная энергии звуковых или электромагнитных колебаний, приходящихся на участок спектра от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

После элементарных преобразований можно переписать (12) в виде

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{\pi}{im\omega_0} [F(\omega_0) e^{i\omega_0 t} - F(-\omega_0) e^{-i\omega_0 t}], \\ m \frac{dx}{dt} &= \pi [F(\omega_0) e^{i\omega_0 t} + F(-\omega_0) e^{-i\omega_0 t}] \end{aligned} \right\} (t > T). \quad (14)$$

Попробуем решить задачу о колебаниях осциллятора непосредственно

с помощью интеграла Фурье. Для этого запишем

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (15)$$

и подставим это выражение в уравнение колебаний. Чтобы не заботиться об условии покоя при  $t = -\infty$ , рассмотрим осциллятор с затуханием: ясно, что движение такого осциллятора не зависит от того, что было в далеком прошлом.

Итак, мы рассматриваем уравнение

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - h \frac{dx}{dt} + f(t). \quad (16)$$

Подставляя  $x$  и  $f$  в виде Фурье-интегралов, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) (-m\omega^2 + m\omega_0^2 + i\omega h) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Отсюда сразу находим

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega h}. \quad (17)$$

Если затухание мало, то  $X(\omega)$  особенно велико при тех значениях  $\omega$ , при которых в знаменателе остается только малая величина  $i\omega h$ . Это происходит при  $\omega_0^2 - \omega^2 = 0$ , т. е. при  $\omega = \pm \omega_0$ . Следовательно, в Фурье-образе функции  $x(t)$  особенно велики  $X(\omega_0)$  и  $X(-\omega_0)$ . В пределе при незатухающих колебаниях, т. е. при  $h \rightarrow 0$ , методами теории комплексного переменного можно получить из (15) и (17) выражение (14). Подробнее мы на этом здесь не останавливаемся.

Последнее замечание, относящееся к спектральному анализу, заключается в том, что приборы обычно регистрируют только амплитуду колебания различной частоты. Согласно (13) это значит, что определяется только абсолютная величина\*) (модуль) Фурье-образа исследуемой силы  $|F(\omega)|$ . Это относится к уху как регистратору звуковых колебаний, и к глазу, и к спектро스코пу: ведь в спектроскопе определяется только интенсивность света различной частоты.

При этом мы теряем информацию, теряем сведения о фазе  $F(\omega)$ . Представим себе, например, две функции  $F_1(\omega)$  и  $F_2(\omega)$  такие, что  $|F_1(\omega)| = |F_2(\omega)|$ , но сами  $F_1$  и  $F_2$  различны. Это значит, что  $F_2(\omega) = F_1(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$ , где  $\varphi$  — любая вещественная функция. Таким двум Фурье-образам соответствуют различного вида  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ :

$$f_1(t) = \int F_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad f_2(t) = \int F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

---

\*) Напомним, что для вещественной силы  $F(-\omega) = F^*(\omega)$ , так что  $|F(-\omega)| = |F(\omega)|$ , знак  $\omega$  несуществен, достаточно рассмотреть  $\omega > 0$ .

Однако если  $f(t)$  есть давление воздуха в звуковой волне, то наш слух воспримет одинаковые звуки, не сумеет отличить  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Чтобы отличить  $f_1$  от  $f_2$ , кривую  $f(t)$  нужно записать быстродействующим манометром.<sup>1</sup> Лишь в последнее время начались энергичные поиски способов изучения фазы  $F(\omega)$  в случае световых волн.

К вопросу о роли фазы мы вернемся в § 8.

### Упражнения

1. Найдите спектральную плотность функции  $f(t) = e^{-\alpha|t|}$  ( $\alpha > 0$ ). Перейдя к пределу при  $\alpha \rightarrow +0$ , получите спектральную плотность функции  $f(t) \equiv 1$ . Из формулы (4) для этого примера выведите формулу (I.1).

2. Получите в явной форме ограниченное при  $t \rightarrow \pm \infty$  решение уравнения (16).

## § 3. Причинность и дисперсионные соотношения

В § VII.5 мы видели, что решение уравнения (16) получается из решения  $G(t, \tau)$  (так называемой функции Грина) аналогичного уравнения со специальным неоднородным членом

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + m \omega_0^2 x = \delta(t - \tau)$$

по формуле

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

На основании § VI.2 подобный же вид имеет решение любой линейной задачи; при этом  $f(t)$  играет роль входного сигнала, а  $x(t)$  — роль «отклика» рассматриваемой системы на этот сигнал. Функция  $G(t; \tau)$  тогда представляет собой отклик на единичный мгновенный импульс, действовавший на систему в момент  $\tau$ .

В § VI.2 мы видели, что аналогичный вид имеет результат воздействия на линейную систему и в случае, когда независимой переменной служит пространственная координата (именно этот случай там разбирался более подробно). Оказывается, что если независимой переменной служит время с его специфической односторонней направленностью, то соответствующая функция Грина обладает важными свойствами совершенно общего характера, к обсуждению которых мы сейчас переходим.

Если параметры рассматриваемой линейной системы (например, осциллятора), на которую действуют сигналы, не меняются с течением времени, то все воздействия и соответствующие отклики допускают произвольный сдвиг во времени. Это значит, что тогда  $G = G(t - \tau)$  и потому

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (18)$$



Введем в рассмотрение спектральные плотности функций  $x(t)$ ,  $f(t)$  и  $2\pi G(t)$  (множитель  $2\pi$  поставлен для упрощения последующих формул):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \\ f(t) &= \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad 2\pi G(t) = \int L(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (19)$$

все интегралы берутся от  $-\infty$  до  $\infty$ . Естественно, что при этом мы будем считать все участвующие функции времени конечными при  $t \rightarrow \pm \infty$ , так как только для таких функций мы рассматриваем Фурье-представление. (Это требование конечности неявно фигурировало и при построении решения (17), именно оно выделило нужное нам решение уравнения (16) из двухпараметрического семейства всех его решений.) Подставляя (18) в (19) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \int X(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \int \left[ G(t-\tau) \int F(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega \right] d\tau = \\ &= \iint G(t-\tau) F(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega d\tau = \int F(\omega) \left[ \int G(t-\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \right] d\omega. \end{aligned}$$

Положив здесь  $t-\tau = \tau_1$ , получим

$$\begin{aligned} \int F(\omega) \left[ \int G(\tau_1) e^{i\omega \cdot (t-\tau_1)} d\tau_1 \right] d\omega &= \\ = \int F(\omega) e^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int [2\pi G(\tau_1)] e^{-i\omega \tau_1} d\tau_1 \right\} d\omega &= \int F(\omega) L(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Сравнивая последний интеграл с исходным, заключаем, что

$$X(\omega) = L(\omega) F(\omega).$$

Итак, Фурье-образы входного и выходного сигналов связаны очень просто: второй получается из первого умножением на *передаточную функцию*  $L(\omega)$ . Например, из формулы (17) видно, что для простейшего линейного осциллятора передаточная функция имеет вид

$$L(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i h \omega}. \quad (20)$$

Обратно, задаваясь передаточной функцией  $L(\omega)$  и вычисляя функцию Грина  $G(t)$ , можно перейти к формуле (18) для преобразования сигналов. При этом возникает следующий интересный вопрос. Пусть  $L(\omega)$  представляет собой передаточную функцию реального преобразователя сигналов. Тогда должен выполняться закон *причинности*, согласно которому отклик не должен возникнуть раньше, чем был послан сигнал. Математически этот закон равносильно требованию, чтобы  $G(t-\tau) \equiv 0$  при  $t < \tau$ , т. е.  $G(t) \equiv 0$  при  $t < 0$  (Поэтому верхний предел интеграла (18) для реальных

систем равен не  $\infty$ , а  $t$ , как мы и писали в § VII.5.) Каким требованиям должна удовлетворять функция  $L(\omega)$ , чтобы выполнялся закон причинности? Естественно, что такие требования надо положить в основу теории даже до вывода соответствующих уравнений.

Ограничимся для простоты случаем, когда  $L(\omega)$  имеет вид отношения многочленов:  $L(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$ , причем степень знаменателя превосходит степень числителя по крайней мере на 2. (На самом деле аналогичные рассуждения можно провести для значительно более широкого класса функций  $L(\omega)$ .) Кроме того, будем считать, что  $Q(\omega)$  не имеет вещественных нулей. Тогда для вычисления интеграла

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

при  $t > 0$  можно применить в точности тот самый прием, посредством которого мы вычислили интеграл (V.36), однако взамен комплексной плоскости  $z$  теперь надо рассматривать комплексную плоскость  $\omega$ . При этом «закрывающая» полуокружность проводится, подобно рис. 67, в верхней полуплоскости  $\omega$ , так как при  $t > 0$  в этой полуплоскости будет  $|e^{i\omega t}| \leq 1$  (тогда как в нижней полуплоскости  $|e^{i\omega t}|$  принимает как угодно большие значения). На основании общей теоремы (V.31) о вычетах получаем, что при  $t > 0$

$$G(t) = i \sum_{\text{Im } \omega_k > 0} \text{Выч}_{\omega=\omega_k} \{L(\omega) e^{i\omega t}\} \quad (t > 0), \quad (21)$$

причем в правой части суммирование производится по всем особым точкам (полюсам) функции  $L(\omega)$ , т. е. нулям многочлена  $Q(\omega)$ , лежащим в верхней полуплоскости,  $\text{Im } \omega > 0$ .

Аналогично рассматривается случай  $t < 0$ . Тогда на рис. 67 надо воспользоваться на верхней, а нижней полуокружностью, что даст

$$G(t) = -i \sum_{\text{Im } \omega_k < 0} \text{Выч}_{\omega=\omega_k} \{L(\omega) e^{i\omega t}\} \quad (t < 0). \quad (22)$$

Отсюда, в силу произвольности  $t$ , заключаем, что условием выполнения закона причинности, т. е.  $G(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , является отсутствие особых точек у передаточной функции  $L(\omega)$  в нижней полуплоскости:  $\text{Im } \omega < 0$ . В частности, нетрудно проверить, что передаточная функция (20) удовлетворяет этому условию.

Полученное условие можно истолковать еще следующим образом. Так как функция влияния  $G(t)$  при  $t \neq 0$  удовлетворяет однородному уравнению, то из формул (21) и (22) видно, что каждой особой точке  $\omega_k = \alpha_k + i\beta_k$  передаточной функции отвечает слагаемое вида  $e^{i\omega_k t} = e^{-\beta_k t} e^{i\alpha_k t}$  в решениях однородного уравнения. Если все  $\omega_k$  находятся в верхней полуплоскости, то все  $\beta_k > 0$ , и потому все эти слагаемые затухают при  $t \rightarrow \infty$ : Так и должно быть, если

система только преобразует сигналы: не имеет собственных источников энергии. Таким образом, физический эквивалент условия о расположении особых точек передаточной функции состоит во внутренней энергетической устойчивости системы, т. е. в затухании возбуждающейся в ней энергии. (Отметим, что можно было бы рассматривать и линейные системы с внутренними источниками энергии, т. е. неустойчивые; тогда для соблюдения закона причинности пришлось бы отказаться от требования ограниченности решений при  $t \rightarrow \infty$ .)

Можно указать еще одно важное условие, равносильное выполнению закона причинности. Для вывода его рассмотрим интеграл

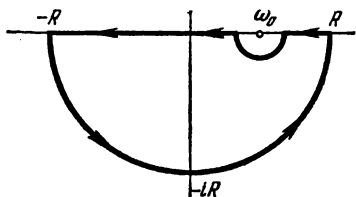


Рис. 195.

$$I = \oint_{(L)} \frac{L(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega, \quad (23)$$

распространенный по контуру рис. 195, где  $\omega_0$  — фиксированное вещественное значение  $\omega$ . Выполнение закона причинности равносильно

отсутствию особых точек внутри  $(L)$ , а потому, в силу произвольности  $\omega_0$ , условию  $I = 0$ . Пусть теперь  $R \rightarrow \infty$ , а радиус маленькой окружности  $\epsilon \rightarrow 0$ . Тогда, рассуждая как в § V.9, получим, что интеграл по большой окружности стремится к нулю. Интеграл по горизонтальным отрезкам стремится к

$$-V.p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega, \quad (24)$$

где буквами V.p (от английского value principal, главное значение) обозначено так называемое *главное значение по Коши*, т. е., по определению,

$$V.p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{\omega_0 - \epsilon} + \int_{\omega_0 + \epsilon}^{\infty} \right].$$

(Такое осложнение вызвано расходимостью интеграла (24) при  $\omega = \omega_0$  в обычном смысле § III.1.) Наконец, интеграл по маленькой полуокружности стремится к

$$L(\omega_0) \int \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} = -\pi i L(\omega_0).$$

Переходя в равенстве (23) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$-V.p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega - \pi i L(\omega_0) = 0, \text{ т. е.}$$

$$L(\omega_0) = \frac{i}{\pi} V.p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega.$$

Представляя  $L(\omega)$  в виде  $\operatorname{Re} L(\omega) + i \operatorname{Im} L(\omega)$  и отделяя в последнем равенстве вещественную часть от мнимой, получаем так называемые *дисперсионные соотношения* для передаточной функции

$$\operatorname{Re} L(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} L(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega,$$

$$\operatorname{Im} L(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} L(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega,$$

эквивалентные, как мы видим, закону причинности. Эти соотношения играют важную роль в квантовой механике. Они позволяют получить полезные утверждения даже для систем, для которых соответствующая теория еще не разработана, и потому вид уравнений неизвестен.

На законе причинности основана неосуществимость шуточного приспособления, предложенного в статье Р. Хагедорна «Причинность и дисперсионные соотношения» (Успехи физ. наук, **91** (1967), стр. 151), для фотографирования в полной темноте, когда источник света еще не включен. Пусть в темноте произведена кратковременная вспышка. Она описывается дельта-функцией, спектральное представление которой содержит гармоники вида  $e^{i\omega t}$ , присутствующие во все моменты времени. В статье предлагается установить фильтр, отсеивающий все гармоники, кроме какой-то определенной, в результате чего мы получим монохроматический свет, действующий не только после, но и до вспышки! Но это явно абсурдно, невозможность предлагаемого фильтрования вытекает из закона причинности. Можно показать и на основе дисперсионных соотношений, что фильтр, пропускающий лишь одну частоту, невозможен. Закон пропускания всякого фильтра таков, что сумма гармоник от любой вспышки должна тождественно равняться нулю до вспышки.

## § 4. Свойства преобразования Фурье

Будем называть функцию  $f(t)$  *прообразом*, а соответствующую ей функцию  $F(\omega)$  — ее *образом* при преобразовании Фурье. Само преобразование Фурье (иначе говорят *оператор Фурье*, ср. § VI.2) определяется формулой (10), по ней мы переходим от прообраза к образу. Формула (4), по которой мы переходим от образа к прообразу, определяет обратное преобразование Фурье.

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Фурье. Прежде всего оно линейно, т. е. при сложении прообразов складываются и образы, при умножении прообраза на константу образ умножается на ту же константу. Это свойство сразу вытекает из аналогичных свойств интеграла и было уже, по существу, применено нами в § 2,

когда мы воспользовались принципом суперпозиции при выводе формулы (10). (Физически оно вытекает из линейности рассматриваемых осцилляторов.) Естественно, что и обратное преобразование также является линейным.

При «сдвиге» образа на постоянную  $a$  его образ умножается на  $e^{-ia\omega}$ . В самом деле, после сдвига получается функция  $f(t-a)$ , а ее спектральная плотность равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-i\omega t} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega(\tau+a)} d\tau = \\ &= e^{-i\omega a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = e^{-i\omega a} F(\omega) \end{aligned}$$

(сделана подстановка  $t-a=\tau$ ).

Это свойство особенно ясно на отдельных гармониках: ведь если гармонику  $e^{i\omega_0 t}$  сдвинуть на  $a$ , то получится  $e^{i\omega_0(t-a)} = e^{-ia\omega_0} e^{i\omega_0 t}$ , т. е. она умножится на  $e^{-ia\omega_0}$ ; поэтому и ее образ, т. е.  $\delta(\omega-\omega_0)$ , умножится на  $e^{-ia\omega_0}$  или, что то же для этой функции, на  $e^{-ia\omega}$ . А поскольку все эти образы получают одинаковый множитель, то и их сумма, т. е.  $F(\omega)$ , получит тот же множитель.

Аналогично проверяется, что если образ сдвинуть на  $a$ , то прообраз умножится на  $e^{iat}$ . Именно это свойство инвариантности, с точностью до постоянного множителя, функции  $e^{i\omega t}$  относительно сдвигов, вместе с возможностью суперпозиции, и является причиной того, что эта функция играет такую роль в преобразовании Фурье. Естественно, что при изучении процессов, подчиняющихся линейным уравнениям, однородным во времени, надо опираться на функции, которые сами допускают сдвиг во времени\*).

Более подробно будем рассматривать преобразования семейства решений поставленной задачи. Принято называть некоторую совокупность преобразований *группой преобразований*, если она вместе с любыми двумя преобразованиями содержит преобразование, получающееся в результате их последовательного выполнения, и вместе с каждым преобразованием содержит обратное преобразование. Например, группу преобразований образует совокупность умножений на константы, отличные от нуля (последнее нужно для существования обратного преобразования); при этом преобразовании каждая функция  $f(t)$  переходит в  $Cf(t)$ . Другим важным примером служит группа сдвигов, при которых каждая функция  $f(t)$  переходит

\*) При этом сами уравнения могут быть не только дифференциальными. Типичное интегральное уравнение, однородное во времени:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

в  $f(t+\tau)$  (постоянная  $\tau \geq 0$  определяет сдвиг). Если изучается линейная задача, однородная во времени, то ее общее решение (т. е. семейство всех решений) должно быть инвариантным относительно обеих этих групп преобразований. В линейной алгебре доказывается, что это общее решение, включающее, вообще говоря, много параметров, можно представить в виде суммы однопараметрических семейств решений, причем эти семейства также инвариантны относительно указанных групп преобразований (исключения будут указаны ниже).

Однако нетрудно проверить, что однопараметрическое семейство функций, обладающее такой инвариантностью, обязательно имеет вид  $Ce^{pt}$  ( $C$  произвольно, оно служит параметром внутри семейства,  $p$  фиксировано, оно служит параметром самого семейства). В самом деле, так как семейство однопараметрическое и инвариантное относительно умножения на постоянные, то оно исчерпывается функциями вида  $Cf(t)$ , где  $C$  произвольное, а  $f(t)$  — какая-то одна функция семейства. Но из инвариантности относительно сдвигов вытекает, что  $f(t+\tau) = C_\tau f(t)$ , откуда

$$f'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C_\tau f(t) - f(t)}{\tau} = \left[ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C_\tau - 1}{\tau} \right] f(t).$$

Обозначив предел, стоящий в квадратных скобках, буквой  $p$ , приходим к дифференциальному уравнению  $f'(t) = pf(t)$ , откуда  $f(t) = e^{pt}$ , с точностью до постоянного множителя.

Отсюда получаем, что если семейство функций инвариантно относительно обеих указанных групп преобразований и имеет, например, две степени свободы, то оно имеет вид  $C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Однако если изучаемая задача содержит параметры и при некоторых значениях этих параметров получится  $p_1 = p_2$ , то вид двухпараметрического семейства решений меняется. В этом случае аналогично § VII.3 можно показать, что указанное семейство приобретает вид  $C_1 e^{p_1 t} + C_2 t e^{p_1 t}$ . (При этом однопараметрическое семейство  $C_2 t e^{p_1 t}$  само по себе не инвариантно относительно сдвигов.) Если совпадают три значения  $p_1 = p_2 = p_3$ , то трехпараметрическое семейство решений приобретает вид  $C_1 e^{p_1 t} + C_2 t e^{p_1 t} + C_3 t^2 e^{p_1 t}$  и т. д.

Из доказанных свойств следует, что при дифференцировании функции  $f(t)$  ее Фурье-образ умножается на  $i\omega$ . В самом деле, образом функции  $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$  служит

$$\frac{1}{h} e^{ih\omega} F(\omega) - \frac{1}{h} F(\omega) = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h} F(\omega) = \left[ i\omega + \frac{(i\omega)^2}{2} h + \dots \right] F(\omega).$$

Переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получаем наше утверждение. Аналогично проверяется, что при дифференцировании образа прообраз умножается на  $-it$ . В этих свойствах можно убедиться и

непосредственно, составляя производную от интеграла по параметру,

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \int F(\omega) e^{i\omega t} dt = \int i\omega F(\omega) e^{i\omega t} dt$$

и также для обратного преобразования

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \frac{dF}{d\omega} = -\frac{i}{2\pi} \int t f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Описанные свойства преобразования Фурье имеют замечательное применение к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Мы использовали их в § 2 при рассмотрении задачи о вынужденных колебаниях осциллятора с трением.

Интересно рассмотреть уравнение свободных колебаний, т. е. уравнение (16) при  $f(t) \equiv 0$ . Совершая преобразование Фурье, получаем

$$(-m\omega^2 + h\omega i + m\omega_0^2) X(\omega) = 0, \quad (25)$$

откуда  $X(\omega) \equiv 0$  и  $x(t) \equiv 0$ . Мы получаем только тривиальное (нулевое) решение. Решения, найденные нами в § VII.3, были неограниченными (экспоненциально большими) при  $t \rightarrow -\infty$  и потому с помощью преобразования Фурье они не получаются; поэтому и в § 2 при решении уравнения (16) у нас получилось только одно решение, не включающее произвольных постоянных. Пусть теперь трение отсутствует, т. е.  $h=0$ . Тогда взамен (25) получаем

$$(-m\omega^2 + m\omega_0^2) X(\omega) = 0, \quad \text{т. е. } (\omega^2 - \omega_0^2) X(\omega) = 0. \quad (26)$$

Могло бы показаться, что отсюда тоже вытекает  $X(\omega) \equiv 0$ . Но на самом деле уравнению (26) удовлетворяет функция

$$X(\omega) = C_1 \delta(\omega - \omega_0) + C_2 \delta(\omega + \omega_0), \quad (27)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Действительно (см. § VI.1),

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_0^2) [C_1 \delta(\omega - \omega_0) + C_2 \delta(\omega + \omega_0)] &= \\ &= C_1 (\omega^2 - \omega_0^2) \delta(\omega - \omega_0) + C_2 (\omega^2 - \omega_0^2) \delta(\omega + \omega_0) = \\ &= C_1 (\omega_0^2 - \omega_0^2) \delta(\omega - \omega_0) + C_2 [(-\omega_0)^2 - \omega_0^2] \delta(\omega + \omega_0) = 0. \end{aligned}$$

Из (27) по формуле обращения (4) получаем

$$x(t) = \int [C_1 \delta(\omega - \omega_0) + C_2 \delta(\omega + \omega_0)] e^{i\omega t} d\omega = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Мы приходим к решению, известному из § VII.3.

Рассмотрим теперь Фурье-образы некоторых функций, о которых говорилось в § VI.3; при этом оператор Фурье будем обозначать буквой  $\mathcal{F}$ . Формула (9) означает, что

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi}; \quad (28)$$

нетрудно проверить, что, и обратно,  $\mathcal{F}[1] = \delta(\omega)$ .

Чтобы вычислить  $\mathcal{F} [\text{sign } t]$  (см. § VI.3), заменим сначала в правой части (10) пределы интегрирования на  $\pm N$ , где  $N$  велико. Мы получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \text{sign } t \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ - \int_{-N}^0 e^{-i\omega t} dt + \int_0^N e^{-i\omega t} dt \right] = \frac{1 - \cos \omega N}{\pi i \omega}.$$

График этой функции, умноженной на  $i$ , показан на рис. 196; при большом

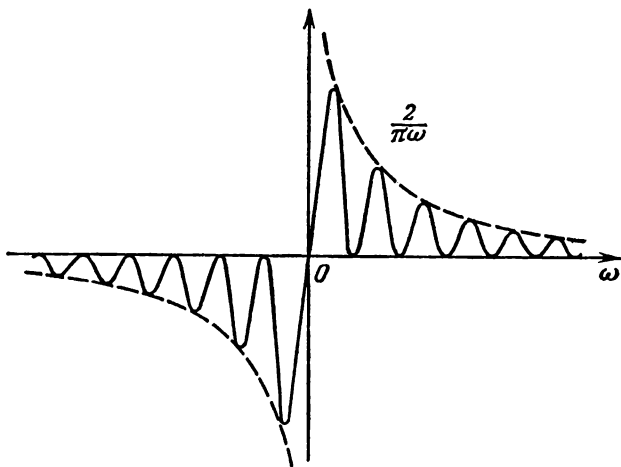


Рис. 196.

$N$  он часто осциллирует вокруг графика  $\frac{1}{\pi\omega}$ . Поэтому на основании тех же соображений, что в § 2, естественно предположить, что

$$\mathcal{F} [\text{sign } t] = \frac{1}{\pi i \omega}, \quad (29)$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi i \omega} e^{i\omega t} d\omega = \text{sign } t.$$

И действительно, если понимать интеграл в смысле главного значения, то в справедливости последней формулы можно убедиться, как в § 3.

Из формулы (29) вытекает Фурье-образ единичной функции

$$\mathcal{F} [e(t)] = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign } t \right] = \frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{2\pi i \omega}. \quad (30)$$

Эта формула находится в согласии с (28), так как из (30) вытекает, что

$$\mathcal{F} [\delta(t)] = \mathcal{F} [e'(t)] = i\omega \mathcal{F} [e(t)] = \frac{1}{2\pi}.$$



Из числа других свойств преобразования Фурье остановимся на асимптотическом поведении Фурье-образа при  $\omega \rightarrow \pm \infty$ . Будем для простоты считать, что функция  $f(t)$  отлична от нуля лишь на конечном интервале  $t$  или во всяком случае стремится к нулю при  $t \rightarrow \pm \infty$  вместе со своими производными. Тогда не следует думать, что и  $F(\omega)$  обязательно обладает теми же свойствами при  $\omega \rightarrow \pm \infty$ : асимптотическое поведение  $F(\omega)$  зависит совсем от другого.

Из формулы (10) сразу следует, что если  $f(t) = \delta(t - t_0)$ , то  $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t_0}$ , откуда  $F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  остается ограниченной, но не стремится к нулю. Можно показать, что так будет всегда, если  $f(t)$  содержит дельта-слагаемые.

Пусть теперь  $f(t)$  не имеет дельта-слагаемых, но обладает так называемыми *разрывами 1-го рода*, т. е. точками  $t_0$ , для которых пределы  $f(t_0 - 0)$  и  $f(t_0 + 0)$  конечны, но не равны друг другу. (Типичная функция с разрывом 1-го рода — это единичная функция, показанная на рис. 72.) Тогда, как было показано в § VI.3,  $f'(t)$  будет обладать дельта-слагаемыми. Но в силу стр. 533 функция  $f'(t)$  имеет спектральную плотность  $i\omega F(\omega)$ , и потому согласно предыдущему получаем, что  $i\omega F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  ограничена, но не стремится к нулю. Значит, в рассматриваемых предположениях  $F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  стремится к нулю со скоростью  $\frac{1}{\omega}$ .

Если сама функция  $f(t)$  непрерывна, но ее производная имеет разрывы 1-го рода (это значит, что график функции  $f(t)$  имеет изломы, как на рис. 76), то аналогично получаем, что  $F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  имеет порядок  $\frac{1}{\omega^2}$  и т. д. Наконец, если производные любого порядка от  $f(t)$  непрерывны, то  $F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени  $|\omega|$ ; так будет, например, для  $f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$  (см. формулу (V.40), в правой части которой при  $\omega < 0$  надо  $\omega$  заменить на  $|\omega|$ ),  $e^{-at^2}$  (см. § 5) и т. д.

Интеграл Фурье при большом  $\omega$  — это интеграл от быстроколеблющейся функции. Подобные интегралы мы рассматривали в § III.4, и теперь можно лучше понять, почему там в асимптотических формулах участвовали значения подынтегральной функции и ее производных только на концах интервала интегрирования. В самом деле, там рассматривались интегралы типа

$$\int_a^b f(t) e^{i\omega t} dt$$

при  $\omega \rightarrow \pm \infty$ . Однако такой интеграл можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{i\omega t} dt,$$

где функция  $\tilde{f}(t)$  получается из  $f(t)$  продолжением вне отрезка  $a \leq t \leq b$  тождественным нулем. Таким образом, мы получаем (с точностью до несущественного знака у  $\omega$  и коэффициента  $\frac{1}{2\pi}$ )

Фурье-образ функции  $\tilde{f}(t)$ . Но эта функция и ее производные имеют скачки при  $t=a$  и  $t=b$ , где  $f(t)$  сменяется на тождественный нуль; в силу сказанного выше этими особенностями и определяются коэффициенты в асимптотических формулах, если сама функция  $f(t)$  достаточно гладкая. Ясно также, что если функция  $f(t)$  или ее производные имеют разрывы между  $a$  и  $b$ , то и эти разрывы скажутся на асимптотических формулах, о чем мы упоминали в § III.4.

С другой стороны, методика интегрирования по частям, на которой был основан § III.4, приносит пользу в теории преобразования Фурье, так как дает возможность не только выяснить порядок Фурье-образа при  $\omega \rightarrow \pm \infty$ , но и получить соответствующие асимптотические формулы.

Рассмотрим, например, Фурье-образ функции  $f(t) = \frac{1}{1+|t|}$ :

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|t|} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Здесь функция  $f(t)$  имеет особенность (излом) при  $t=0$ . Интегрирование по частям дает

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1+|t|} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \frac{-1}{(1+|t|)^2} \operatorname{sign} t dt \right],$$

где  $\operatorname{sign} t = \frac{d|t|}{dt} = \frac{|t|}{t}$ . Значит,

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign} t}{(1+|t|)^2} e^{-i\omega t} dt.$$

Здесь подынтегральная функция уже имеет скачок при  $t=0$ , равный 2, поэтому вторичное интегрирование по частям дает дельта-слагаемое, которое порождает главный член асимптотической формулы

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{i}{\omega} \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \left[ 2\delta(t) + \frac{-2}{(1+|t|)^3} \right] dt \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\omega^2} - \frac{2}{2\omega^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|t|)^3} e^{-i\omega t} dt \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

Так как последний интеграл при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  стремится к нулю, то

мы получаем асимптотическое выражение

$$F(\omega) \approx \frac{1}{\pi \omega^2}, \quad (32)$$

которое является более точным, чем общёе утверждение, что  $F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  должно иметь порядок  $\frac{1}{\omega^2}$ .

Выражение (32) можно уточнить с помощью повторного интегрирования по частям последнего интеграла в правой части (31). Вычисления, которые мы предоставляем читателю, дают

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\omega^2} - \frac{6}{\omega^4} + \frac{12}{\omega^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|t|)^8} e^{-i\omega t} dt \right],$$

что приводит к асимптотическому выражению

$$F(\omega) \approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{6}{\omega^4} \right),$$

более точному, чем (32). Этот процесс можно продолжать.

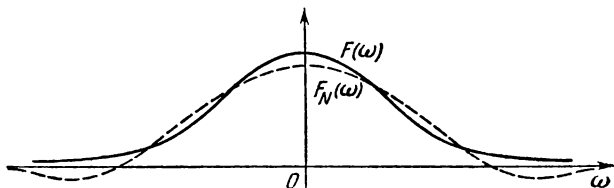


Рис. 197.

Остановимся еще на следующем вопросе. В § 5 будет показано, что Фурье-образом функции  $f(t) = e^{-t^2}$  служит функция  $F(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2/4}$ . Здесь  $f(t)$  и ее производные совсем не имеют особенностей, поэтому и получилось, что  $F(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени  $|\omega|$ . В то же время, в силу сказанного выше, при как угодно большом фиксированном  $N$  функция

$$F_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt,$$

аппроксимирующая  $F(\omega) = F_\infty(\omega)$ , при  $\omega \rightarrow \pm \infty$  имеет порядок  $|\omega|^{-1}$ .

Как это согласовать?

Дело здесь в том, что при больших  $N$  коэффициенты разложения функции  $F_N(\omega)$  по отрицательным степеням  $\omega$  становятся весьма

малыми, так что члены с  $\omega^{-1}$ ,  $\omega^{-2}$  и т. д. в пределе пропадают. Это разложение легко получить с помощью интегрирования по частям, оно начинается с членов

$$F_N(\omega) \sim \frac{1}{\pi} e^{-N^2} \frac{\sin N\omega}{\omega} - \frac{2}{\pi} N e^{-N^2} \frac{\cos N\omega}{\omega^2} + \dots$$

Например, уже при  $N=5$  коэффициент при  $\omega^{-1}$  имеет порядок  $10^{-12}$ , т. е. весьма мал. Графики функций  $F(\omega)$  и  $F_N(\omega)$  схематически показаны на рис. 197. Различие в характере их «крыльев» при больших  $N$  практически не играет роли, так как сами значения получаются очень малыми.

### Упражнения

1. Докажите, что если образом функции  $f(t)$  служит  $F(\omega)$ , то образом функции  $f(at)$  ( $a = \text{const}$ ) служит  $\frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ .
2. Пользуясь упражнением 1 к § 2, найдите Фурье-образы функций  $e^{i\beta t - \alpha|t - t_0|}$ ,  $\frac{te^{-\alpha|t|}}{|t|}$  ( $\alpha > 0$ ).

## § 5. Преобразование колокола и принцип неопределенности

Интересный пример преобразования Фурье дает функция

$$f(t) = Ce^{-at^2} \quad (C, a = \text{const} > 0) \quad (33)$$

(график ее имеет вид колокола, см. рис. 187). Формула (10) дает

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-at^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - i\omega t} dt.$$

Преобразуя показатель по формуле

$$-at^2 - i\omega t = -a \left( t^2 + \frac{i\omega}{a} t \right) = -a \left( t + \frac{i\omega}{2a} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}$$

и обозначая  $\sqrt{a} \left( t + \frac{i\omega}{2a} \right) = z$ , получаем

$$F(\omega) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left( t + \frac{i\omega}{2a} \right)^2} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} dt = \frac{C}{2\pi \sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{(L)} e^{-z^2} dz, \quad (34)$$

где  $(L)$  — прямая в комплексной плоскости  $z$ , параллельная вещественной оси и проходящая через точку  $z = \frac{\omega}{2\sqrt{a}} i = y i$ .

Сейчас мы покажем, что интеграл

$$\int_{(L)} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2} dx = I_y \quad (35)$$

на самом деле не зависит от  $y$ . Для этого продифференцируем  $I_y$  по параметру  $y$  (см. § III.6), получим

$$\frac{dI_y}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} e^{-(x+iy)^2} dx = -2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2} (x+iy) dx.$$

Однако последний интеграл берется, т. е.

$$\frac{dI_y}{dy} = ie^{-(x+iy)^2} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = ie^{-x^2+y^2} e^{-2ixy} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = 0$$

(полученная после интегрирования функция обращается в нуль на обоих пределах). Итак,  $I_y = \text{const} = I_y|_{y=0}$ . Полагая  $y=0$  в (35), мы приводим к известному интегралу (§ IV.7), т. е.

$$\int_{(L)} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Подставляя найденное значение в (34), находим спектральную плотность «колокола» (33):

$$F(\omega) = \frac{C}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \quad (36)$$

Мы видим, что зависимость плотности от  $\omega$  получилась аналогичная, колоколообразная, но с другими коэффициентами.

Из формул (33) и (36) вытекает важное следствие. Колоколообразная функция ни при каком значении переменной не обращается точно в нуль. Тем не менее можно разумно определить ширину колокола (ср. § III.2). Например, если принять за ширину колокола тот его участок, на котором его высота понижается в  $e$  раз от максимальной, то ширина колокола (33) равна  $\Delta t = 2/\sqrt{a}$ , тогда как ширина преобразованного колокола (36) равна  $\Delta\omega = 4\sqrt{a}$ . Таким образом, если менять  $a$ , то один из колоколов становится уже, а другой — во столько же раз шире, так что

$$\Delta t \Delta\omega = 8 = \text{const}. \quad (37)$$

Можно показать, что аналогичное правило справедливо при любой форме преобразуемых функций. Этот результат имеет принципиальное значение. Допустим, что мы рассматриваем, как в § 2, воздействие силы  $f(t)$  на систему осцилляторов с различными собственными частотами. Мы видим, что чем более «локализована» (сжата) внешняя сила во времени, тем более «размазан» ее спектр, т. е. тем большее число осцилляторов с различными частотами эта сила возбуждает с примерно одинаковой амплитудой. Обратно, увеличивая эту избирательность, т. е. сокращая спектр, мы вынуждены размазывать внешнее воздействие во времени. Эта невозможность одновременно

и локализовать внешнее воздействие во времени и усилить избирательность этого воздействия—одно из проявлений так называемого принципа неопределенности, играющего фундаментальную роль в современной физике.

Из принципа неопределенности вытекает, в частности, что если некоторая система колеблется с переменной частотой, то бессмысленно говорить о значении частоты в данный момент времени: например, в акустике нельзя говорить о точной высоте звука в данный момент времени и т. п. Интервал времени, на протяжении которого определяется эта частота, нельзя брать значительно меньшим периода колебаний, звук определенной высоты не может продолжаться слишком мало времени!

В квантовой механике энергия частицы связана с частотой волновой функции. Волновая функция  $\psi$  частицы с определенной энергией  $E$  пропорциональна  $e^{-iEt/\hbar}$ , где  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек—постоянная Планка (сам Планк ввел в физику величину  $\hbar = 6,6 \times 10^{-27}$  эрг·сек; удобнее писать формулы с  $\hbar = h/2\pi$ ). Если частица наблюдается в течение малого интервала времени  $\Delta t$ , то, как следует из предыдущего, частоту ее волновой функции, т. е. величину  $E/\hbar$ , можно узнать лишь с малой точностью. Получается соотношение

$$\Delta E \cdot \Delta t \text{ имеет порядок } \hbar.$$

Аналогично у частицы с определенным количеством движения по оси  $x$ ,  $p = mv_x$ , волновая функция пропорциональна  $e^{ipx/\hbar}$ . Если известно, что частица находится в определенном промежутке между  $x$  и  $x + \Delta x$ , то волновая функция частицы отлична от нуля только в этом промежутке. Раскладывая волновую функцию в интеграл Фурье, мы приходим к выводу, что количество движения частицы известно лишь с определенной точностью  $\Delta p$ : в интеграле Фурье будут велики члены с  $e^{ipx/\hbar}$ , где  $p_1 < p < p_1 + \Delta p$ . Из сказанного следует, что  $\Delta p \cdot \Delta x$  имеет порядок  $\hbar$ .

Из формул (33) и (36) на основании описанных в § 4 свойств преобразования Фурье вытекает, что

$$\text{если } f(t) = Ce^{-at^2 + i\omega_0 t}, \text{ то } F(\omega) = \frac{C}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4a}}.$$

Вещественная часть функции  $f(t)$  и функция  $F(\omega)$  показаны на рис. 198. Ширина  $\Delta t$  «волнового пакета» (определяемая аналогично тому, как для функции (33)) и ширина  $\Delta \omega$  соответствующего спектра связаны соотношением неопределенности (37), независимо от частоты  $\omega_0$  колебаний. От этой частоты зависит сдвиг спектра по оси частот.

Отметим замечательное приложение преобразования колокола к выводу нормального закона теории вероятностей (§ XIII.8). Пусть случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы, но распределены по одному и тому же закону с плотностью распределения  $\phi(x)$ ; для

простоты будем считать, что среднее значение  $\bar{\xi}_1 = 0$ . Рассмотрим случайную величину  $\eta_k = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega \xi_k}$ , где  $\omega$  — заданная вещественная постоянная. Так как величина  $\eta_k$  принимает значения  $\frac{1}{2\pi} e^{-i\omega x}$  с плотностью вероятности  $\varphi(x)$ , то ее среднее значение

$$\bar{\eta}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \varphi(x) dx = \Phi(\omega),$$

т. е. это как раз Фурье-образ функции  $\varphi(x)$ .

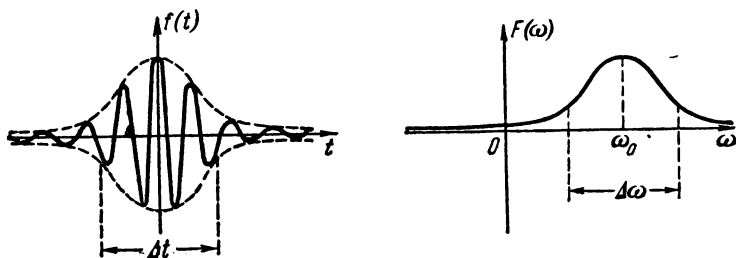


Рис. 198.

Обозначив буквой  $\eta$  произведение величин  $\eta_k$ , получим

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-i\omega(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)} = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-i\omega \xi},$$

где обозначено  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ . Отсюда

$$(2\pi)^{n-1} \eta = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega \xi},$$

т. е. в силу предыдущего абзаца среднее значение величины  $(2\pi)^{n-1} \eta$  служит Фурье-образом функции распределения  $\varphi_n(x)$  величины  $\xi$ .

В § XIII.7 мы видели, что при умножении независимых случайных величин их средние значения также перемножаются. Значит,

$$\overline{(2\pi)^{n-1} \eta} = (2\pi)^{n-1} \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 \dots \bar{\eta}_n = (2\pi)^{n-1} [\Phi(\omega)]^n.$$

Легко проверить, что функция  $\Phi(\omega)$  при  $\omega = 0$  имеет максимум. В самом деле,

$$\Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi},$$

тогда как при прочих  $\omega$

$$|\Phi(\omega)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \varphi(x) dx \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\omega x} \varphi(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi}.$$

Однако на стр. 76—77 мы видели, что в этом случае функцию  $[\Phi(\omega)]^n$  при больших  $n$  можно приближенно заменить на  $Ae^{-c\omega^2}$ , где  $A = e^{n\psi(0)}$ ,  $c = -\frac{1}{2} n\psi''(0)$ ,  $\psi(\omega) = \ln \Phi(\omega)$ .

В нашем примере получаем

$$\Phi(0) = \frac{1}{2\pi}, \quad \Phi'(0) = 0, \\ \Phi''(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx = -\frac{\Delta^2}{2\pi}$$

( $\Delta^2$  — дисперсия величины  $\xi_1$ , см. § XIII.8), откуда

$$\psi(0) = \ln \frac{1}{2\pi}, \quad \psi''(0) = \frac{\Phi''(0)\Phi(0) - [\Phi'(0)]^2}{\Phi^2(0)} = -\Delta^2$$

и потому

$$(2\pi)^{n-1} [\Phi(\omega)]^n \approx (2\pi)^{n-1} e^{n \ln \frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} n \Delta^2 \omega^2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} n \Delta^2 \omega^2}.$$

В силу сказанного выше, получился Фурье-образ функции  $\varphi_n(x)$ . Как видим, он имеет вид колокола. Согласно формулам (33) и (36) (в которых  $\frac{C}{2\sqrt{\pi a}} = \frac{1}{2\pi}$ ,  $\frac{1}{4a} = \frac{n\Delta^2}{2}$ , откуда  $a = \frac{1}{2n\Delta^2}$ ,  $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\Delta}}$ ) получаем функцию распределения величины  $\xi$ :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\Delta}} e^{-x^2/2n\Delta^2}.$$

Мы пришли к нормальному закону (XIII.25).

### Упражнения

1. Докажите принцип неопределенности для функции  $f(t)$ , постоянной и отличной от нуля лишь на конечном интервале.

2. Установите связь принципа неопределенности с результатом упражнения 1 к § 4.



### § 6. Спектральный анализ периодической функции

Пусть внешнее воздействие  $f(t)$  представляет собой периодическую функцию с некоторым периодом  $T > 0$ , т. е.

$$f(t+T) \equiv f(t). \quad (38)$$

Тогда в ее разложении (4) по гармоникам будут участвовать только гармоники  $e^{i\omega t}$ , обладающие тем же свойством (38). Отсюда

$$e^{i\omega(t+T)} \equiv e^{i\omega t}, \text{ т. е. } e^{i\omega T} = 1, \quad i\omega T = 2k\pi i$$

(см. § V.4), и мы получаем, что частота  $\omega$  может принимать значения только

$$\omega = \omega_k = \frac{2k\pi}{T} \quad (k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (39)$$

Таким образом, периодическая функция имеет дискретный спектр, а потому дельтообразную спектральную плотность

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right).$$

Подставляя в (4), находим

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{2k\pi i}{T} t}. \quad (40)$$

Это — так называемый *ряд Фурье*, в который разлагается периодическая функция.

Для вычисления коэффициентов ряда (40) возьмем средние значения обеих частей формулы (40). В силу периодичности функции  $f(t)$  среднее значение левой части равно

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

В правой части среднее значение каждой гармоники равно нулю, так как и при  $\omega \neq 0$

$$\frac{1}{2N} \int_{-N}^N e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2N} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \Big|_{t=-N}^N = \frac{\sin \omega N}{N\omega} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Однако одно слагаемое в правой части (40) при  $k=0$  просто равно постоянной  $a_0$ , и его среднее значение, конечно, тоже равно  $a_0$ .

Поэтому из (40) получаем  $\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = a_0$ .

Для нахождения коэффициента  $a_k$  надо обе части (40) помножить на  $e^{-\frac{2k\pi i}{T} t}$  (при некотором фиксированном  $k$ ), после чего

взять средние значения обеих частей. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получим

$$a_k = \overline{f(t) e^{-\frac{2k\pi i}{T} t}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2k\pi i}{T} t} dt \quad (41)$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Если функция  $f(t)$  вещественная, то часто пользуются другой, вещественной формой ряда Фурье. Для этого в разложении (40) объединяют симметричные члены

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k e^{\frac{2k\pi i}{T} t} + a_{-k} e^{-\frac{2k\pi i}{T} t} \right) = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (a_k + a_{-k}) \cos \frac{2k\pi}{T} t + i(a_k - a_{-k}) \sin \frac{2k\pi}{T} t \right] = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + B_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right). \quad (42) \end{aligned}$$

При этом коэффициенты, в силу (41), равны

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ A_k &= a_k + a_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left( e^{-\frac{2k\pi i}{T} t} + e^{\frac{2k\pi i}{T} t} \right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2k\pi}{T} t dt \\ &\quad (k=1, 2, \dots), \\ B_k &= i(a_k - a_{-k}) = \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \left( e^{-\frac{2k\pi i}{T} t} - e^{\frac{2k\pi i}{T} t} \right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2k\pi}{T} t dt \\ &\quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (43)$$

В правых частях (42) все величины вещественные.

Приведем пример разложения в ряд (42). Рассмотрим «периодическую ступеньку», показанную на рис. 199 жирными линиями.

Здесь  $a_0 = \bar{f} = \frac{M}{2}$ . По формулам (43)

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T M \cos \frac{2k\pi}{T} t dt = \frac{2M}{T} \frac{T}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi}{T} t \Big|_{t=\frac{T}{2}}^T = 0, \\ B_k &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T M \sin \frac{2k\pi}{T} t dt = \frac{2M}{T} \frac{T}{2k\pi} \left( -\cos \frac{2k\pi}{T} t \Big|_{t=\frac{T}{2}}^T \right) = -\frac{M}{k\pi} (1 - \cos k\pi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$B_1 = -\frac{2M}{1\pi}, B_2 = 0, B_3 = -\frac{2M}{3\pi}, B_4 = 0, B_5 = -\frac{2M}{5\pi}, \dots,$$

т. е. мы получаем разложение

$$f(t) = \frac{M}{2} - \frac{2M}{\pi} \left( \frac{1}{1} \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi t}{T} + \dots \right).$$

Вторая частная сумма  $S_2(t)$  и третья частная сумма  $S_3(t)$  этого ряда показаны на рис. 199 пунктиром, причем для простоты они

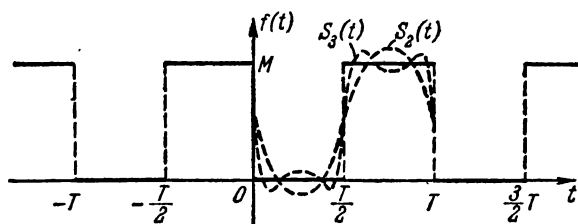


Рис. 199.

показаны только на периоде, по обе стороны они продолжают периодически. Интересно, что в точках разрыва сумма ряда оказывается равной среднему арифметическому (т. е. полусумме) предельных значений функции  $f(t)$  слева и справа\*).

Так как периоду колебаний  $T$  отвечает частота  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_1$  (см. (39)), то из формул (39) и (40) (или (42)) мы видим, что общее, негармоническое колебание с частотой  $\omega = \omega_1$  получается в результате сложения гармонических колебаний с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2 = 2\omega_1$ ,  $\omega_3 = 3\omega_1$  и т. д. Первая частота, т. е.  $\omega_1$ , являющаяся частотой самого колебания, называется основной, и соответствующая ей гармоника также называется основной; остальные частоты и гармоники называются верхними.

Полученные результаты имеют важное значение, в частности, в акустике. Хорошо известно, что высота звука соответствует частоте колебаний воздуха: например, ноте «ля» так называемой первой октавы отвечает частота 440 гц, т. е. 440 колебаний в секунду. Однако известно также, что одна и та же нота, взятая на различных инструментах, имеет различный тембр, т. е. «окраску». От чего же зависит этот тембр? Оказывается, что от верхних гармо-

\*) Обратите также внимание, что частные суммы  $S_n(t)$  для функции  $f(t)$  (рис. 199) на границе ступенек довольно сильно «выскакивают» из них. Это общее свойство  $S_n(t)$  называется *явлением Гиббса*.

ник, наложенных на основную. Каждая из них входит в колебание с определенной амплитудой, и если менять пропорции между этими амплитудами, то будет изменяться и тембр.

Из наших результатов получается еще одно интересное следствие. Мы знаем, что если осциллятор с собственной частотой  $\omega_0$  возбуждать внешней силой с частотой  $\omega$ , то при  $\omega = \omega_0$  наступает резонанс.

Однако на практике оказывается, что резонанс наступает и при  $\omega = \frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{3}, \frac{\omega_0}{4}$  и т. д. При этом существенно, чтобы возбуждающая сила, будучи периодической, не была гармонической! Сила  $f = \cos \frac{\omega_0 t}{2}$  не возбуждает осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$ . Но возьмем другой типичный пример. Пусть осциллятор с частотой  $\omega_0$  возбуждается отдельными толчками; лучший способ — давать по одному толчку на каждом колебании. Лучший момент, когда  $x = 0$ ,  $\frac{dx}{dt} > 0$ ,  $\frac{dx}{dt}$  максимально, будет максимальной и работа силы (мы предполагаем, что сила действует в сторону увеличения  $x$ ). Ясно, что если сила действует по одному разу в каждом периоде, то частота силы совпадает с частотой  $\omega_0$  колебаний.

Теперь изменим действие силы. Пусть сила действует «через раз», например каждое нечетное колебание. Ясно, что и при таком способе действий колебания будут неограниченно усиливаться, будет иметь место резонанс, хотя  $\omega = \omega_0/2$ . Здесь дело в том, что сила  $f = \sum \delta(t - nT)$  ( $n$  — целое), состоящая из отдельных толчков, определенных интервалом  $T$ , особенно богата обертонами. В первом случае  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ; во втором случае редких толчков  $T = 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega}$ , частота силы  $\omega = \omega_0/2$ , но и во втором случае в разложение  $f(t)$  входит член с  $e^{i\omega_0 t} = e^{i2\omega t}$ . Это объясняется как раз наличием верхних частот. Если же сила действует с частотой  $\frac{\omega_0}{3}$ , то она состоит из смеси гармоник с частотами  $\frac{\omega_0}{3}, 2\frac{\omega_0}{3}, 3\frac{\omega_0}{3}, 4\frac{\omega_0}{3}$  и т. д. Из них третья с частотой  $3\frac{\omega_0}{3} = \omega_0$  как раз и возбуждает резонанс.

Напротив, периодическая внешняя сила с частотой  $2\omega_0, 3\omega_0, \dots$  не вызывает резонанса, а возбуждает в рассматриваемом осцилляторе только верхние гармоники.

### Упражнение

Разложите в ряд Фурье функцию: а)  $A |\sin \alpha t|$ ; б) периодическую с периодом  $T$  и равную  $ht$  при  $0 < t < T$ ; в)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A \delta(t - 2nT)$ .

## § 7. Пространство Гильберта

Разложения, указанные в § 6, имеют замечательное геометрическое истолкование. Мы уже указывали в § IX.6, что любую совокупность объектов, в которой можно производить линейные действия (сложение этих объектов и умножение их на скаляры, т. е. числа), можно истолковать как многомерное векторное пространство. Но ведь над функциями  $f(t)$ , рассматриваемыми на некотором интервале оси  $t$  (этот интервал может быть конечным или бесконечным и, в частности, может совпадать со всей осью, но он должен быть одним и тем же для всех рассматриваемых функций), такие действия возможно производить! Значит, эти функции можно рассматривать как векторы, они образуют векторное пространство. Однако характерной особенностью пространства функций является его бесконечномерность: ведь при выборе произвольной функции  $f$  имеется бесконечное число степеней свободы, так как если, например, указать любое конечное число значений  $f(t_k)$ , то эту функцию еще можно выбрать многими способами при остальных значениях  $t$ .

Будем сначала считать, что рассматриваемые функции принимают вещественные значения.

В пространстве функций можно ввести скалярное произведение по формуле

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(t) \varphi(t) dt, \quad (44)$$

где  $a$  и  $b$  — начало и конец того интервала оси  $t$ , на котором рассматриваются функции. Естественность этой формулы вытекает из следующих соображений. Выберем  $n$  значений независимой переменной

$$t = t_1, t_2, \dots, t_n$$

и будем рассматривать значения любой функции  $f$  только в этих точках  $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)$ . Тогда мы будем иметь  $n$  степеней свободы, т. е. такие функции образуют  $n$ -мерное векторное пространство, в котором согласно § IX.6 скалярное произведение можно ввести по формуле

$$(f, \varphi) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \varphi(t_k). \quad (45)$$

При «сгущении» узловых значений  $t_k$   $n$ -мерное пространство переходит в бесконечномерное, а сумма (45), естественно, заменяется на интеграл (44).

Согласно формуле (44) и правилам векторной алгебры вводится «модуль вектора  $f$ », называемый *нормой* функции  $f$  и обозначаемый

$\|f\|$ , по формуле

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b [f(t)]^2 dt. \quad (46)$$

Пространство функций со скалярным произведением (44) и, стало быть, с нормой (46) называется *гильбертовым пространством* (более полно, вещественным гильбертовым пространством функций на заданном интервале с концами  $a, b$ ). В него входят как непрерывные, так и разрывные и даже неограниченные функции. Однако так как каждый вектор должен иметь конечный модуль, то в пространство включаются только функции, для которых интеграл (46) либо «собственный», либо несобственный сходящийся (см. § III.1), т. е. обязательно имеет конечное значение. В частности, дельта-функция в пространство Гильберта не входит, так как интеграл от ее квадрата равен бесконечности (почему?). В дальнейшем мы ограничимся функциями с конечной нормой.

В гильбертовом пространстве естественно вводится понятие ортогональности: две функции  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  *ортогональны* друг другу (на интервале с концами  $a, b$ ), если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

$$\int_a^b g_1(t) g_2(t) dt = 0. \quad (47)$$

Две ортогональные функции подобны двум перпендикулярным друг другу векторам. Если имеется *ортогональная система функций*, т. е. совокупность попарно ортогональных функций

$$g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t), \dots, \quad (48)$$

то часто возникает задача о разложении любой заданной функции  $f(t)$  по этим функциям, т. е. о разложении  $f(t)$  в ряд вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(t). \quad (49)$$

В гл. IX мы рассматривали задачу о разложении вектора в обычном (трехмерном) пространстве по ортогональным, т. е. перпендикулярным векторам. Если этих ортогональных векторов три, то по ним можно разложить любой вектор; такая тройка векторов называется *полной*, как говорят, ее можно принять за базис в пространстве. Если же ортогональных векторов два, то по ним можно разложить не любой вектор, а только такие, которые лежат в плоскости этих двух векторов; такая пара векторов в трехмерном пространстве не является *полной*, она становится *полной* только после присоединения к ней третьего вектора.

Подобно этому ортогональная система функций (48) называется *полной*, если по ней можно разложить любую функцию  $f(t)$  в ряд вида (49); любая такая система функций образует базис в пространстве Гильберта. Если же система (48) неполна, то по ней можно разложить не все функции, а только функции, удовлетворяющие определенным соотношениям; оказывается, что любую ортогональную неполную систему функций можно «расширить» до ортогональной полной системы, присоединив к исходной системе некоторое (быть может, бесконечное!) количество функций.

В конечномерном векторном пространстве полнота или неполнота системы ортогональных векторов выясняется очень просто: если число векторов в системе равно размерности пространства, то система полная, а если это число меньше размерности пространства, то система неполная. В отличие от этого в бесконечномерном пространстве и неполная система может содержать бесконечное количество векторов, так что только по этому количеству установить полноту системы нельзя. Обычно установить полноту системы (48) бывает далеко не просто.

Если все же полнота системы функций (48) так или иначе установлена, то найти коэффициенты разложения заданной функции  $f(x)$  в ряд (49) очень легко. Для этого надо обе части равенства

$$f(t) = a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) + a_3 g_3(t) + \dots \quad (50)$$

скалярно помножить на одну из функций  $g_k(t)$ . При этом в правой части равенства (50) в силу соотношения ортогональности все члены обратятся в нуль, кроме одного, в котором функция множится сама на себя. Мы получим равенство  $(f, g_k) = a_k (g_k, g_k)$ , т. е.

$$a_k = \frac{(f, g_k)}{(g_k, g_k)} = \frac{\int_a^b f(t) g_k(t) dt}{\int_a^b g_k^2(t) dt} \quad (51)$$

(ср. формулу (IX.28)).

Важный пример ортогональной полной системы функций на конечном интервале  $0 \leq t \leq T$  дает система

$$1, \cos \frac{2\pi}{T} t, \sin \frac{2\pi}{T} t, \cos \frac{4\pi}{T} t, \sin \frac{4\pi}{T} t, \cos \frac{6\pi}{T} t, \sin \frac{6\pi}{T} t, \dots \quad (52)$$

Ортогональность этой системы можно получить с помощью непосредственного вычисления интегралов вида (47) (см. упражнение 1). Полнота этой системы, по существу, показана в § 5, так как разложение по системе (52)—это не что иное, как разложение (42), а мы видели, что оно возможно для любой функции  $f(t)$  (ведь периодическая с периодом  $T$  функция может при  $0 < t < T$  принимать

совершенно произвольные значения). Если же вычислить коэффициенты разложения по системе (52) с помощью общей формулы (51) и легко проверяемых равенств

$$\int_0^T 1^2 dt = T, \quad \int_0^T \cos^2 \frac{2k\pi}{T} t dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \sin^2 \frac{2k\pi}{T} t dt = \frac{T}{2} \\ (k = 1, 2, \dots),$$

то мы получим как раз формулы (43).

Интересное обобщение теоремы Пифагора на пространство Гильберта получится, если левую, а также правую части равенства (50) скалярно помножить саму на себя. При этом в правой части все попарные скалярные произведения равны нулю в силу соотношения ортогональности, а останутся только скалярные квадраты всех слагаемых и мы получим

$$(f, f) = a_1^2 (g_1, g_1) + a_2^2 (g_2, g_2) + \dots,$$

т. е.

$$\|f\|^2 = a_1^2 \|g_1\|^2 + a_2^2 \|g_2\|^2 + a_3^2 \|g_3\|^2 + \dots \quad (53)$$

Здесь слева стоит квадрат модуля вектора  $f$ , а справа — сумма квадратов его проекций на базисные векторы  $g_1, g_2, \dots$ .

Если рассматривается комплексное гильбертово пространство, т. е. рассматриваемые функции от вещественного аргумента могут принимать комплексные значения, то формула для скалярного произведения, взамен (44), будет иметь вид

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(t) [\varphi(t)]^* dt,$$

где звездочкой обозначена комплексно сопряженная величина (см. § V.2 и IX.6). Поэтому и формула для нормы изменится:

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b f(t) [f(t)]^* dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$

Аналогичные изменения получат и дальнейшие формулы. Важным примером полной ортогональной системы функций в комплексном гильбертовом пространстве на интервале  $0 \leq t \leq T$  служит совокупность функций

$$\dots, e^{-\frac{4\pi i}{T}t}, e^{-\frac{2\pi i}{T}t}, 1, e^{\frac{2\pi i}{T}t}, e^{\frac{4\pi i}{T}t}, \dots, e^{\frac{2k\pi i}{T}t}, \dots \quad (54)$$

Разложение по этой системе функций — это как раз разложение (40) из § 6.



Такой геометрический подход к совокупности функций дает возможность получить многие важные и интересные следствия, лежащие, однако, за пределами данной книги.

В заключение остановимся немного на развитии понятия функции. В XVIII веке, когда это понятие возникло, функция мыслилась заданной обязательно с помощью формулы. Поэтому пример разложения в ряд Фурье функции, заданной различными формулами на различных участках изменения аргумента (см. § 6), на некоторое время поставил математиков в затруднение: одна это функция (ведь ряд один, он образован по вполне определенному закону) или несколько? Анализ подобных примеров привел в XIX веке к принятому сейчас в математике определению функции как произвольного закона соответствия между зависимыми и независимыми переменными. Такой подход оказался полезным для логического обоснования математики.

Однако с точки зрения приложений такое определение является слишком аморфным, расплывчатым; право на существование получили такие функции, как например, *функция Дирихле*, равная 0 для иррациональных и 1 для рациональных значений независимого переменного (попробуйте представить себе ее график!), и другие подобные функции, которым трудно придать другой смысл, кроме формально логического. В приложениях функция должна образовывать не дезорганизованную толпу значений, а рабочий организм. Сейчас стала особенно ясной роль функций, заданных формулами, более точно — аналитических функций (гл. V).

Но логический анализ понятия функции, проведенный в XIX веке, не прошел и для приложений бесследно. Так, функции, заданные несколькими формулами (кусочно аналитические функции), часто встречаются в приложениях и более не вызывают замешательства (простейший пример — единичная функция  $e(x)$  из § VI.3). Их место стало еще более ясным после открытия в XX веке обобщенных функций —  $\delta$ -функции Дирака и связанных с ней функций (математическая строгая теория обобщенных функций была развита в 1936 г. С. Л. Соболевым). Например, функцию  $f(x)$ , равную  $f_1(x)$  при  $x < a$  и  $f_2(x)$  при  $x > a$ , можно записать единой формулой:

$$f(x) = f_1(x) e(a - x) + f_2(x) e(x - a).$$

По-видимому, сейчас в приложениях индивидуальное («персональное») значение имеют только аналитические, кусочно аналитические и простые обобщенные функции. (В теории случайных процессов типа броуновского движения важную роль играют непрерывные, нигде не дифференцируемые — и потому не аналитические — функции, описывающие траектории частиц; однако эти функции невоспроизводимы, а потому имеют только вероятностное, а не индивидуальное значение.)

Роль особенностей функции — в частности, возникающих при «сшивании» ее из различных формул — проявляется при переходе к комплексным значениям независимого переменного. Рассмотрим,

например, функцию

$$f(x) = x^2 e(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0), \\ x^2 & (0 < x < \infty), \end{cases}$$

показанную на рис. 200. Две части  $f(x)$  «сшиты» при  $x=0$  с соблюдением непрерывности производной. Эту функцию можно приближенно представить в виде

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + e^{-\alpha x}},$$

где  $\alpha$  весьма велико. Однако если допустить, чтобы независимое переменное принимало комплексные значения, то правая часть будет иметь полюсы при  $1 + e^{-\alpha x} = 0$ , т. е.

$$x = \frac{\pi}{2\alpha} (2k+1)i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Эти полюсы при  $\alpha \rightarrow \infty$  заполняют мнимую ось, которая и разграничивает области действия обеих формул для функции.

Как мы видели в § 4, «сшивание» проявляется и при спектральном анализе исследуемой функции в асимптотическом поведении ее Фурье-образа.

Для XX века характерен еще один подход к понятию функции, именно как к элементу функционального пространства—например пространства Гильберта, т. е. как к члену функционального колллектива. Такой подход имеет во многих задачах разнообразные теоретические и прикладные преимущества, на которых здесь мы не имеем возможности остановиться.

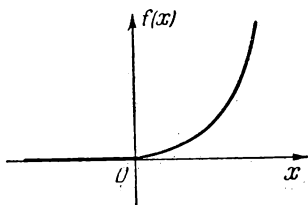


Рис. 200.

### Упражнения

1. Докажите, что система функций (52) является ортогональной на интервале  $0 \leq t \leq T$ ; та же система на интервале  $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$  неортогональная; та же система на интервале  $0 \leq t \leq 2T$  ортогональная, но неполная.
2. Докажите, что система функций (54) ортогональна на интервале  $0 \leq t \leq T$ .

## § 8. Модуль и фаза спектральной плотности

Выше, в § 2, было отмечено, что простейшие приемники колебаний (в том числе ухо, глаз, фотопластинка) регистрируют только абсолютную величину амплитуды; показания этих приемников не зависят от фазы колебаний. Такой подход к колебаниям характерен для XIX века с его интересом к энергетике, так как энергия колебаний определяется только модулем амплитуды, точнее, модулем спектральной плотности. Если колебание описывается вещественной функцией  $f(t)$ , то поток энергии для различных типов колебаний

пропорционален  $[f(t)]^2$  или  $[f'(t)]^2$ , так что полная энергия колебаний, протекающая за все время  $-\infty < t < \infty$ , выражается через интегралы  $I_0$  или  $I_1$ :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [f'(t)]^2 dt.$$

Однако эти интегралы легко выражаются через квадрат модуля спектральной плотности. Чтобы получить это выражение для  $I_0$ , возведем обе части равенства (4) в квадрат, после чего объединим в правой части два интеграла в один:

$$[f(t)]^2 = \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \iint F(\omega_1) F(\omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} d\omega_1 d\omega_2.$$

Теперь проинтегрируем обе части по  $t$  и воспользуемся формулами (9), (VI.4) и (5):

$$\begin{aligned} I_0 &= \int [f(t)]^2 dt = \iiint F(\omega_1) F(\omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} dt d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= 2\pi \iint F(\omega_1) F(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= 2\pi \int F(-\omega_2) F(\omega_2) d\omega_2 = 2\pi \int |F(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Аналогично, так как Фурье-образом функции  $f'(t)$  служит  $i\omega F(\omega)$ , то

$$I_1 = \int [f'(t)]^2 dt = 2\pi \int |i\omega F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Соответствующие формулы для периодических функций с периодом  $T$  были, по существу, выведены в § 7 (см. (53)):

$$I_0 = \int_0^T [f(t)]^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2,$$

где  $a_k$  — коэффициенты разложения функции  $f(t)$  в ряд Фурье (40). Здесь достаточно найти энергию за время одного периода, а вместо интеграла по частоте входит сумма. Выражение для  $I_1$  имеет аналогичный вид.

Два выражения для  $I$  — через интеграл по времени или интеграл (сумму) по частотам — можно представить себе как выражение квадрата модуля вектора по теореме Пифагора в виде суммы квадратов его компонент (ср. истолкование формулы (53) в § 7). При этом разные выражения получаются потому, что мы пользуемся различными системами координат: в одной координатами являются значения функции в различных точках, т. е.  $f(t_1)$ ,  $f(t_1 + \Delta t)$ , ..., в другой — коэффициенты Фурье. Равенство двух выражений для  $I$  показывает, что каждое из них является полным, ни одна из компонент вектора не забыта.

Таким образом, выражение энергии не зависит от фазы колебаний: заменяя  $F(\omega)$  на  $F(\omega) e^{ia(\omega)}$ , где  $a(\omega)$  — вещественная функция, мы не меняем интеграл  $I$ . Остается неизменной не только полная энергия, но и энергия, полученная осциллятором, настроенным на ту или иную частоту. При энергетическом подходе фаза колебаний не существенна.

В нашем XX веке и особенно в его второй половине огромное значение приобрела передача информации, начиная от радиовещания и телевидения и кончая кибернетическими системами управления и исследовательскими задачами. Ясно, что, отказываясь от регистрации фазы, мы теряем часть информации: если одинаковому по  $|F|^2$  спектру с разными фазами отвечают разные  $f(t)$ , то при неизвестной фазе нельзя воспроизвести  $f(t)$ , зная лишь  $|F|^2$ . Записывая

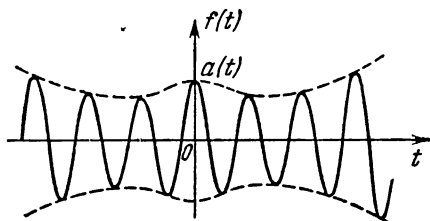


Рис. 201.

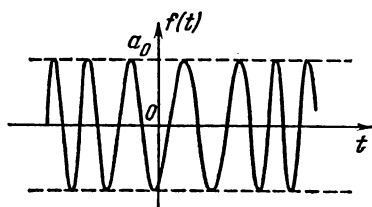


Рис. 202.

$|F|$  и фазу, мы получили бы, грубо говоря, вдвое больше сведений, вдвое больше информации от заданной волны. Более того, оказывается возможным передавать информацию именно за счет изменения фазы колебаний, при постоянной их амплитуде.

В радиотехнике известны два способа передачи информации: с помощью *амплитудной модуляции*

$$f(t) = a(t) \cos \omega_0 t$$

(рис. 201) или с помощью *частотной модуляции*

$$f(t) = a_0 \cos \left( \omega_0 t + c \int b(t) dt \right)$$

(рис. 202). Информация, которую необходимо передать, в первом случае заключена в функции  $a(t)$ , а во втором — в функции  $b(t)$ . С точки зрения гармонического анализа, т. е. разложения  $f(t)$  в интеграл Фурье, в обоих случаях мы имеем дело со спектром, в котором  $F(\omega)$  отлично от нуля в окрестности  $\omega_0$  — величины, называемой несущей частотой.

В случае амплитудной модуляции, чтобы определить спектр, разложим  $a(t)$ :

$$a(t) = \int A(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Очевидно, что если  $A(t)$  отлично от нуля лишь в полосе  $-\Delta < \omega < \Delta$ , то разложение  $f(t)$  будет сосредоточено в полосе частот той же ширины, т. е.  $F(\omega) \neq 0$  при  $\omega_0 - \Delta < \omega < \omega_0 + \Delta$  (конечно, и при  $-\omega_0 - \Delta < \omega < -\omega_0 + \Delta$ , что в силу соотношения (5) не дает для частот ничего нового). Эта ширина не зависит от абсолютного значения амплитуды.

В случае частотной модуляции мгновенное значение частоты равно производной от фазы:

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \left[ \omega_0 t + c \int^t b(t) dt \right] = \omega_0 + cb(t).$$

Однако, согласно принципу неопределенности (§ 5), мы должны иметь достаточный интервал времени  $\tau$ , для того чтобы частота изменилась существенно и это изменение можно было бы зарегистрировать:

$$\tau > (c\bar{b}(t))^{-1},$$

где  $\bar{b}$  надо понимать как  $(\bar{b}^2)^{1/2}$ . Соответствующее время изменения самой функции  $b(t)$  зависит от частоты передаваемого сигнала; это время равно  $\tau = 1/\Delta$ . Таким образом, если  $c\bar{b}(t)/\Delta > 1$ , то ширина полосы, используемой для передачи, т. е. ширина спектра  $F(\omega)$  функции  $f(t)$ , равна  $c\bar{b}(t)$  и больше ширины частоты сигнала  $\Delta$ .

В определенных условиях большая ширина передаваемого радиосигнала оказывается выгодной и позволяет уменьшить помехи.

Рисунки 201 и 202 показывают, в частности, что две функции  $f(t)$  с похожим спектром, с похожей зависимостью  $|F(\omega)|^2$  могут выглядеть совершенно по-разному. Это различие проистекает из-за различия фаз, т. е. функции  $\varphi(\omega)$  в выражении  $F(\omega) = \sqrt{|F(\omega)|^2} e^{i\varphi(\omega)}$ .

## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

### § 1

$$1. F(\omega) = \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k).$$

2. Так будет, если все  $\omega_k$  соизмеримы, т. е.  $\omega_k = n_k \alpha$ , где  $\alpha$  не зависит от  $k$ , а все  $n_k$  — целые. Тогда все слагаемые, а потому и сумма имеют период

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

### § 2

$$\begin{aligned} 1. F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t - i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t - i\omega t} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\alpha - i\omega} - \frac{1}{\alpha + i\omega} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Если обозначить  $\alpha = \frac{1}{m}$ , мы получим как раз один из примеров, из которых в § VI.1 при  $m \rightarrow \infty$  (т. е.  $\alpha \rightarrow +0$ ) была получена дельта-функция; значит, для  $f(t) \equiv 1$  будет  $F(\omega) = \delta(\omega)$ . Формула (4) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega = e^{-\alpha |t|},$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \cos t\omega}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \pi e^{-\alpha |t|}.$$

При  $\alpha = 1$  получаем формулу (1.1) в других обозначениях.

2. Из (17) получаем

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) e^{i\omega t} d\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega h},$$

где

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Заменяя в последнем интеграле обозначение переменной интегрирования  $t$  на  $\tau$ , подставляя этот интеграл в первый и меняя порядок интегрирования, получаем после преобразований

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega h} d\omega.$$

Внутренний интеграл можно вычислить по методам § V.9. Подынтегральная функция имеет простые полюсы при

$$\omega = \omega_{1,2} = \frac{ih}{2m} \pm \sqrt{-\frac{h^2}{4m^2} + \omega_0^2} = i\gamma \pm \omega^0;$$

оба эти значения находятся в верхней полуплоскости. При  $t > \tau$ , пользуясь верхней полуокружностью  $|\omega| = R \rightarrow \infty$ , получаем, что внутренний интеграл равен

$$2\pi i \left[ \frac{e^{i\omega_1(t-\tau)}}{-2m\omega_1 + ih} + \frac{e^{i\omega_2(t-\tau)}}{-2m\omega_2 + ih} \right] = \frac{2\pi}{m\omega^0} e^{-\gamma(t-\tau)} \sin \omega^0(t-\tau).$$

При  $t < \tau$  надо пользоваться нижней полуокружностью, что приводит к равенству интеграла нулю. Таким образом,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega^0} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-\tau)} \sin \omega^0(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

#### § 4

1. Образом функции  $f(at)$  служит

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{a\infty} f(t_1) e^{-i\frac{\omega}{a} t_1} dt_1 = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(сделана подстановка  $at = t_1$ ) при  $a > 0$ ; при  $a < 0$  надо переставить пределы

интегрирования, что даст

$$-\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

$$2. e^{-it_0(\omega-\beta)} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega-\beta)^2}; \quad \frac{1}{\alpha} i\omega \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

### § 5

1. Так как на соотношение неопределенности сдвиг по оси  $t$  не влияет, то положим  $f(t) = C(|x| < h)$ ,  $f(t) = 0$  ( $|x| > h$ ), так что  $\Delta t = 2h$ . Тогда по формуле (10)  $F(\omega) = C \frac{\sin \omega h}{\omega h}$ . Примем за ширину полученной функции ширину среднего «горба», т. е. расстояние между ее соседними нулями. Тогда  $\Delta \omega = \frac{\pi}{h}$ , откуда  $\Delta t \Delta \omega = 2h \frac{\pi}{h} = 2\pi = \text{const.}$

2. Если как-то определена ширина  $\Delta t$  функции  $f(t)$  и ширина  $\Delta \omega$  ее плотности  $F(\omega)$ , то ширина функции  $f(at)$  равна  $\frac{\Delta t}{|a|}$ , а ширина ее плотности  $\frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$  равна  $|a| \Delta \omega$ . При этом  $\frac{\Delta t}{|a|} \cdot |a| \Delta \omega = \Delta t \Delta \omega$ , т. е. не зависит от  $a$ .

### § 6.

$$a) \frac{2A}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A \cos 2k\alpha t}{\pi (4k^2 - 1)};$$

$$б) \frac{hT}{2} - \frac{hT}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{2k\pi t}{T};$$

$$в) \frac{A}{2T} + \frac{A}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi t}{T}. \text{ Период } k\text{-й гармоники равен } \frac{2T}{k}.$$

### § 7

1. При  $m \neq n$  будет

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos \frac{2m\pi}{T} t \cdot \cos \frac{2n\pi}{T} t \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \cos \frac{2(m+n)\pi}{T} t + \cos \frac{2(m-n)\pi}{T} t \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m+n)\pi} \sin \frac{2(m+n)\pi}{T} t + \frac{T}{2(m-n)\pi} \sin \frac{2(m-n)\pi}{T} t \right]_{t=0}^T = 0. \end{aligned}$$

При этом может быть и  $m=0$ , тогда  $\cos \frac{2m\pi}{T} t = 1$ . Аналогично проверяется ортогональность друг другу синусов, а также синуса — косинусу. Если интеграл берется от 0 до  $\frac{T}{2}$ , то синусы косинусам уже не ортогональны (интеграл оказывается отличным от нуля). Для интервала  $0 \leq t \leq 2T$  интегралы тоже равны нулю, но так как все функции (52) периодичны с периодом  $T$ , то и разлагать по ним можно только функцию, значения которой на части  $T \leq t \leq 2T$  в точности повторяют ее значения на части  $0 \leq t \leq T$ .

2. При  $m \neq n$  будет

$$\int_0^T e^{\frac{2m\pi i}{T} t} \left( e^{\frac{2n\pi i}{T} t} \right)^* dt = \int_0^T e^{\frac{2(m-n)\pi i}{T} t} dt = \frac{T}{2(m-n)\pi i} e^{\frac{2(m-n)\pi i}{T} t} \Big|_{t=0}^T = 0.$$

## ГЛАВА XV

### ЭЛЕКТРОННЫЕ ЦИФРОВЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Наше изложение будет неполным, если не сказать, хотя бы совсем немного, об ЭЦВМ—электронных цифровых вычислительных машинах, которые произвели переворот в современной прикладной математике, да и не только в ней.

Простейшие вычислительные средства—логарифмическая линейка, конторские счеты, арифмометр, таблицы уже давно внедрены в практику и широко известны. Однако для потребностей современной науки, техники, экономики эти средства недостаточны. Многие важные задачи, в принципе разрешимые, требуют столь большой вычислительной работы, что их решение с помощью указанных средств невозможно получить в практически приемлемые сроки. Для получения решения часто приходилось не принимать во внимание многие существенные факторы, что приводило к количественным, а иногда и к принципиальным ошибкам.

Поиски более эффективных вычислительных средств и достижения современной техники привели к созданию ЭЦВМ, скорость действия которых на много порядков превосходит скорость действия «классических» средств. Хотя идея конструкции таких машин была высказана еще в XIX в., но лишь достижения современной электроники сделали возможной ее реализацию. Первая ЭЦВМ была построена в США в 1943 г., а в 1946 г. американский математик Дж. Нейман (1903—1957) сформулировал основные идеи и принципы построения таких машин. Интенсивное внедрение ЭЦВМ в практику позволило успешно разрешить ряд важных задач и значительно увеличить количество областей человеческой деятельности, в которых применение математики и примакающей к ней новой дисциплины—кибернетики приводит к полезным результатам. Несомненно, что дальнейшее развитие и особенно расширение круга применений современной вычислительной техники приведут уже при жизни нашего поколения к значительной перестройке организации научных исследований, технических работ, экономических расчетов, управления, обслуживания и т. д.



## § 1. Моделирующие вычислительные машины

Допустим, что какая-либо задача свелась к решению некоторого математического уравнения. Тогда мы будем для краткости называть величины, входящие в уравнение, математическими (хотя они могут, конечно, иметь определенный физический смысл, который и привел к рассматриваемому уравнению).

Имеются два основных способа представления (фиксации) математических величин, над которыми надо производить вычисления. По одному способу такие величины непосредственно изображаются теми или иными физическими величинами — длинами, углами, электрическими напряжениями и т. д., причем независимо от того, какой смысл имела исходная физическая задача; после этого подбирается физическая схема, в которой физические величины преобразуются по тому же закону, по которому должны преобразовываться математические величины. Вычислительные машины, основанные на таком принципе, называются *аналоговыми* или *моделирующими*. Простейшим аналоговым прибором является логарифмическая линейка, в которой сложение математических величин (логарифмов сомножителей) моделируется сложением длин. Другой пример: для вычисления интеграла можно моделировать подынтегральную функцию законом открывания крана для воды, тогда сам интеграл будет отвечать общему объему воды, который нетрудно измерить. Наиболее распространены моделирующие машины, основанные на электрических аналогиях.

По второму способу с помощью какой-либо конструкции изображается *цифровая запись* рассматриваемых математических величин, а действия над ними заменяются арифметическими действиями над цифрами. Вычислительные машины, основанные на этом принципе, называются *цифровыми*; к ним относятся, в частности, конторские счеты и арифмометр. Наибольшие достижения, о которых говорилось выше, относятся к цифровым машинам, однако здесь мы для полноты немного поговорим о моделирующих машинах.

Мы не будем подробно останавливаться на работе моделирующих вычислительных машин, отметим только некоторые их особенности. Прежде всего, *входные параметры*, т. е. величины, над которыми производится действия, здесь обычно могут непрерывно изменяться в определенных диапазонах; поэтому данный класс машин называют также вычислительными машинами *непрерывного действия*. Конечно, может быть, например, что входные параметры реализуются в виде электрических сопротивлений, которые меняются дискретно с помощью «магазина сопротивлений»; но эта дискретность будет тогда конструктивной, принципиальной, тогда как цифровые машины принципиально являются машинами *дискретного действия*.

Далее, ясно, что точность ввода параметров и получения результатов для моделирующих машин невелика; и действительно, она обычно бывает порядка процентов, в лучшем случае десятых долей

процентов. Это, конечно, ограничивает возможности моделирования громоздких вычислений. Кроме того, моделирующие машины обычно являются сравнительно узко специализированными, т. е. приспособленными лишь для решения задач определенного узкого класса. Но если такие специализированные задачи приходится решать часто и особой точности не требуется, то применение моделирующих машин и приборов оказывается очень эффективным. Например, довольно широко применяются *электрические интеграторы*, предназначенные для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Часто бывает, что одну и ту же взаимосвязь величин можно осуществить на различных физических схемах. Это дает основание для *моделирования* физических процессов: чтобы в некоторой физической схеме найти какую-либо величину  $S$ , которую трудно измерить или подсчитать непосредственно, создают новую схему, иной физической природы, но в которой между участвующими величинами имеет место такая же функциональная взаимосвязь; после этого в новой схеме измеряют величину, соответствующую  $S$ . При этом, если математическая эквивалентность двух физических схем установлена, то математическое решение задачи оказывается излишним, так что никаких вычислений, если они не нужны для чего-либо иного, можно не производить; по существу, здесь используется подобие явлений по определенным характеристикам (§ VIII.10) с размерным коэффициентом подобия. В последние годы такое *аналоговое* решение задач на основе электромеханических, оптико-механических, электродиффузионных и т. д. аналогий получило широкое развитие.

Если изучается течение некоторого процесса и по физическому смыслу задачи независимой переменной является время  $t$ , то часто и решение на моделирующей машине получается как функция того же  $t$ . Тогда говорят, что задача решается в реальном масштабе времени, а решение можно непосредственно, минуя человека, передавать в изучаемую схему для использования; на этом принципе основаны многие приспособления для автоматического регулирования. Применение реального масштаба времени дает также возможность при испытании сложных конструкций заменять отдельные дорогостоящие агрегаты вычислительными машинами. Например, автопилот можно испытывать не в полете, что дорого и опасно, а на стенде, заменив самолет моделирующей машиной, которая по своей реакции на работу автопилота полностью тождественна самолету.

## § 2. Цифровые вычислительные машины

Перейдем теперь к цифровым вычислительным машинам. Мы не станем останавливаться на широко распространенных сейчас малых счетных машинах — усовершенствованных арифмометрах, производящих четыре арифметических действия. Эти машины чрезвычайно полезны, но, конечно, не могут действовать очень быстро как из-за

невысокой скорости самого вычисления, так и из-за того, что входные данные для каждого арифметического действия вводятся человеком—вычислителем. Оба этих недостатка преодолены в ЭЦВМ.

Структурная схема (блок-схема) ЭЦВМ, т. е. основные ее блоки и их взаимосвязь, показана на рис. 203, где каналы информации обозначены сплошными стрелками, а каналы управления—пунктирными стрелками. В запоминающем устройстве (ЗУ) имеется определенное количество, например 512, ячеек, каждая из которых служит для записи одного числа или одной «команды» (предписания).

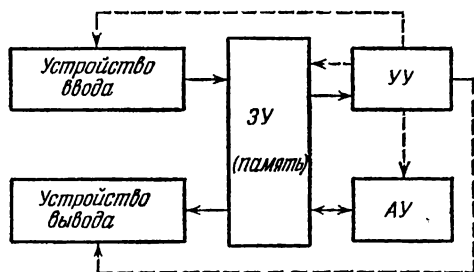


Рис. 203.

Запись команды, как мы увидим в § 3, по внешней форме ничем не отличается от записи числа. Некоторые из этих ячеек заполняются от устройства ввода, тогда как другие заполняются по мере работы, причем в процессе работы содержание ячеек может многократно заменяться, а часть ячеек не используется. Руководствуясь записанными командами, устройство управления (УУ) направляет числа (или команды) из ЗУ в арифметическое устройство (АУ), которое их преобразует в соответствии с этими командами и возвращает в ЗУ. По мере получения требуемых результатов они по сигналам УУ автоматически печатаются, а после окончания вычисления УУ останавливает машину.

С помощью дополнительного приспособления ЭЦВМ может выдавать результат в форме графика, приближенно построенного по вычисленным координатам точек, и даже мультфильма, показывающего изменение такого графика.

С помощью дополнительного приспособления ЭЦВМ может выдавать результат в форме графика, приближенно построенного по вычисленным координатам точек, и даже мультфильма, показывающего изменение такого графика.

На универсальной ЭЦВМ можно решать любую математическую задачу, для которой указан алгоритм, т. е. четкое предписание, определяющее вычислительный процесс, которому, исходя из входных данных, обязательно приводит к требуемому результату. Однако и нематематические задачи, для которых можно указать аналогичный алгоритм решения, разрешимы на таких машинах. Например, цифровая машина может управлять станком при обработке детали как угодно сложного профиля; при этом вводные данные характеризуют профиль, а результаты вычисления преобразуются в сигналы устройству управления станком. Аналогично работают устройства, управляющие полетом самолета или технологическим процессом, причем в случае отклонения от первоначально заданной программы машина может принимать наивыгоднейшие решения, сравнивая воз-

можные варианты, а также контролировать результат. Широкое применение получили ЭЦВМ для прогноза погоды, планирования перевозок и т. д. Впрочем, в таких применениях более эффективными оказываются не универсальные, а *специализированные* ЭЦВМ, приспособленные для решения определенного круга задач.

### § 3. Запись чисел и команд в ЭЦВМ

Десятичная система счисления, которую мы изучаем в школе и постоянно применяем в жизни, неудобна для использования в работе ЭЦВМ. Для записи чисел в машине применяется двоичная система счисления, в которой имеются лишь две цифры, 0 и 1 (тогда как в десятичной системе имеется десять цифр), и все числа записываются в виде комбинаций этих цифр. Для этого принимают, что записи 10, 100 и т. д. означают не степени десятки, а степени двойки, т. е. числа два, четыре и т. д. Это можно записать так:

$$1_{10} = 1_2, \quad 2_{10} = 10_2, \quad 3_{10} = 11_2, \quad 4_{10} = 100_2, \quad 5_{10} = 101_2 \text{ и т. д.},$$

где индекс указывает на принятую систему счисления.

Любое целое число можно записать в двоичной системе счисления; для этого из данного числа надо выделять степени двойки, начиная со старшей. Например, в десятичной записи

$$1971 = 1 \cdot 1024 + 1 \cdot 512 + 1 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + \\ + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1,$$

т. е.  $1971_{10} = 11110110011_2$ .

Аналогично составляются двоичные дроби взамен десятичных. Например, число  $10,1011_2$  в десятичной записи означает  $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{43}{16} = 2,6875_{10}$ . Любое нецелое число можно записать в виде конечной или бесконечной двоичной дроби; естественно, что в реальных вычислениях дроби округляются.

Таблицы сложения и умножения в двоичной системе крайне просты:

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 0, \quad 1 + 1 = 10, \quad (1)$$

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1. \quad (2)$$

Пользуясь этими таблицами, возможно производить арифметические действия над числами, записанными в двоичной системе, совершенно аналогично тому, как это делается в школе для десятичной системы.

Не следует думать, что сам вычислитель при работе на машине должен пользоваться двоичной системой! Нет, при составлении программы пользуются десятичной записью, а переход к двоичной осуществляется внутри машины по специальной команде, на чем мы для простоты не будем останавливаться, равно как и на восьмеричной и двоично-десятичной системах, которыми при этом приходится поль-

зоваться. Результаты вычислений также печатаются машиной в десятичной записи.

При записи чисел в ЗУ (§ 2) под каждое число отводится ячейка, причем все эти ячейки имеют одинаковую длину, т. е. одно и то же число *разрядов*, каждый из которых содержит 0 или 1. В наших ЭЦВМ принята запись *с плавающей запятой*; это означает, что выписываются число, заключенное между  $-1$  и  $1$ , и показатель степени двойки, на которую (степень) надо это число умножить. При этом под показатель степени, включая его знак, отводится некоторое вполне определенное число разрядов, например, в конце ячейки.

Пусть, например, этих разрядов шесть, всего в ячейке 30 разрядов, знак «+» изображается в виде 0, а «—» в виде 1. Тогда набор цифр в ячейке

знак числа ↓	знак показателя разряды показателя ↓																														
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span>дробные разряды числа</span> <span>разряды показателя</span> </div>																															
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

(3)

означает число

$$-0,101011_2 \cdot 2^{+101_2} = - \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \right) \cdot 2^{4+1} \right]_{10} = -21,5_{10}.$$

Наибольшее число, которое можно записать таким способом, имеет вид

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(4)

и равно  $(1 - 2^{-23}) 2^{31} = 2^{31} - 2^8 \approx 2^{31}$ , тогда как наименьшее положительное число имеет вид

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(5)

и равно  $2^{-23} \cdot 2^{-31} = 2^{-54}$  (продумайте это!).

Фактическая «запись» цифр для разных конструкций машин производится различными способами. Для ввода чисел во вводное устройство машины (§ 2) они пробиваются на специальной ленте — *перфоленте* или на наборе специальных карточек — *перфокарт*; для определенности будем говорить только о перфокартах. Здесь каждой ячейке отвечает строка на карточке, причем длина строки соответствует числу разрядов в ячейке, пробитое отверстие соответствует цифре 1, а непробитое — цифре 0. Например, если бы числа, записанные в формулах (3), (4) и (5), следовали одно за другим во вводной программе, то соответствующая перфокарта имела бы участок вида, изображенного на рис. 204 (проверьте!). Эти отверстия пробиваются перед запуском машины на специальном *перфораторе*, не

связанном с машиной и внешне напоминающем кассовый аппарат в магазинах.

Обширная программа записывается на целой колоде перфокарт, причем если обнаружена ошибка в программе или если входные данные изменились, то карты нетрудно заменить.

Для хранения (и преобразования по мере вычислений) чисел в ЗУ внутри машины каждая ячейка ЗУ реализуется в виде набора *элементов*, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний; число элементов в наборе равно числу разрядов в ячейке, а каждое из состояний элемента отвечает значению 0 и 1 в соответствующем разряде. Применяются различные типы таких элементов,

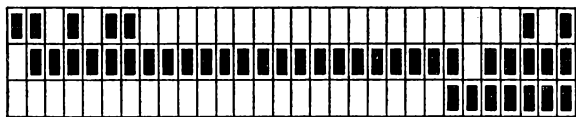


Рис. 204.

причем от них всегда требуется *безынерционность*, т. е. мгновенный переход из одного состояния в другое, и *устойчивость*, т. е. неопределенно долгое сохранение состояния при отсутствии переходного сигнала. Элементами могут служить магнитные ферритовые сердечники, меняющие направление магнитного поля при прохождении тока по обмотке; намагниченные и ненамагниченные участки на магнитном барабане или магнитной ленте, действующих по принципу магнитфона, и т. д.

Передача числа из ячейки ЗУ в АУ и обратно производится по системе каналов, число которых может доходить до числа разрядов в ячейке (машины *параллельного действия*).

Чем больше ячеек в ЗУ, тем больше данных можно ввести в машину, тем большей гибкостью в работе она обладает. Поэтому для расширения объема памяти многим машинам придается *внешнее* ЗУ, обычно оформляемое в виде магнитной ленты, с которой специальное устройство по заранее предусмотренным командам может вводить записанные там числа во внутреннее, *оперативное* ЗУ; возможен, конечно, и обратный процесс. Если число ячеек в оперативном ЗУ измеряется тысячами, то число ячеек на магнитной ленте может доходить до миллионов; однако считывание чисел с ленты и запись их обратно на ленту осуществляются не так быстро, как внутри оперативного ЗУ, так как требуется определенное время на перемещение ленты.

Если машина перерабатывает не числа, а какую-либо иную информацию, например словесную, то эта информация должна быть *закодирована* (зашифрована) с помощью двоичных чисел. Тогда можно

предусмотреть устройство, которое бы после окончания действий раскодировало результат, т. е. перевело его в форму, естественную для данного вида информации.

Машина производит действия над числами, хранящимися в ЗУ, только по командам, которые также вводятся перед началом работы в ЗУ и по внешней записи не отличаются от чисел. Мы будем рассматривать только так называемые *трехадресные* команды. Каждая такая команда представляет собой ячейку, мысленно разделенную на четыре части вполне определенной длины, например в 3, 9, 9 и 9 разрядов. Эти части отведены под:

- 1) условную запись (*код*) действия, которое надо произвести;
- 2) *адрес* (номер ячейки) первого из чисел, участвующих в действии;
- 3) адрес второго из чисел, участвующих в действии;
- 4) адрес, по которому надо отправить результат действия.

При этом все ячейки нумеруются в естественном порядке. Например, если в ЗУ имеется 512 ячеек, то девяти двоичных разрядов как раз достаточно для указания адреса (почему?). Пусть кодом операции сложения служит число 1. Тогда, если требуется сложить числа, находящиеся в 271-й и 59-й ячейках, а результат поместить в 422-ю ячейку, то при принятом выше разделении ячейки соответствующая команда должна иметь вид (проверьте!)

$$\begin{array}{ccccccc} & 001 & 100001111 & 000111011 & 110100110. & & (6) \\ \text{части:} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{1\text{-я}} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{2\text{-я}} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{3\text{-я}} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{4\text{-я}} & & \end{array}$$

После выполнения этой команды во всех ячейках ЗУ, включая 271-ю и 59-ю, останется то же, что и было, за исключением 422-й, в которой взамен того, что в ней было, появится сумма чисел, стоящих по адресам 271 и 59.

Команда (6) пробивается на перфокарте и хранится в одной из ячеек ЗУ в точности так же, как если бы это было число  $0,0110000111100011101111_2 \cdot 2^{-110_2}$ . Различие проявляется лишь во время работы машины, так как если программа работы составлена правильно, то в УУ в качестве команд поступают сигналы только от тех ячеек, которые и были предусмотрены как команды.

Вся работа машины и, в частности, выполнение действий по командам обеспечиваются электронными схемами, которые осуществляют преобразование электрических сигналов по необходимым правилам. Первоначально эти схемы были основаны на применении электронных вакуумных ламп (триодов и пентодов), позже — на применении полупроводников и интегральных схем. Основные виды преобразователей сигналов показаны на рис. 205. Первый обеспечивает возникновение сигнала (положительного напряжения достаточно высокого уровня) на выходе *B* тогда и только тогда, когда сигнал на входе *A* отсутствует. Второй обеспечивает сигнал на выходе *C* тогда и только тогда, когда на оба входа *A* и *B* поданы сигналы, а третий — когда по крайней мере на один вход подан сигнал. Более

сложные преобразователи получаются в результате комбинации этих простейших. Проверьте, например, что схема, приведенная на рис. 206, реализует таблицу сложения (1), если наличие сигнала соответствует единице, а отсутствие его — нулю. Таблицу умножения (2) реализует простейшая схема «и».

Порядок работы машины таков. В самом начале работы в ЗУ с перфокарт вводится *программа* работы, т. е. определенная последовательность команд, и *исходные данные*, т. е. числовой массив, над которым производятся действия. Затем УУ воспринимает содержимое первой ячейки в качестве команды, и в соответствии с этой командой АУ выполняет предписанные действия. Далее УУ воспринимает

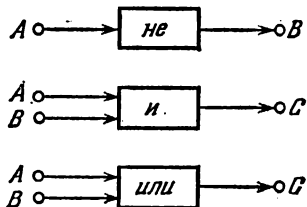


Рис. 205.

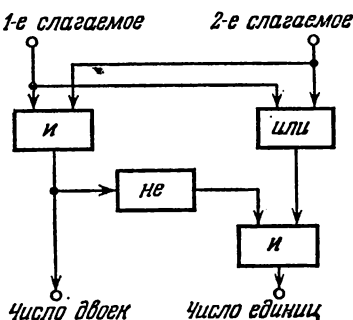


Рис. 206.

содержимое второй ячейки в качестве команды и т. д., за исключением особых команд «передачи управления», о которых мы скажем в § 4 и после выполнения которых УУ переходит не к очередной ячейке, а к ячейке, номер которой указан в команде. Некоторые команды предписывают печатание содержимого какой-либо ячейки, но и после выполнения такой команды УУ переходит к следующей ячейке. (Правда, если печатать приходится часто, то темп работы замедляется, так как печатание производится медленнее, чем арифметические операции.) И так продолжается до тех пор, пока УУ не дойдет до команды, означающей *останов* машины, после чего работа прекращается. Машина останавливается (*аварийный останов*) и в том случае, если действие, предусмотренное программой, невыполнимо, например, если по ходу вычислений получится столь большое число, что оно не может быть записано в ячейке (*переполнение ячейки*). Специальное устройство дает возможность с пульта управления машиной в любой момент работы выяснить содержимое любой ячейки, а также ввести дополнительные данные.

### Упражнения

1. Запишите в двоичной системе счисления числа 9999;  $-1/3$ ; 2,75.
2. Запишите те же числа по образцу формулы (3).



## § 4. Программирование

Приведем несколько простых примеров, на которых можно понять некоторые принципы составления программ, т. е. *программирования*; впрочем, отметим, что составление серьезной программы является очень ответственным делом, часто занимает много времени и требует навыков работы. Мы будем для простоты записывать вместо кода операции знак действия, например знак «+» вместо кода сложения.

Пусть требуется подсчитать решение системы уравнений первой степени (VIII.6), причем будем считать значения чисел  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $d_i$  заданными. Как известно, решение получается по формулам (VIII.7).

Будем размещать команды в ячейках с номерами 1, 2, ...; мы пока не знаем, сколько потребуется команд. Шесть входных параметров  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  разместим соответственно в ячейках с номерами  $\alpha+1$ ,  $\alpha+2$ ,  $\alpha+3$ ,  $\alpha+4$ ,  $\alpha+5$ ,  $\alpha+6$ ; значение  $\alpha$  мы уточним позже. Несколько дальнейших ячеек будут использованы в качестве *рабочих ячеек* для хранения промежуточных результатов; состояние этих ячеек к началу работы несущественно, так как при любой записи в ячейке предыдущая запись в ней автоматически стирается. Остальные ячейки ЗУ при составлении и работе программы не используются. Начнем с подсчета значения  $d_1 b_2 - b_1 d_2$ . Чтобы вычислить  $d_1 b_2$ , требуется команда

$$1) \times \alpha+5 \alpha+4 \alpha+7;$$

при этом мы перед командой для ориентировки пишем ее номер, который фактически нигде не пробивается. После исполнения этой команды в ячейке  $(\alpha+7)$  появится число  $d_1 b_2$ . Следующая команда пусть имеет вид

$$2) \times \alpha+2 \alpha+6 \alpha+8;$$

после ее исполнения в ячейке  $(\alpha+8)$  появится число  $b_1 d_2$ . Далее надо из числа  $d_1 b_2$  (ячейка  $(\alpha+7)$ ) вычесть число  $b_1 d_2$  (ячейка  $(\alpha+8)$ ). Так как эти числа больше не понадобятся, то результат можно записать в ячейке  $(\alpha+7)$  с помощью команды

$$3) - \alpha+7 \alpha+8 \alpha+7;$$

конечно, здесь можно было использовать и ячейку  $(\alpha+9)$ , но в более сложных программах часто приходится экономить ячейки.

Аналогично находим знаменатель, т. е.  $a_1 b_2 - b_1 a_2$ :

$$4) \times \alpha+1 \alpha+4 \alpha+8,$$

$$5) \times \alpha+2 \alpha+3 \alpha+9,$$

$$6) - \alpha+8 \alpha+9 \alpha+8.$$

Теперь надо числитель, хранящийся в ячейке  $(\alpha+7)$ , разделить на знаменатель, хранящийся в ячейке  $(\alpha+8)$ , и результат отпечатать:

$$7) : \alpha+7 \alpha+8 \alpha+7,$$

$$8) \text{ печ. } \alpha+7;$$

по последней команде машина печатает содержимое ячейки, т. е. значение  $x$ , и переходит к исполнению следующей команды. Аналогично вычисляем  $y$ , имея в виду, что знаменатель для  $y$  уже вычислен и хранится в ячейке  $(\alpha + 8)$ :

- 9)  $\times$      $\alpha + 1$     $\alpha + 6$     $\alpha + 7$ ,
- 10)  $\times$      $\alpha + 5$     $\alpha + 3$     $\alpha + 9$ ,
- 11)  $-$      $\alpha + 7$     $\alpha + 9$     $\alpha + 7$ ,
- 12)  $:$      $\alpha + 7$     $\alpha + 8$     $\alpha + 7$ ,
- 13) печ.    $\alpha + 7$ ,
- 14) ост.

По 14-й команде машина останавливается. Итак, в нашей программе содержится 14 команд и потому можно принять  $\alpha = 14$ . Тогда вся программа будет занимать 20 ячеек и иметь такой вид:

- 1)  $\times$     19   18   21,
- 2)  $\times$     16   20   22,
- 3)  $-$     21   22   21,
- 4)  $\times$     15   18   22,
- 5)  $\times$     16   17   23,
- 6)  $-$     22   23   22,
- 7)  $:$     21   22   21,
- 8) печ.   21,
- 9)  $\times$     15   20   21,
- 10)  $\times$     19   17   23,
- 11)  $-$     21   23   21,
- 12)  $:$     21   22   21,
- 13) печ.   21,
- 14) ост.,
- 15)  $a_1$ ,
- 16)  $b_1$ ,
- 17)  $a_2$ ,
- 18)  $b_2$ ,
- 19)  $d_1$ ,
- 20)  $d_2$ .

Итак, все промежуточные результаты в нашей программе требуют трех рабочих ячеек (№№ 21, 22 и 23). Теперь остается только пробить эту программу и пустить машину в ход. (На самом деле требуются еще некоторые команды, не имеющие для нас принципиального значения, например команда ввода программы с перфокарт в ЗУ и т. д.)

В разобранным примере число команд в программе равнялось числу действий. Однако современные ЭЦВМ создавались в основном для вычислений, требующих миллионов действий. Ясно, что в этом случае писать отдельную команду на каждое действие невозможно.

К счастью, при большой массе вычислений обычно многие промежуточные вычисления проводятся по одной и той же схеме несколько раз; а тогда в программе можно предусмотреть образование *циклов*, при которых УУ проходит один и тот же участок программы по нескольку раз. Циклы образуются с помощью команды *условной передачи управления*, которая имеет вид

$$\text{ПУ } N_1 \ N_2 \ N_3$$

(ПУ означает «передачу управления»; конечно, на самом деле надо указать код этой операции). Имеются различные варианты реализации этой команды. Мы будем для определенности считать, что по ней машина сравнивает содержимое  $(N_1)'$  ячейки  $N_1$  и содержимое  $(N_2)'$  ячейки  $N_2$ ; если  $(N_1)' < (N_2)'$ , то УУ переходит к исполнению очередной команды; если же  $(N_1)' \geq (N_2)'$ , то УУ переходит к исполнению команды, содержащейся в ячейке с номером  $N_3$ , причем в обоих случаях содержимое ячеек не меняется. В частности, команда

$$\text{ПУ } 1 \ 1 \ N_3$$

означает, что УУ после ее прочтения обязательно переходит к исполнению команды, содержащейся в ячейке  $N_3$ ; такую команду можно считать командой *безусловной передачи управления*.

Составим для примера программу для напечатания таблицы обратных величин к 500 натуральным числам, скажем, от 2001 до 2500; без команды ПУ программа заняла бы очень большой объем, на деле же она получится очень маленькой. Поместим в ячейке  $(\alpha+1)$  число 2000, в ячейке  $(\alpha+2)$  число 1, а в ячейке  $(\alpha+3)$  число 2499 (мы вскоре увидим, зачем это нужно). Пусть первая команда имеет вид

$$1) \quad + \quad \alpha+1 \quad \alpha+2 \quad \alpha+1.$$

После ее выполнения в ячейке  $(\alpha+1)$  взамен числа 2000 появится число 2001, для которого мы вычислим обратное и результат напечатаем:

$$2) \quad : \quad \alpha+2 \quad \alpha+1 \quad \alpha+4,$$

$$3) \quad \text{печ.} \quad \alpha+4.$$

Сравним число, стоящее в ячейке  $(\alpha+1)$ , с 2499 и, поскольку оно еще не превзошло 2499, перейдем вновь к первой команде:

$$4) \quad \text{ПУ} \quad \alpha+3 \quad \alpha+1 \quad 1.$$

Так как в данном случае  $(\alpha+3)' = 2499$ ,  $(\alpha+1)' = 2001$ , то, прочтя четвертую команду, УУ переходит к первой команде. После ее выполнения в ячейке  $(\alpha+1)$  взамен 2001 появится 2002; по следующим двум командам будет подсчитано и напечатано обратное число к 2002. По четвертой команде машина сравнит 2499 с 2002 и вновь

перейдет к исполнению первой команды и т. д., и только когда после очередного прибавления единицы в ячейке  $(\alpha + 1)$  появится число 2500 и обратная величина к 2500 будет отпечатана, четвертая команда «пропустит» УУ вперед, так как тогда будет  $(\alpha + 3)' = 2499$ ,  $(\alpha + 1)' = 2500$ . Тогда остается остановить машину:

5) ост.,

так как все результаты уже отпечатаны.

Итак, можно принять  $\alpha = 5$ , и полная программа будет иметь вид

- 1) + 6 7 6,
- 2) : 7 6 9,
- 3) печ. 9,
- 4) ПУ 8 6 1,
- 5) ост.,
- 6) 2000,
- 7) 1,
- 8) 2499.

Для хранения промежуточных результатов нам понадобилась всего одна рабочая ячейка (№ 9); однако по мере работы содержимое шестой ячейки менялось от 2000 до 2500 через 1.

Приведем вариант, в котором к концу работы рассматриваемые обратные величины оказываются не отпечатанными, а размещенными в ячейках ЗУ с номерами от 10 до 509 (эти величины могут понадобиться для каких-либо дальнейших вычислений):

- 1) + 6 7 6,
- 2) + ' 3 9 3,
- 3) : 7 6 9,
- 4) ПУ 8 6 1,
- 5) ост.,
- 6) 2000,
- 7) 1,
- 8) 2499,
- 9) (1 в последнем разряде ячейки, остальные 0).

Здесь в девятую ячейку программы засылается *вспомогательное число*, не имеющее количественного значения, а служащее для *преобразования команд*, что является принципиально новым действием. Именно, после первого выполнения второй команды третья команда, воспринятая АУ как число, примет вид: 7 6 10. (Заметим, что сложения по командам 1) и 2) выполняются по различным правилам, что мы отметили штрихом; продумайте это!) Поэтому после выполнения третьей команды число 1:2001 отправится в 10-ю ячейку. После вторичного выполнения второй команды третья примет вид: 7 6 11, и потому после вторичного выполнения третьей команды

число 1:2002 отправится в 11-ю ячейку и т. д. Эта операция изменения адреса в команде называется *переадресацией*.

Таким образом, с командами можно совершать действия, автоматически преобразуя их по мере работы машины. Это открывает дополнительные возможности в применении ЭЦВМ.

Команда условной ПУ применяется и без циклов в тех случаях, когда требуется организовать *разветвление программы*, т. е. производить различные последовательности действий в зависимости от неизвестных заранее обстоятельств. Пусть, например, в процессе вычислений в определенной ячейке с номером  $N$  должно получиться число  $a$  и мы должны оставить его без изменения, если  $a \geq 0$ , или возвести в квадрат и результат оставить в ячейке  $N$ , если  $a < 0$ . Так как в ячейке с номером 0 обычно помещается число 0, то требуемое действие можно осуществить, поместив в соответствующем месте следующие команды:

$$\begin{array}{ccccccc} k) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \text{ПУ} & N & 0 & k+2, \\ k+1) & \times & N & N & N. \end{array}$$

При этом разветвление осуществится автоматически, так что мы даже не будем знать, какой вариант был реализован, если не предусмотреть особо информацию об этом.

Покажем, наконец, пример программы, в которой общее число действий заранее не устанавливается. Пусть требуется решить кубическое уравнение

$$x = 0,1x^3 + 1$$

методом итераций (§ 1.3) с точностью до 0,001, начиная от значения  $x_0 = 0$ . Для этого разместим число 0 в ячейке  $(\alpha + 1)$  (соответствующая строка перфокарты просто не пробивается), число 0,1 — в ячейке  $(\alpha + 2)$ , число 1 — в ячейке  $(\alpha + 3)$  и число 0,001 в ячейке  $(\alpha + 4)$ . Последовательные приближения будем помещать в ячейке  $(\alpha + 1)$ . Вычисление последующего приближения по предыдущему осуществляется по командам:

$$\begin{array}{llll} 1) & \times & \alpha+1 & \alpha+1 \quad \alpha+5, \\ 2) & \times & \alpha+5 & \alpha+1 \quad \alpha+5, \\ 3) & \times & \alpha+2 & \alpha+5 \quad \alpha+5, \\ 4) & + & \alpha+5 & \alpha+3 \quad \alpha+5. \end{array}$$

Итак, последующее приближение помещено в ячейку  $(\alpha + 5)$ . Его надо сравнить с предыдущим, содержащимся в ячейке  $(\alpha + 1)$ , и если они не совпадают с точностью до 0,001, то поместить последующее приближение в ячейку  $(\alpha + 1)$  и повторить итерацию; если же приближения отличаются менее чем на величину 0,001, то надо отпечатать результат. Это можно сделать, например, по командам (проверьте!):

$$5) \text{ — } | \quad \alpha+1 \quad \alpha+5 \quad \alpha+1$$

(по этой команде число  $|(\alpha + 1)' - (\alpha + 5)'|$  засылается в ячейку  $(\alpha + 1)$ ),

- 6) ПУ 0  $\alpha + 1$  9,
- 7) +  $\alpha + 5$  0  $\alpha + 1$ ,
- 8) ПУ 1 1 1,
- 9) печ.  $\alpha + 5$ ,
- 10) ост.

Итак, можно положить  $\alpha = 10$  и выписать всю программу, занимающую 14 ячеек. По этой программе машина будет совершать итерации до тех пор, пока последующее приближение не совпадет с предыдущим с указанной точностью, после чего она напечатает результат и остановится.

Отметим, что если процесс итераций не сходится, то произойдет либо переполнение ячеек, либо заикливание, при котором машина сама не может остановиться и для ее останова требуется вмешательство извне с пульта управления.

Программы для более сложных задач могут занимать большой объем; однако они нередко включают в себя более простые, часто повторяющиеся задачи, например вычисление значения синуса от участвующих величин и т. п.

Решение этих более простых задач осуществляется с помощью *стандартных подпрограмм*, т. е. набора команд, которые составляются заранее и хранятся в определенных ячейках оперативного ЗУ или во внешнем ЗУ; тогда при составлении программы для более сложной задачи обращение к стандартной подпрограмме производится по одной команде.

Для облегчения программирования в последние годы разработано несколько *универсальных машинных языков*, на которых программа расписывается в более привычных математических терминах, чем это было описано выше. Программа на таком языке не зависит от типа применяемой машины и печатается на устройстве, аналогичном пишущей машинке; затем специальный *транслятор* автоматически переводит эту программу в программу той машины, которая будет применяться.

Наиболее известны языки АЛГОЛ и ФОРТРАН (от английского «algorithmic language» — алгоритмический язык и «formula translator» — преобразователь формул), освоение которых делает применение ЭЦВМ значительно более доступным.

### Упражнения

1. Составьте программу для вычисления таблицы квадратов натуральных чисел от 1 до 1000 включительно, причем в этой таблице значения  $n$  и  $n^2$  должны чередоваться: 1, 1, 2, 4, 3, 9, ...

2. Составьте программу для вычисления суммы  $\sqrt{5} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{100}$  (об этой сумме говорилось в § 1.2); при этом извлечение квадратного корня примите за самостоятельное действие с кодом  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

3. Составьте программу для вычисления интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  по формуле

Симпсона (§ 1.1) с разбиением промежутка интегрирования на 100 частей; на 1000 частей.

4. Составьте программу для интегрирования дифференциального уравнения  $y' = x^2 - y^2$  на интервале  $-1 \leq x \leq 0$  с начальным условием  $y(-1) = 0$  по методу пересчета, описанному в § VIII.7 (ср. таблицу 5), взяв значение 0,001 за шаг интегрирования и печатая результат через 0,1; воспользуйтесь операцией  $\{ \}$  выделения дробной части числа ( $\{5,3\} = 0,3$ ;  $\{-5,3\} = 0,7$ ;  $\{5\} = 0$ ).

### § 5. Пользуйтесь ЭЦВМ!

Из § 4 вы могли увидеть, что составление программ для ЭЦВМ в простых случаях не вызывает затруднений. И действительно, этому сейчас успешно обучают рядовых школьников. В то же время применение ЭЦВМ во многих случаях оказывается весьма полезным, на несколько порядков повышая точность и скорость вычислений, а в более сложных задачах — впервые делая возможными сами эти вычисления. (Для ориентировки укажем, что малые ЭЦВМ выполняют в среднем несколько тысяч арифметических операций в секунду, средние — несколько десятков тысяч и большие, как БЭСМ-6, — миллион операций в секунду.)

Сейчас широкому внедрению ЭЦВМ препятствует в основном психологический барьер. Грубо говоря, пока еще многие исследователи боятся ЭЦВМ, так же как наши предки боялись «неберущихся» интегралов, трансцендентных конечных уравнений, дифференциальных уравнений, не разрешимых в квадратурах, и т. п. Вместо того чтобы принципиально изменить подход к таким интегралам и уравнениям, ученые упорно пытались найти новые случаи интегрируемости, что существенно ограничивало возможности приложений математики. Аналогичная ситуация возникла и сейчас в связи с ЭЦВМ.

Конечно, не следует впадать в другую крайность и думать, что применение ЭЦВМ делает излишним получение аналитических (точных, приближенных, асимптотических) формул и методов, «ручной» счет с помощью электрического арифмометра, логарифмической линейки и простого карандаша! Аналитические решения, когда они возможны, часто обладают неоценимым преимуществом из-за своей компактности, особенно если задача включает параметры или решение получается как функция нескольких независимых переменных. Асимптотические формулы действуют в случаях, когда применение численных методов вообще становится затруднительным. «Ручной» счет из-за своей мобильности наиболее приспособлен к выполнению прикидочных расчетов, которые следует производить как можно чаще, в том числе и при подготовке более объемных вычислений. Таким образом, применение ЭЦВМ призвано не заменить другие плодотворные математические методы, а сочетаться с ними, существенно расширяя возможности приложения математики.

При решении на ЭЦВМ задачи, уже сформулированной математически, обычно наиболее ответственным пунктом является подготовка задачи к программированию. Бывает не так-то просто выбрать метод, чтобы он давал надежный результат и был посилен ЭЦВМ, имеющейся в Вашем распоряжении, — а ведь ЭЦВМ мощны, но далеко не всеильны! При такой подготовке зачастую приходится значительно перестраивать «математическую психологию», воспитанную на «ручных» методах.

Например, в «домашинную» эру считалось само собой разумеющимся, что если в нелинейном дифференциальном уравнении возможно с помощью некоторой подстановки понизить порядок, то это следует сделать. Например, для решения уравнения

$$y'' = f(y, y') \quad (y = y(x)) \quad (7)$$

рекомендовалась такая процедура: рассматривать зависимость  $y' = p$  от  $y$ , откуда  $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ , и уравнение (7) принимает вид

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p) \quad (p = p(y)), \quad (8)$$

т. е. получается уравнение 1-го порядка. Если нам удастся его проинтегрировать, т. е. найти общее решение  $p = \varphi(y; C_1)$ , то дальше пишем

$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1),$$

откуда

$$\frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2. \quad (9)$$

Такая процедура иногда приводит к цели, особенно при аналитическом исследовании решения, однако для численного решения, особенно на ЭЦВМ, она обычно оказывается нецелесообразной. В самом деле, нам придется численно решать уравнение (8) (а если оно будет решено в квадратурах, то вычислять соответствующие интегралы), затем вычислять интеграл (9) и, наконец, обращать полученную зависимость  $x(y)$ . Но гораздо проще — как для составления таблицы значений частного решения, так и для сводных таблиц общего решения — непосредственно численно интегрировать уравнение (7), без понижения его порядка. Так и надо поступать при работе на ЭЦВМ.

Таким образом, надо уметь хотя бы совсем грубо оценивать объем вычислительной работы, необходимой для доведения решения задачи до конца.

Другой пример. Сама постановка задачи §§ I.2 и III.4 о приближенном вычислении сумм с помощью интегралов была, конечно, вызвана потребностями «ручного» счета. При таком счете приведенные приближенные формулы и методы их уточнения оказываются



весьма полезными. Однако при применении ЭЦВМ в большинстве случаев более эффективным оказывается непосредственное суммирование членов.

Но и здесь нельзя действовать вслепую! Допустим, что мы хотим вычислить сумму бесконечного ряда

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Уверовав во всемогущество ЭЦВМ, можно было бы попытаться подсчитывать и складывать члены ряда, пока они не обратятся в *машинный ноль*, т. е. не станут равными нулю после округления, необходимого для записи числа в ячейке, после чего частные суммы ряда перестанут возрастать. Однако при условных параметрах ЭЦВМ, приведенных в § 3 (см. (4), (5)), это будет при

$$\frac{1}{n^2} < 2^{-55}, \quad \text{т. е.} \quad n > 2^{27,5} \approx 2 \cdot 10^8.$$

Ошибка при этом, как видно из § III.4, будет близка к  $1/n$ , т. е. будет на восемь порядков выше последних слагаемых. Так как добавление члена ряда к частной сумме требует нескольких операций, то при быстродействии ЭЦВМ 20 000 операций в секунду вычисление займет около 5 часов. Вы истратите около 300 рублей государственных денег и заслужите волчьи взгляды коллег, особенно если они узнают, что Вы вычисляли. (А если принять длину ячейки не в 30, а в 40 разрядов, что ближе к реальным числам, то срок вычисления и его стоимость повысятся в 32 раза.)

Конечно, так вычислять нельзя. Результат получится гораздо быстрее и точнее, например, если просуммировать 1000 первых членов ряда (это займет менее одной секунды), а остаток заменить на интеграл по методу § III.4; при этом точность результата можно установить, повторив вычисление для 2000 членов. А еще лучше посмотреть сначала справочник И. С. Градштейна и И. М. Рыжика, где вы найдете, что  $S = \pi^2/6$ , а значение  $\pi^2$  можно с большой точностью найти из таблиц. (Конечно, тут нам просто повезло, так как числовые ряды редко «сворачиваются» в конечные выражения через известные константы.)

Вычисления на ЭЦВМ в принципе дискретны. Поэтому при ориентировке на ЭЦВМ надо, формулируя задачу в виде дифференциального или интегрального уравнения, думать о том, как выглядит эта задача и метод ее решения на дискретном языке. Для уравнений с более чем одним независимым переменным это вызывает разнообразные осложнения, многие из которых еще не преодолены.

Особого внимания требуют задачи, содержащие параметры. Пусть, например, мы хотим составить таблицу, по которой можно было бы решать полное кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (10)$$

Если допустить, что каждый из параметров  $a, b, c, d$  может принимать 50 значений—а это не так уж много,—то всего получится  $50^4 \approx 6 \cdot 10^6$  комбинаций этих значений. Средней ЭЦВМ для выдачи результатов потребуется около месяца непрерывной работы (основное время будет уходить на печать), после чего Вы будете иметь набор рулонов лент общей длиной в 200 километров, весом в 2 тонны и проклянете тот час, когда Вам пришла в голову идея заняться этой задачей.

Вообще, характерной чертой многих людей, только что освоивших технику работы на ЭЦВМ и пораженных их мощностью, является стремление получить как можно большее количество численных результатов, на основе наивного принципа «чем больше результатов, тем больше информации, т. е. тем больше пользы». Но часто эти люди оказываются потом подавленными морем цифр, причем проблема извлечения полезного вывода из этого моря может оказаться более сложной, чем исходная задача. Положение здесь напоминает известную средневековую легенду об ученике волшебника, который в отсутствие учителя вызвал джинна и велел ему носить воду, но не смог его остановить вовремя и в результате чуть не утонул. Поэтому весьма актуальным является один из основных тезисов, неоднократно подчеркиваемый известным американским вычислителем Р. Хеммингом в его книге «Численные методы» (русский перевод, Физматлит, М., 1968):

«Прежде чем решать задачу, подумай, что делать с ее решением».

Вернемся к уравнению (10). На самом деле положение не так уж печально. Прежде всего поделим обе части уравнения на  $a$ :

$$x^3 + \frac{b}{a} x^2 + \frac{c}{a} x + \frac{d}{a} = 0.$$

Затем сделаем подстановку  $x = y + \alpha$ , подобрав  $\alpha$  так, чтобы уничтожить член с неизвестной во второй степени. Это даст  $\alpha = -\frac{b}{3a}$ , и мы приходим к уравнению (проверьте!)

$$y^3 + py + q = 0, \quad \text{где} \quad p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}.$$

Сделаем, наконец, подстановку  $y = \beta z$ ; это даст

$$\beta^3 z^3 + p\beta z + q = 0, \quad \text{т. е.} \quad z^3 + \frac{p}{\beta^2} z + \frac{q}{\beta^3} = 0.$$

Выбрав  $\beta = \sqrt[3]{q}$ , мы приходим к уравнению

$$z^3 + rz + 1 = 0, \quad \text{где} \quad r = pq^{-2/3}. \quad (11)$$

Идея этих преобразований ясна: мы последовательно уменьшали число параметров в уравнении, дойдя в итоге до уравнения (11) с единственным параметром  $r$ , представляющим собой комбинацию

исходных параметров. Для вычисления значения  $r$  по этим параметрам требуются простые арифметические действия и таблица кубических корней. Таблицу значений решений уравнения (11) в зависимости от единственного параметра  $r$  уже нетрудно составить с помощью ЭЦВМ, даже если этому параметру придать не 50, а 5000 значений. По решению  $z$  легко найти решение  $x$ :

$$x = \beta z + \alpha = [(27a^3d - 9abc + 2b^3)^{1/3} z - b]/3a.$$

Как видим, решение получится в виде двух таблиц с одним входом каждая (таблиц кубических корней и  $z(r)$ ), что, конечно, несравненно проще, чем одна таблица с четырьмя входами.

Проблема уменьшения числа параметров может возникнуть и при решении дифференциального уравнения, содержащего параметры. Один из таких примеров был рассмотрен в § VIII.10, где задача о решении уравнения (VIII.69) с начальными условиями (VIII.70), содержащая пять параметров (если учесть, что само решение представляет собой функцию  $t$ , то получаем, что для представления этого решения требуется таблица с шестью входами!), была с помощью преобразований подобия сведена к задаче (VIII.71) с двумя параметрами (VIII.72).

В качестве другого примера рассмотрим решение уравнения (7) без параметров при произвольных начальных данных

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Здесь, по первому впечатлению, для представления решения требуется таблица с четырьмя входами, так как параметры  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $y'_0$  и независимое переменное  $x$  могут принимать произвольные значения. Однако число входов легко уменьшить до трех. В самом деле, уравнение (7) не содержит  $x$ , т. е. инвариантно относительно преобразования  $x \rightarrow x + \text{const}$ . Поэтому наряду с решением  $y = g(x)$  уравнение (7) при любом  $C$  имеет решение  $y = g(x + C)$ . Но это значит, что решение  $y$  зависит не от  $x$  и  $x_0$  в отдельности, а от комбинации  $x - x_0$ :

$$y = \psi(x - x_0; y_0, y'_0). \quad (12)$$

Таким образом, достаточно составить таблицу с тремя входами  $y = \psi(x; y_0, y'_0)$  для решения уравнения (7) при  $x_0 = 0$ ; после этого при любом  $x_0$  можно найти решение по формуле (12).

В последнем примере уменьшение числа входов в полной таблице решения получилось в результате указания группы преобразований  $x \rightarrow x + C$ , относительно которой рассматриваемое уравнение остается инвариантным (о понятии группы преобразований см. в § XIV.4). Это означает также, что совокупность графиков всех решений инвариантна относительно переносов вдоль оси  $x$ : каждый такой график после переноса перейдет в график какого-либо иного решения; интересно, что к этому выводу мы приходим на основании анализа самого уравнения, не зная решений!

Оказывается, что знание *непрерывной* группы преобразований (т. е. преобразований, зависящих от одного или нескольких непрерывных параметров), оставляющих заданное дифференциальное уравнение инвариантным, всегда дает возможность понизить число входов в полной таблице его решения. К сожалению, такие группы удается обнаружить далеко не всегда, однако иногда они подсказываются физическими соображениями (как группа сдвигов во времени для автономной системы).

Не жалейте времени на уменьшение числа параметров в задаче! Прежде всего это уменьшает объем вычислительной работы и делает результаты вычисления более обозримыми: например, если параметр принимает 20 значений, то избавление от него означает уменьшение вычислительной работы и объема итоговых таблиц в 20 раз. Во-вторых, получающиеся после преобразования задачи комбинации параметров часто имеют глубокий смысл, связанный с физической картиной явления.

Иногда при применении ЭЦВМ оказывается целесообразным принципиально менять известную ранее методику решения задач. Например, при вычислении интеграла

$$I = \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega$$

по области  $(\Omega)$  высокой размерности и сложной формы оказывается полезным не применение квадратурных формул типа формулы Симпсона (§ 1.1), а следующий метод, основанный на подходе к интегралу как к среднему арифметическому значению функции. Именно, в области  $(\Omega)$  наугад выбираются точки  $M_1, M_2, \dots, M_N$  (для этого в ЭЦВМ имеются датчики *случайных чисел*, принимаемых за координаты этих точек), после чего полагается

$$I \approx \frac{1}{N} [f(M_1) + f(M_2) + \dots + f(M_N)].$$

При большом  $N$  — а ЭЦВМ может это обеспечить — точность этой формулы оказывается практически приемлемой. Этот метод является одним из простейших проявлений общего специфически машинного *метода Монте-Карло*\*), в котором искомая величина представляется в виде среднего значения некоторой случайной величины (§ XIII.7), а это среднее значение заменяется средним арифметическим реализаций этой величины при большом числе независимых испытаний.

Вопросом принципиальной важности при работе на ЭЦВМ оказывается влияние ошибок округления. Когда в длинных цепочках вычислений последующие выкладки все время опираются на результаты предыдущих, ошибки округления могут разрастаться до такой

---

\*) Назван по имени города, печально знаменитого своей рулеткой — учреждением, деятельность которого полностью основана на независимых случайных испытаниях.

степени, что начиная с некоторого момента мы будем иметь дело с одними лишь ошибками.

Приведем яркий пример такого эффекта, заимствованный из интересной книги И. Бабушки, Э. Витасека и М. Прагера «Численные процессы решения дифференциальных уравнений» (русский перевод, «Мир», М., 1969). При вычислении интеграла

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

легко с помощью интегрирования по частям установить, что

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

Кроме того,

$$I_0 = \frac{1}{e} \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{e} (e - 1) = 1 - \frac{1}{e} = 0,632. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) дают возможность последовательно вычислять  $I_1 = 1 - I_0$ ,  $I_2 = 1 - 2I_1$  и т. д. Приведем соответствующие результаты  $I_n^1$  вычисления этих значений с тремя знаками после запятой:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$I_n^1$	0,632	0,368	0,264	0,208	0,168	0,160	0,040	0,720	-4,760

Результаты становятся явно нелепыми, так как из (13) непосредственно видно, что  $I_0 > I_1 > I_2 > \dots > 0$ .

Причины ошибки здесь ясны: при вычислении  $I_n^1$  первоначальная погрешность округления  $I_0$  множится на  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ , а так как точное значение  $I_n$  ограничено (и даже стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ ), то относительная погрешность стремительно возрастает. Вычисления с большим числом знаков, свойственные ЭЦВМ, несколько помогают, но ненадолго: так, при вычислениях с девятью значащими цифрами результаты становятся нелепыми, начиная с  $n = 14$ . Пользой повторного счета, с другим числом десятичных знаков, является то, что мы узнаем, насколько надежными были наши вычисления.

В то же время вычисления нетрудно перестроить так, чтобы погрешности не разрастались, а уменьшались. Для этого достаточно соотношение (14), заменив  $n$  на  $n+1$ , переписать в виде

$$I_n = \frac{1}{n+1} (1 - I_{n+1}),$$

после чего вычислять  $I_n$  от больших  $n$  к меньшим, положив некоторое «отправное»  $I_n$  просто равным нулю. Так, положив  $I_{10} = 0$ , мы получим значения

$n$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$I_n^{11}$	0,100	0,100	0,112	0,127	0,146	0,171	0,207	0,264	0,368	0,632

Более точные вычисления показывают, что  $I_9 = 0,092$ ,  $I_8 = 0,101$ , тогда как все остальные цифры верные.

При вычислении интегралов и решении дифференциальных уравнений из-за влияния ошибок округления порой получается парадокс: с целью увеличить точность результата мы измельчаем шаги, но если применяемый метод *неустойчив*, то из-за увеличения числа действий ошибки округления начинают сказываться сильнее и итоговая погрешность возрастает. Об этом необходимо помнить при работе на ЭЦВМ.

Итак, пользуйтесь ЭЦВМ! Проводите вычисления по своим задачам сами, не поручайте это другим\*). Вычислитель, недостаточно знакомый со спецификой задачи (если только он не является равноправным соавтором), будет проводить много лишней работы, не сможет вовремя перестроиться, сойти с неправильного пути, применить физическую интуицию и грубые прикидки, что неизбежно скажется на результате.

И наконец, помните еще один основной тезис, подчеркиваемый Р. Хеммингом в его книге, указанной на стр. 577:

«Цель расчетов — понимание, а не числа».

Все результаты вычислений должны быть физически осмыслены, они должны выявить тенденции, влияния, а венцом работы должно быть создание интерполяционной приближенной теории с коэффициентами, полученными из точных расчетов. Пусть этот идеал не всегда достижим, но давайте стремиться к идеалу!

### Упражнение

Укажите группу преобразований, оставляющих инвариантным уравнение  $y''' = f(x, y)$ , и число входов, необходимых при составлении таблицы его общего решения.

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 3

1. 10011100001111;  $-1/11 = -0,010101\dots$ ; 10, 11.

2.

0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

\*) Как говорилось в популярной в свое время песне, надо

«Задачи решать самому,  
И это серьезное дело  
Нельзя поручать никому».

Там это было сказано по поводу любви, но не в меньшей степени это относится к вычислительной работе по реальным задачам.

## § 4

1. Здесь и далее указывается только один из возможных вариантов:

- 1)  $+$  9 7 9,
- 2) печ. 9,
- 3)  $\times$  9 9 10,
- 4) печ. 10,
- 5) ПУ 8 9 1,
- 6) ост.,
- 7) 1,
- 8) 999,
- 9) 0.

2. 1)  $+$  9 7 9,
- 2)  $\sqrt{-}$  9 11,
- 3)  $+$  10 11 10,
- 4) ПУ 8 9 1,
- 5) печ. 10,
- 6) ост.,
- 7) 1,
- 8) 99,
- 9) 4,
- 10) 0.

3. 1)  $+$  18 23 18,
- 2)  $:$  19 18 26,
- 3)  $+$  20 26 20,
- 4)  $+$  18 23 18,
- 5)  $:$  19 18 26,
- 6)  $+$  21 26 21,
- 7) ПУ 24 18 1,
- 8)  $-$  21 26 21,
- 9)  $\times$  21 16 21,
- 10)  $\times$  20 17 20,
- 11)  $+$  22 21 22,
- 12)  $+$  22 20 22,
- 13)  $:$  22 25 22,
- 14) печ. 22,
- 15) ост.,
- 16) 2,
- 17) 4,
- 18) 1,
- 19) 1,
- 20) 0,
- 21) 0,
- 22) 1,5,
- 23) 0,01,
- 24) 1,99,
- 25) 300.

Во втором варианте три последних исходных параметра надо заменить соответственно на 0,001, 1,999 и 3000; остальное сделает сама машина! Нетрудно написать и вариант программы, в котором при замене шага потребовалась бы замена лишь одного исходного параметра.

4. 1) печ. 22,
- 2) печ. 23,
- 3)  $\times$  23 23 29,
- 4)  $-$  24 29 29,
- 5)  $\times$  29 25 30,
- 6)  $+$  23 30 30,

- 7) + 22 25 22,
- 8) × 22 22 24,
- 9) — 30 30 30,
- 10) — 24 30 30,
- 11) + 29 30 29,
- 12) × 29 26 29,
- 13) + 23 29 23,
- 14) × 22 27 29,
- 15) { } 29 29
- 16) ПУ 0 29 18,
- 17) ПУ 0 0 3,
- 18) печ. 22,
- 19) печ. 23,
- 20) ПУ 28 22 3,
- 21) ост.,
- 22) —1,
- 23) 0,
- 24) 1,
- 25) 0,001,
- 26) 0,0005,
- 27) 10,
- 28) —0,1.

§ 5.

Двухпараметрическая группа  $y \rightarrow y + C_1 x + C_2$ . Если  $z = \varphi(x; x_0, z_0)$  — решение уравнения  $z' = f(x, z)$  при начальном условии  $z(x_0) = z_0$ , то решение заданного уравнения при начальных условиях  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$ ,  $y''(x_0) = y''_0$  имеет вид

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s \varphi(\sigma; x_0, y''_0) d\sigma = y_0 + y'_0(x - x_0) + \psi(x; x_0, y''_0),$$

т. е. достаточно таблица с тремя входами для  $\psi$ .



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно сходящийся ряд 86  
Аварийный останов 567  
Автономная система дифференциальных уравнений 247  
Автономный процесс 247  
Адамса метод 264  
Адиабатический инвариант 260  
Адиабатическое изменение 259  
Адрес 566  
Аксиальный вектор 372  
Алгоритм 562  
Амплитудная модуляция 555  
Аналитическая функция 164  
Аналоговая вычислительная машина 560  
Аналоговое решение задачи 561  
Антикоммутативность 350  
Антисимметрический тензор 370  
Античастица 185, 372  
Аргумент комплексного числа 145  
Арифметическое устройство 562  
Архимеда закон 343  
Асимптотическая формула 62  
Асимптотически устойчивое по Ляпунову решение 231, 249
- Базис 285, 301  
Безвихревое поле 382, 396  
Безусловный экстремум 425  
Бернулли интеграл 344  
Бесконечномерное пространство 301  
Бесселя формула 40  
Бесциркуляционное поле 383  
Бетатрон 395  
Биения 229  
Био—Савара закон 392  
Блок-схема ЭЦВМ 562  
Больцмана постоянная 54, 481  
Быстроколеблющиеся функции, интегрирование 79—82, 536  
Быстроменяющиеся функции, интегрирование 69—77
- Вариационное исчисление 402, 409  
Вариационный принцип 438  
Вариация функции 410  
— функционала 411  
Вектор 282  
— аксиальный 372  
— вихревой 377  
— единичный 285, 301  
— истинный 372  
—, компоненты 285  
—, модуль 282  
—, момент 354  
— обобщенный 301  
— площадки 318, 342  
— полярный 372  
—, производная 289  
— скользящий 353  
— угловой скорости 353  
Векторная линия 315, 332  
Векторно-векторное произведение 352  
Векторное поле 306, 332  
— — центральное 356  
— произведение 350, 370, 372—373  
— пространство 303—307  
Векторно-скалярное произведение 352  
Векторы линейно зависимые 284  
Вероятностей интеграл 474, 510  
— теория 459—509  
Вероятность 459  
Вес 48  
Ветвления точка 171  
Вещественная часть 144  
Вещественное линейное пространство 302  
Вихревая линия 381, 388  
Вихревой вектор 377  
Вихрь 377  
Влияния функция 189  
Внешнее  $\nabla U$  565  
Внешний интеграл 133  
Внутренний интеграл 133  
Возмущений метод 30  
Возмущенное решение 32, 231  
Волновой пакет 541

Волчек 365  
 Вспомогательное число 571  
 Вторая разделенная разность 406  
 — разность 37  
 Входные параметры 560  
 Вынужденные колебания 217, 224  
 Вычет 176  
 Вычислительные машины 560

Гамильтона оператор 379  
 Гармоническая функция 166, 340, 384  
 Гармонические колебания 157, 215  
 Гармонический анализ 520  
 — ряд 85  
 Гаусса теорема 323  
 Геометрическая прогрессия 83  
 Гиббса явление 546  
 Гильбертово пространство 549  
 Гиперболическая точка 126  
 Гиперплоскость 301  
 Гироскоп 365  
 Главная нормаль 293—294  
 Главное значение интеграла 530  
 Главные оси тензора 368  
 Градиент 308  
 Графический способ подбора формул 51—56  
 Грина функция 189  
 Группа преобразований 532, 579  
 Групповая скорость 444

Давление 342  
 Даламбера признак 84  
 Движение финитное (инфинитное) 358  
 Двоичная система счисления 563  
 Двойной интеграл 131  
 Действие 446  
 Декартова система координат 285  
 Декартовы коэффициенты вектора 285  
 Дельта-функция 185, 197  
 Детерминант 243  
 Диагональный вид тензора 368  
 Дивергенция 333, 335  
 Дидо задача 429  
 Диполь 197, 330  
 —, момент 197, 330  
 Дирака дельта-функция 185  
 Дирихле функция 552  
 Дискретный спектр 517  
 Дисперсионные соотношения 531  
 Дисперсия 493  
 Дифференциал массы 129  
 — полный 101  
 Дифференциальное уравнение 201  
 — —, асимптотически устойчивое по  
 Ляпунову решение 231, 249

Дифференциальное уравнение, возмущенное решение 231  
 — — второго порядка 212, 267  
 — — линейное 205—230  
 — —, невозмущенное решение 231  
 — — обыкновенное 201  
 — —, особая точка 237  
 — — первого порядка 201  
 — —, приближенное решение 250  
 — — Риккати 265  
 — — с разделяющимися переменными 204  
 — — с частными производными 201  
 — —, частное решение 203  
 — —, численное решение 261—268  
 Дифференциальных уравнений система 239, 246  
 — — — замкнутая 242  
 Дифференцирование функций, заданных таблично 41—45

Евклидово пространство 301  
 Единица мнимая 144  
 Единичная функция 193  
 Единичный вектор 285, 301  
 — тензор 367

Зависимость корреляционная 500  
 Задача Дидо 429  
 — Коши 271  
 Закон Архимеда 343  
 — Био—Савара 392  
 — Кулона 320, 359  
 — линейности 191  
 — причинности 529  
 — сохранения четности 372  
 Законы Кеплера 356, 360, 361  
 — Кирхгофа 160  
 — Ньютона 315, 354, 355, 359  
 Замкнутая система дифференциальных уравнений 242  
 Запоминающее устройство 562  
 Знакопеременная сумма 21  
 Знакопередающийся ряд 85

Изоклина 204  
 — бесконечностей 204  
 — нулей 204  
 Изолированная точка 127  
 Изопериметрическая задача 429  
 Изотропия 302  
 Импеданс 161  
 Инвариант адиабатический 260  
 Интеграл Бернулли 344

Интеграл вероятностей 474, 510

- двойной 131
- кратный 131
- криволинейный 131
- линейный 311, 373
- несобственный 61—69
- —, главное значение 530
- — правильно сходящийся 94
- — равномерно сходящийся 94
- —, численное интегрирование 67
- объемный 129
- от функции комплексного переменного 168—172
- ошибок 12
- первый 241
- по мере 198
- расходящийся 62, 63, 66, 95
- Римана 199
- собственный 61
- Стильеса 198
- сходящийся 62, 66
- тройной 131
- Фурье 228, 536

Интегралы, зависящие от параметра 93—96

Интегральная линия 202

— сумма 129

Интегральное уравнение 250

Интегральный признак Коши 84

— синус 12

Интегратор 561

Интегрирование функций, заданных таблично 41—45

— численное 12—17

Интерполяционная задача 14

— формула Бесселя 40

— — Ньютона 39

Интерполяция 36, 54

— квадратичная 39

— линейная 38

Инфинитное движение 358

Истинный вектор 372

Источник векторных линий 330, 332

Исходные данные 567

Исчисление вариационное 402, 409

Итераций метод 27, 251

Кавитация 346

Кажущееся сопротивление 161

Кардано формула 27

Квадратичная интерполяция 39

— форма 124

Квадратичный функционал 410

Кеплера законы 356, 360, 361

Кеплерово движение 361

Кинетическая энергия 293, 369

Кинетический момент 356

Кирхгофа законы 160

Код 566

Колебаний уравнение 212, 217, 234

Колебания вынужденные 217, 224

— гармонические 157, 215

— свободные (собственные) 163, 212—216

Количество векторных линий 318, 332

Команда 566

Коммутативность 350

Комплексное линейное пространство 302

— число 144

— —, аргумент 145

— —, извлечение корня 154

— —, модуль 145

— —, показательная форма 152

— — сопряженное 147

— —, тригонометрическая форма 145

Компонента вектора 285

Конвективная скорость 104

Конденсатор 329

Конечное уравнение 25

Концевой экстремум 436

Координаты обобщенные 138

Корень из комплексного числа 154

— кратный 156

Корреляции коэффициент 501

Корреляционная зависимость 500

Коши задача 271

— интегральный признак 84

— теорема 169

Коши—Римана условия 165

Коэффициент корреляции 501

Краевая задача 270

Краевое условие 270

Кратный интеграл 131

— корень 156

Кривизна 294

Криволинейный интеграл 131

Критерии подобия 278

Кронекера символ 366

Круговая подстановка 372, 376

Кулона закон 320, 359

Лагранжа множитель 427

— функция 446

Лапласа оператор 339

— уравнение 166, 339, 384

Лейбница признак 85

Ленца правило 394

Линейная зависимость (независимость) векторов 284

— интерполяция 38

— комбинация 213, 284

Линейное дифференциальное уравнение 205—230

- Линейное отображение 297  
— пространство 301  
— — вещественное 302  
— — комплексное 302  
Линейности закон 191  
Линейные действия 283  
Линейный интеграл 311, 373  
— функционал 410  
Линия векторная 315, 332  
— вихревая 381, 388  
—, изолированная точка 127  
— интегральная 202  
—, обыкновенная точка 127  
— ориентированная 311  
—, особая точка 127  
— силовая 167, 315  
— тока 316  
—, точка самопересечения 126  
— уровня 107, 309  
— цепная 421  
Логарифм комплексного числа 154  
Локальная скорость изменения поля 104  
— флуктуация 479  
Лорана ряд 176
- Магнитное поле 389  
Мажорируемость 94  
Максвелла уравнения 393—396  
Малого параметра метод 30, 254  
Массовая скорость 317, 337  
Машинный ноль 576  
Медленно меняющаяся величина 258  
Мембрана 424, 447  
Метод Адамса 264  
— возмущений 30  
— итераций 27, 251  
— касательных 26  
— малого параметра 30, 254  
— Монте-Карло 579  
— наименьших квадратов 47  
— неопределенных коэффициентов 253  
— Ньютона 26  
— последовательных приближений 27  
— Ритца (Ритца—Галеркина) 450  
— трапеций 13  
— Эйлера 261  
— Эйткена 29  
Минимум 124  
Мнимая единица 144  
— степень 151  
— часть 144  
Мнимое число 148  
Многозначная функция 171  
Многомерное векторное пространство 300—303
- Многомерное многообразие 138  
— пространство 138  
Многообразие  $k$ -мерное 138  
Множитель Лагранжа 427  
Моделирование 279, 561  
Моделирующая вычислительная машина 560  
Модуль вектора 282  
— комплексного числа 145  
Модуляция 555  
Момент вектора 354  
— вращения 356  
— диполя 330  
— инерции 364  
— кинетический 356  
Монте-Карло метод 579
- Набла-оператор 379  
Наименьшего действия принцип 446  
Наименьших квадратов метод 47  
Напряженность магнитного поля 389  
Начальная задача 269  
Начальное условие 203, 216, 269  
Неабсолютно сходящийся ряд 86  
Неасимптотически устойчивое решение 231  
Невозмущенное решение 31, 231  
Независимые события 463  
Нелинейный функционал 410  
Немой индекс 296  
Необратимый процесс 481  
Неоднородное линейное дифференциальное уравнение 206, 217, 224, 273  
Неодносвязная область 397  
Неопределенности принцип 541  
Неопределенных коэффициентов метод 253  
Непрерывный спектр 517  
Неразрывности уравнение 337  
Несобственный интеграл 61—69  
— — правильно сходящийся 94  
— — равномерно сходящийся 94  
— —, численное интегрирование 67  
Неустановившееся поле 306  
Неустойчивость вычислений 581  
Неявная функция 109  
— —, производная 113  
Норма функции 548  
Нормаль главная 293, 294  
Нормальный закон 499  
Нормировка 315  
Нулевое приближение 25  
Ноль машинный 576  
Ноль-вектор 284  
Ньютона законы 315, 354, 355, 359  
— метод 26  
— формула 39

- Обильность источника 333  
Область 128  
—, мера 131  
— неодносвязная 397  
— односвязная 397  
Обобщенные координаты 138  
— функции 553  
Обобщенный вектор 301  
Образ 191, 531  
Объемный интеграл 129  
Обыкновенное дифференциальное уравнение 201  
Огибающая 119  
Однородное линейное дифференциальное уравнение 205, 212  
Односвязная область 397  
Оперативное ЗУ 565  
Оператор 191  
— Гамильтона 379  
— Лапласа 339  
— Фурье 531  
Определитель 243  
— системы 243  
Оптическая плотность 439  
Ориентированная линия 311  
— поверхность 317  
Ортогональная система функций 549  
— — — полная 550  
Особая точка дифференциального уравнения 237  
— — линии 127  
Особенности интеграла 61  
Останов 567  
Остроградского формула 333  
Отображение линейное 297
- Параболическая точка 126  
Параллельность действия 565  
Параметр 93, 112  
Параметра малого метод 30  
Параметрический резонанс 261  
Параметрическое задание функции 112  
Первая разность 37  
Первого приближения система 248  
Первое приближение 26  
Первый интеграл 241  
Переадресация 572  
Передающая функция 528  
Передача управления 570  
Переполнение ячеек 567  
Перестановка круговая (циклическая) 372, 376  
Пересчет 263  
Переходный период 229  
Перфокарта 564  
Перфолента 564  
Перфоратор 564
- Плавающая запятая 564  
Планка постоянная 260, 448, 481  
Плоское поле 307  
Плоскопараллельное поле 307  
Плоскость соприкасающаяся 294  
Плотность спектральная 517, 525  
Поверхность ориентированная 317  
— уровня 309  
Пограничный слой 275  
Подобие явлений 276  
Поле 306  
— безвихревое 382, 396  
— бесциркуляционное 383  
— векторное 306, 332  
— магнитное 389  
— нестационарное (неустановившееся) 306  
— плоское 307  
— плоскопараллельное 307  
— потенциальное 382  
— силовое 311  
— скалярное 306  
— скорости 316, 336, 386  
— соленоидальное 391  
— стационарное (установившееся) 104, 306  
— электрическое 320, 339  
— электромагнитное 392  
— электростатическое 320  
Полная ортогональная система функций 550  
— производная 103  
— энергия 314, 357  
Полный дифференциал 101  
«Полуцелые» значения аргумента 37  
Полус 175  
Полярный вектор 372  
Последовательных приближений метод 27  
Постоянная Больцмана 54, 481  
— Планка 260, 448, 481  
— Эйлера 90  
Поступательный перенос 283  
Потенциал 315, 321, 382, 396  
— центробежный 358  
— эффективный 359  
Потенциальная энергия 313  
Потенциальное поле 382  
Поток вектора 317, 332  
Правило Ленца 394  
— параллелограмма 283  
— правого винта 349  
Правильно сходящийся несобственный интеграл 94  
Правый винт 349  
Преобразование команды 571  
— Фурье 523

- Прецессионное движение 365  
Приближение нулевое 25  
— первое 26  
Приближенные методы решения дифференциальных уравнений 250—258  
Признак Даламбера 84  
— Лейбница 85  
Признаки сходимости рядов 83—85  
Принцип вариационный 438  
— наименьшего действия 446  
— неопределенности 541  
— сохранения четности 372  
— суперпозиции 191  
— Ферма 439  
Причинности закон 528  
Программа 567  
Программирование 568  
Прогрессия геометрическая 83  
Проекция вектора 285  
Произведение векторно-векторное 352  
— векторное 350, 370, 372, 373  
— векторно-скалярное 352  
— скалярное 287, 548  
— смешанное 352  
— тензорное 298  
Производная вектора 289  
— неявной функции 113  
— полная 103  
— функции, заданной параметрически 112  
— частная 101  
— — второго порядка 104  
— — смешанная 105  
Прообраз 191, 531  
Пространство бесконечномерное 301  
— векторное 300—303  
— вещественное 302  
— Гильберта 549  
— евклидово 301  
—  $k$ -мерное 138  
— комплексное 302  
— линейное 301  
— —, размерность 302  
— псевдоевклидово 302  
Процесс автономный 247  
— сходящийся 28  
Прямые методы вариационного исчисления 449  
Псевдовектор 372  
Псевдоевклидово пространство 302  
Псевдоскаляр 373  
Пуассона распределение 485, 487  
— уравнение 339  
Рабочая ячейка 568  
Равномерно сходящийся несобственный интеграл 94  
Радиоактивный распад 483  
Радиолампа 116—118  
—, внутреннее сопротивление 116  
—, коэффициент усиления 117  
—, крутизна характеристики 116  
Разветвление программы 572  
Разложение вектора 284  
Размерность пространства 301  
Разность вторая 37  
— — разделенная 406  
— первая 37  
— первого порядка 37  
— центральная 37  
Разрез 172  
Разрыв 1-го рода 536  
Разряд 564  
Ранг тензора 298  
Распределение вероятностей нормальное 499  
— простых чисел 505  
— Пуассона 485, 487  
Расходимость (дивергенция) 333  
Расходящийся интеграл 62, 63, 66, 95  
— процесс 29  
— ряд 83  
Резонанс 230  
— параметрический 261  
Решение асимптотически устойчивое 231, 249  
— неасимптотически устойчивое 231  
— невозмущенное 31, 231  
Риккати уравнение 265  
Римана интеграл 199  
Ритца (Ритца—Галеркина) метод 450  
Ротор 377, 387  
Ряд абсолютно сходящийся 86  
— гармонический 85  
— знакопередающийся 85  
— Лорана 176  
— неабсолютно сходящийся 86  
— расходящийся 83  
— сходящийся 83  
— Тейлора 120  
— Фурье 544  
— числовой 82  
Свободные колебания 163, 212, 234  
Связи уравнение 426  
Сдвиговое течение 387  
Седло (особая точка) 238  
Седловина 124  
Сила тока комплексная 158  
Силовая линия 167, 315  
Силовое поле 311  
Символ Кронекера 366  
Симметрический тензор 368

- Симпсона формула 15  
 Синус интегральный 12  
 Система автономная 247  
 — дифференциальных уравнений 239, 246  
 — — — замкнутая 242  
 — укороченная (первого приближения) 248  
 Скаляр 282  
 Скалярное поле 306  
 — —, градиент 308  
 — —, линии уровня 309  
 — —, поверхности уровня 309  
 — произведение 287, 548  
 Скользящий вектор 353  
 Скорость изменения поля 104  
 — — — конвективная (переносная) 104  
 — — — местная (локальная) 104  
 След тензора 371  
 Сложение векторов 283  
 Слой пограничный 275  
 Случайная величина 478, 492  
 Случайные числа 579  
 Смешанное произведение 352  
 Собственные колебания 163, 212  
 Собственный интеграл 61  
 События независимые 463  
 Соленоидальное поле 391  
 Соприкасающаяся плоскость 294  
 Сопротивление кажущееся 161  
 Сопряженные гармонические функции 166  
 — комплексные числа 147  
 Составляющая вектора 285  
 Спектр дискретный 517  
 — задачи 272  
 — непрерывный 517  
 — функции 517  
 Спектральная плотность 525  
 Спектральный анализ 520, 544—547  
 Специализированная ЭЦВМ 563  
 Среднее значение функции 130  
 — квадратичное уклонение 495  
 Стандартная подпрограмма 572  
 Статистический массив 478  
 Стационарное значение 403  
 — поле 104, 306  
 Степени свободы 138  
 Степень мнимая 151  
 Стильеса интеграл 198  
 Стирлинга формула 78  
 Сток 333  
 Стокса формула 378  
 Структурная схема ЭЦВМ 562  
 Струна 405  
 Сумма знакочередующаяся 21  
 Сумма интегральная 129  
 — частная 82  
 Суперпозиции принцип 191  
 Схема с пересчетом 263  
 Сходящийся интеграл 62, 66  
 — процесс 28  
 — ряд 83  
 Тангенциальная составляющая 294  
 Тейлора ряд 323  
 Температура 482  
 Тензор 298  
 — антисимметрический 370  
 —, диагональный вид 368  
 — единичный 367  
 — инерции 366  
 — симметрический 368  
 — упругих напряжений 369  
 Тензорное произведение 298  
 Теорема Гаусса 323  
 — Коши 169  
 Теория вероятностей 459—509  
 Теплосодержание 40  
 Ток смещения 393  
 Тока линия 316  
 — трубка 345  
 Точка ветвления 171  
 — воздействия 189  
 — линии изолированная 127  
 — — обыкновенная 127  
 — — особая 127  
 — наблюдения 189  
 — особая дифференциального уравнения 237  
 — поверхности гиперболическая 126  
 — — параболическая 126  
 — — эллиптическая 126  
 — самопересечения линии 126  
 Транслятор 572  
 Трапеций способ 13  
 Трехадресная команда 566  
 Тригонометрическая форма комплексного числа 145  
 Тройной интеграл 131  
 Трубка тока 345  
 Узел (особая точка) 238  
 Умножение вектора на скаляр 284  
 Умножения вероятностей правило 462  
 Универсальная ЭЦВМ 562  
 Универсальный машинный язык 572  
 Уравнение дифференциальное 201  
 — интегральное 250  
 — колебаний 212, 217, 234  
 — конечное 25  
 — Лапласа 166, 339, 384

- Уравнение неразрывности 337  
— Пуассона 339  
— Риккати 265  
— с частными производными 201  
— связи 426  
— характеристическое 213, 246  
— Эйлера 416, 424  
Уравнения Максвелла 393—396  
Уровня линия 107, 309  
— поверхность 309  
Условие краевое 270  
— начальное 203, 216, 269  
Условия Коши—Римана 165  
Условный экстремум 425, 428  
Установившееся поле 306  
Устойчивое асимптотически решение 231, 249  
— неасимптотически решение 231  
Устойчивость 247, 272  
— по Ляпунову 248  
— — — асимптотическая 231, 249  
Устройство управления 562
- Фазовая диаграмма 160  
— скорость 443  
Ферма принцип 439  
Финитное движение 358  
Флуктуация локальная 479  
Фокус 239  
Форма квадратичная 124  
Формула Бесселя 40  
— Кардано 27  
— Ньютона 39  
— Остроградского 333  
— Симпсона 15  
— Стирлинга 78  
— Стокса 378  
— Эйлера 151  
Функции ортогональные 549  
Функционал 409  
—, вариация 411  
— линейный 410  
— нелинейный (квадратичный) 410  
—, экстремум 411  
Функция аналитическая 164  
— влияния (Грина) 189  
— гармоническая 166, 340, 384  
— Грина 189  
— Дирихле 552  
— единичная 193  
— Лагранжа 446  
— многозначная 171  
— неявная 109  
— —, производная 113  
—, параметрическое задание 112  
— распределения вероятностей 461, 488
- Функция совместного распределения 502  
—, среднее значение 130  
— точки 306  
—, экстремум 122  
Функция-образ 191  
Функция-прообраз 191  
Фурье интеграл 228, 536  
— оператор 531  
— преобразование 523  
— ряд 544
- Характеристическое уравнение 213, 246  
Характерное время 276
- «Целые» значения аргумента 36  
Центр масс 355  
— (особая точка) 238  
Центральная разность 37  
Центральное векторное поле 356  
Центрально-симметричное поле 310, 319, 334, 340  
Центробежный потенциал 358  
Цепная линия 421  
Цикл 570  
Циклическая перестановка 372, 376  
Циклоида 418  
Циркуляция 312, 313, 374  
Цифровая вычислительная машина 560
- Частная производная 101  
— — второго порядка 104  
— — смешанная 105  
— сумма 82  
Частное решение 203  
Частотная модуляция 555  
Численное интегрирование 12—17  
— — быстроменяющихся функций 69—77  
— — несобственных интегралов 67  
— решение дифференциальных уравнений 261—268  
— — конечных уравнений 25—33  
Число комплексное 144  
— степеней свободы 138  
Числовой ряд 82  
Чисто мнимое число 148
- Шаг таблицы 37
- Эйлера метод 261  
— постоянная 90



- Эйлера уравнение 416, 424  
— формула 151  
Эйткена метод 29  
Экстраполяция 36, 54  
Экстремум концевой 436  
— с ограничениями 436—438  
— условный 425, 428  
— функции 122  
— функционала 411  
Электрическое поле 320, 339  
Электромагнитное поле 392  
Электростатическое поле 320  
Элемент ЗУ 565  
— массы 129
- Элемент объема 129  
Эллиптическая точка 126  
Эмпирическая формула 45  
Энергия кинетическая 293, 369  
— полная 314, 357  
— потенциальная 313  
Энтальпия 40  
Энтропия 479  
Эффективный потенциал 359  
ЭЦВМ 559
- Явление Гиббса 546  
Ячейка 562

Цена 1 р. 36 к.