В. БЮЛЕР

ГАУСС

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС
(1777—1855)

В. БЮЛЕР

ГАУСС

БИОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО А.Л. ТООМА
ПОД РЕДАКЦИЕЙ С.Г. ГИНДИКИНА

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.1г
Б98
УДК 51 (091)

W.K. Bühler
Gauss
A biographical study
Springer-Verlag
Berlin – Heidelberg – New York
1981

Бюлер В. **Гаусс. Биографическое исследование**: Пер. с англ. А.Л. Тоома / Под ред. С.Г. Гиндикина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 208 с. – ISBN 5-02-013919-X.

Впервые на русском языке издается книга, специально посвященная жизни и творчеству К.Ф. Гаусса (1777–1855) – одного из величайших математиков в истории человечества. Автор не стремился написать всеобъемлющую научную биографию, ориентированную на узкий круг специалистов. Его цель – нарисовать живой портрет ученого и человека. Много внимания уделяется историческим событиям, на фоне которых протекала нелегкая жизнь ученого.

Для студентов, преподавателей, научных работников и всех, кто любит математику и ее историю.

Научное издание

Бюлер Вальтер Кауфман

ГАУСС

Биографическое исследование

Заведующий редакцией *С.И. Зеленский*. Редактор *В.В. Донченко*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технические редакторы *С.В. Геворкян, С.Н. Баронина*
Корректоры *Н.П. Круглова, Т.В. Обод*

Набор осуществлен в издательстве на наборно-печатающих автоматах
ИБ № 41010

Сдано в набор 05.06.89. Подписано к печати 11.08.89
Формат 60 X 88/16. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура Пресс-Роман
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,74. Усл. кр.-отт. 13,11. Уч.-изд. л. 14,13
Тираж 22400 экз. Тип. зак. 1228. Цена 1 р.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Наука"

Типография им. Котлякова
издательства "Финансы и статистика"
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
195273 Ленинград, ул. Руставели, 13

Б $\frac{1602010000-120}{053(02)-89}$ 8-89

ISBN 5-02-013919-X

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Личность Карла Фридриха Гаусса (1777–1855) интересует и профессиональных математиков и любителей математики. Один из величайших математиков всех времен, в девятнадцать лет решивший проблему построения правильного семнадцатиугольника циркулем и линейкой (стоявшую перед математикой две тысячи лет), через несколько дней доказавший квадратичный закон взаимности – "золотую" теорему (что не удалось сделать Эйлеру, Лагранжу, Лежандру), за два-три следующих года систематически разработавший арифметику и алгебру настолько глубоко и далеко, что их судьба была определена на сто лет вперед, затем обратившийся к анализу и быстро увидевший основные моменты невиданной аналитической теории – теории эллиптических функций... А потом он (в 25 лет!) фактически прекращает занятия математикой, медлит с публикацией результатов об эллиптических функциях (через 30 лет их переоткрыли Якоби и Абель), становится великим астрономом, затем геодезистом и физиком. Но, сохраняя интерес к математике, лишь однажды на короткое время (в связи с геодезией) Гаусс обратится к геометрии и заложит основы современной дифференциальной геометрии. А потом выяснится, что Гаусс первым открыл неевклидову геометрию, но не опубликовал результатов, став свидетелем ее переоткрытия Бояи и Лобачевским. Мы видим, что жизнь Гаусса содержит немало моментов, о которых можно иметь мнение, не тратя силы на знакомство с его работами. Почему он не опубликовал свои результаты, и имел ли он на это моральное право, как он должен был вести себя по отношению к Абелю – Якоби, Бояи – Лобачевскому? Эти сюжеты удачно дополнялись многочисленными анекдотами, в том числе историями о математическом детстве (о поразительных способностях к счету в раннем детстве, еще до того как он "научился говорить"), историей о переоткрытии формулы для суммы арифметической прогрессии, которые любил рассказывать в старости сам Гаусс (как и многие другие великие ученые, например Галилей).

В книге Бюлера собран огромный фактический материал о жизни Гаусса в объеме, прежде не доступном советскому читателю (если он не является, конечно, профессиональным историком математики). Автор сам много говорит о возможных жанрах научных биографий. На одном полюсе находятся большие академические биографии с полным набором фактов и мелких деталей (при неудачном исполнении превращающиеся в их кладбище), на другом – популярные, часто беллетризованные биографии, в которых читателю сообщается сложившаяся у автора версия с привлечением цитат и ссылок для иллюстрации, но не для доказательств.

Жанр, к которому относится книга Бюлера, занимает среднее положение. Она адресована не только профессионалу, отбор материала соответствует сложившемуся у автора образу героя, но все утверждения формулируются аккуратно со ссылкой на содержащийся в книге документальный аппарат. Читатель имеет возможность оценить доказательность заключения автора. Например, меня не убедили доводы автора, опровергающие принятое мнение (Сарториуса и Клейна) о том, что Гаусс в Брауншвейге практически не имел доступа к серьезной математической литературе.

Один пример авторской манеры изложения. Он предполагает, что мать Гаусса не умела писать, приводит отрывок из письма Гаусса к жене (второй) от 1810 г., где упоминается, что мать не может читать рукописный текст, но сам предостерегает, что это могло быть связано с возрастным ухудшением зрения. Заметим, что в бедной биографиями отечественной литературе книги, написанные в такой манере, практически отсутствуют.

В книге Бюлера три слоя: много места уделяется описанию исторического фона, на котором проходила жизнь Гаусса, далее, имеется описание собственно жизни ученого и, наконец, обсуждаются его работы. По моему мнению, наименее удалось автору последнее: он не смог найти в этой части правильной тональности и не всегда понятно, какому читателю адресованы пересказ и формулировки результатов. Возможно, более уместным было бы адаптированное изложение хотя бы некоторых результатов Гаусса (например, построение правильного 17-угольника). Что же касается жизни Гаусса, то читатель получает большой, хорошо продуманный материал. Я не разделяю распространенного мнения, что жизнь ученого – это его работы и что не следует углубляться в обстоятельства его личной жизни. Проблемы взаимоотношения с обществом великого ученого с его постоянными интеллектуальными перегрузками и погружением во внутренний мир – достаточно поучительный и достойный предмет. Книга Бюлера хорошо это иллюстрирует.

Вальтер Кауфман Бюлер умер, когда готовилось русское издание его книги. Специальный номер журнала "Mathematical Intelligencer" был посвящен его памяти. Крупнейшие математики отмечали его заслуги в мировой математической жизни, прежде всего, в издании математической литературы: на протяжении многих лет он руководил американским отделением издательства Шпрингер. Грустно, что автор не увидит издания своей книги на русском языке, которого он с нетерпением ожидал.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Procreare iucundum,
sed parturire molestum.*
(Гаусс, по словам Эйзенштейна)

План этой книги зародился восемь лет назад. Рукопись медленно менялась, пройдя несколько стадий, пока не приняла свой нынешний вид в 1979 году. Вряд ли стоит перечислять имена всех друзей и специалистов, с которыми я обсуждал различные варианты рукописи, но кого мне хочется упомянуть – это мистер Гэри Корнелл, который не только обсуждал со мной многие детали рукописи, но и правил ее стиль.

Интерес к жизни Гаусса широко распространен в математическом мире, и оказанной мне великодушной помощью я, конечно, обязан скорее этому, чем любым достоинствам или недостаткам моей рукописи. За все фактические неточности, ошибки в суждениях и другие недостатки, конечно, отвечает автор. Самые рискованные и, в некотором смысле, самые легкие решения, которые мне пришлось принять, – те, что были обусловлены моим личным вкусом в выборе и освещении тем. Многое пришлось опустить или обсудить лишь мимоходом.

Николаус фон Фусс, небезызвестный тем, кто изучает жизнь Гаусса, начинает свою "Хвалебную речь Эйлеру" (Lobrede auf Herrn Euler) (Эйлер, Труды, I) с замечательного описания задачи биографа: "Описывать жизнь великого человека, прославившего свой век значительной степенью просвещенности, – значит превозносить человеческий ум".**

Эта биография – попытка следовать программе Фусса, хоть я и не знаю, подписался ли бы Гаусс под его просвещенным заявлением. Он не стал бы, надеюсь, возражать против него в применении к жизни самых великих, Архимеда и Ньютона.

В этой книге много цитат, даже длинных отрывков из работ Гаусса. Сначала я собирался дать их на языках оригинала, но потом меня убе-

*Творить приятно, но рождать мучительно (*лат.*). – ***Примеч. ред.***

**Далее Фусс приводит обширный список требований, которым должен удовлетворять биограф. Я не могу не согласиться с ним; но не могу похвастаться знанием всего, что требует знать Фусс.

дили перевести их на английский.* Их стиль от этого не стал лучше, потому что Гаусс писал по-немецки ясно и очень энергично – kraftvoll, как сказали бы по-немецки. Оригинальные тексты почти всех цитат можно найти в примечаниях в конце книги.

Наконец, с удовольствием выполняя свой долг, я благодарю те библиотеки, чьими превосходными услугами я мог пользоваться в процессе работы: библиотеку Института математических наук им. Куранта Нью-Йоркского университета, Публичную городскую библиотеку Нью-Йорка и Нижне-Саксонскую государственную библиотеку (Niedersächsische Staatsbibliothek) в Гёттингене, где хранится архив Гаусса.

Эта книга посвящается моей жене, никогда не проявлявшей ревности к старшему сопернику.

Март 1981.
Гора Киско, Нью-Йорк *В.К. Бюлер*

---

* В данном издании они переведены на русский.

ВВЕДЕНИЕ

В 1977 году исполнилось двести лет со дня рождения Гаусса; в 1980-м году состоялась 125-я годовщина со дня его смерти. Таким образом, обстоятельства, сформировавшие Гаусса, восходят к давнему прошлому — к далекому от нас миру 18-го века и первых десятилетий 19-го. Понять эти времена теперь нелегко.

Писать биографию Гаусса будет все труднее с каждым годом. Придется привлекать все больше и больше дополнительного материала и все больше объяснять читателю, чей исходный круг интересов, возможно, не будет включать историю. Пожалуй, именно сейчас мы достигли критической точки: через несколько лет мир очень изменится, и следы века Просвещения и эпохи романтизма больше не будут восприниматься как часть нашего наследия.

Эта книга описывает жизнь математика и ученого Карла Фридриха Гаусса. Гаусс жил в эпоху, исключительно богатую политическими и социальными событиями, даже по сравнению с нашим переменчивым и бурным веком. Ему было 12 лет, когда разразилась Французская революция, 29, когда была распущена казавшаяся вечной тысячелетняя Священная Римская империя, 38, когда был разгромлен Наполеон, и за 70, когда в самой Германии произошла либеральная революция 1848 года. В тот же промежуток времени произошла так называемая первая промышленная революция, резко и необратимо изменившая и быт и политический и социальный порядок. Ясно, что все это влияло на жизнь Гаусса явным и ощутимым образом. Были очевидные моменты — такие, как осуществление ранее невозможных крупномасштабных и эффективных научных экспериментов или совершенствование телескопов и других оптических инструментов, но мы встретим и более тонкие эффекты — такие, как последствия замены старого феодального порядка абсолютистскими правительствами "нового стиля" в Германии, и все больший комфорт в повседневной жизни.

Эта биография адресована современному математику и ученому, а не историку науки или психологу, коллекционирующему скальпы великих людей. Ее скромная цель не в том, чтобы написать биографию Гаусса в ее окончательном виде. В то же время было бы нескромно или даже претенциозно специально выискивать в жизни и работе Гаусса такие аспекты, которые были бы занимательны и пришлись бы по вкусу читателю, не слишком интересующемуся историей и не видящему причин, почему он должен ею интересоваться.

Деятельность Гаусса, особенно в математике, и сегодня жива и представляет научный интерес. Ее имеет смысл изучать не только из любопытства, но и как глубокий источник вдохновения. Гаусс глубоко разобрался в таких вопросах, которые даже сегодня еще не поняты до конца. Хорошая научная работа, особенно в математике, не стареет. В этом внутренняя причина нашего интереса к Гауссу; стараться понять его идеи и его жизнь небессмысленно и небезнадежно. Эта биография была задумана как путеводитель по области, куда нелегко войти, где нет еще хороших карт местности, но которая способна к щедрой награде.

Чтобы быть полезным, руководство должно быть избирательным. Читатель, хотя не будучи полностью во власти руководства, должен иметь доверие к его сведениям, и что еще важнее, к его вкусу. При написании этой книги я систематически избегал общих слов: образ мыслей Гаусса, его работа и отличия того и другого от его предшественников и современников показываются на конкретных примерах. Решение, что включить, а что опустить, часто было произвольным, и многие важные результаты не могли быть упомянуты. Мы надеемся, что общая картина получилась удовлетворительной, несмотря на многие возможные несоответствия, пропуски и мелкие ошибки.

Личная судьба Гаусса, его непрерывное развитие в почти всегда доброжелательной и готовой помочь среде совершенно исключительны для Германии. Это представляет определенный интерес для историка, но это должны иметь в виду и те, для кого исторические аспекты жизни Гаусса не стоят на первом месте. Отсутствие препятствий повлияло на действия Гаусса несколько раз на протяжении его карьеры и развития; более того, это заметно повлияло на образ его мыслей. Что Гаусс "выпадает" из интеллектуальной картины Германии 18- и 19-го веков, это ясно; то, что его путь был так исключительно гладок, может быть одной из причин того, почему прежняя литература о нем страдает таким недостатком понимания многих вненаучных аспектов жизни Гаусса.

Из посмертной литературы о Гауссе два самых важных и полезных произведения связаны с именем Феликса Клейна. Одно – это обзор научной деятельности Гаусса, сделанных Клейном в его лекциях о развитии математики в 19-м столетии, второй – это собрание очерков, которые по инициативе Клейна были включены в X и XI тома Академического издания трудов Гаусса. Работа Клейна и эти очерки обсуждаются в эпилоге и в одном из приложений к этой книге.

Первоначально предполагалось сопроводить собрание трудов Гаусса его биографией, но эта часть плана Клейна не была осуществлена, как и полный указатель, который также планировалось издать.

В этой книге очень мало такого, что не было бы уже известно специалисту. Практически вся имеющаяся здесь информация может быть найдена в опубликованных источниках. Собрание трудов Гаусса достаточно полно; бо́льшая часть корреспонденции Гаусса, относящейся к делу (и масса не относящейся к делу) опубликована. Об источниках, первичных и вторичных, говорится также в двух из трех приложений к этой книге.

Эта биография никогда не могла бы быть написана без обширной вторичной литературы, касающейся жизни и творчества Гаусса (ср. в этой связи мое замечание в начале Библиографии). Работа Клейна и очерки, опубликованные в тт. X, XI Собрания трудов Гаусса, уже упомянуты; еще один незаменимый источник — это биография Г.У. Даннингтона "К.Ф. Гаусс — титан науки" (1955). В ней содержится невероятное количество материала, результат десятилетий работы.

В силу особенностей этой биографии было трудно оценить, какой степени обоснованности или детальности читатель ждет или хочет. Различные подстрочные примечания, сопровождающие текст, дают интересующемуся читателю ссылки, а иногда дополнительную информацию. Торопливые и доверчивые могут не обращать на них внимания.

Естественно, что многое из того, что говорится, не получает здесь обоснования, но я постарался снабдить оговорками большинство наиболее рискованных утверждений.

ГЛАВА 1

ДЕТСТВО И ЮНОСТЬ, 1777–1795

О детстве и юности Гаусса известно очень мало характерного и интересного. В основном нам приходится довольствоваться формальными биографическими данными плюс информация того рода, какую можно вывести из общего знакомства с социальной и политической ситуацией того времени. Наш единственный крупный источник конкретных сведений о Гауссе – это он сам; истории его детства, которые он любил рассказывать в старости, были сохранены и переданы его учениками и друзьями[1] и теперь прочно вошли в сложившийся образ Гаусса. Многие их этих рассказов невозможно подтвердить, да и серьезного интереса они не представляют.

Позднейшие исследования открыли некоторые детали происхождения семьи Гаусса и судьбы некоторых его родственников. Кульминацией этих усилий стало обширное генеалогическое древо, простирающееся в такие области, как американский Средний Запад и пригород Бруклина; в придачу к прямым родичам и потомкам Гаусса, оно включает много дальних и даже сомнительных, разве что потенциальных, ветвей. В Германии сохранилось немного прямых потомков Гаусса, но в Соединенных Штатах семья, видимо процветает.[2]

Иоганн Фридрих Карл Гаусс родился 30 апреля 1777 года. Он был, насколько известно, единственным ребенком четы, состоявшей из Гебхарда Дитриха Гаусса, родившегося в 1744 году, и Доротеи Бензе, бывшей на год старше мужа. Был другой мальчик, несколькими годами старше, сын отца от первого брака.[3] Семья отца Гаусса, из мелких фермеров, переехала в город Брауншвейг около 1740 года, сменив жизнь батраков или фактически бесправных сельских хозяев на столь же бедное, но сулившее хоть какие-то надежды существование "полуграждан" Брауншвейга, главного города герцогства Брауншвейг-Вольфенбюттель. Как и многим другим тогдашним пришельцам из деревни, этот переезд дал семье Гауссов надежду на постепенное улучшение судьбы и на более светлое будущее. Не было легкого способа улучшить свою участь; средневековые гильдии (Zünfte), державшие в своих руках ремесла, тем самым контролировали в большой степени и жизнь города и не допускали экономических новшеств. Они были закрыты для пришельцев, и даже спустя поколение отец Гаусса не смог в них вступить и вынужден был пробавляться неблагодарными случайными заработками: то в саду, то на канале, то уличным мясником, то бухгалтером похоронного общества.[4]

Одной из первых важных задач семьи было приобрести собственный дом. Только владелец дома, расположенного в пределах города, мог стать полноправным горожанином со всеми соответствующими правами и привилегиями.[5]

Через несколько лет после того как дом был приобретен, мир, в котором Карл Фридрих родился, перестал существовать. Это была внезапная и неожиданная катастрофа, когда германские государства, включая Брауншвейг, были опустошены победоносными армиями революционной Франции. 1780-е годы, в которые рос Гаусс, не обещали иного или лучшего будущего.

Карл Фридрих Гаусс родился в маленьком доме на улице Венденграбен. Позже дом стал числиться под номером 30 по Вильгельмштрассе.[6] Через несколько лет после рождения сына родители уехали из этого дома, с которым связана одна из хорошо известных историй о детстве Гаусса, согласно которой будущий князь математиков чуть не утонул в близлежащем канале в возрасте трех-четырех лет.

И отец и мать Гаусса были не очень-то образованными: отец, судя по тому, кем он работал, хотя бы умел читать и писать; кроме того, он владел элементарной арифметикой. Мать, вероятно, умела читать, но не писать.* Гаусс, как кажется, не был особенно близок с отцом, и мы знаем из поздних замечаний, что он считал свою одаренность унаследованной от матери. В 1817 году, после смерти мужа, она переехала в Гёттинген и жила в доме сына, пока не умерла в 1839 году в возрасте 96 лет. Доротея Гаусс происходила из семьи каменщиков и попала в Брауншвейг в 1769 году. Ее предки, как и предки ее мужа, жили к северу от города. Первая жена Карла Фридриха, видимо, была знакома с его матерью еще раньше, быть может, с тех времен, когда Доротея, еще до замужества, работала служанкой у семьи Риттер. Можно предположить, что истории о своем детстве[7] и сведения о родственниках Карл Фридрих узнавал в основном от матери.

Достоверная информация, дошедшая до нас, начинается с 1784 года, когда Карл Фридрих впервые пошел в школу. Сам факт, что он учился

---

*Письмо Гаусса его будущей второй жене (см. с. 74) дает дополнительную информацию. Мы знаем, что Доротея Гаусс не могла читать текст, написанный от руки, в 1810 году, но это может быть ранним симптомом ее старческой слепоты. Выводить отсюда большее – пустая спекуляция.

в школе, неудивителен: дети, жившие в больших городах, в то время обычно имели такую возможность.[8] Но мальчику исключительно повезло в другом: судя по всему, ему попался знающий и заботливый учитель. Бюттнер заинтересовался мальчиком, стараясь помочь ему и подбодрить его. Теперь нетрудно себе представить, чем блестящий Гаусс мог выделиться на фоне других учеников. Но тогда его надо было заметить среди пятидесяти с лишним детей разных возрастов и различной подготовки, сидевших в одной комнате. Есть данные о том, что Гаусс пришел в школу, уже научившись читать и писать, причем безо всякой помощи со стороны родителей.[9] Едва трех лет от роду он уже умел считать и выполнять элементарные вычисления. Бюттнер очень заинтересовался маленьким Гауссом: в 1786 году он получил из Гамбурга специальный арифметический текст для необычного ученика, уже знавшего стандартные пособия вдоль и поперек. Ассистентом Бюттнера в эти годы был Мартин Бартельс (1769–1836), позже профессор математики Казанского университета, бывший лишь восемью годами старше Гаусса. Он быстро распознал гений Гаусса* и стал уделять маленькому ученику особое внимание. Мы не знаем, как родители поощряли своего одаренного сына, и поощряли ли вообще; времена, при тогдашней нужде и бедности, были утилитарные и не способствовали тому, чтобы ценить школьную учебу и академические успехи. Доброжелательное, хотя и безучастное удивление родителей хорошей учебой сына уж, конечно, не было связано с надеждами на его успех в жизни. В их узком и ограниченном мире для сына поденщика могли найтись, по правде говоря, дары поважнее и более обещающие, чем забавная способность к счету и арифметике.

Карл Фридрих покинул маленький родительский мир в 1788 году, когда с помощью Бюттнера поступил в школу следующей ступени. В этой новой школе были упорядоченные и регулярные лекции; впервые Гаусс учился в классах разумной численности, с соучениками одного возраста и уровня знаний. Впрочем, состав предметов был старомоден и однобок даже для того времени, с чрезмерным упором на древние языки, особенно латынь.

Таким образом, большая часть того, что оказалось решающим для дальнейшего развития Гаусса, произошла уже к концу 1780-х годов, задолго до того, как рухнул старый политический и социальный порядок. Гауссу было 12 лет, когда началась Французская революция, и около 30, когда ее последствия коснулись Германии. Лишь после 1806 года общество стало более демократично; к этому времени Гаусс в социальном плане был уже сформировавшейся личностью. Его кругозор был, несомненно, узок; с его собственной точки зрения, так же как и с точки зрения его родителей, его ранние школьные успехи немногого стоили. Можно было думать только о том скромном и убогом достатке, на какой рассчитывали его отец и его старший брат, ставший ткачом. В лучшем случае мож-

---

*Слово "гений" было в ходу в то время. См. обсуждение этого слова ниже (с. 20).

но было надеяться на не очень-то привлекательную карьеру протестантского пастора или учителя.

Гаусс не терял даром времени в новой школе: он хорошо выучил латынь, необходимую для дальнейшей учебы и академической карьеры. Кроме того, он освоил официальный верхненемецкий, тот самый язык, на который Лютер перевел Библию. До этого Гаусс говорил только на местном диалекте.[10]

В 1791 году Карл Фридрих, в качестве одаренного и многообещающего молодого горожанина, был представлен государю – герцогу Брауншвейг-Вольфенбюттельскому. Видимо, юноша произвел впечатление на герцога: тот для начала пожаловал Гауссу стипендию в 10 талеров в год. Награды такого рода не были необычными в то время, особенно в таких маленьких и хорошо управляемых государствах, как Брауншвейг. Их следует рассматривать как зачатки сегодняшнего официального и регулярного финансирования ученых. Без них социальные барьеры были бы непреодолимы для одаренных детей из низов; они составляли важный фактор в развитии эффективной и лояльной гражданской службы, необходимого орудия абсолютистских правительств того времени.

Гаусс никогда не пробился бы без прямой помощи ряда людей, заинтересованных в признании его талантов. Самую важную поддержку оказал советник (Hofrath) фон Циммерман, профессор учебного заведения "Коллегия Карла" (Collegium Carolinum), крупный чиновник и личный доверенный герцога – типичный представитель абсолютистской администрации. Его благосклонное влияние сопровождало Гаусса до 1806 года, когда государство Брауншвейг-Вольфенбюттель было разрушено Наполеоном, и за год до того, как Гаусс стал директором обсерватории в Гёттингене. Сохранилось много свидетельств той благодарности и глубокого уважения, которые Гаусс выражал по отношению к Циммерману; их примеры можно найти в его переписке с астрономом Ольберсом, позднее выступившим по отношению к Гауссу в той же роли: уже в 1802 году Ольберс предложил Ганноверскому правительству назначить Гаусса директором обсерватории в Гёттингене.

В 1792–1795 годах Гаусс был учеником новой гимназии – Коллегии Карла, основанной не ранее, чем за десять лет до этого. Он был принят туда благодаря своим успехам в учебе. Это было прогрессивное, научно ориентированное учреждение, одно из лучших учебных заведений в своем роде, основанное и управляемое непосредственно правительством и ставшее для него главным поставщиком высококвалифицированных, лояльных чиновников и военных. Заведения такого типа были нередки в Германии того времени. Это были школы для избранных, откуда вышли многие известные писатели и ученые 18-го и начала 19-го веков.[11]

Семья Гаусса больше ничего не могла сделать для его развития и интеллектуального роста; своими знаниями он был обязан своим учителям и своим способностям. Отдаление от семьи, видимо, не тяготило Гаусса; кажется, он и не был никогда особенно близок со своими родителями. Знаем мы о его отношении к родителям лишь в зрелом возрасте, когда он был очень обособлен: например, он характеризует своего отца как честного и работящего, но и как узкого и вспыльчивого, и упоминает с удивительной прямотой, что у его родителей были несовместимые темпераменты и что их брак был несчастливым.*[12] Получить возможность расширить знания и упражнять ум, должно быть, значило для Гаусса все в то время. Школа была в центре его жизни, а все остальные интересы и требования – в стороне.

Размышляя о школьных успехах Карла Фридриха, мы должны иметь в виду, что его путь был бы несравненно более трудным, если бы он не выучился так хорошо латыни и греческому. Без этого его успех никогда не был бы таким постоянным, независимо от изобретательности и успехов в математике. Есть много примеров из того же времени, когда жесткость формального образования и огромное значение, придававшееся классическим языкам, ломали карьеры многообещающих молодых людей. Среди тех, кто не смог справиться с системой, – такие люди, как Базедов, Венцель и Арндт, которых подчас называют "ужасными людьми" (Schreckensmänner).[13]

За годы учебы в академии Гаусс встретил несколько молодых людей, с которыми подружился на долгие годы; в их числе – А.В. Эшенбург и К. Иде. Отец Эшенбурга преподавал в академии, и его переводами пьес Шекспира восторгался К.М. Виланд, один из знаменитейших поэтов Германии. Его сын, подружившийся с Гауссом на всю жизнь, стал высокопоставленным чиновником в Пруссии. Иде, как и Гаусс, стал математиком и астрономом. Он поступил на работу в один из русских университетов и умер молодым. Еще одним другом Гаусса был Мейерхоф, который несколько лет спустя правил и отделывал латынь в "Арифметических исследованиях" Гаусса.

В Коллегии Карла была на редкость хорошая библиотека, и можно предположить, что в ней было многое из классической математической литературы. За время учебы Гаусс изучил многие из этих текстов, включая Ньютона, которым он восхищался. (Ньютон и Архимед – единственные, к кому Гаусс применял в своих работах характеристику "светлейший" (illustrissimus).) Другими важными книгами были "Алгебра" и "Анализ" Эйлера и несколько работ Лагранжа.**

---

*Этому утверждению не следует придавать слишком большого значения, потому что понятия Гаусса о семье и отношении к ней отличались от современных. Современные представления – во многом продукт 19-го века. Впоследствии Гаусс усвоил теперешний взгляд на семью, но не следует думать, что он непременно применял его к своим родителям.

** Мы не можем сказать с уверенностью, какие книги были доступны для Гаусса в то время. В своей работе "Памяти Гаусса" (Gauss zum Gedächtnis) Сарториус заявляет, что Гаусс не имел доступа к книгам высокого уровня до своего приезда в Гёттинген, но в этом можно усомниться. Основаниями для возражений служат поздние заявления самого Гаусса и, что еще важнее, уровень и зрелость его первых матема-

Покидая Коллегию Карла, Гаусс знал уже достаточно, чтобы читать текущую литературу. Он мог проводить самостоятельные исследования, не переоткрывая слишком часто уже известное. Из его дневника мы знаем, что в то время Гаусса интересовали больше всего теория чисел и алгебра, но было бы неправильно проводить четкие границы между различными областями математики на этой стадии его работы. Во время пребывания в академии Гаусс в основном усваивал: его математический голод был универсален и всепоглощающ, хотя и обращен, как обычно, на специальные задачи и вопросы. Хорошее, но беспорядочное знание старой литературы, приобретенное им в этот период, выражается в его исторических замечаниях и в кажущихся внезапными перескоках с одной темы на другую, бросающихся в глаза в категоричных утверждениях его дневника.

Мы видели, как гений Гаусса был замечен уже в начальной школе; пожалуй, лучшее, что учителя сделали для его образования, – это то, что они дали ему возможность учиться независимо. Первый эффектный успех пришел к Гауссу, когда ему не было еще девятнадцати – доказательство того, что можно построить правильный 17-угольник циркулем и линейкой. Часто заявляют, что это открытие побудило Гаусса заниматься математикой, а не классическими языками. Циммерман объявил об этом результате Гаусса в журнале "Новости культуры" (Intellegenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung).[14]

Другие вопросы, которыми Гаусс интересовался в эти годы (в том числе уже в 1791 году), были (доступная на элементарном уровне, но сложная и далеко идущая) теория арифметико-геометрического среднего и распределение простых чисел. Обе эти темы ведут к интересным вычислениям. Числами и манипуляциями с ними Гаусс интересовался сильно и не только в ранние годы.

ДОПОЛНЕНИЕ I

ПОЛИТИЧЕСКАЯ И СОЦИАЛЬНАЯ СИТУАЦИИ

В этом коротком экскурсе мы попытаемся возместить недостаток конкретных знаний о детстве и юности Гаусса общими замечаниями о тогдашней социальной и исторической ситуации. Город Брауншвейг, в котором рос Гаусс, расположен в северной (протестантской) части Германии. Хотя религия в ту пору еще была важной составной частью повседневной жизни, родители Гаусса, видимо, не были особенно религиозны и, во вся-

тических работ. Важным косвенным аргументом является список тех книг, которые Гаусс, будучи студентом, брал в Гёттингенской университетской библиотеке (этот список перепечатан в [Даннингтон]). В него входят труды Санкт-Петербургской Академии и другая исследовательская литература, но очень мало классических и учебных текстов, с которыми Гаусс, стало быть, был уже знаком.

ком случае, не проявляли тех евангелических (пиетистских) тенденций, которые тогда были распространены в этом слое общества[1]. Когда в 1840-х годах вспыхнул интерес к столоверчению и тому подобным сеансам, он, возможно, напомнил Гауссу о суевериях времен его юности. Неудивительно, что когда его бывший студент В. Герлинг, ставший профессором физики в Марбургском университете, консультировался с ним по этому поводу, его замечания были определенно отрицательными: Гаусс категорически отверг мистический опыт этого (и любого) рода и решительно дал понять, что научной основы здесь нет.[2]

Брауншвейг когда-то был богатым торговым центром. Он входил в средневековую Ганзейскую Лигу, но в последние 150 лет все больше хирел. В средние века и даже еще в первые годы 17-го столетия Брауншвейг был важным торговым центром, серьезным соперником Гамбурга и Амстердама. Он был политически независим, хотя и под номинальной властью герцогов Брауншвейг-Вольфенбюттельских. Управлял им, согласно старой олигархической конституции, избираемый совет, члены которого обычно происходили из одних и тех же семей, но его ослабили народные восстания и катастрофические последствия Тридцатилетней войны. В 1671 году он без боя потерял свою политическую независимость и был включен в герцогство Брауншвейг-Вольфенбюттельское, став его столицей в 1736 году. Вследствие этих пертурбаций многие старые знатные семьи уехали в Гамбург и Нидерланды, в результате чего город и его экономика хирели еще больше, достигнув низшей точки около 1750 года, когда в городе было всего двадцать тысяч душ. Постепенно эти потери были возмещены пришельцами из окрестностей, для которых теперь в город открылся свободный доступ. Среди них была и семья отца Гаусса, пришедшая в город с севера.

В Брауншвейге-Вольфенбюттеле, как и в других маленьких германских государствах того времени, основу экономики составляло сельское хозяйство, откуда и черпало свои финансы правительство. Несколько попыток индустриализации, по примеру Франции и Пруссии, были не слишком успешны. Это неудивительно, если учесть, что под "индустриализацией" понимались такие проекты, как систематическое разведение тутовых деревьев и шелковичных червей или канализация реки Окер, каковой нереалистичный проект был заброшен после слабых попыток осуществления.

По всей Германии большие города, безжизненные памятники былой славы, превратились в гигантские богадельни. Жесткий старый социальный порядок казался непоколебимым без каких-либо признаков зарождения тех радикальных перемен и политических бурь, которым суждено было снова сделать город центром прогресса и цивилизации. Один факт, не такой уже важный сам по себе, покажет душную атмосферу того времени, как раз перед штормом: несколько имперских эдиктов, направленных на защиту хорошо организованных суконщиков, запрещали применять механический ткацкий станок, тот самый, чей успех ознаменовал начало индустриальной революции в Англии.

Одной из немногих сфер подлинного прогресса в 18-м веке было народное образование; здесь была заложена основа для перемен, происшедших в 19-м столетии. Хотя обязательное посещение школы не проводилось в жизнь очень жестко, в большинстве своем поколение Гаусса могло читать, писать и делать простейшие расчеты. В некоторых районах даже преподавалась элементарная латынь. Карьера самого Гаусса – хороший пример продвижения одаренного ребенка из простонародья: у него не было иной надежды на продвижение, кроме помощи и личного участия князя, богатого купца или другого богатого и влиятельного покровителя. Коллегия Карла была лишь одной из многих школ такого рода; более знамениты академия в Шульпфорте (Schulpforta) и Карлсшуле (Karlsschule) в Штутгарте. С появлением этих школ церкви потеряли еще одну традиционную опору в образовании, потеряв уже, по крайней мере в большинстве протестантских стран, значительную часть контроля над университетами во время Реформации[3].

Роман "Антон Рейзер"[4] – не столько вымысел, сколько горькое и реалистичное изображение детства и отрочества его автора; он дает хорошее представление о том, каково было одаренному ребенку расти в бедной семье на протестантском севере Германии во второй половине 18-го века. Автор К. Мориц вышел из того же социального слоя, что Гаусс; его книга описывает ограничения, лишения и унижения бедняков и эмоциональную и интеллектуальную борьбу ребенка, растущего под покровительством неизвестного благотворителя.* С окончанием среднего учебного заведения выпускник, такой как Гаусс, обычно переставал получать прямую поддержку, и это считалось естественным. Это была еще одна критическая точка, где часто внезапно и преждевременно кончалась многообещающая карьера. Но, как мы увидим, с Гауссом было не так: его путь был прям и упорядочен, без почти неизбежных сюрпризов и отступлений.

Размышляя о чей-либо жизни, мы смотрим на нее сквозь психологические и социологические теории, сложившиеся в последние 75 лет. Теперь мы знаем, что родители, взаимоотношения с ними и вообще социальные и психологические факторы имеют решающее значение. В случае Гаусса сведения об этих важнейших обстоятельствах отсутствуют, и мы должны спросить себя, не делает ли это нашу задачу неразрешимой. Быть может, мы действительно беремся за нее с пустыми руками, но не стоит так уж

*Подобно автору, герой романа с трудом заканчивает школу и не имеет возможности продолжать образование и карьеру ожидаемым упорядоченным и независимым образом. Если бы он не смог выразить себя в литературе, Мориц умер бы без гроша и был бы забыт, как многие другие. Эта книга – превосходный источник для понимания того социального и культурного фона, на котором протекала юность Гаусса, особенно если учесть, что Ганновер, в котором рос Мориц, всего милях в тридцати к западу от Брауншвейга.

сожалеть о недостатке информации. Что, если психологический и социологический подход – не только достижение научного прогресса последних ста лет, но к тому же симптом нашего века? Вполне можно представить себе, что те новые категории, которые мы научились применять, начиная с конца прошлого столетия, не так уж хороши для понимания прежних времен, даже такого близкого нам времени, как эпоха Гаусса. Тогда нас не так уж и огорчит отсутствие информации такого рода: по крайней мере мы будем гарантированы от недоразумений и (возможно, врожденной) склонности к осовремениванию прошлого.

Хотя в целом наш подход будет "неревизионистским", мы все же займемся детальным психологическим обсуждением семейной жизни Гаусса. Взаимоотношения Гаусса с его двумя женами и детьми от обоих браков глубоко влияли на его развитие как человека и как ученого. Мы увидим, как "чувство семьи" (Familiensinn) Гаусса, его отеческая озабоченность социальным успехом семьи и карьерами его детей развивалась в согласии с общими тенденциями того времени. В этом отношении Гаусс резко отличался от того, что он сам испытал со стороны своих родителей, людей 18-го века; только в ретроспективе его отношение к детям предстает как выражение семейных идеалов среднего класса, ставших одним из первых порождений начала 19-го века. Возможно, на него повлияли современники и друзья – Шумахеры, Ольберсы и Бессели, и особенно – его вторая жена. За эту идею быстро ухватились младшие современники и биографы Гаусса. Объясняя те или иные его действия, охотно предлагали частные, индивидуальные объяснения, даже если можно было найти и другие ("объективные") мотивы. Примером служит традиционное объяснение ссоры с астрономом Бесселем в 1832 году: Гаусс якобы написал недостаточно рекомендательных писем для зятя Бесселя, географа, а Бессель, видите ли, не прислал письмо с соболезнованием, когда умерла вторая жена Гаусса.[5] Мы еще вернемся к этому конфликту, потому что Бессель (да еще разве что Ольберс) был единственным компетентным математиком и равным партнером в астрономической теории и наблюдениях среди регулярных корреспондентов Гаусса.

Став взрослым, Гаусс довольно рано порвал большую часть из тех "осмысленных" социальных и эмоциональных связей, какие у человека могут быть. Он не был близок со своими родителями, и мы не знаем других сильных привязанностей, которые он бы пронес из детства во взрослую жизнь.

Обратимся теперь к вопросу, который кажется неловким, но становится совершенно нормальным, если его интерпретировать в терминах 18-го столетия, когда слово "гений" имело особый смысл. Гаусс не стремился выглядеть гением и участвовать в том движении, которое было в большой моде во времена его молодости. Тогда был настоящий культ – и не только среди людей искусства – молодости, одаренности и творчества; одним из признаков творчества и гения было пренебрежение к установленным правилам – и в частной жизни и в творениях. Такой подход был весьма оригинальным и революционным для своего времени, но Гаусс, несмотря на свои националистические и антифранцузские настроения, не участвовал в нем и не проявлял к нему симпатии. Этот подход отвергал классическое образование как античного, так и французского образца, и отказывался от некритической веры в силы прогресса, столь типичной для века Просвещения. Гений – подлинный, неиспорченный продукт природы – сам создавал себе правила и жил, работал и развивался в соответствии с ними. В Германии главными участниками этого движения были те представители творческой молодежи, которые объединились под лозунгом "Буря и натиск" (Sturm und Drang). Они, с свою очередь, вдохновили многих хорошо известных поэтов и философов романтической школы, включая Ф. Гёльдерлина и Г.В. Гегеля.[6] Некоторые обстоятельства дальнейшей жизни Гаусса позволят нам понять его полное неприятие романтического движения; детство и юность не внушили Гауссу никакой симпатии к миру благородного дикаря.

"Буря и натиск" – немецкий вариант духовных исканий всей Европы конца 18-го века. Его специфические корни следует искать в политической ситуации того времени, особенно в стремлении поднимающегося среднего класса играть конструктивную роль в обществе. Оптимистическое кредо Просвещения казалось бессильным горожанам столь же не относящимся к делу, как и предшествовавший ему бесплодный ортодоксальный догматизм. Большинство участников "Бури и натиска", а позднее романтических поэтов принадлежало к той социальной группе, которая во Франции поддерживала и питала Великую революцию, но в менее развитой Германии никакое политическое и социальное движение не могло надеяться на политический успех без помощи из-за рубежа. Гаусс жил в ином мире, не затронутом этими потрясениями. По крайней мере в первые тридцать лет своей жизни Гаусс не чувствовал конфликта между своим личным развитием и феодальным политическим порядком. С его точки зрения, его собственная карьера казалась лучшим примером того, как работает такая разновидность феодализма, как просвещенный абсолютизм с его политическими и педагогическими концепциями.

Можно сделать еще один вывод, более гипотетический. Не только происхождение и воспитание Гаусса, но и его опыт работы ученого и математика мог оказать на него консервативное влияние. Этому утверждению невозможно придать количественный смысл, но, рассматривая жизнь Гаусса, мы не раз наткнемся на свидетельства его нетерпимости к любым переменам, могущим затронуть его научную работу и даже повседневную жизнь.[7]

ГЛАВА 2

СТУДЕНЧЕСКИЕ ГОДЫ В ГЁТТИНГЕНЕ, 1795 – 1798

В 1795 году, восемнадцати лет от роду, Гаусс покинул свой родной Брауншвейг, чтобы изучать математику в университете в Гёттингене, маленьком городе примерно в 65 милях к югу. Гёттинген был уже "за границей" – в другом государстве, Ганновере; Гаусс отправлялся туда против воли своего герцога, хотевшего, чтобы он поступил в местный университет в Гельмштедте.* Местный университет был старым, без особой научной репутации; в нем господствовали факультеты богословия и права. Мы знаем, что Гёттингенский университет привлек Гаусса хорошей библиотекой[1], но на его решение могла повлиять также его репутация как научно ориентированного и "реформистского". Король Англии Георг II, будучи заодно и князем Ганноверским, основал университет в Гёттингене, взяв за образцы Оксфорд и Кембридж; этот университет лучше снабжался и к тому же был более независимым от правительства и церкви, чем большинство университетов Германии. Факультета богословия там не было вообще; зато развивались факультеты медицины и естественных наук.[2] По обычаю германских университетов, Гаусс распоряжался своим временем совершенно свободно, пользуясь полной "академической свободой". Никто ему не указывал, на какие лекции он должен ходить, с ним не занимались никакие наставники, не было ни экзаменов, ни систематического контроля даже в среде самих студентов.**

Гаусс познакомился с несколькими профессорами, в том числе с физиком Лихтенбергом, астрономом Зайфером и лингвистом Гейне. Он ходил на их лекции, причем Гейне и Лихтенберг, видимо, произвели на него наибольшее впечатление.*** Скорее, разочарование у Гаусса вызвал профессор математики В. Кестнер, хорошо известный своими популярными тогда учебниками. Кестнер не был творческим математиком, и Гаусс так и не признал его ни учителем, ни коллегой. Гаусс отзывался о нем с понятной, но порой ненужной резкостью, и даже в старости, спустя много лет после смерти Кестнера, любил высмеивать его.[3] Зайфер в

---

*Выбор Гёттингена был не таким уже исключением. Иде, на два года старше Гаусса и тоже из Брауншвейга, также предпочел Гёттинген. В обоих случаях герцог продолжал оказывать финансовую помощь.

**Студенческие братства (Verbindungen), позже столь знаменитые и влиятельные, возникли только после 1815 года, когда Наполеон был окончательно побежден. Они заменили некоторые прежние организации, существовавшие в большинстве германских университетов, но не в Гёттингене. Эти прежние организации были типа землячества.

***С именем Лихтенберга связаны многие остроумные эпиграммы и афоризмы. Он ввел термины "положительный" и "отрицательный" и соответствующие знаки "+" и "–" для электрических зарядов.

позднейшей корреспонденции изображается как некомпетентный, но приятный в общении коллега.*[4]

Во всяком случае, Гаусс не зря приехал в Гёттинген уже потому, что часто пользовался библиотекой. Сохранился список книг, которые он брал; интересно, что он содержит не только, как и следовало ожидать, математическую литературу, но и романы того времени, включая "Клариссу" Ричардсона, которую он читал по-английски, и шведскую грамматику.[5]

У Гаусса было немного друзей среди студентов. Единственная прочная дружба, о которой мы знаем, завязалась у него с Вольфгангом (Фаркашем) фон Бояи. Бояи был венгерским дворянином из Трансильвании, где кроме венгров было немало немцев. Для нас самый важный результат этой дружбы – переписка, длившаяся более пятидесяти лет, начиная с 1779 года, когда Гаусс на время уезжал из Гёттингена, и до 1853 года, за два года до смерти Гаусса. Эти письма – один из важнейших источников для нашего понимания Гаусса как человека, а с математической стороны – для исследования возникновения неевклидовой геометрии. Дополнительную информацию дает краткая автобиография, которую Бояи написал для Венгерской академии наук, и его письмо от 1855 года первому биографу Гаусса Сарториусу.[6]

Вольфганг фон Бояи был на два года старше Гаусса; он записался в Гёттингенский университет в 1796 году для изучения философии. Такая формулировка в то время подразумевала и занятия математикой, но Бояи действительно интересовался философией. Его непосредственное общение с Гауссом продолжалось меньше трех лет и окончилась с возвращением Бояи в Венгрию в 1799 году. В математике его увлекли основания геометрии. В автобиографическом наброске, написанном в 1840 году, он описывает, как подружился с Гауссом:

> . . . и я познакомился с Гауссом, который тогда там (т.е. в Гёттингене) учился и с которым я и теперь дружу, хотя я никогда не мог даже отдаленно сравниться с ним. Он был очень скромен и сдержан; не три дня, как с Платоном, а годы можно было общаться с ним, не подозревая о его исключительности. Жаль, что я не знал, как открыть эту молчаливую книгу без названия и прочесть ее. Я не знал, как много он знает, а он, узнав меня поближе, высоко оценил меня, не зная, как я мал. Нас связывала (не проявлявшаяся вовне) страсть к математике и наше духовное сродство; часто мы гуляли вместе часами, каждый занятый своими мыслями, не обмениваясь ни словом.[7]

В знак дружбы Гаусс и Бояи обменялись трубками и поклялись курить их ежедневно в определенный час, вспоминая друг друга.[8]

Бояи отнюдь не был богачом, но все же принадлежал к другому социальному классу. Это был скромный молодой человек, с энтузиазмом относившийся к математике и восхищавшийся своим другом открыто и без-

*Суждения Гаусса о Кестнере и Зейфере, кажется, с годами становились все резче. В ранней переписке с Бояи они гораздо мягче. Видимо, решающим во взаимоотношениях с Кестнером стал момент, когда тот не смог понять теорию деления круга Гаусса. Некомпетентность Зайфера стала ясной лишь позднее, когда Гаусс стал работать как астроном. Мы еще встретим у Гаусса подобные перемены во мнениях.

условно. Когда они впервые познакомились, Гаусс еще ничего не опубликовал, и его гений был отнюдь не очевиден. На Кестнера, например, способности Гаусса, видимо, не произвели никакого впечатления.[9] В июне 1799 года друзья виделись в последний раз (в этом мире) в деревне Клаусталь, на полпути между Гёттингеном и Брауншвейгом. Бояи возвращался домой, и Гаусс предложил встретиться.

В течение всех трех лет в Гёттингене Гаусс был совершенно свободен в выборе занятий. Осенью 1798 года он покинул университет по причинам, неясным для нас; к этому времени у него уже зародились основные идеи почти всех его важных математических статей, которые он опубликовал в последующие двадцать пять лет. Гаусс ушел из Гёттингена без диплома. Следуя, как он написал Бояи, желанию своего герцога,[10] он в 1799 году представил свою докторскую диссертацию в Гельмштедтский университет. Степень была присуждена без обычного устного экзамена (in absentia).

В письме к Бояи Гаусс без обиняков отклонил Гёттинген в качестве места их последней встречи перед возвращением Бояи в Венгрию. Вероятно, было неправильно подозревать Гаусса в скрытых мотивах* – ничего не было сказано открыто ни тогда, ни позже, включая 1807 год, когда Гаусс вернулся в Гёттинген как директор обсерватории. Скорее всего, возвращаясь в Брауншвейг, Гаусс был убежден, что в Гёттингене ему больше учиться нечему, так что и оставаться там не стоит.

Для математического образования Гаусса общение с Кестнером, возможно, было и не таким уж бесплодным, как казалось, Кестнер был опытным педагогом и неплохим историком математики. Уступая, конечно, Ламберту, Кестнер, вероятно, испытывал его влияние, также интересуясь основаниями геометрии, то есть системой аксиом Евклида и соотношением десятой аксиомы (о параллельности) с другими.[11] Вполне возможно, что Бояи и даже Гаусс получили полезную информацию и советы от Кестнера.

ДОПОЛНЕНИЕ II

ОРГАНИЗАЦИЯ СОБРАНИЯ ТРУДОВ ГАУССА

Самым заметным результатом пребывания Гаусса в Гёттингене явился трактат "Арифметические исследования" (Disquisitiones Arithmeticae), опубликованный в 1801 году. Это основная работа Гаусса по теории чисел и одна из важнейших работ за всю историю математики. Прежде чем перейти к ее содержанию, сделаем несколько методологических замечаний.

---

*Можно себе представить (по аналогии с подобными реакциями в других случаях), что Гаусс боялся, что его скрытые мотивы могут быть неверно поняты (или, если угодно, поняты слишком хорошо). Быть может, это и толкало Гаусса на то, чтобы избежать Гёттинген в то время.

Основная публикация этой и других научных работ Гаусса, на которую мы ориентируемся, – это академическое издание собрания трудов (Carl Friedrich Gauss' Werke). Опубликованное в 12 томах, с 1863 по 1929 год, оно организовано по плану, разработанному вскоре после смерти Гаусса, и составлено под руководством Феликса Клейна, не дожившего, однако, до публикации последнего тома. Кроме тех трудов, которые опубликовал сам Гаусс, Собрание трудов содержит достаточно полную* подборку его неопубликованных и незаконченных статей, фрагментов и набросков, никогда не предназначавшихся для публикации, и отрывки из писем. Первые семь томов – тематические: теория чисел (тт. I и II), анализ (т. III), теория вероятностей и геометрия (т. IV), математическая физика (т. V) и астрономия (тт. VI и VII). Том VIII содержит различные добавления. Том IX продолжает том VI и посвящен геодезии. Тома X и XI изданы в двух частях: первая часть каждого содержит различные статьи и документы, а вторая часть – обширные и подробные очерки о вкладе Гаусса в различные области, написанные весьма компетентными математиками и другими учеными. Хотя и неравные по качеству и по интересу, который они могут вызвать, эти очерки – лучшее руководство по работам Гаусса. Том XII содержит различные короткие статьи и атлас земного магнетизма, составленный и изданный Гауссом вместе с Вильгельмом Вебером и его ассистентом В. Гольдшмидтом.

Есть две причины того, почему это собрание трудов несколько несистематично. Не все статьи, принадлежащие Гауссу, были известны, когда первые тома готовились к печати; более того, первоначальный редактор, Шеринг, умер в 1897 году, между выходом в свет VI и VII томов. Следующие тома готовили различные редакторы, в основном специалисты в соответствующих областях.

К материалам, никогда не предназначавшимся для публикации самим Гауссом, принадлежит "математический дневник"**, случайно найденный в 1898 году, спустя сорок с лишним лет после смерти его автора. Его записи начинаются в 1796 и кончаются в 1814 году, но непрерывно продолжаются лишь до 1801 года. Он помогает точнее датировать многие результаты Гаусса; более того, он дает некоторое представление об идейном мире Гаусса в наиболее продуктивные годы. Большинство из 146 составляющих его записей относятся к анализу, алгебре и теории чисел; все это довольно скупые заявления без доказательств и объяснений. Видимо, дневник был для Гаусса чем-то вроде вахтенного журнала для фиксации наиболее осмысленных или привлекательных открытий. Первая запись говорит о возможности построения 17-угольника; другие важные

*Не буквально, конечно, а в смысле математической значимости. Только антиквар может быть неудовлетворен этой публикацией, но его можно утешить, сказав, что кое-какая работа оставлена и для него.

** Собрание трудов, т. X, с. 483–574.

темы – это разложение рядов в непрерывные дроби, разложение чисел в суммы квадратов или "треугольных" чисел, квадратичный закон взаимности, деление круга и лемнискаты, суммирование определенных интегралов и рядов, параллелограмм сил, движение комет и планет, основания геометрии, формула для датировки пасхи до 1999 года и арифметико-геометрическое среднее, играющее центральную роль в исследовании Гауссом эллиптических интегралов. Было бы неправильно считать, что дневник действительно отражает развитие Гаусса (для этого он слишком краток и категоричен и служит, очевидно, другой цели); скорее, он показывает, какие вопросы или какого рода вопросы интересовали Гаусса и как он оценивал свои результаты. Надежным историческим источником дневник служить не может: не все записи понятны, а некоторые даты сомнительнее, чем кажутся на первый взгляд.[1]

Гаусс, особенно в ранние годы, не мог тратить бумагу так легко, как это принято теперь. Некоторые из его важных результатов появляются на полях и пустых страницах книги по элементарной арифметике (которую мы будем называть "Ляйсте" (Leiste) по имени ее автора). Гаусс купил эту книгу задолго до того, как отправился в Гёттинген, и использовал ее как записную книжку. Записи в Ляйсте и в его систематических записных книжках (Schedae) не даны в Собрании трудов полностью, но многое в этих заметках представляет лишь антикварный интерес. Большинство рукописей Гаусса, конечно, утрачено, но сохранившийся материал достаточен для методологических целей и позволяет реконструировать основные процессы с разумной точностью.

Собрание трудов дает всю необходимую информацию для понимания и оценки работы Гаусса. В архивах[2] осталось очень мало неопубликованного, могущего внести существенный вклад. В Приложении А мы обсудим некоторые мелкие вопросы, касающиеся организации и подлинности собрания трудов и изданий переписки Гаусса. Хотя, как мы увидим, кое-что вызывает возражения, в общем эти издания заслуживают доверия.

Бóльшая часть переписки Гаусса, безусловно, включающая все важнейшее, хорошо издана. Лишь немногие из писем посвящены обсуждению математических вопросов, но эти немногие очень важны. В письмах к Бесселю даются последовательно формулировка, доказательство и обсуждение интегральной теоремы Коши[3]. Вероятно, это наиболее известный случай, когда письма Гаусса имеют математическое значение, но есть и много других примечательных случаев.

Даже если бы "Арифметические исследования" не были первой крупной публикацией Гаусса, все же имелись бы веские основания начать рассказ о математических работах Гаусса с теории чисел, а рассказ о вкладе Гаусса в теорию чисел начать именно с этой работы. Гаусс называл теорию чисел "царицей математики"; для него это была первая и важнейшая часть математики, которую он, в свою очередь, называл "царицей наук".[4] Есть и методологические причины для такого начала: арифметика может служить примером для всей математической и научной работы Гаусса. Даже его работа в прикладной математике и в таких областях, как астрономия, стремится к той сжатости, которая присуща и подобает теории чисел.

ГЛАВА 3

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Трактат "Арифметические исследования" был опубликован в Лейпциге, тогдашнем центре книжного дела в Германии. Это было летом 1801 года, года через три после возвращения Гаусса в Брауншвейг. Мы ограничимся кратким обзором этого произведения, не претендуя на оценку его и его роли в развитии теории чисел.

Трактат разделен на семь частей, которые мы, следуя латинскому оригиналу, будем называть "секциями". Из них первые три вводные, секции IV–VI образуют центральную часть работы, а секция VII – это короткая монография, посвященная отдельной, хотя и связанной с остальными, теме. Трактат посвящен герцогу Брауншвейгскому, без чьей помощи он никогда не был бы написан. Предисловие поясняет, какое место занимает трактат в традиции исследований по теории чисел, восходящей к античности, причем упоминаются Диофант, Ферма, Эйлер, Лагранж и Лежандр*.

Первая секция, длиной всего в пять страниц, содержит элементарные понятия и результаты, такие как вывод признаков делимости на 3, 9 и 11. В качестве самого основного понятия работы определяются сравнения целых чисел по натуральному модулю и доказываются их элементарные свойства, в том числе алгоритм деления.

В секции II (24 страницы) Гаусс доказывает единственность разложения целого числа на простые множители и дает определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Определив выражение $a \equiv b \pmod{c}$, Гаусс переходит к "уравнению" $ax + t \equiv c$.** Он выводит алгоритм для его решения и упоминает возможность использования непрерывных дробей вместо алгоритма Евклида. Другая тема – функция Эйлера $\varphi(m)$, то есть число натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с m. Для изучения этой функции привлекается техника, равносильная

*Много позже, в письме к астроному Шумахеру, Гаусс выразил свое низкое мнение о Диофанте яснее, чем в парадно-загадочной ссылке в этом предисловии.

** Это обозначение введено Гауссом; само понятие, конечно, много старше.

использованию мультипликативных свойств остатков по простым модулям.

Секция III (35 страниц) называется "О степенных вычетах"; в ней исследуются вычеты степени данного числа по простому (нечетному) модулю. Основой при этом служит знаменитая "малая" теорема Ферма $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, где p простое, причем a не делится на p. Гаусс дает два доказательства: одно методом "исчерпывания", восходящим к Эйлеру или, возможно, даже к Лейбницу; другое, тоже, в сущности, не новое, опирается на "биномиальную теорему" $(a + b + c + \ldots)^p \equiv a^p + b^p + c^p + \ldots \pmod p$. Это ведет к понятию первообразного корня: a называется первообразным корнем, если степени a, то есть $a, a^2, a^3, \ldots$, дают (по модулю p) все целые числа, взаимно простые с p; используя это понятие, Гаусс определяет индекс e числа b относительно a следующим образом:

$$a^e \equiv b \pmod p.$$

В этом соотношении a – фиксированный, но произвольный первообразный корень (Basis) по модулю p. Гаусс показывает, как пользоваться этими индексами при вычислениях, и сравнивает их с логарифмами.[1] Для удобства читателя в качестве приложения дана таблица индексов, составленная самим Гауссом. Пользуясь представлением с помощью индексов, Гаусс получает критерий "квадратичности" числа (то есть того, является ли число квадратичным вычетом по модулю p). Эта теорема была известна уже Эйлеру, но вывод и доказательство Гаусса полнее и убедительнее. Другое следствие – теорема Вильсона

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod p.$$[2]

В сущности секции I–III представляют собой систематическое введение в элементарную теорию чисел и подготавливают читателя к основной части книги, секциям IV и V.

Центральная тема четвертой секции (47 страниц) – квадратичный закон взаимности. Название этого закона происходит от формализма, придуманного Лежандром, а сформулировать его можно следующим образом. Пусть p, q – нечетные простые числа. По определению, выражение $\left(\frac{q}{p}\right)$ равно $+1$, если $x^2 \equiv q \pmod p$ разрешимо в целых числах, и равно -1 в противном случае. Тогда квадратичный закон взаимности выражается равенством[3]

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Это не тот формализм, которым пользовался Гаусс (и выражения "квадратичная взаимность" у него нет), но это, очевидно, лучший способ выразить соотношение между $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$. Сама теорема была сформулирована Эйлером и подробно обсуждена Лежандром, но не была строго доказана. Доказательство Гаусса начинается с эвристических соображений, в которых он показывает, что закон выполняется для выбираемых им простых чисел. После этого индуктивного начала Гаусс доказывает общий случай полной индукцией по простым числам. Первое из доказательств Гаусса (он дает, в сущности, шесть разных доказательств) очень громоздко, в нем по отдельности рассматривается восемь различных случаев; однако оно использует лишь элементарные средства.[*4] Используя формализм Лежандра, Дирихле упростил доказательство, сведя общее число случаев к двум. Гаусс выразил этот закон, который он называл "фундаментальной теоремой", следующим образом (§ 131): если p – простое число вида $4n + 1$, то $+p$ будет (или не будет) квадратичным вычетом любого простого числа, которое есть (или соответственно не есть) квадратичный вычет числа p. Для простых чисел вида $4n + 3$ имеет место аналогичное утверждение с заменой $+p$ на $-p$.[**5]

Едва доказав эту фундаментальную теорему, Гаусс решил, с помощью факторизации, проблему определения для двух произвольных чисел p и q, является ли q квадратичным вычетом по модулю p. Самая общая в этом контексте формулировка квадратичного закона взаимности дана в § 146. Другое применение, найденное Гауссом позже, – это построение линейных форм, содержащих все простые числа, являющиеся или не являющиеся квадратичными вычетами данного числа. Секция IV заканчивается сведением произвольных сравнений второй степени, то есть сравнений вида $ax^2 + by + c = 0 \pmod p$, к "чистым" сравнениям вида $x^2 \equiv c \pmod p$. Гаусс дает краткий обзор работ Эйлера и Лежандра на эту тему, в котором указывает, что первое строгое и полное доказательство принадлежит ему, но отдает должное, не вдаваясь в детали, работе предшественников.[6]

Пятая секция (260 страниц) – центральная во всей работе. В ней развивается теория бинарных квадратичных форм, то есть алгебраических

---

* Гаусс нашел это доказательство весной 1796 года, после долгих усилий. В тот момент Гаусс не мог еще посмотреть на него с точки зрения более общей теории и пришел к своему доказательству ценой невероятного напряжения; чтобы его понять (и оценить), приходится прослеживать его шаг за шагом. Решающим моментом в нем является доказательство того факта (действительно необходимого, чтобы доказать теорему), что простые числа, большие пяти и имеющие вид $4n + 1$, всегда являются невычетами меньшего простого числа. Доказать это легко для $p \equiv 5 \pmod 8$, но очень трудно для $p \equiv 1 \pmod 8$. Этот последний случай стоил Гауссу целого года работы.

**Дирихле сформулировал эту теорему следующим образом. Пусть p и q – два положительных нечетных простых числа, из которых хотя бы одно имеет вид $4n + 1$. Тогда q есть квадратичный вычет или невычет p, если p есть квадратичный вычет или невычет q. Если и p и q имеют вид $4n + 3$, то q есть квадратичный вычет или невычет p, если p есть квадратичный невычет или соответственно вычет q.

выражений вида

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

(a, b, c – данные целые числа).[7] Значительная часть этой секции повторяет и суммирует результаты Лагранжа. Гаусс указывает, где начинается его оригинальная работа, и мы укажем на это место в дальнейшем изложении. Алгебраизация арифметики, которой занимается Гаусс, ведет к очень сложным алгебраическим вычислениям и концепциям, не имеющим прямой теоретико-числовой мотивации. Мы увидим, однако, что Гаусс восстанавливает эту связь, когда это необходимо и возможно. Для него в центре исследования были арифметические вопросы, а не их абстрактная алгебраическая теория.

В первых абзацах Гаусс обсуждает два основных алгебраических свойства квадратичной формы, а именно тождество

$$f(x, y) f(x', y') =$$
$$= [(ax + by) x' + (bx + cy) y']^2 - \mathrm{D}(xy' - x'y)^2,$$

где

$$\mathrm{D} = b^2 - ac,$$

и соотношение

$$\mathrm{D}' = \mathrm{D}(\alpha\delta - \beta\gamma)^2,$$

где D' есть определитель [8] формы

$$F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2.$$

Форма F' получается из F линейной заменой переменных с коэффициентами α, β, γ, δ, где D – определитель формы F. Две основные проблемы состоят в том, чтобы найти все возможные способы представить данное число данной формой, и в том, чтобы рассмотреть все представления, принадлежащие одному значению или различным значениям формы. Сформулируем закон преобразования для форм. Скажем, что форма F *содержит* форму F', если F можно превратить в F' преобразованием с целыми коэффициентами; в этом случае определитель формы F делится на определитель формы F'. Назовем формы F и F' *эквивалентными,* если F содержит F' и F' содержит F; в этом случае их определители равны. Это позволяет классифицировать формы с помощью определителей матриц преобразований. Более того, можно говорить о *собственно* и *несобственно эквивалентных* формах: две формы несобственно эквивалентны, если определитель матрицы преобразования одной в другую равен -1. Классификация форм – одно из полезнейших орудий последующего исследования.

Его первым объектом служат свойства, не зависящие от типа формы, в том числе критерии эквивалентности форм и, в качестве конкретного приложения, представление чисел формами. Особый интерес представляют *двусторонние* формы, то есть формы, несобственно эквивалентные самим себе. Существование двусторонних форм доказано, и Гаусс выводит к тому же некоторые их простейшие свойства, нужные для дальнейшего. Случай форм с положительными квадратными определителями очевиден, и Гаусс переходит к формам с отрицательными определителями. Он показывает, что каждый класс собственно эквивалентных форм с данным определителем может быть представлен некоторой вполне определенной нормальной формой, *приведенной* формой. С этого первого шага начинается исчерпывающее исследование алгебраических характеристик таких форм. Гаусс дает критерии эквивалентности двух форм, выводит оценку числа различных приведенных форм с данным отрицательным определителем, выводит трансформационный закон для собственно эквивалентных форм и решает задачу нахождения всех связывающих их преобразований. Это требует громоздких вычислений, которые можно упростить с помощью таблицы приведенных форм. Наконец, Гаусс доказывает несколько теорем о разложении простых чисел, в том числе теорему о единственности разложения простого числа вида $4n + 1$ в сумму двух квадратов (§ 182).

Далее, Гаусс берется за формы с данным положительным неквадратичным определителем. И здесь ему удается определить нормальную форму, которая, однако, в этом случае неединственна. Множество приведенных форм (то есть нормальных форм), принадлежащих данной форме, конечно и имеет неопределенные алгебраические свойства; оно называется *периодом* приведенных форм. Гаусс показывает, что эквивалентные формы с данным определителем однозначно характеризуется своим периодом. Далее, эти периоды, в свою очередь, позволяют классифицировать формы. Стиль изложения при этом конструктивен. Гаусс не только подробно объясняет, как находить редуцированные формы, но и дает несколько численных примеров. В конце приводятся теоремы, описывающие преобразования эквивалентных форм друг в друга. Это приводит к *уравнению Пелля*

$$t^2 - \mathrm{D}u^2 = 1$$

и к его обобщению (§ 201). Это уравнение уже исследовали Ферма и его современники; его решения позволяют по одному преобразованию между эквивалентными формами найти все остальные.

Дойдя до этого места, Гаусс замечает, что все предыдущие результаты секции V были строго доказаны Лагранжем; в целом, эта первая часть пятой секции следует традиции Ферма и Лагранжа. Теория завершается кратким рассмотрением форм с положительными квадратными и нулевыми определителями, где сразу получаются результаты, аналогичные предыдущим. Впридачу Гаусс решает общее диофантово уравнение по модулю p второй степени с двумя неизвестными. И, наконец, Гаусс определяет распределение всех форм с данным определителем по конечному числу классов эквивалентных форм. Эти исследования по теории форм дают первое представление о том, как можно представить данное число.

С этого начиналась секция V; алгебраические соображения прямо служат арифметическим целям.

Следующие параграфы посвящены более пристальному исследованию алгебраических свойств форм; вводятся и обсуждаются понятия *порядка, рода* и *характера*.* Для Гаусса основная проблема в том, чтобы охарактеризовать числа, представимые классами, принадлежащими данному определителю D.

Дальнейшие результаты оригинальны и оказали долговременное влияние на развитие теории чисел. Порядок класса определяется наибольшим общим делителем коэффициентов форм, принадлежащих ему. Примитивный порядок состоит из тех форм, чьи коэффициенты взаимно просты; собственно примитивный порядок состоит из тех форм, у которых $(a, 2b, c)$ попарно взаимно просты. Если в классе есть хоть одна (собственно) примитивная форма, то все формы класса (собственно) примитивны; следовательно, можно говорить о *(собственно) примитивных классах.* Два класса принадлежат одному *порядку,* если коэффициенты любых двух представляющих их форм имеют один и тот же наибольший общий делитель. Все примитивные классы образуют некоторый порядок, и все собственно примитивные классы – тоже.

Порядки можно классифицировать по родам, основываясь на следующем (§ 229). Пусть F – примитивная форма с определителем D, имеющим простой множитель p. Все числа, представимые с помощью F и не содержащие p, суть либо квадратичные вычеты, либо невычеты числа p. Это полностью определяет форму F. Множество всех специальных характеров формы или класса называется *полным характером* этой формы или класса. Все классы с одним полным характером считаются принадлежащими одному роду. Гаусс приводит пример, где для определителя, равного –161, получаются некоторые собственно примитивные классы, которые принадлежат четырем различным родам. Форма $(1, 0, -D)$ – главная форма, ее класс – главный класс, и ее род – главный род.

С § 234 начинается знаменитый раздел "О композиции форм". В нем и в следующих за ним разделах Гаусс рассматривает композицию классов, порядков и родов. Затем он развивает теорию этих понятий, причем показывает, как роды двух форм определяют род их композиции и т.п. Раздел "О композиции форм" можно считать центральным во всем трактате; он быстро приобретает репутацию глубокого и недоступного. Выражаясь нынешним языком, собственно примитивные классы образуют абелеву группу, в которой "главный класс", представленный формой $x^2 - Dy^2$, служит единичным элементом. Хотя вычисления трудны и интересны, Гаусс не интересуется абстрактными алгебраическими соотношениями. Он сразу переходит к арифметическому содержанию теории. К числу наи-

---

*После Гаусса вместо форм стали употреблять более удобные идеальные классы в квадратичных полях. Отметим, однако, что при переходе от форм к классам часть информации теряется.[9]

более важных результатов принадлежат теоремы о классовых числах в родах одного порядка и различных порядков и о числе двусторонних классов для данного определителя. Коронный результат, полученный Гауссом в этой области, — это новое доказательство закона квадратичной взаимности, фундаментальной теоремы Гаусса (§ 262). Оно основано на том, что простой род соответствует одному из характеров, если только два характера существуют для данного неквадратичного определителя. Из этих двух характеров одни не соответствует никакой собственно примитивной форме определителя. Это верно потому, что половина характеров, принадлежащих определителю, не имеют собственно примитивных родов, что доказывается в § 261. Гаусс заканчивает эту теорию еще одним применением ее к конкретной задаче, получая способ разложения простых чисел в суммы двух квадратов. Это возможно потому, что все двусторонние собственно примитивные классы данного определителя p эквивалентны, если p — простое число вида $4n+1$.

Тут Гаусс предпринимает экскурс в теорию тернарных форм. Это ему нужно для вычисления точного числа родов для данной формы.[10] Тернарной формой называется выражение

$$f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx'$$

(a, a', a'', b, b', b'' целые) с определителем

$$\Delta = ab^2 + a'b'^2 + a^2b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''.$$

Гаусс начинает с вывода элементарных свойств преобразований, определяет эквивалентные формы и изучает классы эквивалентности тернарных форм. Он выдвигает в теории тернарных форм четыре основные проблемы: (1) найти все представления данного числа данной формой, (2) найти все представления данной бинарной формы данной тернарной формой, (3) найти критерий эквивалентности двух тернарных форм и затем найти преобразования, связывающие эквивалентные формы, и (4) решить, содержит ли данная тернарная форма другую тернарную форму с бóльшим определителем и если да, то найти соответствующее преобразование. Программа Гаусса состоит в том, чтобы свести (1) к (2), (2) к (3) и решить (3) для некоторых важных случаев. Проблема (4), хотя и входит в этот список, но не рассматривается. Гаусс ограничивается специальными случаями и избегает полной общности, видимо, потому, что его вычисления слишком сложны, чтобы их еще обобщать. Дальше Гаусс возвращается к тернарным формам; мы еще скажем об этом.

Используя свои вновь полученные результаты, Гаусс представляет бинарные формы тернарными. Такое представление всегда возможно с помощью целой подстановки

$$x_i = \alpha_i t + \beta_i u, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Рассматривая представление бинарной формы специальной тернарной формой $x_1^2 - 2x_2x_3$, Гаусс доказывает существование родов ровно для половины полных характеров. Эти характеры можно вычислить с помощью квадратичного закона взаимности.

К приложениям этой части теории относятся представление чисел (и бинарных форм) как сумм трех квадратов (§ 291) и доказательство утверждения Ферма (до тех пор не доказанного) о разложимости любого положительного числа в сумму трех треугольных чисел (см. с.40). Третье ее следствие тоже исходит от Ферма и состоит в том, что каждое целое число представимо как сумма самое большее четырех квадратов.

Введение тернарных форм не только дает средство для решения определенных проблем в теории бинарных форм, но и отмечает начало нового плодотворного направления в математике, связанного с именами Дирихле, Эйзенштейна, Х.Дж.С. Смита и Минковского.

Тут Гаусс анализирует (неполное) доказательство Лежандра фундаментальной теоремы и указывает, чего в нем не хватает.

Гаусс переходит (без доказательства) к утверждениям о среднем числе родов и классов для данного определителя D. Он дает для них асимптотические формулы: для первого

$$\alpha \log | \mathrm{D} | + \beta, \qquad \alpha, \beta = \mathrm{const},$$

и для второго

$$\gamma \sqrt{| \mathrm{D} |} - \delta, \qquad \gamma, \delta = \mathrm{const}.$$

Последняя формула верна только для отрицательных D; аналогичная формула верна для положительных D, не являющихся квадратами, но в этом случае Гаусс не смог определить константы. Видимо, его результат был основан на обширных численных вычислениях, хотя он оставил некоторые указания на глубокие теоретические соображения, намереваясь объяснить их позже.

Пятая секция оканчивается замечаниями о классах, принадлежащих главному роду форм с данным определителем. Их циклический характер ведет к определению периодов класса C, если C – произвольный фиксированный класс в главном роде. Определители называются *регулярными*, если их главный род содержится в одном периоде (т.е. представим в виде конечной последовательности $C, C^2, C^3, \ldots, C^{n+1} = C$), и нерегулярными в противном случае. Гаусс не развивает здесь теорию дальше, а добавляет только несколько замечаний о соотношении между определителем и соответствующей степенью нерегулярности или соответствующим регулярным случаем. Самые последние замечания секции посвящены объяснению метода нахождения всех собственно примитивных классов для данного регулярного определителя; для примера Гаусс вычисляет роды и классы для определителей -161 и -546.

Шестую секцию трактата мы обсудим очень кратко. В ней Гаусс дает несколько важных приложений концепций секции V, не вошедших в эту секцию. Главные темы – это простые дроби (т.е. разложение дроби в сумму дробей со знаменателями, равными простым множителям ее знаменателя), периодические десятичные дроби и решение уравнений гауссовским методом "исключения". Другая интересная тема – это вывод критериев для того, чтобы отличать составные числа от простых. Секция V вкупе с шестой секцией в качестве приложения представляет собой естественное заключение "Арифметических исследований".

Лекции Дирихле, отредактированные и дополненные Дедекиндом, фактически представляют собой последовательный комментарий к первым четырем или пяти секциям.[11] Они и теперь представляют интерес как (слегка модернизированное) введение в работу Гаусса. Полезным дополнением к Дирихле–Дедекинду служит книга о квадратичных полях (Quadratische Körper) в третьем томе "Алгебры" Вебера (1899).

Секция VII – самая популярная часть трактата. Ее историческое влияние было огромно – взять хотя бы § 335 с его намеком, таким важным для Абеля, о возможных обобщениях деления круга. * В дополнении IV мы дадим ее подробное изложение, чтобы проиллюстрировать математический стиль Гаусса. Седьмая секция особенно подходит для этой цели по следующим причинам. Она однородна и, в сущности, независима; бóльшая ее часть была написана еще до окончания работы над секцией V.

Деление круга циркулем и линейкой – это старая проблема, ставшая классической. Со времен античности был открытым и часто дискутировался вопрос о том, можно ли построить правильный 17-угольник с помощью лишь этих двух инструментов. В своей теории деления круга Гаусс решил и эту частную задачу, и общую проблему о возможности построения правильных n-угольников, где n – простое число, большее двух.

Циклотомия, теория деления круга, связана с уравнением

$$x^p - 1 = 0, \qquad (*)$$

где p – нечетное простое число. Корни $(*)$ ведут к тригонометрическим функциям углов $2\pi k/p$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Это было хорошо известно в то время и уже обсуждено Эйлером.

Два ключевых момента в доказательстве Гаусса – это использование первообразных корней и умелая манипуляция тем, как коэффициенты многочлена выражаются в виде (симметрических) функций его корней. Использование первообразных корней основано на том, что степени любого примитивного корня по модулю n соответствуют $p - 1$ корням уравнения

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0.$$

---

*Следующий шаг – деление лемнискаты, задача, которую Гаусс решил прежде, чем окончил трактат, как мы знаем из его дневника и других важных источников.

Гаусс пишет тщательно и подробно описывает много численных примеров. В § 365 содержится конечный результат секции, состоящий в том, что всякий правильный n-угольник, где n – простое число вида

$$2^{2^{\nu}}+1, \qquad (**)$$

можно построить циркулем и линейкой. Только если n имеет вид (**), многочлен X можно свести к последовательности квадратных уравнений, что и дает возможность геометрического построения.

Детальное и читабельное изложение седьмой секции дано в брошюре Дедекинда [1901]. Подобно другим секциям трактата, седьмая секция содержит несколько дополнительных арифметических результатов, следующих из общей теории. В § 356 есть абзац о выражениях, называемых теперь гауссовыми суммами, появляющихся здесь впервые в работах Гаусса. В "Арифметических исследованиях" Гаусс сделал о них лишь несколько замечаний, но исследовал их глубже в более поздней статье "Суммирование некоторых рядов особого вида" (Summatio quarundam serierum singularum) (1808). Мы опишем ее ниже. Заканчивают трактат несколько таблиц, которые Гаусс составил для удобства читателя.

Гаусс неоднократно заявлял и в письмах и в других опубликованных документах, что собирается написать продолжение "Арифметических исследований". Легко понять, почему он этого не сделал; обстоятельства жизни Гаусса это вполне объясняют. Хотя мы не знаем точно, что Гаусс собирался включить в это продолжение, мы это неплохо может себе представить, изучая более короткие статьи по теории чисел, опубликованные Гауссом, и рукопись "Учение о вычетах" (Analysis Residuorum), представляющую собой фрагмент, ставший известным только после смерти Гаусса. Это набросок крупной работы, содержащий ранний вариант последней части "Арифметических исследований" вместе с некоторыми дополнениями, о которых мы здесь специально скажем. Не вся эта рукопись была включена в Собрание трудов: редакторы исключили все то, что, в сущности, уже имелось в "Арифметических исследованиях".

Оставив "Учение о вычетах" и еще одну задуманную им крупную арифметическую работу незаконченными, Гаусс ограничился серией более коротких статей, последняя из которых появилась в 1831 году. Эта статья – вторая часть фрагментарной, в сущности, работы по теории биквадратичных остатков, продолжающая статью от 1825 года. Темы других статей – это гауссовы суммы (1808) и дальнейшие доказательства квадратичного закона взаимности. Мы в своем обзоре можем ограничиться тремя основными темами: (1) дальнейшие доказательства квадратичного закона взаимности, (2) гауссовы суммы и (3) теория кубичных и биквадратных вычетов.

Первой из них мы займемся под конец, потому что обсуждение различных доказательств квадратичного закона взаимности естественным путем приведет нас к тому, чтобы подытожить арифметические работы Гаусса.

"Ряды особого вида", о которых говорится в заглавии "Суммирования некоторых рядов . . .", – это фактически гауссовы суммы, то есть выражения вида

$$W = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}\nu^2} .$$

Хотя в работах Гаусса они занимают периферийное положение, эти суммы стали играть гораздо более важную роль в дальнейшем развитии теории чисел. Гаусса они привели к рассмотрению θ-рядов и к разным интересным результатам. Ни одну из этих работ он не опубликовал; мы обсудим их дважды: здесь и на с. 93–95.[12] Цель "Суммирования..."– определить знаки выражений (*) и (**), чего Гаусс не смог сделать раньше, когда вводил эти выражения в "Арифметических исследованиях". В дальнейшем надо различать два случая в зависимости от p:

(1) Для p вида $4m + 1$

$$\begin{aligned} \Sigma \cos ak\omega &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p}, \\ \Sigma \cos bk\omega &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p} \end{aligned} \qquad (*)$$

и, следовательно,

$$\Sigma \cos ak\omega - \Sigma \cos bk\omega = \pm\sqrt{p},$$

$$\Sigma \sin ak\omega = 0,$$

$$\Sigma \sin bk\omega = 0.$$

(2) Для p вида $4m + 3$

$$\Sigma \cos ak\omega = -\frac{1}{2},$$

$$\Sigma \cos bk\omega = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \Sigma \sin ak\omega &= \pm\sqrt{p}, \\ \Sigma \sin bk\omega &= \mp\sqrt{p}, \end{aligned} \qquad (**)$$

$$\Sigma \sin ak\omega - \Sigma \sin bk\omega = \pm\sqrt{p}.$$

Все средства Гаусса элементарны; преобразования громоздки, но принципиальных трудностей не представляют. Нередко он дает числовые примеры, объясняет, зачем он что-либо делает и подытоживает свою работу. В последних параграфах дано новое доказательство квадратичного закона взаимности и несколько теорем, названных "добавлениями к квадратичному закону взаимности". Эти теоремы определяют простые числа, имеющие вычеты $-1, 2, -2$.

Из переписки Гаусса видно, какого труда стоило ему определение знаков сумм; в сентябре 1805 года он писал Ольберсу:

> ... Что там [Арифметические исследования, § 365]... есть,то строго доказано, но чего там не хватает, а именно определение знака корня, – это именно то, что меня всегда мучило. Этот изъян портил все остальное, что бы я ни находил, и едва ли была хоть неделя за последние четыре года, когда бы я не сделал хоть одну или больше безуспешную попытку распутать этот узел, – совсем недавно я был им снова очень занят. Но все размышления, все поиски были тщетны, и мне приходилось с унынием оставлять перо. Наконец, дня два назад я достиг успеха – надо сказать, не своими упорными усилиями, но одной только милостью Божьей. Будто молния сверкнула – решилась загадка; я сам не мог найти связующей нити между своими прежними знаниями и последними исследованиями и тем способом, каким она была, наконец, решена. [13]

Результаты Гаусса о биквадратичных вычетах появились в статьях "Теория биквадратичных вычетов" (Theoria residuorum biquadraticorum), части I и II, опубликованных в журнале Гёттингенского Королевского общества. Они написаны на латыни; более доступны резюме Гаусса на немецком. Первая из этих статей содержит мелкие, изолированные результаты и понятия, развитые по аналогии с квадратичным случаем. Это подготавливает читателя к центральной теме обеих статей, определению биквадратичного характера данного простого числа. Общий и эффективный подход требует комплексных чисел, которые Гаусс вводит в начале второй статьи.

В этих статьях нет общего доказательства биквадратичного закона взаимности. Впервые такое доказательство дал Эйзенштейн, много после того, как Гаусс перестал публиковать свои теоретико-числовые результаты. В двух опубликованных частях "Теории биквадратичных вычетов" Гаусс сформулировал и доказал этот закон для нескольких важных частных случаев, для чисел $\pm 1 \pm i$. Общая теорема должна была стать предметом третьей части, так и не написанной. Посмертно опубликованные материалы наводят на мысль, что фактически у Гаусса было доказательство (Собрание трудов, X, 1, с. 65), но содержащий его фрагмент невозможно датировать. Поэтому неясно, оригинально ли это доказательство или основано на доказательстве Эйзенштейна, на которое оно очень похоже. Оно проводится аналогично квадратичному случаю, который Гаусс рассматривал, основываясь на делении окружности.

Гаусс не написал ничего систематического о теории кубичных вычетов, хотя мы знаем об усилиях доказать кубичный закон взаимности. Есть разрозненные результаты о некоторых простых числах, представляющие методологический и личный, но не научный интерес.

Из незаконченных и отрывочных фрагментов особенно интересны те, что содержат результаты, обычно доказываемые аналитическими методами. Гаусс знал, вероятно из индуктивных соображений, несколько асимптотических законов для числа классов форм и для распределения квадратичных вычетов. Есть также замечание, датируемое 1796 годом, о числе простых чисел, меньших a, согласно которому асимптотической границей служит $a/\log a$ (см. также дополнение III).

Наш обзор теоретико-числовых работ Гаусса не был историчным, и мы не пытались проследить происхождение различных его результатов и публикаций. Большинство открытий Гаусса легко датировать, даже если они стали известны лишь после его смерти. Публикации его статей часто и намного откладывались, но и это не создает каких-либо крупных проблем*.

Об "Арифметических исследованиях" мы знаем, что первые четыре параграфа были написаны вчерне к 1796 году, а фактически в окончательном виде – к концу 1797 года, то есть во время второго года пребывания Гаусса в Гёттингене. Первый набросок пятого параграфа был закончен летом 1796 года. Он несколько раз пересматривался и пришел в окончательный вид зимой 1798/99 года, когда были добавлены куски о тернарных формах. Вероятно, он был закончен во время первой половины 1800 года. Секции VI и VII не представляли такой проблемы и не нуждались в существенном пересмотре.

Опубликованные работы Гаусса дают хорошее представление о его успехах и развитии. Другими источниками служат многочисленные фрагменты, ставшие известными лишь много после смерти, переписка** и дневник. Конечно, многие заметки и черновики его дневников утрачены, но у нас нет причин скорбеть о невозместимых утратах в смысле содержания.

Однако даже такой документ, как дневник, хотя большая ценность его очевидна, оставляет многие вопросы без ответа. Записи очень кратки, и иногда трудно, если не невозможно, понять их правильно. В качестве примера процитируем запись от 8 апреля 1796 года: " Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum***. Замечание это нельзя назвать "глубоким". Оно просто утверждает, что не все числа, меньшие данного простого, суть квадратичные вычеты по его модулю. В своих примечаниях к дневнику Гаусса Клейн и Бахман указывают, что Гаусс должен был знать это много раньше. Из другого источника – рукописного замечания Гаусса к тому параграфу "Арифметических исследований", где доказывается эта теорема, они делают вывод, что в тот же самый день, 8 апреля 1796 года, Гаусс завершил свое первое доказательство закона квадратичной взаимности. Шлезингер в своем очерке делает следующий шаг и цитирует эту запись как свидетель-

* В основном можно положиться на собрание трудов и на комментарии Бахмана в его очерке в т. X, 2. См. также Приложение Б.

** На этой стадии гораздо менее информативная, чем впоследствии.

*** Конечно, латынь здесь не классического качества; видимо, Гаусс предпочел серебро разговорной латыни золоту классической.

ство того факта, что Гаусс действительно доказал этот закон в этот день. Столь же неуверенными дневник оставляет нас в отношении работы Гаусса над кубичной и биквадратичной взаимностью. Начиная с 1807 года есть несколько записей (## 130–133), согласно которым он получил свои основные результаты, хотя не обязательно доказательства, той зимой. Это согласуется с утверждением в письме к С. Жермен от того же года (30 апреля 1807 года), но не с замечанием в опубликованной статье о биквадратичных вычетах (часть 1), согласно которому эти результаты уже были получены в 1805 году, и еще меньше с записью 144 от 23 октября 1813 года, в тот день, когда родился его младший сын Вильгельм. В этой записи Гаусс прямо утверждает, что нашел, после семи лет бесплодных усилий, общую основу для теории биквадратичных вычетов. Это проливает новый свет на его прежние оптимистические и, что еще важнее, публичные утверждения, которые, как представляется, указывают, что Гаусс считал работу в значительной мере выполненной, сумев явно сформулировать результаты (или, скорее, рамки) своего исследования.

Более обнадеживающим примером служит запись # 18 от 10 июля 1796 года. В ней речь идет о разложимости каждого числа в сумму трех треугольных чисел*:

ΕΥΡΗΚΑ! num = $\Delta + \Delta + \Delta$.

Очевидно, дневник имеет лишь ограниченную ценность для истории развития Гаусса. Это не должно удивлять нас – было бы странно и невероятно, чтобы Гаусс пунктуально записывал открытия каждого дня тем же вечером. И все же дневник – стимулирующий и красноречивый документ. Его неформальные утверждения, подобно бакенам, указывающим фарватер, позволяют нам угадывать, каким путем шла мысль Гаусса. Но наиболее важные для его созревания годы скрыты от нас – долгие годы ученичества, бесконечных вычислений и бесцельных манипуляций с числами, составления курьезных таблиц и бессистемных эвристических усилий. Лишь внезапные открытия, повторяющиеся примеры и любимые темы изредка проливают свет, но нет ключа, который позволил бы нам систематически расшифровывать мысль Гаусса и легко читать в его уме.

Теперь вернемся к квадратичному закону взаимности. В общей сложности Гаусс доказал этот закон шестью разными способами; сам он, как мы увидим ниже, насчитывал восемь доказательств. Оба доказательства, данные в "Арифметических исследованиях", хотя и очень разные, датируются одним, 1796 годом (апрель и июнь). Первое из них, самое элементарное из доказательств Гаусса, длинно и сложно, но прямолинейно и использует только элементарные методы. Второе доказательство, формально гораздо более простое, есть часть теории квадратичных форм, составляю-

* Треугольные числа – это числа вида $\frac{1}{2}s(s+1)$. Приведенное утверждение сделал еще Ферма. Гаусс доказал его в § 293 "Арифметических исследований".

щей предмет пятой секции "Арифметических исследований". Хронологически следующим идет неопубликованное (Гауссом) доказательство, содержащееся в "Учении о вычетах". Точнее, Гаусс говорит о двух доказательствах, но они очень похожи и следуют из его "золотой теоремы". Эта теорема, которую он сам так назвал, утверждает существование по модулю любого простого p, где $p - 1 = e \cdot f$, такого уравнения, корни которого образуют e периодов, каждый из которых состоит из f корней p-й степени из единицы. Доказательство, данное Гауссом в "Учении о вычетах", также датируется 1796 годом, но возможно, что он доказал "золотую теорему" раньше. На полях "Ляйсте" есть соответствующая запись, где эта теорема сформулирована, но не доказана; эта запись производит впечатление ранней, но не может быть надежно датирована. На эту теорему указывает и запись # 39 дневника (1 октября 1796 года) – еще один случай, когда кажущаяся точной информация не помогает.

Доказательство, данное в "Суммировании некоторых рядов особого вида", относится к 1801 году, но опубликовано было лишь много позже, в 1808 году. Это доказательство важно потому, что, используя теорию гауссовых сумм, легко найти число квадратичных вычетов или невычетов в последовательности $1, \ldots, p$. Четвертое доказательство, данное в статье "Новые доказательства и обобщения фундаментальной теоремы в учении о квадратичных вычетах" (Theorematis fundamentalis in doctrina. . .), опубликованной в 1817 году, тоже основанное на циклотомии, начинается с выражения

$$x - x^{g} - x^{g^2} - \ldots - x^{g^{p-2}},$$

где g – первообразный корень данного простого p $(\neq 2)$. Само доказательство не трудно, но существенно опирается на теорию высших сравнений. Другие два доказательства были найдены между 1805 и 1810 годами, вероятно, в 1807 и 1808 годах; те, что были опубликованы при жизни Гаусса, вышли между 1801 и 1818 годами. Некоторые из этих доказательств очень поздние и появились в период, когда Гаусс был погружен в астрономические исследования. Это, а еще яснее тот факт, что он продолжал работать в теории чисел и публиковать статьи долго после 1815 года, показывает, что Гаусс не потерял интереса к чистой математике и тогда, когда вплотную занялся астрономией и другими приложениями.

В ретроспективе можно, наверное, усмотреть ключевые теоретические идеи и отделить их от шаблонных деталей, сопровождающих завершение доказательства или теории, но для математика – и в частности для Гаусса – творческий интерес не останавливается, пока нет полной завершенности и цепь деталей не развита в теорию. Как ни был Гаусс увлечен работой в астрономии, он не принуждал себя полностью отказаться от прежних интересов, хотя в его переписке встречаются жалобы на то, что ему не хватает для них времени и досуга. Возможно, Гауссу нравилось заниматься несколькими разными предметами одновременно – переписка и внезапные перемены темы в дневнике делают это очень вероятным. В течение всей своей научной деятельности, и даже в сороковые годы, Гаусс внимательно следил за литературой по теории чисел и хорошо знал работы своих младших современников Якоби, Дирихле и Эйзенштейна.

Представляется уместным обсудить в этой связи происхождение и природу исторических замечаний Гаусса. Они встречаются почти во всех его математических работах, но наиболее часты и относительно систематичны в "Арифметических исследованиях". Их, конечно же, нельзя считать ни надежными, ни полными, даже в отношении той литературы, которую Гаусс хорошо знал. У Гаусса был некоторый "естественный" интерес к истории, но в основном математический и личный.

Уже в начале своей жизни он смотрел на себя как на историческую фигуру, чью работу будут изучать последующие поколения математиков. Исторические замечания Гаусса отражают эту его позицию, и не имеет смысла подходить к ним со скрупулезностью историка или антиквара. Даже споры о приоритете не интересовали Гаусса до тех пор, пока они были чисто формальными, не затрагивая математической сути. Гаусс видел себя в ряду великих исследователей по теории чисел, начинающемся Диофантом и включающем Ферма, Эйлера и Лагранжа; видимо, их работа интересовала Гаусса лишь в той мере, в какой он мог включить ее в своей мир идей. Этим объясняется типичное для него безразличие к любой полной исторической документации, и в результате – неполнота его ссылок.

Однако Гауссу была совершенно чужда историческая предвзятость, и его ссылки, несомненно, имели целью дать справедливый обзор работ предшественников и современников. В сущности, это ему вполне удавалось, и его исторические экскурсы лучше, чем о них принято думать. Примерами служат указание на Эйлера как первооткрывателя квадратичного закона взаимности, – факт, который подчас упускают из виду и сегодня, – и несколько замечаний, ставящих Лежандра выше, чем можно было бы ожидать после очень критических замечаний в "Арифметических исследованиях".[15]

Ни один результат Гаусса по теории чисел не был опубликован до 1801 года за исключением объявления о возможности построения 17-угольника. Хотя мы не намерены описывать жизнь Гаусса "последовательно", мы до сих пор не отклонялись от этого (сомнительного) идеала. Тот период, в который теория чисел была в центре его научных интересов, кончился вскоре после его возвращения в Брауншвейг, и место арифметики заняла астрономия. Как и в жизни Гаусса, теория чисел будет вновь и вновь появляться в этой биографии; в частности, мы попытаемся проанализировать математический стиль и методологию Гаусса на материале секции VII "Арифметических исследований" (см. дополнение VI). Это будет наша вторая попытка – предшествующий обзор должен был уже дать некоторое представление не только о результатах и открытиях Гаусса, но и о том, каким образом он развивал и объяснял эту важную область математики.

ВЛИЯНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ РАБОТ ГАУССА

"Арифметические исследования" и другие статьи Гаусса по теории чисел, включая многое, опубликованное посмертно, оказали большое и глубокое влияние на развитие теории чисел в девятнадцатом и первой половине двадцатого столетия. Говорят, что для Дирихле "Арифметические исследования" были настольной книгой, которую он изучал с религиозным рвением, – не такой уж плохой способ учиться теории чисел. Легко понять, почему идеи Гаусса играли такую важную роль. Постоянный интерес Гаусса к конкретным задачам и то, что он избегал пользоваться абстрактными концепциями, привели его к созданию идеальных средств для продумывания и систематизации прежних результатов и для открытия многих новых концепций.

Ксмбинаторика еще никогда не упоминалась как область интересов Гаусса. Хотя он очень любил сложные вычисления и вообще работу с числами, комбинаторика в том смысле, в каком мы понимаем это слово сегодня, кажется, никогда особенно не привлекала Гаусса; для него числа и их свойства были сложным образом (и, вероятно, исключительно) связаны с арифметической теорией. Для Гаусса "теория" означала нечто гораздо менее абстрактное, чем могла означать для других, менее ориентированных на числа математиков. Это объясняет, почему в работах Гаусса встречается так много частных случаев концепций и понятий, вновь возникающих в работах математиков последующих поколений.

Приведем несколько примеров содержащихся в работах Гаусса зародышей будущих теорий. Будучи интересными и сами по себе, они проливают новый свет на исследования Гаусса по теории чисел.

Начнем с примера, легко приходящего на ум: те асимптотические законы, к которым Гаусс пришел, видимо, сочетая эвристические и теоретические соображения (ср. с. 34). Среди его рукописей есть следующий опубликованный посмертно ряд утверждений:

простые числа, меньшие a,

$$\frac{a}{\log a},$$

числа с двумя множителями

$$\frac{\log(\log a)\,a}{\log a},$$

с тремя множителями

$$\frac{\frac{1}{2}\, a\, (\log \log a)^2}{\log a}$$

.

.

.

Общая формула была доказана лишь через сто лет после того, как Гаусс угадал ее (Ландау, Bull. Soc. Math., 1900, V. 28). Обсуждение этого и других асимптотических законов Гаусса можно найти в Собрании трудов, том X, с. 11–18.

То, что Гаусс бывал прозорлив на численные догадки, может быть, еще не так удивительно, как те многочисленные теоретические концепции, которые он предвосхитил в своих работах и примеры которых мы сейчас рассмотрим.

В § 272 "Арифметических исследований" дана теория приведения тернарных форм, причем кульминацией служит теорема об оценках коэффициентов "минимальной" эквивалентной формы, зависящих от определителя исходной формы. Это привело Эрмита (а также Коркина, Золотарева и других) к теории приведения n-арных положительных квадратичных форм после того, как Гурвиц доказал, что достаточно рассматривать теорию приведения положительных форм. Доказательство Эрмита было аналогично доказательству Гаусса для тернарных форм; позже эту работу обобщил Минковский в своей знаменитой книге о геометрии чисел, где он дает следующую оценку:

$$\frac{M}{\sqrt[n]{D}} < 4\, \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)^{2/n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

где M – минимум рассматриваемой формы, D – ее определитель, Γ – гамма-функция.

В качестве другого примера рассмотрим снова гауссовы суммы:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}\nu^2}, \qquad (*)$$

которые Гаусс определяет впервые в связи с циклотомическими уравнениями (см. с. 37). После многих безуспешных попыток определить знак суммы (*), Гаусс сумел это сделать с помощью двух введенных им рядов

$$f(x, m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}(m, \nu) \quad \text{и} \quad F(x, m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu/2}(m, \nu),$$

где

$$(m, \nu) = \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-\nu+1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^\nu)}.$$

Хотя Гаусс не указывает, как он нашел f и F, из определения этих двух функций очевидно, что здесь есть некоторая связь с теорией эллиптических функций. Сам Гаусс не стал развивать это направление, но Якоби показал в 1817 году, что сумму (*) можно вычислить с помощью теории линейных преобразований θ-функции. Позднее Кронекер доказал эквивалентность простейшего случая линейных преобразований θ-функций и той конкретной формулы для гауссовых сумм, которая восходит к Дирихле. Методы Кронекера аналитичны; в очень простом доказательстве он вычисляет (*) с помощью интегральной теоремы Коши.

Уже из работ самого Гаусса ясно, что эти суммы играют центральную роль в различных доказательствах квадратичного закона взаимности; дальнейшие их важные приложения — это вывод формулы числа общих классов и суммирование L-рядов (введенных Дирихле). Сумму (*) можно обобщить, рассматривая характеры высших степеней. Это ведет к еще более трудным, до сих пор не решенным вопросам.

В качестве последнего примера упомянем фрагмент, в котором Гаусс доказывает неприводимость уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

над полем корней третьей степени из единицы. Гаусс показывает это, выражаясь нынешним языком, сначала доказывая, что кольцо целых чисел в $Q(\omega)$, $\omega^3 = 1$, евклидово и поэтому факторизуемо единственным образом. Результат Гаусса включает последнюю теорему Ферма для случая $n = 3$. В другом контексте Гаусс доказал эту теорему для $n = 5$, но он никогда не занимался ею систематическим образом, потому что не считал этот вопрос особенно плодотворным для дальнейшего развития теории чисел.

Отрывочные замечания этого дополнения служат достаточными намеками на связь между работами Гаусса и дальнейшими, даже сегодняшними, исследованиями. Нет сомнения, что многие фрагменты работ Гаусса до сих пор еще не вполне поняты, хотя, конечно, можно спорить о том, возможно ли вообще современное понимание того, что они означают. Почти наверное в них есть немало материала, способного вдохновить того, кто хочет выяснить, как много можно узнать в теории чисел прямыми вычислениями и умелыми преобразованиями; работы Гаусса выявляют конкретные корни многого из того абстрактного аппарата, который развили его последователи.

Многое из содержания этого дополнения содержится в очерке Ригера в книге [Рейхардт] об арифметических работах Гаусса, где интересующиеся читатели могут найти много дополнительного материала.

ГЛАВА 4

ВОЗВРАЩЕНИЕ В БРАУНШВЕЙГ. ДИССЕРТАЦИЯ. ОРБИТА ЦЕРЕРЫ

Осенью 1798 года Гаусс вернулся в Брауншвейг, где прожил до 1807 года. Нам ясно, и столь же ясно это должно было быть Гауссу, что предстоящие годы будут иметь решающее значение для его карьеры. Должно было выясниться, сможет ли Гаусс оправдать путем успешного приложения своих талантов свои собственные ожидания и ожидания своих учителей и друзей, в особенности герцога. До сих пор единственной публикацией Гаусса была заметка о возможности построения 17-угольника; в остальном его труды состояли из кучи черновиков и отрывков, незаконченных очерков и недоработанных идей, в чьем значении и смысле сам автор не мог еще быть слишком уверен. Но Гауссу нужно было самоутвердиться не только профессионально – ему был 21 год, он возвращался в свой родной город, где еще жили его родители, и старался обеспечить для себя независимое существование, быть может, даже завести семью и принять на себя ответственность взрослого человека (см. также с. 66). Важным первым шагом было то, что он поселился не в родительском доме; вскоре после приезда в Брауншвейг Гаусс в одном из писем к Бояи сообщает свой новый адрес.

Нельзя утверждать, что Гаусс работал больше или упорнее в эти годы, чем в предыдущие или в последующие годы в Гёттингене. Мы знаем только, что его второй брауншвейгский период был исключительно плодотворным и продуктивным. В эти же годы наблюдается громадное расширение научных интересов Гаусса – впервые он систематически посвящает себя вопросам прикладной математики, особенно теоретической и экспериментальной астрономии.* Соответственно изменился и образ его жизни. Никогда Гаусс не был более подвижен и открыт, чем в этот период, когда он встречал много новых людей, заводил друзей и совершил несколько важных путешествий. Не без оснований говорят, что Гаусс никогда в жизни не был счастливее, чем в эти семь лет своего второго пребывания в Брауншвейге.[2] В конце этого периода состоялся второй решающий шаг: он встретил, стал ухаживать и женился на Иоганне Остгоф, первой из двух его жен.

Несмотря на продуктивность этих лет, полных волнующих научных открытий и личных успехов, жизнь была странно непрочной, без определенных перспектив на будущее. Мы замечаем, особенно в дальнейшие годы, проявления раздражительности и какой-то общей усталости, часто вызывае-

---

*Видимо, уже в Гёттингене Гаусс проявлял некоторый интерес к астрономии, но эти первые пробы не идут в сравнение с его временами полным погружением в нее, начиная с 1801 года.

мые неизбежными бытовыми хлопотами. Был также затяжной спор с Коллегией Карла, его прежней школой, по поводу пользования одним ценным астрономическим инструментом, незначительный, но красноречивый конфликт, к которому мы еще вернемся.

Во время возвращения в Брауншвейг у Гаусса не было ни гарантированных доходов, ни определенных надежд на место преподавателя (ни склонности к этому) в любом из учебных заведений Брауншвейга и его окрестностей. Материальное положение и ближайшее будущее Гаусса зависели от благосклонности и щедрости герцога; 30 сентября 1798 года Гаусс писал Бояи следующее:

> . . . Я получил от своего герцога основания надеяться, что он будет продолжать помогать мне, пока я не достигну прочного положения. Одно выгодное место я упустил. Здесь есть русский посланник, чьих двух малолетних смышленных дочерей я должен был обучать математике и астрономии. Однако я опоздал, и это место уже досталось одному французскому эмигранту.[3]

В начале января 1799 года Гаусс смог сообщить Бояи, тогда еще находившемуся в Гёттингене, что герцог согласился продолжать выплачивать ему стипендию размером в 158 талеров в год. До этого Гаусс жил в долг и еще в ноябре он советовал Бояи отвечать на вопросы любопытных так: ". . . что у меня хорошие, хотя не вполне определенные перспективы, что в принципе верно" (. . . dass ich gute wenn gleich noch nicht ganz bestimmte Aussichten habe, was ja auch in Grunde wahr ist[4]).

Незадолго до того как герцог потребовал представить докторскую диссертацию, Гаусс встречался с И.Ф. Пфаффом, профессором математики Гельмштедтского университета.* Сначала Гаусса привлекла библиотека. В ходе занятий он очень сблизился с Пфаффом и оставался гостем в его доме несколько недель. Вклад Пфаффа в дифференциальную геометрию и теорию уравнений в частных производных не забыт и поныне. Это был компетентный математик и добрый человек.[5] Пфафф был консультантом Гаусса как диссертанта, но мы не знаем, принимал ли он реальное научное участие. 16 июня 1799 года, еще даже до публикации диссертации, Гаусс получил степень "доктора философии" (Doctor Philosophiae) после того, как обычное требование устного экзамена ("защиты"), для Гаусса, несомненно, особенно докучное, было снято. Диссертация, публикация которой финансировалась герцогом, появилась в августе 1799 года под заглавием: "Новое доказательство теоремы о том, что каждая целая рациональная алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой или второй степени" (Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolve posse). В письме к Бояи Гаусс описал ее содержание следующим образом:

* Гельмштедт находится примерно в 25 милях к востоку от Брауншвейга, у самой границы с Пруссией.

"Заглавие вполне выражает основную цель статьи, хотя я посвящаю ей только примерно треть места*. Остальное – в основном история и критика работ других математиков (а именно Даламбера, Бугенвиля, Эйлера, де Фонсене, Лагранжа и авторов кратких руководств – последние, вероятно, будут не особенно довольны) по данному предмету, вместе с различными замечаниями о той поверхностности, которая так господствует в современной математике."[6]

Пфафф, подобно Гауссу, интересовался основаниями геометрии, но можно только гадать о том, обсуждали ли они вместе эту тему.

Тема диссертации Гаусса – основная теорема алгебры. Доказательство и обсуждение (см. ниже) избегают упоминания о мнимых величинах, хотя работа по своей природе аналитична и геометрична, и язык комплексных чисел был бы наиболее подходящим для выражения идей, лежащих в ее основе. Как и к квадратичному закону взаимности, Гаусс неоднократно возвращался к основной теореме алгебры; в частности он вернулся к ней в своей последней математической работе, на этот раз используя комплексные числа.

Мы ограничимся краткой сводкой содержания диссертации. В томе X, 2 Собрания трудов есть очень поучительный очерк Островского, объясняющий детально ход мысли Гаусса и заполняющий пробелы в его рассуждении. Пусть дано уравнение

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots = 0,$$

где A, B, ... – действительные числа. Первый шаг состоит в разложении многочлена

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots$$

на действительную и мнимую части: $X = T + iU$. Обе они представляются в полярных координатах. Корень существует, если кривые $U = 0$ и $T = 0$ пересекаются. Доказательство основано на изучении этих кривых. Идея доказательства интуитивно доступна; само доказательство не является строгим по нашим теперешним понятиям, но, конечно, превосходит все прежние, в том числе рассуждение Даламбера, с которым оно идейно связано.

Из трех других доказательств, данных Гауссом, последнее очень похоже на первое, и мы коротко обсудим его в связи с его публикацией в 1849 году. Третье доказательство, опубликованное в 1816 году в статье "Теорема о разложимости целых алгебраических функций на действительные множители; третье доказательство ("Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia"), подлинно аналитично. В нем Гаусс неявно использует интегральную теорему Коши, сопоставляя многочлену f выражение

$$\int_{|X|_r} \frac{df}{f}, \qquad (*)$$

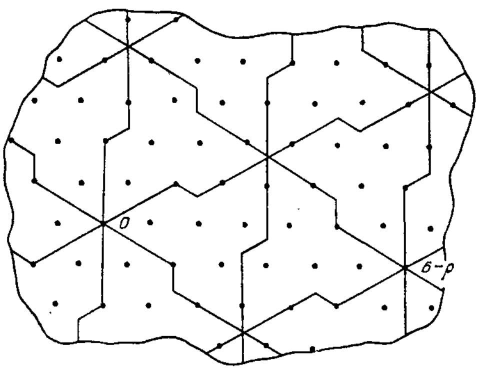
*В первоначальном издании диссертация занимает 80 страниц, а в Собрании трудов – только 30.

равное нулю, если X не имеет корней. Это приводит к противоречию. Наше изложение прямее ведет к цели, чем доказательство Гаусса, потому что он избегает комплексных чисел и явных геометрических конструкций. Вместо этого он работает с действительным двойным интегралом.

Второе доказательство, вышедшее в 1815 году под заглавием "Еще одно новое доказательство теоремы о том, что каждая целая рациональная алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой или второй степени" (Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse) использует алгебраические свойства симметрических функций и дифференциальное уравнение, связывающее исходный многочлен и его дискриминант. Идея Гаусса связана с современным абстрактным подходом, с помощью которого доказывается существование поля разложения и показывается, что оно содержится в поле комплексных чисел.

В своей брошюре "Памяти Гаусса" первый биограф Гаусса Сарториус заявляет, что интерес Гаусса к геометрии проявился сравнительно поздно в его жизни. Если это и основано на каком-либо подлинном заявлении, то это может быть результатом недоразумения и, быть может, относится к геометрии как к самостоятельному разделу математики, а не как к математическому средству и "образу мысли". У нас, несомненно, нет оснований слишком доверять суждению Сарториуса. Он был геологом и не особенно глубоко разобрался в том, как Гаусс работал в математике.

Очень часто Гаусс пользовался геометрическими представлениями в том же духе, как он пользовался численными примерами в своих эвристических соображениях. Примером служит приведенный ниже рисунок, похожий на несколько других из тех фрагментов Гаусса, где речь идет о теории биквадратичных и кубичных вычетов. Различные области – это области разрывности некоторой группы линейных преобразований. (Дополнительную информацию об этом см. в Собрании трудов, том VIII, с. 18–20.)



Гаусс был в числе первых математиков, начавших пользоваться визуальным представлением Д'Аргана комплексных чисел на двумерной плоскости. Вероятно, он пользовался им раньше, чем Д'Арган, но были и другие, пришедшие независимо к этой же идее.[7]

Из дневника мы знаем, что интерес Гаусса к математической и экспериментальной астрономии восходит к студенческим годам в Гёттингене, если еще не в Коллегии Карла. В Гёттингене Гаусс общался, как мы указывали, с профессором астрономии Зайфером, но мы не знаем, делал ли он в это время какие-нибудь наблюдения. Изучая классическую литературу, он познакомился с основной проблемой математической астрономии, проблемой вычисления орбит небесных тел по неточным и неполным наблюдениям. Гаусс также изучал теорию Луны. 1798–1800 годы были в основном потрачены на завершение "Арифметических исследований" и на диссертацию, но уже в апреле 1799 года Гаусс выразил в письме к Бояи намерение посетить астронома Цаха в его обсерватории Зееберг вблизи Готы. В то время этот визит не состоялся, хотя разрешение на выезд за границу было уже дано герцогом; Гаусс совершил эту поездку несколькими годами позже. Барон (Freiherr) Цах был одним из наиболее известных немецких астрономов и руководил весьма современной обсерваторией, щедро оснащенной его князем. Зееберг был центром астрономических исследований в Германии.

Годы, близкие к 1800-му, важны для истории астрономии: для экспериментальной астрономии – потому что технологический прогресс и совершествование оптических инструментов, вместе с систематическим накоплением наблюдений, привели к составлению первых надежных карт неба; а для теоретической астрономии – потому что открытие внешних планет (Уран – в 1781 году, Нептун – в 1846, Плутон, однако, – только в 1930) дало материал для точного вычисления возмущений. Математические средства для этой трудной и сложной задачи имелись и раньше, но только теперь появились необходимые данные и легкость обращения с аналитической техникой, чтобы работать с ними. Гаусса, несомненно, привлекли практические и технические аспекты экспериментальной астрономии. Об этом пишет Цах в своем письме от 21 февраля 1802 года, пытаясь убедить Гаусса посвятить себя вычислительным и теоретическим проблемам, где его гений не имеет равных, вместо того, чтобы тонуть в утомительной работе наблюдателя.* Цах был не только директором Зеебергской обсерватории, но и редактором "Ежемесячной корреспонденции" (Monatliche Correspondenz), в то время основного астрономического периодического издания в Германии. В июне 1801 года Цах опубликовал орбитальные пози-

---

*По справедливости, следует упомянуть, что именно Цах убедил Гаусса в его близорукости. Эта тема (то есть обсуждение оптической системы, состоящей из близорукого глаза и телескопа) вновь появляется в дальнейшей переписке Гаусса, причем Гаусс, видимо, не смог найти окончательного ответа на вопрос о том, к каким конкретным последствиям ведет близорукость наблюдателя.

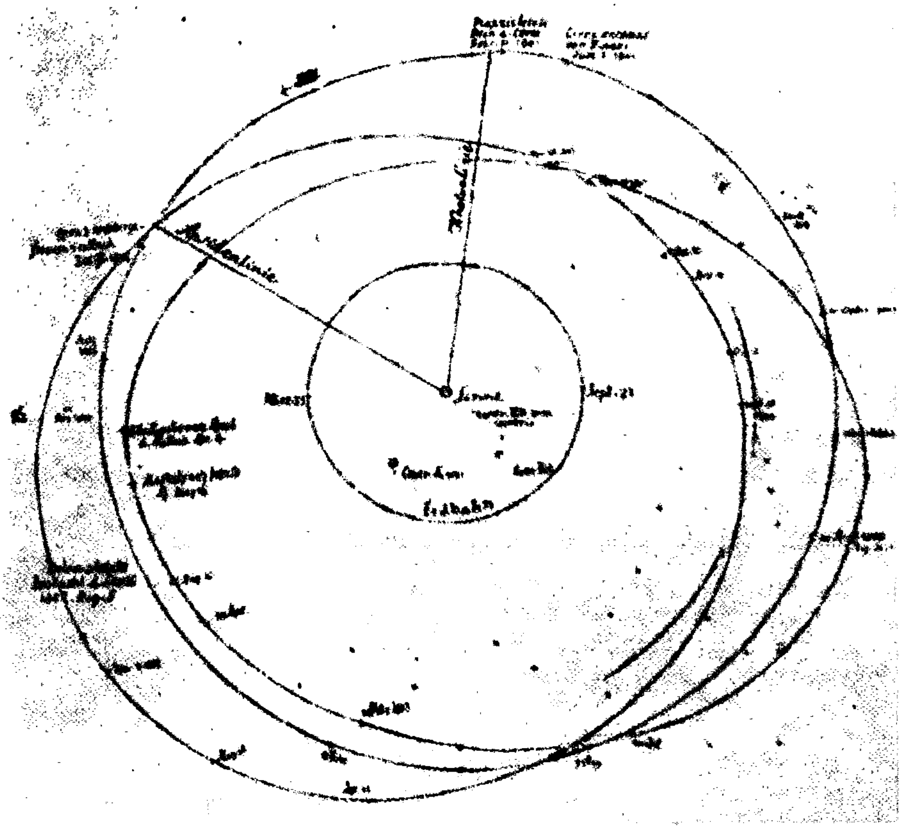
ции новой планеты, Цереры, открытой итальянским астрономом Дж. Пиацци 1 января 1801 года. Только девять градусов ее орбиты были известны в тот момент, когда 11 февраля того же года она исчезла "в тени Солнца". На ее существование указывал закон Боде, и астрономы всей Европы готовились к тому, чтобы открыть ее вновь, когда она, как ожидалось, снова появится в конце 1801 или начале 1802 года. Цах опубликовал несколько прогнозов будущей орбиты, в том числе один свой собственный и один Гаусса, последний – в сентябрьском выпуске. Хотя "Арифметические исследования" едва вышли из печати 29 числа того же месяца, Гаусс уже пользовался некоторой известностью как исключительный математик, но, однако, не как астроном. Все же его прогноз был воспринят серьезно, хотя он очень отличался от других и существенно расширял область неба, подлежащую исследованию. Сначала Цах в ночь 7 декабря 1801 года, а затем будущий друг Гаусса В. Ольберс в новогоднюю ночь сумели опознать новую планету в точках, очень близких к орбите, предсказанной Гауссом. Отчет, опубликованный в февральском выпуске "Ежемесячной корреспонденции", сделал Гаусса знаменитым на всю Евпропу – следствие той популярности, которой всегда пользовалась астрономия, и международного сотрудничества, существовавшего между астрономами благодаря их нужде в надежных данных и немногочисленности компетентных наблюдателей и современных обсерваторий.*

Этот успех принес Гауссу много почестей, в том числе приглашение в Санкт-Петербург на должность директора обсерватории.[8] В России была традиция приглашать на работу в научные учреждения выдающихся иностранцев. Наиболее известный пример – это Эйлер, и сам Гаусс только что был сделан членом-корреспондентом Академии благодаря его "Арифметическим исследованиям" – с последующим подтверждением и улучшением его положения в Брауншвейге. Этот успех также ввел Гаусса в узкий круг компетентных астрономов Германии, с которыми у него завязалась личная переписка на равной ноге. Здесь мы видим впервые, как Гаусс, хотя он в первую очередь математик, находит уважение, круг друзей и сферу научного сотрудничества, общения и влияния среди нематематиков.

В июне 1802 года Гаусс три недели гостил в Бремене у доктора Ольберса, врача с хорошей репутацией, занимавшегося и теоретической и экспериментальной астрономией. Ольберс только что открыл Палладу, вторую из малых планет. В 1803 году Гаусс, наконец, встретил Цаха и помог ему в некоторых геодезических исследованиях. В том же году Гаусс снова отправился в Бремен с визитом к Ольберсу.

В студенческие годы Гаусс был научно очень изолирован. Астрономия, как мы видим, все это изменила не только в профессиональном, но и в личностном плане. Почему так произошло, нетрудно понять. Кооперация

*Уже в 1796 году в Зеебергской обсерватории состоялась международная встреча астрономов.



Схематическое изображение орбит Цереры и Паллады (архив Гаусса)

и научный обмен в астрономии гораздо важнее, чем в математике, и Гаусс должен был участвовать в этих дискуссиях для его же пользы. Его теоретические исследования в астрономии естественным образом привели его к эмпирической, экспериментальной стороне предмета, причем это занятие ему, очевидно, очень нравилось. Как и в математике, он мог работать сам и, быть может, комфортабельная конкретность наблюдений была для него желанным противовесом к абстрактной теоретической работе. Гаусс стал проводить регулярные наблюдения в Брауншвейге, несмотря на свои ограниченные возможности там; он быстро стал авторитетен среди астрономов, не только благодаря своей скромности и своим теоретическим успехам, но и из-за своей эффективности и точности как наблюдателя. Одной из его специальностей, которую мы еще обсудим более детально, было проектирование и улучшение астрономических инструментов.

Брауншвейг не мог предложить Гауссу много в этом отношении, но в 1802–1803 годах были начаты серьезные переговоры о строительстве для него маленькой обсерватории.[9] Это было в духе усилий правительства в Брауншвейге: делалось все возможное для создания благоприятных условий для знаменитого молодого ученого и для того, чтобы удержать его в родном городе.

В 1802 году, когда Гаусс еще не принял решения по поводу приглашения в Санкт-Петербург, Ольберс обратил на него внимание своего друга фон Хеерена, профессора в Гёттингене и советника Ганноверского правительства. Ольберс хотел заручиться гарантиями того, что Гаусс не покинет Германию, и спрашивал, нельзя ли сделать Гаусса директором проектировавшейся тогда обсерватории в Гёттингене. Он писал:

. . . вам известна, дорогой друг, хоть математика и астрономия – не ваши области, слава д-ра Гаусса из Брауншвейга. Эта слава вполне заслуженна, и этот молодой человек 25 лет намного превосходит своих математических современников. Я считаю, что как-никак разбираюсь в этом, потому что я не только читал его работы, но и состою с ним в доверительной переписке с начала этого года. Его знания, его исключительная сноровка в аналитических и астрономических вычислениях, его неустанная активность и трудолюбие, его несравненный гений вызвали у меня величайшее восхищение, которое все возрастает по мере того, как он сообщает мне свои идеи в ходе нашей переписки. К тому же он любит астрономию, прежде всего практическую астрономию, до энтузиазма, как ни мало возможностей – по недостатку инструментов – он имел в ней поупражняться. К преподаванию математики он испытывает решительное отвращение: он мечтает быть астрономом в какой-либо обсерватории, чтобы делить свое время между наблюдениями и глубокими исследованиями ради расширения знаний . . .[10]

Нам неизвестна какая-либо официальная реакция на это письмо ни из Гёттингена, ни из Ганновера; в то время вопрос был отложен. Благодаря улучшению условий в Брауншвейге, Гаусс решил там остаться. Ольберс, по-прежнему заботливый, снова поднял этот вопрос несколько лет спустя, получил лучший ответ и достиг большего успеха.

Трудно предсказывать движения планет или других тел по малому числу наблюдений (по меньшей мере трем), потому что при этом нужно решать шесть уравнений с шестью неизвестными. Эти уравнения столь сложны, что решения приходится аппроксимировать; их невозможно вычислить точно и представить в замкнутом виде. Первый шаг такой аппроксимации – это предъявление вероятной или правдоподобной орбиты, второй, гораздо более трудный, – пошаговая коррекция орбиты. Есть три основных типа орбитальных кривых: эллипс, парабола и гипербола.

До Гаусса существовали многочисленные методы – они использовались и совершенствовались при вычислении движений многих комет – и одна планета, Уран (открытый в 1781 году Гершелем), обсчитывалась таким же образом. С Ураном дело обстояло особенно просто, потому, что начальное предположение о круговой орбите было очень хорошим и не вело ни к каким грубым искажениям. К тому же в этом случае был большой запас наблюдений, включая сделанные еще давно Флемстидом и Т. Майером старшим, благодаря чему легко было вычислить точную орбиту. Для Цереры же имелись только 41-дневные наблюдения Пиацци; более того, у ее орбиты, как оказалось, был большой эксцентриситет, что сделало круговое приближение, положенное Ольберсом в основу его прогноза, весьма неэффективным. Гаусс, в отличие от своих современников, избегал любых произвольных предположений о начальной орбите; его эллипс был основан только на имевшихся наблюдениях без каких-либо гипотез, явных или неявных. Много позже, в "Теории движения небесных тел . . ." (1809), Гаусс изложил совершенной иной, более тонкий подход; первоначальное же его вычисление орбиты Цереры было в общем основано на эвристических соображениях.

Интересно рассмотреть в этой связи статью "Суммарный отчет о методах, использованных для определения орбит обеих новых главных планет" (Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden), опубликованную в Собрании трудов, том VI. Она была издана впервые в 1809 году, но написана значительно раньше. Характерно, что даже здесь Гаусс не смог удержаться от уточнения и "математизации" своего первоначального метода, видимо, состоявшего в основном из интерполяций и пошаговых приближений. Это удивительно, потому что "Суммарный отчет . . ." был первым опубликованным Гауссом объяснением его методов; он вышел через восемь лет после того, как Гаусс впервые применил их, в ответ на многочисленные просьбы объяснить свою новую эффективную технику.

Естественно, что орбита, предсказанная Гауссом, нуждалась в дальнейших улучшениях после того, как Церера была вновь найдена, и мы застаем Гаусса интенсивно переписывающимся с ведущими наблюдателями, в том числе с Ольберсом, переписка с которым продолжалась затем всю жизнь. Это диалог, в котором Гаусс непрестанно вычисляет новые орбиты, что, в свою очередь, ведет к новым наблюдениям. Совершенство Гаусса как вычислителя было необходимым фактором его успеха, вместе с четким применением метода наименьших квадратов (который мы обсудим ниже в другом контексте).*

*До некоторой степени успех Гаусса можно объяснить тем, что он раньше изучал теорию Луны, где используются похожие методы, особенно для аппроксимации частей орбиты рядами Тейлора и тригонометрическими рядами (точнее, их конечными кусками).

ГЛАВА 5

ЖЕНИТЬБА. ДАЛЬНЕЙШАЯ ЖИЗНЬ В БРАУНШВЕЙГЕ

9 октября 1805 года Гаусс женился на Иоганне Остгоф, дочери дубильщика, с которой был обручен в прошлом году. Иоганна была на три года младше мужа; ее семья дружила с матерью Гаусса[1]. Кажется, жених был знаком со своей будущей женой еще в детстве, но мы не знаем ничего о конкретных обстоятельствах, приведших к этому браку. Не много знаем мы и о частной жизни молодой четы, но кое-что можно понять из переписки. Сохранилось несколько писем; большая часть их была написана во время поездки Гаусса в Бремен летом 1807 года, незадолго до переезда в Гёттинген. Как и бóльшая часть семейной переписки Гаусса, эти письма перепечатаны в издании "К.Ф. Гаусс и его родные" (C.F. Gauss und die Seinen; см. библиографию). Процитируем письмо Гаусса от 27 июня:

Вчера в полдень, в пятницу, я приехал сюда после очень тяжелого путешествия: тебе, дорогая Ганночка, пишу первой. Ужасная непогода, во власти которой я был непрерывно с 9 вечера среды до 12 утра четверга, дождь, промочивший насквозь мое пальто, халат, два сюртука и рубашку до самой кожи, внушили мне решительное отвращение к такого рода путешествиям: к счастью, он не причинил мне никакого вреда, и я отделался лишь временными неудобствами. Других трудностей у меня почти не было: все дороги здесь абсолютно безопасны, и никто не спросил у меня паспорт. Ольберс не вполне здоров, у него воспалена щека, и ему нельзя выходить на свежий воздух; в остальном у него и его семьи все в порядке, тебе сердечно кланяются. До сих пор (9 часов утра) я не встретил новых людей кроме д-ра Фокке и его маленького Вильгельма, милого и очень здорового ребенка двух лет, в 10 месяцев он уже вполне безопасно бегал. Я надеюсь увидеть сегодня Бесселя.

Ольберс очень советует мне в отношении Гёттингена; он считает, что я могу полностью положиться на то, что получу это место. Если это осуществится, то я, вероятно, постараюсь начать там не в Михайлов день*, а осенью или около Нового года, потому что я не смогу читать лекции следующей зимой. Во всяком случае, с нашей квартирой перемен не будет. Тщетно, дорогая Ганночка, ждал я сегодня письма от тебя: я надеюсь, что ничего плохого не случилось и вы все здоровы. Пожалуйста, напиши поскорее, как вы все, прошла ли щека у твоей матушки (Ольберсу лучше безо всякого лечения кроме того, что он бережет себя), как поживает сладкий Иосиф, довольна ли ты его новой няней. Заплатила ли ты за вино г-ну Менгену – быть может, ты сбилась со счета, я думаю, мы должны ему 1 талер, 14 грошей и 3 пфеннига.[2]

Два письма Гаусса к Бояи, от 28 июня и от 25 ноября 1806 года, принадлежат к числу наиболее открытых и эмоциональных, какие он когда-либо писал. Гаусс был озабочен своим будущим, но также и жизнью со своей молодой женой, которая была так непохожа на него – умная и мягкая, но неопытная и не слишком образованная. Проиллюстрируем ситуацию двумя отрывками из письма от 25 ноября: "Жизнь для меня как весна с ее ярки-

*29 сентября. – *Примеч. пер.*

ми красками", но также "Однобокое счастье – это вообще не счастье". Не сохранилось никакого портрета Иоганны Гаусс; мы знаем только, что ее дочь Минна, впоследствии жена ориенталиста Эвальда, была очень похожа на нее. Гаусс описал свою невесту в письме к Бояи от 28 июня 1804 года:

. . . Прекрасное лицо мадонны, зеркало душевного мира и здоровья, нежные, несколько мечтательные глаза, безупречный стан – это нечто, ясный ум и образованный язык – это еще нечто, но спокойная, радостная, скромная и чистая душа ангела, не способного причинить зло ничему сущему – это лучшее.[3]

Кроме процитированного, известны еще несколько писем Гаусса и его первой жены друг к другу; судя по всему, их любовь была прямой и открытой, выражая глубокое, но ординарное чувство. Хотя нам не много известно об Иоганне, бросается в глаза ее спокойная твердость, внутренняя уверенность, позволившая ей сохранить свою независимость и свою личность. Она не была полностью заслонена и поглощена гением мужа, несмотря на свое плохое образование и сравнительную неопытность.

Есть два портрета Гаусса этого периода; он выглядит уже очень похожим на привычные поздние портреты. Гаусс был среднего веса, примерно пяти футов и двух дюймов и с "характерными нижнегерманскими чертами лица". Часто упоминаются ясные и проницательные голубые глаза; для поздних портретов характерен сильно выступающий лоб, но в юности это могло быть не так заметно. Гаусс был мускулистым и сильным, никак не похожим на расхожий образ ученого-заморыша.

Декабрь 1804 года отмечает начало переписки с Фридрихом Вильгельмом Бесселем, тогда двадцатилетним подмастерьем, работавшим у одного из крупных бременских купцов. Его интерес к астрономии свел его с Ольберсом, который, в свой черед, рекомендовал молодого самоучку Гауссу, для которого он анализировал данные наблюдений. Дело это было важное и ответственное в ту докомпьютерную эпоху; анализ наблюдений, их редукция были необходимой и поглощавшей много времени частью астрономии. Даже Гаусс, со всем своим искусством вычислителя, был благодарен за помощь.

Вскоре Бессель развился в равного партнера в их астрономических дискуссиях; мы увидим, что эта перемена не осталась без последствий для их личных отношений. Но в годы пребывания Гаусса в Брауншвейге Бессель был еще послушным и кротким учеником; Гаусс очень его поощрял и обсуждал с ним такие интересные вопросы, как определение орбит некоторых известных комет. Между Гауссом и Бесселем была очень обширная и содержательная переписка, но в течение примерно 20 лет, между 1807 и 1825 годами, они лично не встречались, хотя к этому было несколько возможностей. Письма не ограничиваются астрономическими темами, обсуждение которых имеет характер живой и неформальной дискуссии. Они содержат и математические вопросы – где Гаусс более самоуверен –

и некоторые частные и личные дела. Например, Гаусс охотно помогает Бесселю и его младшему брату освободиться от французской военной службы и заботится о том, чтобы Гёттингенский университет присвоил Бесселю докторскую степень без диссертации и без экзамена, когда Бессель стал директором обсерватории в Кёнигсберге в Пруссии.[4] Переписка с Бесселем – это в научном отношении наиболее интересная и информативная часть переписки Гаусса, но с Ольберсом, Шумахером и Герлингом он обменялся гораздо бóльшим числом писем. Судя по всему, Гаусс был неутомимым корреспондентом, но в те времена это не было редкостью. Поскольку активных и симпатизирующих ученых было так мало, а препятствий к прямым контактам – так много, письма были крайне важным и необходимым инструментом научного прогресса. Современный читатель, возможно, будет удивлен, узнав, что, по крайней мере в пределах Германии, регулярная почта была надежной и быстрой; даже из таких отдаленных мест, как Кёнигсберг (в Восточной Пруссии) или Мюнхен (в Баварии), письмо в Гёттинген шло не более недели в мирное время. В 1830-е и 1840-е годы система почты работала еще лучше: письма Герлинга из Марбурга обычно приходили в Гёттинген на следующий день.

Главной темой теоретических исследований Гаусса в последние годы пребывания в Брауншвейге было вычисление возмущений орбит Паллады и Цереры, вызванных массой Юпитера. Сохранилось много тетрадей с вычислениями; в неявном виде они содержат теорию, которую Гаусс собирался разработать впоследствии. По причинам, которые мы скоро поймем, Паллада представляла особые трудности. Интересно то, что эти вычислительные проблемы были очень тесно связаны с работой Гаусса в чистой математике, наиболее очевидным образом – с его исследованиями по эллиптическим интегралам и гипергеометрической функции. Чтобы разобраться в этом глубже, полезно посмотреть тома III, VI и VII Собрания трудов.[5]

В сущности, Гаусс применял два различных метода для вычисления нерегулярностей в движении планет. Один состоит в аналитическом разложении возмущения, причем только первые члены получающегося бесконечного ряда принимаются во внимание и используются. Конечно, этот прием был известен до Гаусса; например, так действовал Лаплас. Но Гаусс применял его успешнее, чем его предшественники и соперники, в основном благодаря своему хорошему знакомству с бесконечными рядами и умению обращаться с ними. Этот аналитический метод не работал для сложных или очень медленно сходящихся рядов; на смену ему Гаусс изобрел и применял численное интегрирование. Этот метод годился всегда, но отнимал очень много времени – каждое наблюдение было отдельной проблемой. Гаусс не был ни односторонен, ни категоричен в своих предпочтениях и выбирал тот или иной метод, смотря по ситуации. Аналитические методы годились для Цереры, но даже в этом случае Гаусс разлагал возмущения в тригонометрические ряды, которые численно интегрировал с помощью таблиц. Техника Гаусса очень похожа на работы Фурье и в значительной степени предвосхищает их.

Для математической астрономии определение возмущений малых планет было самой важной задачей в то время. Очевидно, для Гаусса это была самая подходящая задача, хотя возмущения Паллады были сложноваты даже для него. Одним из наиболее интересных результатов, каких можно было ожидать от этих вычислений, было точное определение массы Юпитера; в письме от 25 июня 1802 года Гаусс писал Ольберсу: "Кстати, я верю, что после нескольких витков Паллада станет наилучшим средством для определения массы Юпитера" (Übrigens glaube ich, dass die Pallas nach einigen Umläufen das beste Mittel sein wird, die Masse des Jupiter zu bestimmen) – предсказание, оказавшееся слишком оптимистичным.

Несмотря на свои астрономические занятия, Гаусс активно интересовался несколькими другими разделами естественных наук: гравитационными экспериментами для исследования вращения Земли; определением географических долгот под руководством Цаха (с помощью акустических и оптических сигналов); [6] проводил он и астрономические наблюдения.

Мы уже говорили, что в Брауншвейге не было настоящей обсерватории, но в ясные ночи Гаусс мог найти на небе Палладу и Цереру. Значительный интерес представляли некоторые из наиболее хорошо видных комет, особенно та, что появилась в 1805 году; именно об этой комете он подолгу говорил с молодым Бесселем, выяснявшим, может ли это быть уже хорошо документированная комета 1772 года (на самом деле это была другая комета).

Среди инструментов, которыми Гаусс располагал в Брауншвейге, производил впечатление (но, к сожалению, сверх этого мало на что годился) современный рефлекторный телескоп. Гаусс купил его с помощью своего будущего коллеги, астронома Гардинга, умелого и знающего наблюдателя, получив необходимые для этого средства в 1804 году. Рефлектор оказался недоброкачественным, и его пришлось корректировать несколько раз. Поэтому Гаусс за все время работы в Брауншвейге не смог ни разу воспользоваться этим инструментом, и когда стало известно, что Гаусс принимает должность в Гёттингене, профессор астрономии в Коллегии Карла официально затребовал инструмент. Гаусс написал длинное письмо министру, объясняя историю покупки и дефекты и достоинства инструмента. Оно заканчивалось рекомендацией, чтобы телескоп был передан Пфаффу как способному наиболее квалифицированно его использовать. Видимо, инструмент,тем не менее, остался в Брауншвейге и стал частью коллекции Коллегии Карла. Гаусс, весьма раздосадованный таким оборотом дела, не скрывал своего несогласия. Вот что он писал Ольберсу перед самым отъездом в Гёттинген, 29 октября 1807 года:

Рефлектор 10-футового телескопа, возвращенный мне, кажется теперь в полном порядке; по недостатку места я мало могу им пользоваться; к тому же у меня нет ни желания, ни времени точно его центрировать. Вполне возможно, что инструмент попадет в очень плохие руки после моего отъезда.[7]

Недостатки рефлектора побудили Гаусса заняться тем, что он называл "диоптрическими исследованиями", то есть исследованием систем оптических линз и их теоретических и фактических ограничений. Эта область продолжала постоянно интересовать его; он внес в нее значительный вклад, о котором мы скажем ниже.

Дискуссии с Ольберсом, а несколько позже с Бесселем, быстро убедили Гаусса в необходимости большей тщательности, точности и аккуратности в астрономических наблюдениях. Это относилось и к самим наблюдениям и к качеству их научной (то есть математической) обработки. Гаусс был сравнительным новичком в этой области; все же это была область, где он мог выделяться и задавать тон, несмотря на свои ограниченные возможности в Брауншвейге и в ранние годы в Гёттингене, когда у него не было современных инструментов. Впоследствии Гаусс перенес те же строгие требования и тот же подход на другие области экспериментальных наук, где он работал. Он был совершенно уверен в своей правоте и открыто критиковал неряшливую работу прежних наблюдателей, особенно геодезистов. Наиболее мощным теоретическим средством для него все это время был метод наименьших квадратов, уже доказавший свою эффективность при определении орбиты Цереры. Сегодня мы знаем, что Гаусс и Лежандр оба имеют право называться первооткрывателями метода наименьших квадратов (см. с. 143 и далее), но даже Гаусс в то время не считал его теоретически очень интересным или важным. Первоначально он был убежден, что уже Тобиас Майер старший, его предшественник в гёттингенской обсерватории, знал и использовал его.[8] Лишь позже, после того как Гаусс увидел его вероятностный смысл, этот метод стал интересен для него сам по себе и развился в важную составную часть того, что можно назвать гауссовой натуральной философией.

В октябре 1805 года, в своей переписке с Ольберсом, Гаусс впервые упомянул о своем намерении изложить свои теоретико-астрономические методы в виде единого трактата. Эта книга была, наконец, издана в 1809 году; это знаменитая "Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям" (Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conics Solem Ambientium). Завершение этого труда было крупнейшим делом Гаусса в последние брауншвейгские годы; его публикация явилась событием, на которое все астрономы возлагали значительные ожидания. О его содержании мы скажем ниже.

Еще об одном, хотя и не таком важном, обстоятельстве следует упомянуть при описании научной работы Гаусса во второй брауншвейгский период. В 1804–1805 годах он обсуждал теоретико-числовые проблемы в переписке с тогда неизвестным французским математиком. Приведем две выдержки из его писем к Ольберсу. Первая – от 7 декабря 1804 года:

Недавно я имел удовольствие получить письмо от Леблана, молодого парижского геометра, который с энтузиазмом изучает высшую математику и дал мне свидетельства того, что глубоко понял мои "Арифметические исследования".[9]

Вторая – более двух лет спустя (24 марта 1807 года):

Мои "Арифметические исследования" на днях преподнесли мне большой сюрприз. Не писал ли я Вам неоднократно о моем парижском корреспонденте, некоем Леблане, который дал мне свидетельства того, что в совершенстве усвоил все детали этой работы? Этот Леблан недавно сообщил мне кое-что новое: это псевдоним молодой женщины, Софи Жермен; конечно, это удивит Вас так же сильно, как и меня.[10]

С одной идеей Софи Жермен связано еще одно доказательство квадратичного закона взаимности[11]; ее имя вошло в теорию чисел, потому что она первая исследовала некоторые частные случаи последней теоремы Ферма[12]. Это последнее замечание снова показывает тот интерес, который Гаусс сохранял к чистой математике в эти годы, заполненные астрономическими исследованиями. Когда мы выше писали о теоретико-числовой работе, мы видели, что он не только опубликовал несколько статей, продолжающих идеи "Арифметических исследований", но и проводил новые исследования и получал некоторые новые результаты, не достигая, однако, своих прежних, гораздо дальше шедших замыслов. Все его систематические усилия были направлены к астрономии по причинам, которые мы указали выше. По существу, они состоят в следующем (в произвольном порядке): научный интерес к астрономии; то, что астрономия давала больше возможностей для научного и личного общения; ожидание, что в качестве астронома будет легче найти подходящее и верное место. Можно предположить, что женитьба и рождение первого сына в 1806 году усилили последний мотив.

Принимая место в Гёттингене, Гаусс писал, что всегда рассматривал свое положение в Брауншвейге только как временное[13], однако еще в 1804 году он предпочел его предложениям Санкт-Петербургской академии и Ландшутского университета (Бавария). Переговоры с Гёттингеном приобрели серьезный характер в 1804 году, через два года после первого письма Ольберса, и были успешно завершены в 1805 году, то есть до политических потрясений 1806 года. Ольберс, неутомимо агитировавший Гаусса за Гёттинген (и тем самым за Германию) вел переговоры от имени Гаусса. Решающими доводами в пользу Гёттингена были твердое обещание администрации построить новую обсерваторию, присутствие опытного и умелого наблюдателя Гардинга (открывшего малую планету Юнону) в качестве ассистента Гаусса[14] и тот факт, что Гауссу предоставлялась большая независимость от университета. Это давало ему право на меньшее участие в чтении лекций и в административных делах. Еще один – отрицательный – довод состоял в очевидной неопределенности планов строительства обсерватории в Брауншвейге.

ДОПОЛНЕНИЕ IV

ПОЛИТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ В ГЕРМАНИИ В 1789–1848 ГОДАХ

Гаусс еще не приехал в Гёттинген, а политические события уже подтвердили правильность его решения отправиться туда. Вскоре после 1789 года между "Римской империей" и Францией разразилась серия коротких войн, которые после 1799 года вел Наполеон, казавшийся непобедимым. Эти войны в 1805–1807 годах завершились поражением германских государств. В последнем усилии правительство Пруссии послало в 1806 году брауншвейгского герцога Фердинанда в Санкт-Петербург, чтобы прощупать возможности коалиции против Франции. Желанный альянс с Россией не состоялся, и Пруссия решила действовать самостоятельно, чтобы остановить французское наступление в центральной Европе.

Фердинанд Брауншвейгский, покровитель Гаусса, был одним из знаменитейших воинов своего времени. Его военный стаж насчитывал около пятидесяти лет; он начинал еще как прусский генерал под славным командованием короля Фридриха Великого.[1] Хотя ему было уже за семьдесят, робкий и живший воспоминаниями прусский кабинет назначил его генералиссимусом прусской армии. Первая же крупная битва решила войну: Пруссия была разбита под Иеной и Ауэрштадтом[2], герцог был смертельно ранен. Через несколько дней он скончался в Альтоне, близ Гамбурга. Его приближенные, уходя от Наполеона, прошли через Брауншвейг, и мы знаем, что одним ранним утром Гаусс был разбужен меланхолическим стуком экипажей, покидавших город через гамбургские ворота.[3]

Политическое положение в Гёттингене было очень сложное. Королевство Ганновер, находившееся под английской короной после восхождения Ганноверского дома на британский трон примерно сто лет назад, было оккупировано Пруссией перед самой Франко-прусской войной; после падения Пруссии Англия не смогла защитить его, и страна попадала под прямое владычество Франции. Короткий переезд из Брауншвейга в Гёттинген, предпринятый Гауссом через 13 месяцев после роковой битвы, был равносилен переезду из века феодализма в буржуазный девятнадцатый век. Гёттинген был включен во вновь созданное под господством Франции королевство Вестфалия, и легкость, с которой Гаусс смог совершить свой переезд, и физически и символически была весьма необычной, так же, как нетипичны были его безмятежные отношения с герцогом. События исторической важности, современником которых был Гаусс, проходили мимо него, не волнуя его глубоко и не мешая ему; "Буря и натиск", Французская революция, восстание против Наполеона и революции 1830 и 1848 годов, в сущности, не волновали Гаусса: они не причиняли ему крупных неудобств, и он не был жертвой тех притеснений, которые вызывали их, – у Гаусса никогда не было причин приветствовать новые порядки и надеяться на значительные перемены.

На абсолютизм, как мы видели, Гаусс не мог пожаловаться, но и ненавистное марионеточное правительство Вестфалии было не менее милостиво к наукам вообще и к нему лично. Более неприятна была крайняя неэффективность и некомпетентность этого правительства; оно все больше приходило в упадок[4], что проявлялось и в том, как медленно шло строительство новой обсерватории, и в задержках жалованья Гауса. (Ироническое замечание в сторону, заслуживающее, чтобы его высказать: публикацию одной из статей Гаусса пришлось отложить, потому что все печатные мощности и вся бумага потребовалась на публикацию очередного тома Собрания трудов "историка-универсала" Иог. фон Мюллера, тогдашнего секретаря по вопросам образования и культуры в правительстве Вестфалии и гордого автора более чем двухсот ученых томов.) Поскольку политическая ситуация была столь неопределенна, когда Гаусс вступал в должность, от него не потребовали обычной присяги, и, видимо, это упущение вызвало у него веселое удовлетворение, скорее как забавный случай, чем по юридическим причинам.[5]

Когда в 1814 году было восстановлено старое королевство Ганновер, оно стало, вероятно, самым консервативным государством в Германии; однако положение Гаусса было прочным благодаря той официальной поддержке, которой пользовалась астрономия – здесь снова очевидно английское влияние. Финансировалась обсерватория либерально, и Гаусс получал все инструменты и всю помощь, на какие разумно было рассчитывать. Его конфликт с обществом происходил в частной и личной сфере и выразился, в частности, в его недовольстве медленной военной карьерой его сына Иосифа.[6]

Мир, который Гаусс привык считать нормальным, рухнул в 1806 году; однако политические события не оказали на его собственную судьбу столь сильного влияния, чтобы вынудить его пересмотреть свои основные взгляды. Вероятно, самым неприятным для него было то, что он служил нелюбимому королевству Вестфалии, но даже это смягчалось несомненностью добрых намерений этого бездарного правительства и личными почестями, которых был удостоен Гаусс, – это смешной анахронизм, но он был посвящен в рыцари и в течение нескольких лет мог называть себя "рыцарь фон Гаусс" (Ritter von Gauss).[7]

Первые тридцать лет жизни Гаусса уже снабдили нас некоторой информацией, позволяющей понять его политические взгляды. Его происхождение и карьера определялись социальными и политическими силами восемнадцатого, а не девятнадцатого столетия; государь, которому он был столь многим обязан, был милостивым деспотом в стиле Людовика XIV. Герцог Фердинанд Брауншвейгский был эффективен и дальновиден по понятиям своего времени (хотя не гнушался пополнять свою казну продажей солдат на службу в Северную Америку). Это был образованный человек, физиократ в философии и корреспондент Дидро и Мирабо старшего. В ранние годы одним из его советников был барон Гарденберг, впоследствии искусно проводивший радикальные реформы в Пруссии в 1809–1813 годы. Одним из наиболее памятных поступков герцога было назначение Г.Э. Лессинга библиотекарем в Вольфенбюттеле.[8]

И все же просвещенный абсолютизм герцога не принес много пользы такой маленькой стране, как Брауншвейг. Он ничего не сделал, чтобы уменьшить, даже увеличил разрыв между поднимающимся третьим сословием – будущей буржуазией – и неимущим большинством – подмастерьями, батраками и т.д.* Продуктивность и благосостояние в Брауншвейге не возросли за восемнадцатый век, как и в большинстве германский государств. Подъем среднего класса происходил за счет других социальных групп.[9] Сама система стала несколько менее жесткой – семья самого Гаусса служит хорошим примером этому. Сам Гаусс принимал этот мир таким, какой он есть, и никогда не проявлял склонности к недовольству или радикальным социальным идеям. Он старался обеспечить продвижение своих детей согласно тогдашним понятиям, как, например, когда он старался заставить своего сына Евгения стать юристом, так как социально это была бы самая выигрышная профессия.[10]

Наш взгляд на восемнадцатый век предопределен ходом политической и национальной истории Германии в девятнадцатом веке. Есть два принципиально различных подхода к германской истории за последние сто лет, один прогрессивный и либеральный, другой консервативный; происхождение обоих можно проследить до восемнадцатого века.

С либеральной точки зрения девятнадцатый век выглядит следующим образом. Старый феодальный порядок рухнул, его слабость проявилась в конфликте с прогрессивными народными силами Французской революции. Последствием этого была временная коалиция между демократическими национальными движениями в Пруссии (и в других германских государствах) и консервативными феодальными силами, боявшимися революции в Германии и полной утраты власти. Между 1813 и 1815 годами эта коалиция освободила Германию от иностранного ига, победив Наполеона. К тому времени Наполеон сам стал консервативной, даже реакционной исторической силой. Период от 1815 до 1848 года характеризуется возрождением династической и консервативной "партии" в Германии. Возникшая при этом напряженность привела к неудавшейся революции 1848–49 годов. Поскольку консерваторы так хорошо воспользовались предшествующим периодом, они сумели, вопреки "реальному" историческому развитию, победить революционные либеральные силы. В результате постепенно сложилось ориентирующееся на прошлое и агрессивное германское национальное государство под предводительством Пруссии.[11]

Консервативная интерпретация подчеркивает национальный характер восстания против Наполеона и рассматривает революцию 1848–49 годов

---

*Такой ход событий был типичен для Германии в то время. См. детальный анализ в книге [Бидерман].

как бунт горстки недовольных интеллектуалов, не поддержанный народом и вызванный не положением в Германии, а событиями во Франции. В этом консерваторы видят причину его быстрого подавления и неэффективности либеральной парламентской ассамблеи (Paulskirchenparlament). Подлинная цель войн против Наполеона и Франции была достигнута лишь в 1871 году под предводительством Пруссии после национальных войн против Дании, Австрии и Франции.

С либеральной точки зрения, несбывшаяся мечта о демократической и единой (и, следовательно, сильной и мирной) Германии была истинной целью войн с Наполеоном, которые интерпретируются скорее как народные, чем национальные восстания.

Видимо, ни один из этих подходов не соответствует историческим событиям полностью. Обе интерпретации (и, конечно, события, толкуемые ими) ведут свое происхождение из восемнадцатого века. В то время даже многие из центральных концепций этой дискуссии, такие как "национальное чувство и сознание" (Nationalgefühl und -bewusstein) имели иной смысл. Не существовало конкретного национального настроения в пользу объединения германской нации. В качестве политической организации выступала "Священная Римская империя германской нации", крайне безжизненная окаменелость, оставшаяся от средних веков, от которой нечего было ждать ни перемен, ни захватывающих инициатив. Старый порядок был скорее препятствием на пути к модернизации и прогрессу, чем предшественником новой, объединенной Германии. Раздробленность Германии на несколько сотен полунезависимых государств зашла так далеко, что сама идея объединения казалась пустой и старомодной фантазией.

Будучи верным, такое описание политической и национальной ситуации страдает принципиальной неполнотой в следующем отношении. Помимо непосредственно политических соображений, были другие заявления совершенно иного характера. Они предполагали и даже декларировали существование абстрактного понятия Германии и даже германского национального характера. Порой такие идеи выражались весьма самоуверенно и с национальным самомнением, которое нелегко понять. Такие чувства находили свое выражение в основном в литературе того времени и в исторических исследованиях определенных политических институтов. В литературе восемнадцатого века мы видим сильную тенденцию к культурной независимости (от Франции), выражавшуюся в стремлении к очистке языка от иностранных (т.е. французских) слов и в употреблении "германских" поэтических размеров.[12] Политически это было возрождение старых учреждений народного представительства, остававшихся от позднего средневековья, что подчеркивалось; абсолютизм французского образца, очень нравившийся мелким правителям лоскутных германских княжеств, отвергался как "негерманский" и несовместимый со старинным германским вольнолюбием. Врожденная любовь к свободе считалась причиной того, почему германцы не могут ни образовать, ни терпеть сильного национального правительства.[13] В работах тогдашних журналистов и историков* можно найти много выражений убеждения в том, что все, что нужно для облегчения современного жалкого состояния германских дел, — это реставрация старого порядка, так хорошо заботившегося и о вольности германцев и об их тогдашнем благосостоянии.** Поэтому казалось вполне естественным смотреть назад, и многие прогрессивные идеи, импортированные из Франции непослушными интеллектуалами и принятые частью медленно пробуждающегося среднего класса, казались странно неестественными и потому неприемлемыми.

Эти два различных слоя "либеральной" мысли можно различить в политическом мышлении Германии в продолжении по меньшей мере всей первой половины девятнадцатого века; они выдвигали одинаковые лозунги — такие, как вольность, политическая свобода и единство, но вкладывали в них различный смысл и имели совершенно различные опыт и надежды. Многие представители либеральной Германии воплощали этот конфликт. Так, поэт Людвиг Уланд был радикальным депутатом в революционном парламенте 1848–49 годов. Во многих стихах Уланд прославляет и восхваляет "старое доброе право" (das alte gute Recht) германцев.[14]

Конечно, это тяготение к прошлому можно интерпретировать как консервативное, но такая интерпретация будет весьма шаткой и обманчивой. Что в действительности означал "консерватизм" еще в 1814 году, иронически иллюстрирует позиция, которую занял граф Мюнстер на переговорах о восстановлении двора и титула германского императора. Граф Мюнстер в течение многих лет был первым министром королевства Ганновер, фактически его вице-регентом. Он настаивал, что было бы глупо восстанавливать этот титул***, потому что старинные права германцев, подлежащие восстановлению после освобождения от французского ига, не оставят императору никакой реальной власти. Это решение возобладало, но, вероятно, по причи-

---

*Например, в работах Ю. Мёзера (1720–1794), журналиста, юриста и историка, происхождением и убеждениями очень похожего на Гаусса. Мёзер был из Оснабрюка, католического анклава посреди протестантской северной Германии.

** В качестве иностранного источника процитируем Гиббона ("История упадка и разрушения Римской империи", гл. 49):

"Но итальянские города и французские вассалы были разделены и разрушены, тогда как союз германцев произвел, под именем империи, великую систему федеративной республики. В частном и, наконец, постоянном институте парламентов сохранялся живым национальный дух, и силы общих законодательных властей еще осуществляются тремя ветвями коллегий выборщиков, князей и свободных и имперских городов Германии." Это описание, несомненно, приукрашивало действительность и уже в то время было анахронизмом. Оно выражает настроения того времени; когда Гиббон писал это, Гаусс был ребенком.

*** Франциск II отрекся от этого титула в 1806 году, после того как Наполеон "аннексировал" и "секуляризовал" мелкие княжества и независимые владения Церкви; Германия была сведена приблизительно к 35 государствам среднего размера. Франциск, привыкший к имперскому званию, впоследствии принял новый титул "императора Австрии".

нам, отличным от аргументов Мюнстера. Лишь постепенно в ходе девятнадцатого века германский консерватизм приобрел свой националистический характер, изменившись и превратившись в идеологию, которую мы сегодня назвали бы консервативной; политик правого крыла, призывающий к военной силе, превозносящий доблести германцев и Германии и носящий старомодный костюм, предполагаемый национальным, – изобретение позднего времени и был бы немыслим сто пятьдесят лет назад.

Мы вошли в такие детали, чтобы избежать некоторых возможных (и обычных) недоразумений относительно политических мнений и реакций Гаусса. Классический взгляд на Гаусса – это взгляд с либеральной точки зрения, доминирующей в исторической литературе и кажущейся наиболее просвещенной. Но происхождение Гаусса было, как мы видели, совершенно иным, чем происхождение тех классов, которые развивались и идентифицировались с политическим либерализмом. Присоединившись к среднему классу, Гаусс усвоил лишь некоторые из типичных для него взглядов. Он не разделял большей части специфически либеральных политических убеждений, особенно если они касались его лично и могли потребовать от него каких-то решительных действий.

ГЛАВА 6

СЕМЕЙНАЯ ЖИЗНЬ. ПЕРЕЕЗД В ГЁТТИНГЕН

Жизнь молодой четы в Брауншвейге не была ни удобной, ни обеспеченной, но есть указания на то, что Иоганне Гаусс нравилось жить в городе, где она выросла и где у нее были друзья и родственники.[1] Гаусс и его жена были приближены ко двору герцога в старомодном и анахроническом стиле, подобно вассалам при дворе итальянского князя времен Возрождения. Иоганна не бездельничала: ей пришлось вести хозяйство, потому что Гаусс, видимо, не интересовался повседневными заботами. Хотя мы не знаем деталей, нетрудно представить себе, как они жили. От того времени сохранилось много описаний подобных попыток строить семейное счастье в уединении, отделившись от враждебных вторжений бурного мира.[2]

В 1806 году, еще в Брауншвейге, родился старший сын, которого окрестили Иосифом в честь Пиацци, открывшего Цереру и тем самым косвенно принесшего славу Гауссу. (Другие дети Гаусса от первого брака, Вильгельмина (Минна) и Людовик также были названы в честь астрономов: Ольберса, который первый нашел Палладу, и Гардинга, открывшего Юнону.) Чтобы охарактеризовать домашнюю жизнь Гаусса, процитируем несколько писем, написанных в 1807 году, когда Гаусс ездил к Ольберсам в Бремен. Сначала письмо Иоганны:

. . . Сердечно сожалею, мой любимый, что мое молчание встревожило тебя, все в нашем доме шло обычным порядком; у меня все хорошо, кроме того, что я скучаю по тебе. Иосиф ни в чем не нуждается, он очень веселый, его новая няня, как я тебе уже сообщала, приехала в пятницу, она очень честная и спокойная, и притом старая дева, но так любит детей, что Иосиф уже с первого же дня освоился с ней, теперь он бывает с ней так же охотно, как и со своей матерью, это, я думаю, залог того, что я могу доверить его ей абсолютно. Ежедневно он ходит гулять и посещает с ней либо наших родственников, либо своих предков, которых целая куча, это ему так нравится, что он, выразительно указывая на дверь и топая по направлению к ней, очень ясно это показывает, когда ему надоедает сидеть дома, он стал очень живым, всем он очень нравится; и по словам Эбелинг [няни], никто не верит ее заверениям, что это нежное изящное лицо принадлежит мальчику; 26-го появился, совершенно незаметно, его седьмой зуб, но зато в воскресение бедный шалун потерял самое ценное, как только подумаю об этом, мне делается неописуемо грустно, но мне пришлось решать быстро, потому что неясно, как долго Эбелинг сможет у нас быть. . . моя нерешительность относительно даты была главной причиной, почему я не написала тебе в пятницу, и еще я думала, что придут письма для тебя, они пришли необычно поздно, после 9.30, я послала письмо, так как Гардинг мог приехать раньше чем ты, извини за плохой конверт, я очень спешу.*[3]

Одновременно муж писал жене:

. . . Все часы, дорогая моя Ганночка, когда я не особенно занят, я не могу употребить лучше, чем болтая с тобой, даже если мне нечего сообщить важного. Продолжу рассказ о том, как провожу время в Бремене. . . [4]

В письме есть постскриптум, отвечающий на только что пришедшее письмо Иоганны:

Мне доставило очень много радости твое дорогое письмо от 30-го, которое я только что получил. Это наша бесценная удача, что наш сладкий Иосиф может ожидать критического момента в таких хороших и надежных руках; когда ты получишь это письмо, худшее, наверное, будет уже позади. Уделяет ли он по-прежнему много внимания изучению науки равновесия и движения? Трудности путешествия не повлияли на мое здоровье, но значительная перемена диеты (здесь я ем все те же четыре раза в день, так же, как и дома, и окружающие так же жалуются на мой плохой аппетит) вначале вызвал у меня запоры, с которыми справился слабительный порошок, теперь я начинаю привыкать к эпикурейскому образу жизни. Ольберс не думает, что лекарство могло особенно помочь против слабости моего желудка, газов и запоров, скорее винный погреб. Диета и образ жизни должны помогать больше всего против такого рода недомоганий. Он считает наше обычное красное вино, столовое, неполезным и думает, что оно могло, даже если оно не вызвало его, резко усилить случающееся у меня сердцебиение. Для моего желудка он рекомендует время от времени стаканчик мадеры, а для улучшения проходимости – трубку ежедневно перед утренним кофе, в остальном – прогулки и т.п. Мне были бы особенно полезны тепловатые ванны по временам; особенно благотворны, думает он, мне были бы время от времени минеральные воды; кто знает, мы могли бы снова увидеться в Ребурге в будущем году. Ольберс с большим интересом отправился бы вместе со мной в Париж; поскольку мы оба не способны оценить французский театр и тому подобное балов-

*Читатель, вероятно, заметил, что это ответ на цитированное выше письмо Гаусса от 27 июня 1807 года.

ство, мы могли бы посетить все стоящее внимания за пару недель, и на все путешествие ушло бы примерно пять недель.

Сообщение о перемирии между французами и русскими, кажется, подтвердилось, и, возможно, близок мир, но тем временем англичане высадились в Шведской Померании. Безумные времена.

Мне пора одеваться. Приходится кончать в спешке. Кланяйся своей матушке и всем нашим друзьям, считай, что я их всех и каждого тут перечислил.[5]

Даже в эти ранние годы – Гауссу только что исполнилось тридцать – он жаловался на здоровье и обсуждал свою диету и свое пищеварение с друзьями, в частности с Ольберсом. Ниже мы встретим аналогичные жалобы со стороны Ольберса, который был много старше, всегда встречавшие сочувствие со стороны Гаусса. Ольберс тоже с интересом обсуждал свое собственное здоровье и различные свои недомогания; хотя друзья его неоднократно приходили в беспокойство и начинали опасаться худшего, Ольберс умер лишь в 1840 году в возрасте 81 года. Гаусс, по-видимому, был так же крепок; наиболее заметными его недомоганиями были временная глухота в 1838 году и необычная чувствительность к теплу, которая, кажется, причиняла ему большое неудобство. Это ему особенно мешало во время геодезической работы после 1818 года. Все же Гаусс был счастливым человеком. Он очень любил свою семью, и впереди у него было много лет успешной научной работы. Гёттинген был особенно подходящим местом, потому что научная работа – математика и астрономия – ценилась там больше, чем в любом другом университете Германии. Независимость университета от церковного надсмотра и прямого вмешательства правительства, признание актуальности естественных наук (из догауссовских ученых там были математик Кестнер, физики и астрономы Лихтенберг и Тобиас Майер старший, а в медицине – поэт Альбрехт фон Галлер[6]) и щедрое финансирование обеспечили ему ведущее положение среди германских университетов.* Другой особенностью, в то время уникальной, была тесная связь между Академией Наук (которую мы иногда называем "Гёттингенским королевским обществом"; официально она называлась Königliche Societät der Wissenschaften) и Гёттингенским университетом,[7] предвосхищавшая романтический идеал единства преподавания и исследования. В противоположность этому, Пруссия, а также и Россия следовали французскому примеру – их академии, членами которых были такие ученые, как Эйлер, Лагранж и Мопертюи, были прикреплены к дворам и не имели контактов с образовательными учреждениями.

Наука и образование развивались в Германии, в отличие от Англии, путем реформ "сверху", а не как проявление свободной воли ищущих

*Другим выдающимся новым университетом был Галле (Заале), игравший важную роль во внутреннем развитии Пруссии, хотя он не имел таких привилегий, как Гёттинген, и не был свободен от церковного вмешательства. Философ Вольф, влиятельный и популярный благодаря своей роли популяризатора идей Лейбница, фактически был смещен оттуда по религиозным причинам. Даже у Канта в Кёнигсберге 50 лет спустя были неприятности с властями.

и эмансипированных граждан. В этом, конечно, проявляется один из главных конфликтов в Германии девятнадцатого века. В течение долгого времени позиции сторон в этом конфликте не были ясны, и даже самые консервативные правительства допускали развитие либеральной академической жизни в университетах, считавшихся аполитичными. Это вело к конфликтам и к неприятным сюрпризам для правительств. Это же, на что почти излишне указывать, способствовало высокому качеству германских университетов в девятнадцатом и в начале двадцатого века.

Политическое влияние Просвещения сказалось в Германии позже и много слабее, чем во Франции, и по-иному. Конфликт стал очевидным лишь тогда, когда, после поражения Наполеона в "освободительных войнах", нельзя было больше игнорировать призывы к конституционному правительству. Даже самые прогнившие из наполеоновских правительств в Германии были прогрессивны и либеральны по сравнению с многими архиконсервативными князьками, вернувшимися к власти после 1815 года.

То положение, которое постепенно сложилось во Франции, фактически не так уж сильно отличалось от положения в Германии. Во время Империи и после Реставрации политически либеральные силы утратили многие из своих связей с материально прогрессивными силами, взявшими в свои руки правительство и затем учредившими де факто консервативную политику. Подъем позитивизма очень типичен для этого хода событий: новая философия освободила прогрессивных граждан от обязанности быть радикалами или революционерами.[8] Германия неявно предвидела такой ход событий: ни одно из революционных усилий в Германии не имела особой надежды на успех. В Германии Янус-философия Канта пришлась особенно кстати: она допускала и даже защищала радикальные "якобинские" политические идеи, но заведомо не революционные действия. В своей популяризованной и вульгаризованной форме она служила чем-то вроде официальной идеологии в полуабсолютистских германских государствах весь девятнадцатый век вплоть до 1918 года.

Как ученый Гаусс был очень влиятелен и хорошо сознавал это; как гражданин, он не делал ни малейших попыток иметь какое-либо политическое влияние: "политическая песня – мерзкая песня" (politisch Lied ist garstig Lied).[9] Это было следствием объективной политической ситуации, но не неизбежным. Это становится ясно при рассмотрении жизни и деятельности некоторых ближайших друзей Гаусса: Эшенбург, учившийся в Коллегии Карла вместе с ним, стал влиятельным лицом в прусской администрации[10], Ольберс играл важную роль в политике своего родного Бремена, некоторое время был сенатором и даже депутатом от Бремена в парламенте в Париже в то время, когда Бремен принадлежал Франции; Герлинг, ученик Гаусса, а позже профессор физики в Марбургском университете, служил несколько лет либеральным депутатом в парламенте в Касселе; наконец, Линденау, дорогой друг Гаусса, много лет был первым министром маленького княжества Саксония – Кобург – Гота. Перед этим он был астрономом, сменив Цаха в качестве директора Зеебергской обсерватории.*

То, как Гаусс понимал политику, во многом отражало дух восемнадцатого века, и лишь в немногих отношениях он старался быть независимым и эмансипированным гражданином. Это резко контрастирует с его ролью как ученого: в математике и астрономии он был первым среди современников, "князем математиков", не нуждаясь для этого в разрешении со стороны своего государя. Он был инициатором многих направлений в математике, возникших в начале прошлого века. Это расширение диапазона научных исследований не ограничивалось математикой: многие из тех разнообразных способов, какими можно исследовать природу, лишь тогда развились в независимые и признанные научные направления; назовем химию, геологию и географию. Это было косвенным последствием успехов, достигнутых в век Просвещения; более непосредственно, по крайней мере в Германии, это было связано с так называемым романтическим движением.[11] Первоначально это направление мысли возникло как реакция против "исскусственного" и "интеллектуального" духа Просвещения, одним из его зачинателей был Жан-Жак Руссо. Выше, при обсуждении понятия "гения", мы уже описали некоторые аспекты века романтизма. Возрос интерес к природе и природным процессам включая научную сторону вопроса, но было бы опрометчиво отождествлять занятия наукой с прогрессивным подходом вообще.** Политически и социально век романтизма был обращен в прошлое: были открыты доблести средневековья и снова вошел в моду католицизм.*** Это движение было аполитичным, и тем не менее оно наложило сильный отпечаток на официальную политику континентальных властей. Их ведущая идея "Священного союза" была романтической (и весьма неуместной) попыткой установить систему безопасности в Европе, основанную на статус кво и божественных правах королей и правительств. Гаусс никогда бы не назвал себя членом или продуктом романтической школы мысли – он презирал ее философию в той мере, в какой был с ней знаком, – но многое из того, что он делал и чувствовал, вполне уместно рассматривать как часть романтического движения.

Как ученый Гаусс, поскольку дело касалось его сознательных реакций, придерживался убеждений и веры века Просвещения. Одной из его любимых книг была книга Зюсмильха "Божественный порядок, явленный в переменах человечества путем рождения, смерти и воспроизведения"

*Впрочем, пример с Линденау неубедителен; он был бароном, офицером участвовал в войнах с Наполеоном и, очевидно, был "рожден управлять".

**Одним из ведущих романтических поэтов Германии был Новалис, горный инженер по образованию и по профессии.

***См., например, гимны Святой Марии поэта Клеменса Брентано после его обращения к Риму.

(Süssmilch J. P. Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Jeschlechts ans Geburt, Tod und Fortpflanzung desselben erwiesen), опубликованная в 1741 году и явившаяся, вероятно, первой в Германии попыткой собрать и интерпретировать медицинскую статистику.[12] Ее предисловие, написанное философом Вольфом, начинается с характерных фраз:

> Нет ничего более приятного для человека, чем уверенность знания; кто раз отведал его, отвращается от всего, в чем он распознает что-либо иное, чем уверенность. Вот почему математики, которые всегда имеют дело с надежным знанием, всегда испытывали отвращение к философии и другим вещам и не находили ничего более приятного, чем посвящать свое время строчкам и буквам.[13]

Зюсмильх старался доказать гармонию творения (или по меньшей мере одного его аспекта) таблицами народонаселения, списками рождений и смертей и т.п. Гаусс, несомненно, был его последователем в этом отношении и даже готов был согласиться с благонамеренным введением презираемого и жалкого Вольфа. Такова была традиция, которой следовал Гаусс, хотя его взгляд на математику был гораздо шире: для Гаусса все творение было подобно книге, которую надо прочесть и, насколько возможно, понять с помощью наблюдений и математики. Математика не просто служанка опыта; она, королева наук, двулика: она – основной инструмент для понимания природы (и не только той природы, которая группируется вокруг человека), и она же – игра ума. Но это бескорыстное исследование природы как серьезная, независимая задача, было также и глубоко романтической целью. Гауссу всегда был чужд гуманистический и, возможно, поверхностный оптимизм Просвещения. Он с недоверием относился к мистическим "откровениям" (ловушке "профессиональных" романтических поэтов и философов), равно как и к классическому идеализму (приведшему Гёте к антинаучной теории цвета[14]).

ГЛАВА 7

СМЕРТЬ ИОГАННЫ И ВТОРОЙ БРАК. ПЕРВЫЕ ГОДЫ ПРОФЕССОРСТВА В ГЁТТИНГЕНЕ

Осенью 1809 года, меньше, чем через два года после переезда в Гёттинген, Иоганна Гаусс скончалась от послеродовых осложнений, когда ее второму сыну был месяц и один день. Бедный Луи, как любил называть его отец, последовал за своей матерью через несколько месяцев; вскоре после его кончины была объявлена помолвка его отца с Фридерикой Вильгельминой (Минной) Вальдек, дочерью университетского профессора права. Первый брак был очень счастливым для Гаусса; за год до смерти Иоганны он так описал свою домашнюю жизнь в письме к Бояи:

. . . Дни проходят счастливо в однородном ходе нашей домашней жизни: когда у девочки режется новый зуб или мальчик узнает пару новых слов, это почти так же важно, как открытие новой звезды или новой истины. . . [1]

Смерть Иоганны была ужасным ударом. Сразу после этого Гаусс писал Ольберсу в Бремен:

. . . Вы были настолько добры, что пригласили меня в гости, когда моя жена будет в порядке. Она в порядке. Вчера вечером, в восемь часов, я закрыл ее ангельские глаза, в которых находил небо в последние пять лет. Небо, дай мне силы вынести этот удар. Подарите мне пару недель, дорой Ольберс, чтобы набраться новых сил в ваших дружеских объятиях – сил для жизни, ценной лишь тем, что она принадлежит моим трем малышам. Если доктор позволит, я могу последовать за этим письмом через пару дней.[2]

Вскоре Гаусс отправился в Бремен. Следующие отрывки взяты из рукописи, написанной рукой Гаусса и закапанной чем-то, возможно – слезами:[3]

. . . Видишь мои слезы, любимая тень? Пока я звал тебя моей, ты не знала боли, которая не была бы моей болью, и все, что было нужно тебе для счастья, – это видеть меня счастливым. Блаженные дни! Каким бедным дураком я был, думая, что такое счастье может быть вечным, воображая, что тебе, ангелу в земной оболочке, покинувшему ее, было предназначено помогать мне нести все мелкие тяготы жизни до конца? Чем я заслужил тебя? Ты не нуждалась в земном существовании, чтобы стать лучше. Ты пришла не землю лишь, чтобы показать нам свой свет. Ах, я был счастливцем, чей темный путь Непостижимое осветило твоим присутствием, твоей любовью, твоей нежнейшей и чистейшей любовью. И я еще мог подумать, что ты мне ровня? Дорогое существо, ты сама не знала, как ты неповторима. Кроткая, как ангел, ты терпела мои недостатки. О, если только блаженным дано право незримо сопровождать нас, слепых странников в темной жизни, не покидай меня. Может ли твоя любовь прекратиться? Можешь ли ты покинуть этого бедняка, чьим главным достоянием ты была? О, ты, лучшая, оставайся близка моему духу. Пусть твой благословенный душевный покой, помогавший тебе преносить разлуку с любимым, передастся мне; помоги мне быть все более достойным тебя! Ах, что может заменить дорогим дарам нашей любви тебя, твою материнскую заботу, что заменит твой пример, если ты не сделаешь меня сильнее и не облагородишь меня настолько, что я смогу жить ради них и не утону в горе!

25 октября. Одиноким я прохожу мимо жизнерадостных людей, окружающих меня здесь. Если они и заставляют меня на миг забыть мою боль, потом она возвращается с удвоенной силой. Я чужой среди ваших веселых лиц. Я мог бы быть с вами незаслуженно груб и резок. Даже ясное небо печалит меня еще больше. Теперь, дорогая, ты бы встала с постели, теперь ты гуляла бы, опираясь на мою руку, держа за руку нашего любимого и радуясь своему выздоровлению и нашему счастью, которое мы читали бы в глазах друг друга, как в зеркале. Мы мечтали бы о прекрасном будущем. Завистливый демон, нет, не завистливый демон, а Непостижимое не захотело этого. Ты, в твоем блаженстве, уже ясно различаешь те таинственные цели, которым послужило разрушение моего счастья. Не дано ли тебе влить несколько капель утешения и смирения в сердце покинутого? При жизни у тебя было много и того и другого. Ты так меня любила. Ты так хотела быть со мной. Что я не должен предаваться печали, – были почти последние твои слова. Увы, как мог я не печалиться? Пожалуйста, попроси Вечного – может ли он тебе в чем-то отказать? – только об одном: чтобы

твоя бесконечная доброта всегда живо стояла перед моим мысленным взором и я, насколько я, бедный сын земли, на это способен, стремился подражать тебе.[4]

14 декабря, вернувшись в Гёттинген, Гаусс поблагодарил Ольберса за гостеприимство, которым пользовался до конца октября.

Минна Вальдек была подругой Иоганны Гаусс; неясно, была ли эта дружба чем-то бóльшим, чем обычные взаимоотношения между дочерью профессора и женой молодого коллеги ее отца. Когда Гаусс сделал ей предложение, она только что расторгла другую помолвку по причинам, нам неизвестным.[5]

Гаусс и Минна Вальдек поженились довольно быстро, но их союз не был безоблачным. Потребность и желание вступить в новый брак как можно скорее, забыть трагедию смерти Иоганны, дать детям снова мать, как представляется, были сильнее, чем личное чувство ко второй невесте. Роль пылкого и страстного поклонника, которую он снова должен был играть, не особенно подходила Гауссу[6] – сохранившиеся письма холодны и неэмоциональны. Вот отрывок из первого письма жениха, написанного 27 марта, после того как он уже прощупал почву в беседе с матерью Минны:

. . . С бьющимся сердцем пишу я Вам это письмо, потому что от него зависит счастье моей жизни. Когда Вы его получите, Вы уже будете знать о моих желаниях. Как Вы, Лучшая, их примете? Не предстану ли я перед Вами в невыгодном свете, думая о новом союзе каких-то полгода спустя после утраты такой любимой супруги? Не подумаете ли Вы, что я легкомысленен или еще того похуже?

Надеюсь, что Вы так не подумаете. Откуда взялась бы у меня смелость искать Вашего сердца, если бы я не льстил себя мыслью, что стою в Ваших глазах достаточно высоко, чтобы не приписать мне такого мотива, за который мне пришлось бы краснеть.

Я слишком чту Вас, чтобы пытаться скрывать, что я могу предложить Вам лишь часть сердца, из которого никогда не уйдет образ чудной тени. Но если бы Вы знали, Вы, добрая, как покойная любила и ценила Вас, Вы бы меня вполне поняли, что я в этот важный момент, когда я прошу Вас решить, можете ли Вы занять ее место, – я живо вижу ушедшую любовь радостно одобряющей мои желания и желающей мне и нашим детям счастья и блаженства.

Но, моя драгоценная, я не хочу подкупать Вас в час самого важного решения в Вашей жизни. Что Блаженная посмотрела бы с глубоким сочувствием на исполнение моих желаний; что Ваша мать, которой я уже сообщил их (она сама Вам скажет, почему я сделал это), что Ваш отец, который знает о них от Вашей матери, одобряют мои намерения и надеются на наше общее счастье; что я, которому Вы были дороги с того самого момента, как я узнал Вас, был бы более чем счастлив, обо всем этом я упоминаю только чтобы просить Вас, чтобы умолять Вас не принимать это во внимание, но сообразовываться только со своим счастьем и только со своим сердцем. Вы заслуживаете чистейшего счастья и не должны считаться ни с какими второстепенными соображениями любого порядка, не имеющими отношения ко мне лично. Позвольте мне признаться совершенно открыто, что как я ни скромен и неприхотлив в других отношениях, для меня нет середины в семейной жизни, и я должен быть либо абсолютно счастлив, либо очень несчастлив; и даже союз с Вами не даст мне счастья, если он не даст полного счастья Вам. . .[7]

Социальное происхождение Минны Вальдек было совсем не такое, как у Гаусса, и были некоторые сложности, прежде чем бракосочетание могло состояться. В своем письме от 15 апреля Гаусс подготавливает свою будущую жену к совместной поездке в Брауншвейг и рассказывает ей о своей юности; он говорит о своих родителях, о том, где и кем работал его отец, и о взаимоотношениях между родителями.[8] Процитируем постскриптум:

Еще одно слово: причина того, что я не написал своей матери, в том, что я хотел сделать ей сюрприз; но причина того, что я не хотел, чтобы писали Вы, – в том, что моя мать не может читать написанного от руки, а Вы, конечно, не хотите обнажать свою прекрасную душу перед людьми, ее не стоящими?[9]

После этой поездки произошло временное отчуждение; размолвку уладили новые письма к Минне Вальдек и к ее матери.

В августе 1810 года Гаусс стал зятем профессора университета и частнопрактикующего адвоката Иоганна Петера Вальдека; у детей от первого брака, которых к тому времени было двое, снова была мать. Вскоре появились новые дети: в 1811 и 1813 годах – сыновья Евгений и Вильгельм, а в 1816 году – дочь Тереза.

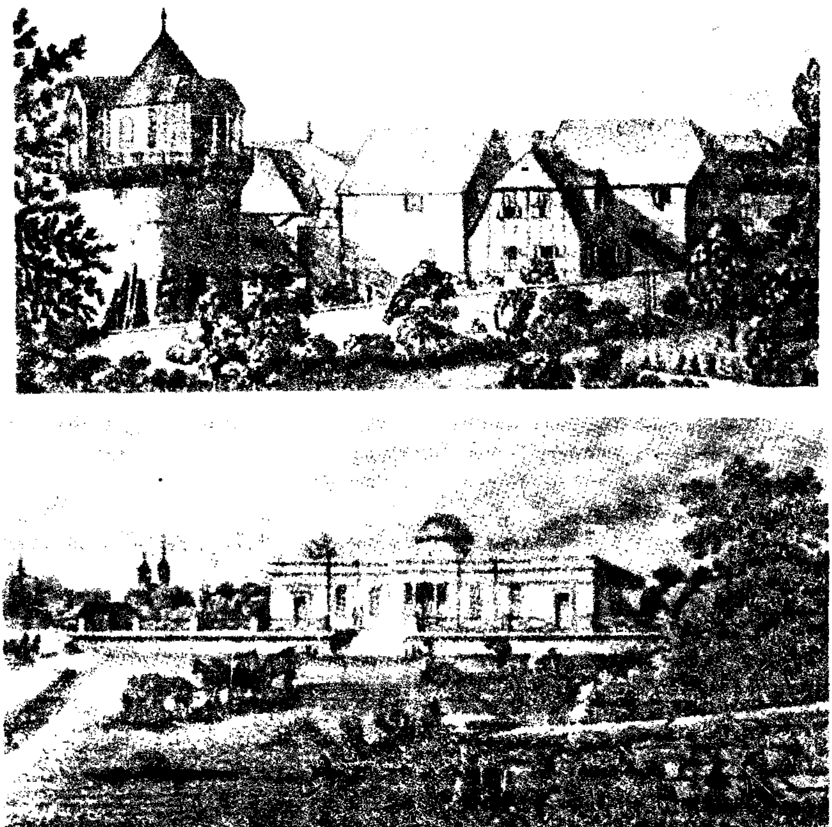
В первые годы в Гёттингене Гаусс получил приглашения на работу в Дерптский и Берлинский университеты. Дерпт был отвергнут из-за суровой русской погоды; второе предложение последовало за первыми контактами Гаусса с ученым, исследователем и политиком Александром фон Гумбольдтом*, одним из вождей возрождения Пруссии после победы над ней Наполеона. Гаусс не принял должность в Берлине, но и не отказался от нее, и переговоры и обсуждения по поводу его вступления в эту должность тянулись еще пятнадцать лет. Ниже мы обсудим это более подробно.

Совершенно иные переживания были связаны с военным налогом, введенным французским правительством в 1808 году. Гаусс, подпадавший под него как сотрудник университета, должен был уплатить 2000 франков, весьма значительную сумму для человека, только что поступившего в университет и не получившего еще свое первое жалованье. Хотя Гаусс не просил об этом, Лагранж в Париже и Ольберс в Бремене предложили свою помощь, но Гаусс не хотел принять от них никаких денег. В конце концов, налог был заплачен анонимным пожертвователем, которым, несколько неожиданно, оказался граф Дальберг, в то время архиепископ Франкфурта. Были и другие признаки растущей славы Гаусса. В 1810 году, лишь два года спустя, Институт Франции наградил Гаусса медалью. Он

*Братья Александр и Вильгельм фон Гумбольдты играли выдающуюся роль в реорганизации прусского государства: Александр – как ученый и исследователь, Вильгельм – как политик. Они радикально реформировали образовательную систему Пруссии и особенно помогли основать новый университет в Берлине. Франция была для них великим образцом; Александр, по меньшей мере симпатизировавший Французской революции, много лет жил в Париже и лишь в поздние годы окончательно поселился в Берлине.

отказался от денег, прилагавшихся к ней, но принял астрономические часы, которые купила для него Софи Жермен.

Важнее любых отличий и наград были усилия правительства Вестфалии выполнить свое обещание построить для Гаусса новую обсерваторию. В 1810 году оно запланировало истратить 200 000 франков в предстоящие пять лет на ее строительство; к 1814 году, когда королевство Вестфалия перестало существовать, уже очень многое было сделано, хотя денег всегда было меньше, чем предполагалось. Несмотря на беспокойные времена, Гаусс мог думать о приобретении необходимых инструментов. Первые были куплены в 1812 году в магазине Г. фон Рейхенбаха в Мюнхене. В 1814 году появился гелиометр, сделанный Фраунгофером (которым Гаусс никогда не пользовался), а в 1815 году – часть оборудования из частной обсерватории в Лилиентале близ Бремена.[10] В начале 1808/09 учеб-



Старая и новая обсерватории в Гёттингене ного года д-р Шумахер из Гамбурга приехал заниматься с Гауссом астрономией. Шумахер был юристом, но по-настоящему его интересовала астрономия. В следующем, 1810 году, в Гёттингене появилось много способных студентов, в том числе Герлинг, Николаи, Мёбиус и Энке. Николаи и Энке известны как астрономы, Мёбиус – как математик и астроном, Герлинг – как физик. Герлинг впоследствии стал, как и Шумахер, одним из наиболее постоянных корреспондентов Гаусса: Герлинг и Шумахер – неизменно в роли учеников и слушателей, Гаусс – в роли учителя.

Часто указывают на то, что Гаусс не интересовался преподаванием, что он был гораздо больше похож на погруженного в исследования ученого восемнадцатого века, чем на образователя и педагога.[11] Такое обобщение обманчиво, хотя сам Гаусс любил подчеркивать свое пренебрежение к преподаванию. Замечаний такого рода много в его письмах, но было бы неверно принимать их за чистую монету и судить Гаусса по совеременным меркам*; преподавание в Гёттингене, то, как Гаусс воспринимал его, сначала как студент, а затем – в первые десятилетия девятнадцатого столетия – как профессор, нельзя сравнивать с представлениями о высшем образовании, развившимися во второй трети прошлого века. Большинство тех студентов, которых знал Гаусс, были равнодушны к учебе, у них было мало или совсем не было тяги к знаниям и еще меньше знаний.**

Может быть, он и не любил читать лекции, но Гаусс, видимо, с большой готовностью консультировал любого активно заинтересованного ученика, обращавшегося к нему. Переписка с Шумахером содержит много свидетельств того, что Гаусс готов был давать подробные и неоднократные объяснения[12]; от учеников Гаусса, в свою очередь, требовалась способность работать и думать независимо. В центре их занятий должны были быть их собственные усилия, а не лекции и объяснения. Такую позицию нетрудно понять, но она противоречит той идеологии образования, которая господствовала в конце девятнадцатого века. В этом одна из причин того, почему сложился искаженный образ Гаусса как педагога.

Кроме тех объяснений, которые содержатся в его письмах, яснейшим свидетельством отношения Гаусса к тому, как изложить свою работу, и к преподаванию служит стиль опубликованных работ Гаусса. Именно

* Сегодняшние представления о преподавании и отношении к нему, быть может, ближе к чувствам самого Гаусса, чем тот дух, который господствовал между 1860 и 1960 годами. Именно в этот период комментаторы обратили внимание на недостаток интереса к преподаванию у Гаусса и осудили его за это.

** В первой половине прошлого века Гёттинген начал терять свои преимущества перед большинством других германских университетов. Ганновер отстал в образовании, в то время как другие государства, особенно Пруссия, подняли уровень высшего образования путем улучшения системы общественных школ. Очень быстро это оказало сильное благотворное влияние на (также реформированные) университеты.

этот стиль показывает, каким образом Гаусс хотел разговаривать со своими читателями и объяснять им свои идеи. Вся теперешняя математическая литература является, в некотором смысле, педагогической, и этому мы в значительной мере обязаны влиянию Гаусса. Все же современники и первые последователи находили стиль Гаусса трудным и немотивированным. Так считали даже Феликс Клейн и Кронекер. Мы, привыкшие за прошедшие с тех пор 75 лет к наращиванию абстракций, не разделяем мнения Клейна; мы не можем не увидеть педагогических намерений автора, выразившихся в обсуждении эвристических подходов, в многочисленных численных примерах, и что самое важное, в его поиске логически наиболее прямого (не обязательно совпадающего с фактическим ходом его открытия) рассуждения. Пресловутая трудность его стиля обусловлена той строгостью (в наивном смысле, а не как математическая категория), с которой Гаусс относился к своим работам и которая была уникальна в то время; другая ее причина в том, что отсутствует внешняя мотивация – нет ни великих объяснений, ни далеко идущих обзоров, предлагающих удивительные новые перспективы и неожиданные связи (хотя Гаусс очень любил иногда вставлять скрытые намеки на возможности дальнейшего развития его теорий и концепций).[13] Девиз Гаусса "мало, да зрело" (pauca sed matura) обычно цитируется при обсуждении этого вопроса. Быть может, полезнее процитировать другое объяснение его намерений как писателя (неверно понятых даже его современниками). Оно содержится в письме, которое Гаусс написал Шумахеру на склоне лет (5 февраля 1850 года):

. . . Вы совершенно неправы, если думаете, что я имею в виду лишь окончательную отделку языка и элегантность изложения. На это уходит сравнительно незначительная доля времени; но то, что я имею в виду, – это внутреннее совершенство. В иных из моих работ есть такие особые точки, которые стоили мне несколько лет размышлений и где на маленьком пространстве сконцентрировано представление, про которое никто не замечает, какие трудности мне сначала пришлось преодолевать.[14]

Эта цель Гаусса, которую он формулировал неоднократно, часто понималась неверно. Так, Сарториус заявил (в "Памяти Гаусса"), что надо было убрать строительные леса прежде, чем показать публике здание математической работы.[15] Гаусс не стремился к неясности в своих работах; если он воздерживался от публикации результата, то потому, что чувствовал, что не достиг еще полной ясности, – едва ли его можно упрекать за это.

СЕКЦИЯ VII "АРИФМЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ"

Наша задача здесь – проиллюстрировать вышеприведенные замечания о стиле Гаусса, пересказывая параграф за параграфом секцию VII "Арифметических исследований". Секция VII представляет собой связное и почти независимое исследование, которое было задумано как одна из первых частей "Арифметических исследований" задолго до того, как был развит алгебраический аппарат секции V. В Собрании трудов она занимает 52 страницы и посвящена циклотомии, теории деления круга; в ней необычно много (для Гаусса) замечаний о возможных ответвлениях и приложениях общей теории.

Секция VII начинается с § 335, в котором дается общее введение в эту секцию, включая (знаменитое и неоднократно упоминавшееся) замечание о делении высших трансцедентных функций (например лемнискаты), которое можно осуществить согласно тем же принципам. Гаусс сознательно стремился к тому, чтобы, насколько возможно, упрощать свои концепции и методы и делать изложение коротким и ясным.

§ 336. Цель этого параграфа – свести общий случай к такому, в котором круг надо делить на p частей, где p простое. Из этого частного случая следует общий путем решения соответствующих уравнений.

§ 337. Тригонометрические функции углов вида $2\pi k/p$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, p - 1$, выражаются через корни соответствующих многочленов степени p. Гаусс выписывает уравнения для синуса, косинуса и тангенса и показывает, почему достаточно рассматривать гораздо более простое уравнение

$$x^p - 1 = 0$$

с корнями вида

$$\cos \frac{k}{p} 2\pi + i \sin \frac{k}{p} 2\pi = r.$$

Именно в этом параграфе Гаусс впервые в "Арифметических исследованиях" вводит комплексные числа. Он не определяет их в явном виде и не обосновывает возможность пользоваться ими.

В § 338 формулируется и поясняется следующее утверждение, которое понадобится далее. Пусть W – многочлен с рациональными коэффициентами и корнями $a, b, c, \ldots$ Пусть W' – многочлен с корнями $a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda, \ldots,$ где λ целое. Тогда коэффициенты W' также могут быть выбраны рациональными. Эту важную лемму Гаусс вводит, не поясняя, зачем он это здесь делает; скорее всего, для того, чтобы в дальнейшем не отрываться от темы.

§ 339. Пусть Ω – множество, состоящее из $p - 1$ комплексных корней уравнения $x^p - 1 = 0$; здесь и в дальнейшем буква p означает нечетное простое число. Пусть $r \in \Omega$. Тогда $r^\lambda = r^\mu$, если и только если $\lambda \equiv \mu$ по модулю p. Пусть

$$X = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1.$$

Тогда

$$X = (x - r^e)(x - r^{2e}) \ldots (x - r^{(p-1)e})$$

для любого положительного или отрицательного целого e, не делящегося на p. Вот еще два простых, но важных следствия:

$$r^e + r^{2e} + r^{3e} + \ldots + r^{(p-1)e} = -1$$

и

$$r + r^e + r^{2e} + \ldots + r^{(p-1)e} = 0.$$

В § 340 содержится решающая часть доказательства, на что Гаусс явно указывает. Пусть $\varphi(t, u, v, \ldots)$ – симметрическая функция аргументов $t, u, v, \ldots$; тогда φ записывается как сумма членов вида $h^{(j)} t^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots$ Если в качестве $t, u, v, \ldots$ подставить элементы Ω, то есть взять $t = a$, $u = b$, $v = c, \ldots$, то φ можно записать в виде

$$A + A'r + A''r^2 + \ldots + A^{p-1}r^{p-1},$$

где $A^{(i)}$ однозначно определены и целые, если $h^{(j)}$ целые. Обобщив это соотношение, получаем

$$\varphi(a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda, \ldots) = A + A'r^\lambda + \ldots + A^{(p-1)}r^{p-1\lambda}.$$

Более того,

$$\varphi(a, b, c, \ldots) + \varphi(a^2, b^2, c^2, \ldots) + \varphi(a^p, b^p, c^p, \ldots) = pA.$$

§ 341. Здесь Гаусс показывает, что не все коэффициенты P и Q целые, если P и Q – нетривиальные, непостоянные множители X. Отсюда следует, говоря современным языком, что X неприводим над полем рациональных чисел. Доказывается это впрямую, на основе рассмотрения корней P и Q. Существенно используется результат § 338. В дневнике Гаусса есть запись (# 136), согласно которой много позже, в 1808 году, он нашел прямой способ доказать неприводимость многочлена $\Pi(x - \zeta)$, где ζ пробегает все первообразные корни из единицы непростой степени p.

В § 342 дается план следующих параграфов. Он состоит в разложении X на многочлены наименьшей степени. Если $p - 1$ можно записать как произведение чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, то X разлагается в соответствующее произведение. Для упрощения формул Гаусс сокращенно обозначает r^λ через $[\lambda]$, где $r \in \Omega$.

В § 343 содержится второй важнейший шаг доказательства, а именно введение первообразного корня g по модулю p. Пусть g – произвольный первообразный корень степени n. Тогда числа $1, g, g^2, \ldots, g^{p-2}$ конгруэнтны по модулю p (не обязательно в том же порядке) числам $1, 2, 3, \ldots, p-1$.

Это означает, что Ω можно записать как

$$[1], [g], \ldots, [g^{p-2}]$$

или, в более общем виде, как

$$[\lambda], [\lambda g], \ldots, [\lambda g^{n-2}],$$

если $\lambda \not\equiv 0$ по модулю n.

Пусть g' – другой первообразный корень и $p - 1 = e \cdot f$. Обозначим $g^e = h$, $g'^e = h'$. Тогда $1, h, h^2, \ldots, h^{f-1}$ конгруэнтны (не обязательно в том же порядке) числам $1, h', h'^2, \ldots, h'^{(f-1)}$. Или, в более общем виде $[\lambda]$, $[\lambda h], \ldots, [\lambda h^{f-1}]$ конгруэнтны числам $[\lambda]$, $[\lambda h'], \ldots, [\lambda h'^{(f-1)}]$ по модулю n.

Будем кратко записывать сумму $[\lambda] + [\lambda h] + \ldots + [\lambda h^{f-1}]$ как (f, λ); множество корней (f, λ) назовем *периодом* (f, λ). Параграф заканчивается примером: вычислением периодов (6,1), (6,2) и (6,3) для $p = 19$ и первообразного корня 2. В переводе на современный язык, в § 343 говорится, что группа Галуа многочлена X циклична и порождена автоморфизмом $\zeta \to \zeta^g$.

§ 344–351 посвящены исследованию периодов корней Ω.

§ 344. Два периода одной длины совпадают, если у них есть общий корень; Ω может быть представлено периодами $(f, 1)$, $(f, g), \ldots, (f, g^{e-1})$, где $f = p - 1$.

§ 345. Произведение двух периодов (f, μ) и (f, λ) одинаковой длины состоит из "агрегата" (суммы) f периодов одинаковой длины. В параграфе делаются дополнительные утверждения о произведениях периодов, прямо следующие из определений.

§ 346. Пусть μ и λ – числа, не делящиеся на n. Пусть p и q – периоды равной длины. Тогда q можно записать как

$$\alpha + \beta p + \gamma p^2 + \ldots + \theta p^{e-1},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ являются определенными рациональными величинами. И это утверждение легко следует из определений и результатов предыдущего параграфа. Дается конкретный числовой пример.

§ 347. Пусть F – симметрическая функция того типа, что рассматривалась в § 340. Пусть f переменных $t, u, v, \ldots$ – ее аргументы. Если вместо $t, u, v, \ldots$ подставить корни (f, λ), то F можно будет записать в виде (см. § 340)

$$A + A'[1] + A''[2] + \ldots$$

§ 348. Еще о связи между периодами и многочленом, корни которого принадлежат данному периоду. Рассматривая периоды и принадлежащие им многочлены, получаем разложение X на e множителей степени f. Дается следующий конкретный пример.

Пусть $n = 19$. Пусть сумма всех корней из периода (6,1) равна α. Сумма произведений этих корней по два равна

$$3 + (6,1) + (6,4) = \beta,$$

сумма произведений по три равна

$$2 + 2(6,1) + (6,2) = \gamma,$$

по четыре

$$3 + (6,1) + (6,4) = \delta$$

и по пять $(6,1) = \epsilon$.

Поскольку произведение всех корней равно 1, то получаем уравнение

$$Z = x^6 - \alpha x^5 + \beta x^4 - \gamma x^3 + \delta x^2 - \epsilon x + 1 = 0.$$

§ 349. Методы § 348, прямо опирающиеся на представление коэффициентов многочлена в виде симметрических функций его корней, не годятся для больших f из-за своей громоздкости. Вместо этого можно применить теорему Ньютона и выразить коэффициенты через суммы степеней корней.

В §§ 350 и 351 Гаусс продолжает свое исследование того, как связаны периоды, корни и многочлены. В § 351 даны два примера: в одном для $p = 19$ ищется уравнение, имеющее периоды (6,1), (6,2) и (6,4); в другом, тоже для $p = 19$, ищется уравнение с периодами (2,1), (2,7) и (2,8).

В § 352 излагается план дальнейшей процедуры. Здесь мы уже близки к полному исследованию Ω. Во-первых, разложим $p - 1$ на простые множители:

$$p - 1 = \alpha\beta\gamma \ldots$$

Теперь пусть g – первообразный корень по модулю p. Множество Ω можно разбить на α периодов, по β, γ, δ, ... корней в каждом. Затем надо определить уравнения, принадлежащие этим периодам, и повторять этот процесс, пока это возможно. Решив получившиеся в конце концов уравнения, используя таблицы, если это необходимо, мы идем обратно и в конечном счете получаем требуемые углы.

§ 353. Пример, где $p = 19$ и первообразный корень равен 2.

§ 354. Пример, где $p = 17$ и первообразный корень равен 3. Вместе с этим параграфом заканчивается решение основной проблемы седьмой секции "Арифметических исследований". В последних одиннадцати параграфах речь идет об интересных вопросах, связанных с этой проблемой, и о приложениях.

§ 355. Если период содержит четное число корней, то он вещественен; только сами корни комплексные.

В § 356 впервые упоминаются так называемые гауссовы суммы

$$\Sigma \cos \frac{k\mathfrak{R}}{p} 2\pi - \Sigma \cos \frac{k\mathfrak{N}}{p} 2\pi = \pm\sqrt{p} \qquad (*)$$

и

$$\Sigma \sin \frac{k\mathfrak{R}}{p} 2\pi - \Sigma \sin \frac{k\mathfrak{N}}{p} 2\pi = 0, \qquad (**)$$

где $\mathfrak{R}$ пробегает все положительные квадратные вычеты по модулю p, меньшие p, а $\mathfrak{N}$ пробегает соответствующие невычеты. Когда Гаусс писал "Арифметические исследования", он был вынужден оставить открытым вопрос о знаке (*). Этот вопрос был решен им в другой статье "Суммирование некоторых рядов особого вида", опубликованной в 1808 году (ср. с. 37). Гауссовы суммы возникают в этом контексте при рассмотрении квадратных уравнений, принадлежащих к периоду с $\frac{1}{2}p(p-1)$ корнями. Гаусс показывает, что эти уравнения имеют вид

$$x^2 + x + \frac{1}{4}(1 - (-1)^{(p-1)/2} p) = 0.$$

Они играют важную роль в двух других доказательствах закона квадратичной взаимности (опубликованных лишь посмертно как часть "Учения о вычетах"). В этом параграфе Гаусс с помощью этого многочлена находит квадратичный характер $-1/p$.

§ 357. Здесь Гаусс доказывает, что выражение $(4x^p - 1)/(x - 1)$, где p простое, всегда представимо в виде $X^2 \pm pY^2$, где X, Y – рациональные целые функции x. Этот результат основан на изучении периода $(m, 1)$ корней многочлена

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - \ldots = 0$$

с помощью преобразований § 348. Дается численный пример; сам результат уже был объявлен в четвертой Секции (§ 124) "Арифметических исследований".

В § 358 речь идет о распределении элементов Ω по трем периодам (для $p = 3k + 1$). Соответствующие многочлены вычисляются очень сложно, но при этом получается еще один интересный арифметический результат, а именно соотношение

$$4p = x^2 + 27y^2$$

для простых чисел вида $6m + 1$. Оно уже известно из теории бинарных квадратичных форм.

В § 359–360 делается окончательный шаг доказательства, сведение вспомогательных уравнений для определения Ω к таким уравнениям, чье решение сводится к радикалам ("чистым" уравнениям на языке Гаусса; вообще говоря, вспомогательные уравнения бывают "смешанными"). На современном языке это означает, что группа Галуа разрешима путем прямого разложения. Для этого Гаусс использует хорошо известную технику, так называемую резольвенту Лагранжа. Рассуждения Гаусса сложны и изложены очень отрывочно; Гаусс не выполнил обещания и так и не опубликовал детального изложения этой части теории. Посмертная статья "Дальнейшее развитие исследований, связанных с чистыми уравнениями" (Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio) поясняет дело, но очень мало. Она обрывается после введения гауссовых сумм, уже рассмотренных, как мы знаем, в специальной статье "Суммирование некоторых рядов...". В § 359 содержится знаменитое замечание, добавленное Гауссом при корректуре, что было бы тщетно искать общую формулу решения уравнений степени выше четвертой.

§ 361–364 связывают исследование корней X с тригонометрическими функциями углов, которые первоначально и были предметом Секции VII "Арифметических исследований". Здесь основная проблема – приписать углы конкретным корням (не используя тригонометрических таблиц). Необходимая для этого процедура объясняется в § 361 элементарным способом; в § 362 говорится об определении других тригонометрических функций по синусу и косинусу, не используя деления. В § 363 и 364 дается короткий обзор процедуры, если имеешь дело с уравнениями, имеющими в качестве корней прямо тригонометрические функции вместо гораздо более простого уравнения X. Само изложение очень сжато, но в § 364 подробно рассматриваются два информативных примера, где $n = 17, f = 8$ и φ – косинус и $n = 17, f = 8$ и φ – синус.

§ 365. Этот предпоследний параграф "Арифметических исследований", наконец, дает ответ на первоначальный вопрос седьмой секции. Правильный 17-угольник и, в более общем виде, правильный $(2^{2^{\nu}} + 1)$-угольник может быть построен циркулем и линейкой (если $2^{2^{\nu}} + 1$ простое). Для $\cos(2\pi/17)$ Гаусс приводит следующее явное выражение:

$$-\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$
$$+ \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Он добавляет, что было бы бесполезно пытаться разделить круг в случаях $n = 7, 11, 13, 19, \ldots$, но что рамки трактата не позволяют ему доказать это. Ни в одной из статей Гаусса нет никакого указания на полное доказательство этого последнего утверждения.

Выше мы упомянули о том, что Гаусс знал уже очень рано о возможности геометрического построения 17-угольника. В 1801 году, перед публикацией "Арифметических исследований", Гаусс послал в Санкт-Петербургскую академию короткую рукопись, где элементарными средствами доказал возможность построения 17-угольника. Это доказательство, конечно, в принципе не отличается от методов седьмой секции, но в нем не используется ни одной из тех сложных и абстрактных понятий, на которые Гаусс опирался в опубликованном варианте. Очень вероятно, что санктпетербургская рукопись похожа на оригинальное доказательство Гаусса. Редакторы собрания трудов Гаусса не знали об ее существовании; ее копия с коротким комментарием (на русском языке) опубликована.*

§ 366 содержит список тех 38 чисел, меньших 300, для которых построение правильного n-угольника возможно. Вот они: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272.

ДОПОЛНЕНИЕ VI

СТИЛЬ ГАУССА

Второй брауншвейгский период с 1798 по 1807 год был решающим для дальнейшего развития Гаусса. Он научился оценивать свои силы, выбирать области исследования, чтобы посвятить им свое время и энергию, и утверждать себя в научном мире. Его развитие не ограничивалось теоретической или научной сферой; выдвинувшись, Гаусс оказался перед необходимостью встать в определенное отношение к тем ученикам и коллегам, которые спрашивали у него совета. Очень скоро ему должно было стать ясно, что он не мог ожидать многого от таких дискуссий и обменов мнениями; почти всегда он давал, а не получал. Возможно, тут было некоторое искушение, но Гаусс никогда не замыкался в себе и не отгораживался от обычных научных контактов. Он хорошо сознавал долг гения объяснять (себя) и представлять проблемы, в которых сам он мог разобраться быстро, в форме, доступной более широкой аудитории. Он принимал в качестве собеседника или коллеги всякого, чьи честные усилия или интерес мог заметить. Переписка, особенно с Шумахером и Герлингом, дает лучшие свидетельства этого, но есть и другие примеры, например, необычный посмертный очерк "К метафизике математики" (Zur Metaphysik der Mathematik).[1] Сегодня он был бы назван дидактической статьей, рассматривающей "основания математики", например, определения сложения и умножения. Написан он был, вероятно, в начале 1800-х годов, в то время, когда Гаусс думал, что ему придется готовиться к карьере преподавателя математики. Очерк этот не очень глубок и не предвосхищает того развития в области оснований математики, которое началось немногим позже и связано, в частности, с именем Больцано. Этот очерк отражает математические поиски Гаусса; он соответствует общепринятым взглядам и радикален лишь в том смысле, что в нем тщательно проводятся рассужде-

---

* См. выходные данные в № 7, 13, в списке работ, добавленном при переводе.

ния и ни одно из традиционных понятий в нем не принимается как очевидное с самого начала.

Отношение Гаусса к его ученикам (и ко всем, кто просил у него совета, например к Репсольдсам из Гамбурга, хорошо известным мастерам астрономических инструментов) заслонила его репутация сурового, даже несправедливого критика чужих работ. Его приватные суждения, особенно о коллегах, часто были весьма произвольны и непоследовательны; в них заметна, если можно так выразиться, непредсказуемость гения, не знающего, какую шкалу применять. В переписке можно найти резкие замечания о Лагранже, Лежандре и Деламбре, которым достается за их поверхностность, банальности, недостаток проницательности и околичности.[2]

Добавим здесь несколько слов о стиле Гаусса. Выше мы обсудили его математический стиль; теперь обратимся к языковому и литературному аспектам. Большинство его опубликованных при жизни работ написано по-латыни, но есть и работы, написанные по-немецки; работы, опубликованные посмертно, написаны частью по-латыни, частью по-немецки. Наиболее сжатые и лингвистически наиболее трудные работы – те, что он публиковал по-латыни; из них "Арифметические исследования" – самая утонченная. Писать по-латыни было почти анахронизмом, но этот язык соответствовал идеалу Гаусса – предельно прямой и чистой линии мысли. Гаусс тщательно избегает повторений, излишеств и всего, что может быть воспринято как риторика. Перевод Гауссом своих работ на, в общем-то, нелюбимый им язык, видимо, усилил его тенденцию писать в "научном и классическом" стиле. Фактически, знаменитая латынь "Арифметических исследований" правилась другом Гаусса Майерхофом – очевидно, потому, что собственными результатами Гаусс не был вполне доволен.

Аналогичные утверждения можно сделать о статьях, опубликованных им по-немецки; они слегка более доступны, будучи не подвергнуты переводу на "международный язык науки".* О немецких резюме латинских статей, большая часть которых была опубликована в журнале Гёттингенской академии,[3] следует сказать отдельно. В этих резюме не было подробных математических рассуждений; скорее это были неформальные изложения основных идей Гаусса, совершенно отличные от того, чего от них можно было бы ждать. Проиллюстрируем нашу мысль следующей цитатой из "Суммирования некоторых рядов":

> ...Итак, в этой работе "Арифметические исследования" исследование продвинулось очень далеко, так что осталось только определить знак при произвольном значении k; после решения главного вопроса могло показаться, что это уже будет легко, тем более, что индукция ведет к очень простому наблюдению: при $k = 1$ и при всех значениях k, являющихся квадратичными вычетами по модулю n, корни в вышеприведенных формулах всегда положительны. Однако при попытках доказать это замечание мы встречаемся с совершенно неожиданными трудностями, и тот самый

*Видимо, Гаусс писал черновики некоторых своих латинских статей по-немецки; другие были прямо задуманы на латыни и не нуждались в переводе.

процесс, который так успешно привел к определению абсолютных величин ряда, оказывается совершенно непригодным, когда речь заходит о полном определении знаков. Метафизическую причину этого явления (пользуясь выражением, принятым у французских геометров) следует искать в том обстоятельстве, что анализ деления круга не различает между собой дуги ω, 2ω, $3\omega, \ldots, (n-1)\omega$; все эти дуги рассматриваются единообразно; это сообщает исследованию новый интерес, и поэтому профессор Гаусс увидел в этом как бы вызов испробовать все возможные средства для решения этой проблемы. После многих разнообразных тщетных попыток он достиг успеха способом, который примечателен сам по себе. . .[4]

Не будем обсуждать стиль опубликованных нематематических статей (например, по астрономии и геодезии); они ясны, точны и фактически написаны по образцу его математических исследований. Они стали образцом для его современников и последующих поколений ученых в Германии.

Письма и незаконченные математические статьи написаны более вольно; там больше "мотивировок" и словесных пояснений, но не следует придавать слишком большого значения этому различию. Даже там рассуждения Гаусса обычно сжаты и исключительно точны; чего там может не быть — это окончательной концептуальной ясности и той характерной упрощенности, которой Гаусс так часто достигал в своих опубликованных работах. Гаусс широко пользовался латынью, даже во многих заметках и в своем личном дневнике, однако нет сомнения, что он не любил ее и что перевод утяжелял и осложнял его стиль. Если принять эти внешние влияния во внимание, то вполне можно придти к выводу, что различные уровни стиля суть не что иное, как подходящие формы выражения в различных ситуациях.

В противоположность высказываниям Гаусса о других математиках и ученых, его обзоры опубликованных работ обычно мягки и полны благожелательных похвал. Опубликованные обзоры решительно негативны, только если рецензируемые работы лишены всякого математического смысла или если экспериментальные результаты фальсифицированы и потому непригодны для дальнейших исследований. Гаусс был очень активным рецензентом; в области неевклидовой геометрии Гаусс выражал свой интерес и свои убеждения публично только в обзорах.[5]

Сравнительно много обзоров посвящено математическим таблицам и сводкам экспериментальных результатов. Интерес Гаусса отражает огромную потребность в расширении численной основы математики, в таблицах логарифмов, в теоретико-числовых таблицах вроде тех, какими сам Гаусс сопроводил свои "Арифметические исследования". Гаусс любил обсуждать полезность таких книг и даже их композицию и оформление. (См., например, обзор таблиц Буркхардта во втором томе Собрания трудов, с. 182 и далее.) Помимо той пользы, какую приносили эти таблицы, Гауссу, видимо, доставляли удовольствие разумно упорядоченные коллекции чисел, даже если они не представляли математического и научного интереса. Среди его заметок есть списки важных исторических дат, дней рождения, библейских ссылок и т.п., которые Гаусс составлял для своего удовольствия.[6]

В томе IV собрания трудов можно найти знаменитые обзоры книг Шваба, Меттерниха и Мюллера (1816, 1822), в которых Гаусс признается в том, что убежден в существовании неевклидовых геометрий. В этих обзорах, как и в других, Гаусс конструктивно использует возможности; иногда такой обзор, видимо, служил отправной точкой для нового и независимого исследования. Примером служит влияние исследований Зебера[7] свойств положительных тернарных квадратичных форм. Эти исследования Гаусс рецензирует в "Гёттингенских научных сообщениях" (Göttingische Gelehrte Anzeigen) за 1831 год. Зебера, в прошлом ученика Гаусса, вдохновило соответствующее место в "Арифметических исследованиях",[8] и Гаусс воспользовался случаем еще раз очертить некоторые свои идеи и доказать строго теорему, которую Зебер сформулировал, но не доказал. Другим результатом влияния книги Зебера был (недолгий) интерес к кристаллическим структурам. Он выразился в кратком описании связи между тернарными формами и кристаллическими структурами, которое Гаусс включил в свой обзор.

ГЛАВА 8

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В 1809 году гамбургский книготорговец Пертес издал работу Гаусса "Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим орбитам" (Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium). Эта книга, в Собрании трудов занимающая примерно 300 страниц, дает итог исследований Гаусса по теоретической астрономии, но она не всегда описывает те методы, которыми Гаусс фактически пользовался в своей работе. Как и "Арифметические исследования", эта работа опубликована на латинском языке; Гаусс писал ее на немецком, но ему пришлось перевести ее, потому что Пертес считал, что так она лучше разойдется.* Основной предмет книги – определение эллиптических и гиперболических орбит планет и комет по минимальным данным и безо всяких излишних и необоснованных предположений. В предисловии Гаусс упоминает недавний пример Цереры, открытие которой послужило первым толчком к развитию тех методов, которым посвящена книга.

"Теория движения небесных тел..." систематична до педантства; она состоит из двух книг, одна из которых содержит предварительный материал, а другая – решение общей проблемы. Эта книга – первое строгое изложение методов Гаусса для вычисления орбит небесных тел, прямо

*Вполне естественно было бы выбрать французский язык, но Гаусс избегал его, вероятно, по политическим причинам.

выведенных из законов Кеплера. Вплоть до этого времени астрономы использовали различные частные способы, менявшиеся от случая к случаю, несмотря на то, что теоретические основы были ясны уже в течение более чем ста лет. Ключевой вклад Гаусса состоял в соединении исчерпывающего знания теории с той исключительной алгебраической техникой, благодаря которой он справлялся со значительными сложностями, возникающими при прямом решении этих уравнений и его опыте астронома-практика. В отличие от своих предшественников (включая Ньютона, решавшего эту проблему путем геометрической аппроксимации), Гаусс не предполагает заранее, каким из конических сечений является орбита наблюдаемого тела. Это усложняет вычисления, но позволяет работать с новыми кометами и планетами, не опознав их как таковые.*

Гаусс на террассе новой обсерватории

До Гаусса ближе всех к решению этой проблемы подошел Лаплас, но его уравнения были столь сложны, что из них нельзя было надеяться получить численные результаты. Подход Лапласа был прямым, основанным непосредственно на законах Кеплера и дифференциальных уравнениях для задачи двух тел. Вывод Гаусса, который мы вкратце опишем, очень похож на лапласовский. Решающая новая идея Гаусса состояла в использовании отношений площадей *секторов* и *треугольников*, ограниченных двумя радиус-векторами.

*Практически очень трудно отличить планету от кометы на основе лишь нескольких наблюдений.

Четыре части книги I обсуждают соотношения между различными параметрами, описывающими движения небесного тела вокруг Солнца. В части 1 определяется бо́льшая часть понятий, включая радиус-вектор, истинную и среднюю аномалию, эксцентриситет, и даются тригонометрические формулы, необходимые для описания положения данного тела в данной точке орбиты. Здесь же даются краткие практические указания по экстраполяции таблиц и аппроксимации парабол эллипсами и гиперболами.

Часть 2 посвящена определению геоцентрического локуса небесного тела как функции трех координат. Гаусс начинает с определений характеристических параметров таких, как эклиптика и узел: в § 48 определяются семь параметров, характеризующие движение небесного тела. Это средняя долгота ("эпоха"), среднее движение, главная полуось, эксцентриситет, долгота восходящего узла и наклонение орбиты. В следующих параграфах Гаусс выводит и обсуждает (тригонометрические) соотношения между этими параметрами. Как и в части 1, здесь есть критерии для распознавания различных конических сечений. Заканчивается часть 2 выводом дифференциального уравнения для движения небесного тела в геоцентрических координатах и применением этих теоретических соображений к практическому примеру. Здесь тоже есть замечания о влиянии ошибок наблюдений.

Третья часть посвящена проблеме вычисления орбиты по нескольким наблюдениям (т.е. нескольким точкам в пространстве). Все преобразования здесь элементарны; чтобы получить результаты, которыми можно пользоваться, разложения в степенные ряды обрываются после нескольких первых членов (без обсуждения сходимости, впрочем – очевидной); так же Гаусс поступает с непрерывными дробями. Особый упор делается на определении орбит по двум параметрам и на обширных конкретных вычислениях. Первые фразы этой части выражают взгляд Гаусса на задачи его работы; они могли бы послужить эпиграфом к любой из его статей и книг:

...Обсуждение соотношений между двумя и бо́льшим числом положений небесного тела как на его орбите, так и в пространстве, изобилует красивыми утверждениями, из которых легко составить целый том. Но наш план не настолько обширен, чтобы исчерпать эту плодотворную тему; наша основная задача – максимально облегчить решение великой проблемы определения неизвестных орбит по наблюдениям; поэтому, пренебрегая всем, что уводит нас от этой цели, мы тем более тщательно изучим все, что может хоть как-то приблизить нас к ней... [Цитата из английского перевода Девиса.]

В четвертой и последней части книги I рассматривается случай, когда все наблюдения лежат в одной плоскости с Солнцем. Снова выводятся тригонометрические соотношения; особенно полезным оказывается образ пирамиды с Солнцем в вершине (§ 112). Эта короткая часть завершается замечанием, что уравнения, выведенные для этого частного случая, бесполезны для эллиптических орбит.

Проделав в книге I всю подготовительную работу, в книге II Гаусс прямо приступает к главной проблеме – определению орбиты небесного тела по фактическим наблюдениям. Он решает эту проблему в два этапа: сначала он аппроксимирует орбиту по трем или четырем наблюдениям, а затем улучшает этот результат на основе дальнейших данных. Первому этапу посвящены части 1 и 2 книги II, улучшению – части 3 и 4.

Как указано выше, для определения орбиты требуется вычислить семь ее параметров. В части 1 Гаусс показывает, как вычислить шесть из них по минимальному числу наблюдений, а именно – трем. Седьмой параметр – массу приходится определять отдельно. Каждое наблюдение дает два независимых параметра – долготу и широту; вот почему трех наблюдений достаточно, если орбита не лежит в плоскости эклиптики и не слишком близка к ней. Этот особый случай разбирается во второй части; он требует четырех независимых наблюдений (потому что три равные или почти равные нулю геоцентрические широты уже нельзя использовать как независимые параметры).

В первых параграфах части 1 рассматриваются такие предварительные проблемы, как влияние фактического положения наблюдателя на Земле и вращения Земли. Орбиту нельзя найти прямо, потому что получаются слишком сложные уравнения; чтобы упростить их, Гаусс делит проблему на части, рассматривая два уравнения X и Y с двумя неизвестными x и y, в свою очередь являющимися функциями параметров орбиты. X и Y сначала формулируются в очень общем виде, а затем уточняются путем сходящейся итерации. В этом месте Гаусс подытоживает соотношения, полученные и объясненные в книге I, и выясняет, какие подстановки и дальнейшие аппроксимации можно осуществить с их помощью. Составив таким образом полное представление обо всех имеющихся возможностях, в § 140 и 141 Гаусс выводит точные уравнения для параметров; они получаются сложными и сводятся к многочленам восьмой степени. Чтобы упростить их, Гаусс обсуждает астрономический смысл входящих в них величин и указывает на несколько условий, до этих пор не использованных. Здесь Гаусс вводит вышеупомянутое отношение площадей секторов и треугольников, ограниченных двумя радиус-векторами. Это отношение, характеризующее кривизну орбиты, удобно для итерирования и дает желаемые численные результаты. Эта часть составляет почти четверть всей работы, так сложны необходимые вычисления. Математический аппарат Гаусса несложен: это всего лишь алгебра и (сферическая) тригонометрия. Заканчивается часть 1 несколькими примерами; снова обсуждаются границы ошибок (являющихся на этот раз следствием необходимых упрощений).

Во второй части Гаусс рассматривает случай четырех независимых наблюдений, из которых только два должны быть полными. Методологически здесь нет ничего нового, но этот случай, как мы уже указывали, важен, если орбита наблюдаемого небесного тела совпадает или почти совпадает с эклиптикой Земли. В этом случае маленькие ошибки наблюдений могут оказывать огромное влияние, если работать только с тремя наблюдениями. Гаусс снова приводит пример, на этот раз – данные Весты, малой планеты с особенно маленькой эклиптикой.

Последние две части книги II посвящены задаче уточнения приближенных орбит, полученных способом, описанным в первых двух секциях. В части 3 Гаусс впервые публикует метод наименьших квадратов – свое самое эффективное и удобное средство улучшения орбит. Этот метод, который Гаусс описывает (§ 186) как "тот принцип, что сумма квадратов разностей между наблюденными и вычисленными величинами должна быть минимальна", был применен им с большим успехом при вычислении орбиты Цереры. Первая его публикация принадлежит Лежандру, но Гаусс, очевидно, применял его раньше, чем Лежандр.[2] Здесь он дает две совершенно новые и оригинальные его мотивировки. Мы еще вернемся к этой спорной и очень важной для Гаусса теме (см. с. 143 и далее).

Часть 3 очень коротка и разочарует того, кто надеется найти в ней объяснение сложных и интересных аппроксимационных методов Гаусса; эти методы, по крайней мере частично, Гаусс объяснил в более поздних статьях; для более тесного знакомства можно рекомендовать неполные вычисления возмущений Паллады.

В столь же краткой четвертой секции Гаусс делает несколько замечаний о возмущениях эллиптических орбит, вызванных большими планетами. Гаусс не входит в детали, но подчеркивает важность вопроса о точном вычислении орбит и об определении масс тел, вызывающих эти возмущения.[3]

Работа заканчивается несколькими обширными таблицами, поясняющими соотношения между различными параметрами орбиты.

Главные недостатки "Теории движения. . ." – это то, что в ней не рассмотрены параболические орбиты, что еще раньше сделал Ольберс, и не описаны весьма эффективные аппроксимационные методы Гаусса. Несмотря на эти недостатки, в течение десятилетий после своего выхода в свет эта работа Гаусса была самым важным и влиятельным руководством по теоретической астрономии.

Мы уже указывали, что в своей практической работе Гаусс не всегда следовал тем методам, которые он описал в книге; но не будем входить в подробности. Скажем только в пояснение, что, поскольку книга эта была задумана как систематическое и образцовое руководство, Гаусс, видимо, иногда предпочитал путь, теоретически более прямой, пути непрямому, хотя практически более эффективному. Тут поучительно сравнение с его ранней работой "Краткий обзор методов. . ." – оно показывает, что ранние подходы Гаусса были гораздо более эвристичны: успешны, но формально менее четки.

Это краткое описание "Теории движения. . ." завершает наше обсуждение работ Гаусса по теоретической астрономии; его практическую деятельностью мы обсудим ниже.*

Прежде чем закончить обсуждение этого периода жизни Гаусса, кратко обрисуем некоторые аспекты его математической работы, о которых мы еще не говорили, корни которых восходят к началу его математической деятельности. Мы не будем здесь касаться оснований геометрии и некоторых вопросов прикладной математики; о них мы скажем позже в ином контексте.

Большую часть той работы, о которой мы говорим, описал Л. Шлезингер, чей очерк под названием "Анализ" помещен в т. X, 2 Собрания трудов.

Заглавие "Анализ" здесь неинформативно, потому что Шлезингер пользуется этим термином для характеристики нескольких различных областей математической работы Гаусса. Следуя Шлезингеру, мы различаем три основные темы, видимо, вдохновлявшие Гаусса и послужившие темой большей части его работ. Это арифметико-геометрическое среднее (традиционно обозначаемое agM), гипергеометрическая функция и теория эллиптических интегралов. Вот важнейшие статьи в этой области (звездочкой * отмечены статьи, опубликованные посмертно):

"Общие исследования о бесконечных рядах. . . , часть первая" (Disquisitiones generales cira seriem infinitam. . ., Pars prior), 1812;

"Определение нашего ряда посредством дифференциального уравнения второго порядка" (Determinatio seriei nostrae per aequationen differentialem secundi ordinis)*;

"Новый метод нахождения целых величин путем аппроксимации" (Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi), 1814;

"Трактат о новых методах в теории интерполяции" (Theoria interpolationis methodo nova tractata)*;

"Определение притяжения, которое производила бы в любой заданной точке планета, если бы ее масса была распределена по всей орбите пропорционально времени, в течение которого отдельные части орбиты описываются" (Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis

---

* Романтические биографы называли Палладу "звездой судьбы" (Schicksalstern) Гаусса. Вычисление ее возмущений – единственное крупное дело, которое Гаусс оставил незаконченным – после гигантских вычислений и огромных усилий, оставшихся невознагражденными. Его ошибка, видимо, состояла в том, что он оставлял слишком мало членов в разложениях этих возмущений – всего три, тогда как требовалось четыре или пять.[4] Особая ирония судьбы состоит в том, что в других случаях Гаусс зачастую проводил более точные вычисления, чем это было нужно. Феликс Клейн [5] сообщает, что видел посреди вычислений орбиты Паллады замечание, написанное рукой Гаусса: "Лучше смерть, чем такая жизнь" (Lieber der Tod als ein solches Leben).

datae exerceret planeta, si eins massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita), 1818.

Несколько статей, посмертно опубликованных в тт. III, VIII и X Собрания трудов *.

Из этого списка видно, что значительная часть работ опубликована посмертно. Поэтому трудно проследить развитие Гаусса сколько-нибудь детально, и мы ограничимся очерком его результатов, не пытаясь реконструировать тот путь, которым могла идти мысль Гаусса (что пытался сделать Шлезингер). В общем и целом мы принимаем выводы Шлезингера.

Видимо, Гаусс очень рано начал интересоваться арифметико-геометрическим средним, но наше знание о его развитии основано лишь на косвенных данных и случайных разрозненных рукописных замечаниях. Скорее всего, первоначально Гаусса привлекла численная сторона дела. Лишь позже Гаусс заинтересовался результатами, получаемыми после простых преобразований. Арифметико-геометрическое среднее (agM) определяется следующим образом. Пусть даны два числа n и m. Тогда их среднее арифметическое m' определяется как $m' = (m + n)/2$, а среднее геометрическое n' определяется как $n' = \sqrt{mn}$. Продолжая процесс усреднения, то есть определяя $m'' = (m' + n')/2$ и $n'' = \sqrt{m'n'}$ и так далее, получаем две числовые последовательности, имеющие один и тот же предел, обозначаемый $\mathrm{M}(m, n)$. Выражение "арифметико-геометрическое среднее" принадлежит самому Гауссу и впервые встречается в заметке, которую Шлезингер считает написанной, скорее всего, до 1797 года и заведомо не позже 1798 года.[6] Положим $Tm(1+x) = \mathrm{agM}(1,1+x)$. Тогда

$$Tm(1+x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}x^4 + \frac{31}{2048}x^5 - \ldots$$

В той же самой заметке Гаусс переходит к вычислению функции, в некотором смысле обратной к $Tm(1 + x)$, и устанавливает связь между двумя рядами. Более поздние заметки содержат дальнейшие вычисления, связанные с взаимоотношениями между agM и эллиптическими интегралами; их мы сейчас обсудим.

Лагранж и Гаусс ввели функцию agM независимо друг от друга. Лагранж (чья публикация относится к 1784–85 годам) взял за отправную точку так называемое преобразование Лендена

$$y' = \frac{\sqrt{(1 \pm p^2y^2)(1 \pm q^2y^2)}}{1 \pm q^2y^2}$$

и применил его к подынтегральному выражению эллиптического интеграла, тем самым получив алгоритм, ведущий к приближенному вычислению интеграла

$$\int \frac{N dy}{(1 \pm p^2 y^2)(1 \pm q^2 y^2)},$$

где N – произвольная рациональная функция y. К этому выражению приходишь, вычисляя длины эллипсов и гипербол. Ясно, как эллиптические (а также связанные с лемнискатой и так далее) интегралы связаны с agM: если взять agM двух подходящих функций, то приходишь к ряду того типа, который встречается в теории интегрирования эллиптических интегралов.

Одним из первых открытий Гаусса было соотношение

$$\frac{1}{\mathrm{M}(1+x, 1-x)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 \varphi}},$$

которое он использовал (с новым выводом) в "определении притяжения" (1818) для вычисления вековых возмущений, т.е. непериодической части возмущений. Из всех результатов Гаусса по теории арифметико-геометрического среднего это единственный, опубликованный им.

Многое из того, что у Гаусса осталось разрозненным, относится к теории лемнискаты.[7] К наиболее примечательным результатам относится представление формулы лемнискаты как частного двух целых функций P и Q, явное вычисление P и Q и правильное определение двух периодов лемнискаты: $2\tilde{\omega}$ и $2i\,\tilde{\omega}$. Первый период действительный, второй – чисто мнимый. P и Q – это, в сущности, частные случаи θ-функций Якоби.

Лемниската или sin lem, как Гаусс называл ее, интересовала его не только потому, что вела ко многим интригующим функциональным соотношениям, но также и потому, что служила естественным мостом к общей теории эллиптических функций. Важным ориентиром было соотношение

$$\tilde{\omega} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\pi}{\mathrm{M}(1, \sqrt{2})}, \qquad (*)$$

на которое Гаусс набрел в 1799 году, случайно заметив, что значения левой и правой части равны.

Следующий шаг состоял в обобщении $(*)$; полученные формулы

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{\mathrm{M}(1, \sqrt{1+\mu^2})} \quad \text{и} \quad \tilde{\omega}' = \frac{\pi}{\mu \mathrm{M}\left(1, \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}}\right)} \qquad (**)$$

дают период лемнискаты в частном случае $\mu = 1$. Эти формулы составляют часть теории обратной функции (эллиптического интеграла общего вида). Гаусс определяет S через элементарные дроби по аналогии со следующим полученным им ранее представлением:

$$S(\tilde{\omega}\psi)=\frac{4\pi}{\tilde{\omega}\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)\psi\pi}{e^{\left(\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}-\pi\right)}+e^{\left(-\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}-\pi\right)}}.$$

Кроме того, он сумел представить S как отношение двух функций "типа θ-функции", которое он явно вычислил.

Хотя Гаусс пользовался хорошо известной техникой, его успех был значительным и привел к результату, восходящему к классическим и наиболее трудным проблемам анализа 18-го века. Способ изложения Гаусса странно противоречит новаторской сути его работы: ни новой техники, ни комплексных чисел, ни даже формального рассмотрения вопросов сходимости, и в то же время много очень глубоких результатов, полное понимание которых стало возможным лишь много позже, когда теория эллиптических функций была уже завершена.

Тот факт, что Гаусс опубликовал лишь немногие из своих результатов и так никогда и не развил "общей и полной трактовки" (die allgemeine und lückenlose Behandlung), что он, как мы знаем из его дневника, намеревался сделать, – не простая случайность. Кроме внешних факторов – таких, как его растущая занятость астрономией, – была внутренняя причина того, что эта программа осталась невыполненной: эллиптические функции многозначны. Хотя предположение о комплексном периоде было для Гаусса, конечно, не слишком неестественным благодаря связи между тригонометрическими и экспоненциальными функциями, вопросы о множестве значений функции оказались непреодолимыми в ту эпоху, когда не было, скажем, теории римановых поверхностей.

Мы уже видели, что Гаусс в ходе своих исследований об обратных функциях эллиптического интеграла открыл θ-функции (которые лишь несколькими годами спустя независимо ввел и рассмотрел Якоби) и исследовал их трансформационные свойства.[8] Хотя Гаусс был хорошо знаком с комплексной плоскостью и ее геометрическим представлением, он очень скупо пользовался интегрированием в ней.

Ни один из этих результатов об agM и об эллиптических интегралах не был опубликован при жизни Гаусса, и он не оспаривал приоритета Абеля и Якоби. Его приватные заявления, как мы знаем из переписки, были, конечно, иными. В одном из писем он заявляет что одна статья Абеля избавила его от забот по публикации примерно трети своих результатов в этой области.[9] Один из случаев, вызвавших у него наибольшее удовлетворение, – это когда agM снова возникло у него при аппроксимации возмущений Паллады, – еще один пример того, как "чистая", утонченная математика помогает раскрывать секреты природы.

МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Между аналитической работой Гаусса и теорией квадратичных форм его связи, которые видел уже он сам. Некоторые фрагменты начала 1800-х годов показывают, что Гаусс был знаком с зачатками той теории, которую впоследствии завершили Клейн и Фрике своими работами по модулярным формам. И Ф. Клейн и Р. Фрике много занимались публикацией работ Гаусса и имели возможность тщательно изучить их фрагменты.

Для Гаусса арифметико-геометрическое среднее, вероятно, давало самый прямой и простой доступ к теории модулярных форм. Эта связь устанавливается преобразованиями, отображающими бесконечно много "эквивалентных" форм данной agM друг в друга. *

Сегодня мы не можем сказать, как действовал Гаусс – сохранились лишь разрозненные фрагменты, бóльшая часть которых была опубликована посмертно (с аннотациями Клейна и Фрике). На их основе трудно экстраполировать, даже если и удастся надежно их датировать. В этом вопросе мы следуем той правдоподобной реконструкции, которую дает Шлезингер в своем очерке. Отправной точкой Гаусса была теория чисел; к теории модулярных функций его привела, видимо, теория приведения квадратичных форм. Центральной является следующая проблема (Собрание трудов, том III, с. 386). Пусть (a, b, c) и (A, B, C) – две эквивалентные формы с отрицательным дискриминантом $-p$. Рассмотрим такую функцию f, что $f(t) = f(u)$ всегда, когда $(t - u)/i$ целое или $t = 1/u$. Гаусс называл эту функцию "сумматорной функцией" (Summatorische Function), хотя нигде явно не определил ее; фактически эта функция – абсолютный инвариант модулярной группы всех линейных подстановок

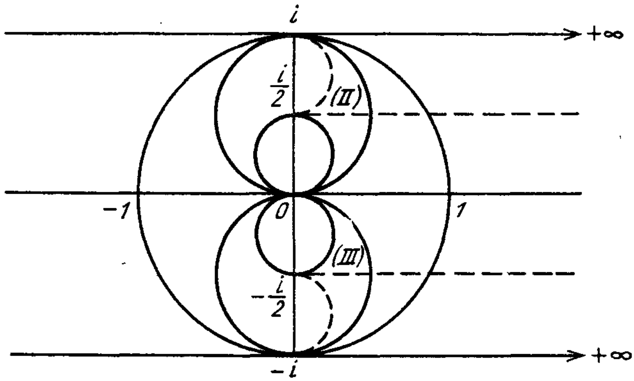
$$t' = (\alpha t - i\beta)/(\delta + i\gamma t),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ целые, причем $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

В записных книжках Гаусса есть несколько иллюстраций, показывающих, что он понимал геометрическую сторону этой теории. Геометрическое представление модулярных функций строится следующим образом. Конкретная форма отождествляется с решеткой в комплексной области путем выбора единичного вектора в качестве одного из базисных векторов. Затем рассматриваются функции f второго базисного вектора, идентичные на решетках, принадлежащих эквивалентным формам. Функция f сумматорная в смысле Гаусса, если она инвариантна относительно действия данной модулярной группы. Нижеприведенный рисунок следует одному из наиболее удачных набросков Гаусса (см. том VIII, с. 103) с некоторыми поправками

* Очевидно, что, вообще говоря, есть бесконечно много способов представить данную функцию как agM двух других.

Шлезингера. Неравенства [III] и [IV] описывают внешние области, ограниченные окружностями с центрами $i/2$ и $-i/2$; неравенство [I] должно иметь вид $-1 < y < 1$; неравенство [II] описывает внешнюю область, ограниченную окружностью с центром $i/4$ и радиусом $1/4$. Если положить $t = x + iy$, то эта фигура характеризует фундаментальную область некоторой модулярной функции $j(t)$. Арифметически, заштрихованная область – это геометрическое место точек $t = (1 + ib)/a$ для приведенной формы (a, b, c) с определителем -1. Функция $f(t)$ (см. выше) принимает в этой области каждое комплексное значение ровно один раз. Этот факт, уже известный Гауссу, переоткрыл Дедекинд. Шлезингер в своем очерке на с. 102 и далее объясняет этот набросок Гаусса гораздо подробнее.



[I] $y<2$, [III] $x^2+y(y-1)>0$,
[II] $y<2x^2+2y^2$ [IV] $(y+\frac{1}{2})^2+x^2 \geq \frac{1}{4}$ [1,2]

Фактически невозможно коротко и адекватно описать работу Гаусса в теории модулярных функций. Возникающие концептуальные сомнения не дают уверенности в том, что́ фактически означали заметки и наброски Гаусса и в какой степени они предвосхитили дальнейшую работу Дедекинда, Фрике, Клейна и других. Мы привели лишь образец тех концепций, которые развивал Гаусс, и тех результатов, которые он получал; вдаваться в детали имеет смысл только при попытке полной реконструкции, как это делали Шлезингер или Клейн. Видимо, эта часть работы Гаусса, опубликованная лишь посмертно, имеющая много точек соприкосновения с работами Якоби, Эйзенштейна и других, не осталась без последствий. Ее знали и, видимо, испытали ее влияние Дедекинд, Клейн, Фрике. Сам Гаусс, несмотря на всю свою работу в этой области, на свои вычисления различных инвариантов, на найденные им связи между арифметикой, θ-функциями и эллиптическими интегралами, видимо, не считал, что в этой области есть связная теория. Скорее всего, Гаусса и не могла заинтересовать такая абстрактная теория – здесь приходит на ум аналогия с теоретико-групповыми понятиями в "Арифметических исследованиях".[3]

Работа Гаусса с гипергеометрической функцией продолжала обширное исследование Эйлера ее аналитических свойств.[4] Вклад Гаусса выразился в двух статьях, из которых он сам опубликовал лишь первую. Написанная, вероятно, в 1811 году, она вышла в 1812 году под заглавием "Общие исследования о бесконечных рядах. . . , часть первая". Она начинается с определения ряда

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

Это может вызвать удивление: Эйлер к тому времени уже определил этот ряд с помощью дифференциального уравнения, дающего и Гауссу, казалось бы, естественный способ ввести эту функцию. Но он даже не упоминает о такой возможности, взамен сопровождая свое определение соображениями о его сходимости. В этих соображениях используется геометрический ряд, причем видно, что, определяя F, Гаусс имел в виду не только действительные значения x. Затем Гаусс выводит основное функциональное уравнение

$$\frac{dF(\alpha,\gamma,x)}{dx}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\ \gamma+1,x).$$

Из этого соотношения следует много других уравнений того же типа, связывающих F с тригонометрическими функциями (§ 4 и 5). В § 7–11 исследуются линейные соотношения между функциями

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x),$$
$$F(\alpha+\lambda,\beta+\mu,\gamma+\nu,x),$$
$$F(\alpha+\lambda',\beta+\mu',\gamma+\nu',x),\ \lambda,\lambda',\mu,\mu',\nu,\nu'=0\quad\text{или}\ \pm1.$$

Очевидно, Гаусс стремится найти все важные функциональные соотношения. В § 12–14 исследуется разложение частного

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\ \gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$$

с помощью цепных дробей. И методологически, и по существу эти параграфы менее интересны.

В § 15–18 исследуется сходимость $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 1)$ при действительных α, β, γ. Затем Гаусс вводит близкую "родственницу" функции $\Gamma(x)$, функцию $\Pi(x)$, характеризуемую функциональным уравнением $\Pi(x+1)=(x+1)\Pi(x)$, и устанавливает ее связь с F. За исключением § 3 и § 15–18, статья не представляет большого теоретического интереса, но ее доказательства и весь ход мысли изложены очень ясно, почему даже сегодня она вполне заслуживает изучения.

Вторая часть, опубликованная посмертно, была написана, вероятно, сразу после первой. Она состоит из девятнадцати, в сущности, законченных параграфов. На этот раз Гаусс начинает с определения дифференциального уравнения

$$0 = \alpha\beta F - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{dF}{dx} - (x - x^2)\frac{d^2F}{dx^2} \qquad (*)$$

и выбора граничных условий. Гаусс ограничивается значениями аргумента $|x| < 1$, потому что при $|x| > 1$ функция становится неоднозначной: в этом случае ее значение зависит от того, по какому пути мы приходим к данному значению x. Предмет статьи – это анализ различных интересных преобразований и значений функции в некоторых точках. Из этих рассмотрений хорошо видно, что Гаусс владел техникой интегрирования в комплексной плоскости, но у него не было понятий аналитического продолжения и монодромии.

Шлезингер выдвинул предположение о том, что статья о гипергеометрической функции была задумана как введение к будущему систематическому изложению теории трансцедентных функций.

Гипергеометрическая функция играла центральную роль в размышлениях Гаусса, потому что в теории эллиптических интегралов и agM ему встречалось очень много частных случаев гипергеометрического ряда.

Мы не будем здесь подробно обсуждать понятие интеграла у Гаусса. Хотя это, очевидно, необходимо для полного понимания двух статей, кратко описанных выше, мы отложим объяснение, которое будет уместнее дать ниже, в связи с обсуждением работы Гаусса в прикладной математике.

ГЛАВА 9

ГЕОДЕЗИЯ И ГЕОМЕТРИЯ

В 1818–1832 годах большое место в жизни Гаусса занимал обширный проект геодезического исследования Ганноверского королевства. Гаусс лично руководил работами в первые годы, а все исследование продолжалось примерно двадцать лет.

Тогдашний интерес к геодезии был в основном практического свойства, хотя выяснение путем измерений точной формы Земли представляло и определенный теоретический интерес. Этот вопрос уже поднимался в восемнадцатом веке, когда обширные измерения привели к полному подтверждению ньютоновской теории тяготения.[1] И во времена Гаусса дополнительные количественные результаты представляли интерес, но были и практические заботы. Геодезическая работа пользовалась официальным одобрением и хорошо финансировалась, потому что военное и экономическое значение хороших карт было очевидно.

Основная методика различных съемок была проста. Начиная с некоторой основной линии очень точно определенной длины, территория, подлежащая измерению, должна была быть покрыта сетью треугольников, стороны которых короче пределов видимости. Фактически работа геодезистов состояла в формировании такой сети и точном определении ее углов. Очевидно, что каждая "тригонометрическая точка" должна была быть видна, как минимум, с двух направлений. Но лучше, когда точка видна с более чем двух направлений и кроме основных, довольно маленьких, треугольников есть еще большие – контрольные. На эту работу уходило много времени; еще больше времени уходило на вычисления, так как никакой вычислительной техники не было.

Часть территории была измерена еще во времена Наполеона и соответствующая сеть была "привязана" к триангуляционной сети Нидерландов. Но работа не была закончена, ее результаты не были достаточно точны, и положение многих точек сети было забыто.[2] После 1815 года все основные государства центральной Европы предприняли геодезические съемки. Что касается Ганновера (и Гаусса), инициатива исходила от Шумахера, организатора аналогичных съемок в Дании. В 1818 году Шумахер навел справки, не захочет ли Гаусс участвовать в продолжении на юг датской сети.*[3] Гаусс, уже выполнявший небольшие геодезические измерения во время своего второго брауншвейгского периода, немедленно загорелся этой идеей. Он составил меморандум для своего правительства, включавший описание проекта, необходимый штат работников и т.д. Вскоре последовал положительный ответ, и Гаусс был назначен директором проекта. Правительство дало запрошенные субсидии, и Гауссу в помощники было придано несколько солдат. В тот момент Гаусс, конечно, не подозревал, что берется за дело, которое станет для него главным на десять лет жизни, но измерения требовали времени, и трудностей оказалось больше, чем ожидалось.

Первоначальный план предполагал лишь соединение датской сети с уже имевшимися результатами для Ганновера, но он вскоре был оставлен ради совершенно независимого исследования Ганновера, а впоследствии и продолжения сети на территорию вольного города Бремена. Это последнее

---

* Датское королевство включало в те времена германские провинции Шлезвиг и Гольштейн; последний граничил с Ганновером. Шумахер был датским служащим. Он имел связи с Копенгагенским университетом и с Альтонской обсерваторией (близ Гамбурга).

предприятие имело свои трудности, потому что прибрежная местность была совершенно плоской и практически на уровне моря.

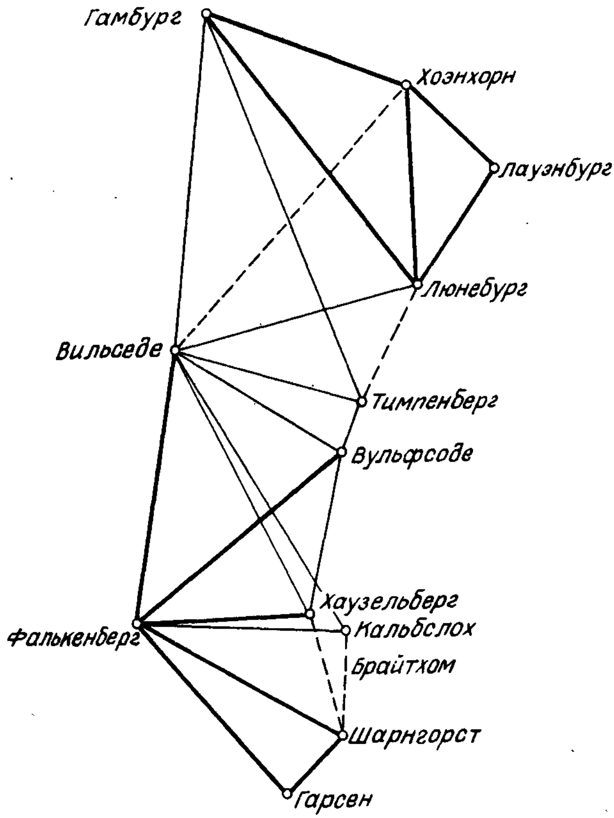
Трудности, в свое время заставившие прервать французское исследование, были обусловлены спецификой топографии Ганновера. Эта страна, особенно ее западная и прибрежная части, – плоская и покрытая большими лесами.* Там мало столь необходимых просек, устанавливать триангуляционные столбы трудно, а во многих направлениях – невозможно. Самая трудная местность – это так называемая Люнебургская пустошь, скудно населенная полоса земли к югу от Гамбурга, как раз между Гёттингеном, где была база Гаусса, и датской сетью.

Гаусс был не просто номинальным директором проекта, он лично руководил им. В летние месяцы этих лет он едва ли хоть одну ночь провел в своей постели и часто проводил лишь по нескольку суток в одном месте, торопясь от деревни к деревне и перенося все неудобства сельской жизни (от которой его отделяли всего два поколения) и летнюю жару. Мы видим Гаусса, одетого по всей форме, в неизменном бархатном колпаке, потеющего и отдающего распоряжения солдатам, торгующегося с крестьянами о том, во что обойдется срубить несколько деревьев, загораживающих вид от одной тригонометрической точки до другой, организующего раздачу инструментов и т.п. Вечера отнимали почти ежедневная переписка с Шумахером (со сложными указаниями о том, куда посылать письма и какие писать на них адреса) и бесконечные вычисления. Измерения производились с помощью небольшого числа гелиотропов, приборов, изобретенных самим Гауссом. В них были передвижные зеркальца, отражавшие (рассеянный) солнечный свет; после некоторых мелких улучшений они превратились в очень эффективные орудия, позволяя Гауссу просматривать гораздо бо́льшие расстояния, чем делалось до него, и работать при менее ясной погоде, чем прежде – при небе, затянутом облаками, без прямых солнечных лучей. Переписка с Шумахером, Ольберсом и Бесселем живо воссоздает картину тех трудностей, с которыми приходилось справляться Гауссу, особенно на Люнебургской пустоши и в окрестностях Бремена. Некоторое время не было даже ясно, осуществима ли вообще требуемая триангуляция, и Гаусс провел много недель в тоске и (почти) полном отчаянии; счастьем были те моменты, когда падение последнего дерева открывало вид между двумя точками, подтверждая вычисления и догадки Гаусса. Проиллюстрируем ситуацию выдержкой из письма Шумахеру, датированного 30 августа 1822 года:

> Я здесь со дня на день надеялся на Ваш приезд и все еще надеюсь на него, потому что еще 8 дней не смогу двинуться отсюда; здесь еще надо установить два направления: на Вульфсоде, где еще находится Г. Мюллер, и на Кальбслох, куда он передвинется через несколько дней. Последнее необходимо потому, что крайне сомнительно, удастся ли прорезать линию между Хаузельбергом и Шарнгорстом, так как сама местность Хасселя может оказаться слишком высокой. Гораздо вероятнее, что дело

* Во всяком случае была покрыта в то время.

удастся с Кальбслохом, но я не хотел бы менять Хаузельберг на Кальбслох, так как из него не видно Вульфсоде.



Куда я отсюда отправлюсь, еще неясно; я хотел бы сначала обсудить это с Вами. По моим предварительным расчетам, Вильседе стоит на 12,3 м выше уровня Гёттингенской обсерватории. Если вы измерили зенитное расстояние для башни церкви св. Михаила в Гамбурге, то сможете уже теперь в предварительном порядке привести все к уровню моря. Расстояние от Вильседе до Гамбурга должно составлять 42454 ± м. [4,5]

Триангуляция Ганновера привела к двум крупным теоретическим работам, а именно "Определение разности широт между обсерваториями Гёттингена и Альтоны из наблюдений с зенитным сектором Рамсдена" (Bestimmung des Breitnunterschieds zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsektor) (1828) и "Исследования по высшей геодезии" (Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie), части I и II (1843 и 1846). Обе работы оказали огромное влияние на развитие теоретической и экспериментальной геодезии, но они представляют интерес в основном для специалистов. Ограничимся их краткими сводками, причем начнем со второй работы. Вероятно, это предварительный вариант задуманного, но так и не написанного большого трактата по геодезии, наподобие "Теории движения. . .".

Метод наименьших квадратов был для Гаусса главным средством обработки геодезических наблюдений. Теоретический плод его усилий, теория конформных отображений, составил тему труда, награжденного Копенгагенской премией (1823); мы обсудим его ниже.

В первой части "Исследований. . ." рассматривается частный случай конформного отображения эллипсоида на сферу; это позволяет применить в геодезии обычную сферическую тригонометрию. Маленькие области эллипсоида отображаются на сферу по формуле

$$f(v) = \alpha v - i \log k,$$

где i — мнимая единица, а v — произвольная точка эллипсоида. Константы α и k надо выбрать так, чтобы минимизировать искажение отображаемой области. Техника, которую применял здесь Гаусс, относится к комплексному анализу и сферической тригонометрии. Общий метод иллюстрируется двумя численными примерами: один — на материале Ганновера, другой — на материалах швейцарского исследования. Заканчивает первую часть определение азимута на другом конце, его географическая длина и разность долгот двух точек по длине одной стороны сферического треугольника, азимуту на одном конце и его географической широте. Статья очень обстоятельна, очевидно, чтобы сделать ее доступной читателям с плохой математической и теоретической подготовкой.

Вторая часть посвящена решению этой же, закончившей первую часть, задачи, только для треугольника на эллипсоиде, а не на сфере. С помощью средних величин широт и азимутов, используя технику тригонометрии и анализа, Гаусс выводит шесть формул (§ 33), которые сводят задачу к стандартным приемам, использующим таблицы, составленные им самим и помещенные в приложении к статье. Эта методика, предложенная Гауссом, стала весьма популярной среди геодезистов и применялась до конца прошлого века.

Что касается крупной геодезической работы, задуманной Гауссом, то к ней есть лишь несколько отрывочных набросков, не содержащих ничего интересного для нас здесь.

В работе "Определение разности широт. . ." Гаусс определяет разность географических широт двух астрономических обсерваторий — в Альтоне и в Гёттингене. Он использует при этом крайне тщательные измерения и сравнение соответствующих зенитных расстояний. Географические долготы этих двух обсерваторий практически одинаковы; определение разности их широт пополнило геодезическую работу Гаусса и обеспечило ей добавочный контроль. Измерения были сложными, но вычисления — нет; примечательно то, как искусно и систематически Гаусс применяет здесь метод наименьших квадратов. Заканчивает работу обсуждение нерегулярностей земной поверхности. В приложении Гаусс определяет ее сжатие, применяя метод наименьших квадратов к имевшимся у него данным.

Развитие теории конформных отображений прямо связано с геодезической деятельностью Гаусса. Другое важное направление работы Гаусса в математике в это время – это систематическое применение метода наименьших квадратов. И о том и о другом мы ниже скажем подробнее.

Есть менее прямая связь с возрождением и расширением интереса Гаусса к основаниям геометрии и к дифференциальной геометрии. Главной проблемой в основаниях геометрии был в то время статус евклидовского постулата о параллельных; это была единственная аксиома в системе Евклида, которую не удавалось проинтерпретировать с помощью конечной геометрической конструкции. Уже было предпринято много попыток прояснить роль этой аксиомы, начиная с античности. Большинство из них было направлено к тому, чтобы либо заменить эту неудобную аксиому равносильным "финитным" утверждением, либо показать, что она выводится из других аксиом Евклида. Интерес к этой проблеме резко возрос в восемнадцатом столетии; в большинстве работ этого периода авторы пытались доказать выводимость (и тем самым ненужность) этой аксиомы. Разумеется, эти усилия успеха не имели, но они привели к получению различных результатов, фактически являющихся теоремами неевклидовой геометрии. В их числе было существование абсолютной длины; этот интересный факт доказал Ламберт во второй половине восемнадцатого века. Поскольку это казалось абсурдным, существование абсолютной длины расценивалось как веское свидетельство в пользу "правильности" и выводимости аксиомы о параллельных. Кстати, сам Ламберт так не думал – у него была своя точка зрения, и он, кажется, чувствовал, что возможна непротиворечивая система аксиом без аксиомы о параллельных.

Кестнер в Гёттингене и Пфафф в Гельмштедте оба интересовались этой проблемой, и Гаусс, возможно, обсуждал ее, будучи студентом, с ними, а быть может, и с астрономом Зайфером. Дополнительная информация об этом есть в переписке с Бояи и в заявлениях, сделанных Бояи много позже, после смерти Гаусса.[6]

И Бояи и Гаусс пытались решить этот вопрос с помощью некоторых геометрических построений, не опирающихся на аксиому о параллельных. Бояи интенсивно работал в этом направлении и после своего возвращения в Трансильванию и в 1804 году изложил свои открытия в письме к Гауссу. Он пришел к выводу, что аксиома о параллельных на самом деле не независима, а следует из других евклидовых аксиом. Центральный аргумент Бояи опирался на следующую конструкцию. Возьмем прямую, восставим к ней на равных расстояниях друг от друга перпендикуляры равной длины и соединим их концы. В евклидовой геометрии, очевидно, получится прямая, параллельная исходной прямой, и Бояи старался показать, что если не сделать этого заключения, то получится противоречие. В своем ответе Гаусс похвалил работу друга, но указал на принципиальный дефект в его рассуждениях: Бояи необоснованно заменил бесконечную конструкцию, из которой следовала аксиома о параллельных, конечной. Гаусс не указал в то время, что́ думает он сам, но он не дал своему другу оснований подозревать, что не разделяет его убеждения в выводимости этой аксиомы. В своем ответе Гаусс писал:

. . . Ты хочешь знать мое откровенное мнение без обиняков. Оно состоит в том, что твой метод меня не удовлетворяет. Я постараюсь сделать камень преткновения, который я еще там нахожу (принадлежащий к той же группе утесов и рифов, о которые разбивались до сих пор мои усилия), как можно лучше видным. Я все еще надеюсь, что через эти подводные камни удастся переплыть, и что это произойдет на моем веку. Но теперь я крайне занят другими делами. . . [7]

Поэтому вызывает удивление заявление Гаусса, сделанное в 1846 году, что он был убежден в существовании неевклидовых геометрий в течение пятидесяти лет (см. с. 155). Его первые решительные и позитивные заявления, известные нам, датируются не ранее, чем 1816 годом. В книжном обозрении, вышедшем в этом году, Гаусс обсуждает несколько неверных доказательств, якобы выводивших аксиому о параллельных из других аксиом Евклида. Гаусс всегда был очень осторожен в своих публичных заявлениях по любому спорному вопросу, и тот факт, что он занял определенную позицию, можно понимать как несомненный признак его полной уверенности в возможности существования неевклидовой геометрии. Точный смысл этой "полной уверенности" неясен, и мы не можем, по крайней мере сейчас, выразиться более ясно.

Мы не знаем, как Гаусс фактически рассуждал, но, кажется, он развивал то, что можно расценивать как непротиворечивую (тригонометрическую) модель гиперболической геометрии, или, как он ее называл, трансцендентальной геометрии.* Насколько мы можем видеть, Гаусса не интересовал философский вопрос о независимости аксиомы о параллельных; гораздо интереснее для него были фактические геометрические свойства физического пространства. Современники Гаусса не различали должным образом эти два вопроса и, подобно В. Бояи, больше интересовались философской стороной вопроса. Эмпирический вопрос, очевидно, не мог быть решен во времена Гаусса, что он сам, видимо, вполне хорошо созна-

---

* Это, конечно, не означает, что Гаусс понимал эту модель и вообще понятие непротиворечивости в современном смысле. Он выводил теоремы подобно тому, как это делалось в евклидовой геометрии, и был доволен тем, что в новой геометрии не возникало противоречий. Не иначе действовали и Я. Бояи и Лобачевский, о работах которых мы скажем ниже.

вал. Есть указания на то, что Гаусс "предпочитал", чтобы пространство было неевклидовым.*[8]

Такой радикальный подход к старому вопросу был очень смелым – вспомним, что Кант в своей "Критике чистого разума" утверждал, что евклидова концепция пространства – исходная составная часть нашего мышления.[10]

Гаусс иногда упоминал позицию Канта, но никогда, конечно, не разделял ее. Более примечательно то, что эта разница взглядов не повлияла на, в общем, высокую оценку Гауссом философии Канта. Это отношение заметно отличается от отношения физиков (позитивистов или неопозитивистов) двадцатого века, видевших крах системы кантовского идеализма в свете частной теории относительности.

Одной из причин того, почему Гаусс, видимо, предпочитал неевклидову геометрию, было существование абсолютной длины в неевклидовых системах. В письме к Герлингу он писал: "в качестве единицы длины можно взять сторону равностороннего треугольника с углом в 59°59'59", 9999 (...könnte man als Raumeinheit die Seite desjenigen glichseitigen Dreiecks annehmen, dessen Winkel = 59° 59' 59", 9999). Это вполне в духе стремления Гаусса к абсолютным и независимым единицам; другие примеры можно найти в теории магнетизма (см. ниже) и в переписке, где он говорит о различии между правым и левым.[11] Как это должно было бы импонировать Гауссу, если бы сама Природа дала абсолютную единицу своему самому важному измерению!

Сам Гаусс не опубликовал ни одной оригинальной статьи на эту тему. В своей переписке, особенно с Шумахером и Герлингом, Гаусс был вполне откровенен, но в то же время заботился, чтобы его высказывания не предавались огласке. В числе наиболее значительных была работа Ф.А. Тауринуса, молодого юриста, опубликовавшего две короткие монографии о следствиях отказа от аксиомы о параллельных. Его работы не получили известности, но Гаусс, которому Герлинг указал на них, одобрил и, видимо, изучал их.

---

* Часто утверждают, будто Гаусс хотел решить эту проблему, измеряя очень большой треугольник, но, насколько мы знаем, это миф. Огромный треугольник Хохенгаген – Инзельберг – Брокен был нужен как контроль сети меньших треугольников, содержавшихся в нем. Гаусс, несомненно, понимал, что ошибка измерения была много больше того гипотетического отклонения от 180°, на основании которого, при должной тщательности, можно было бы сделать вывод о неевклидовости пространства.[9] Кстати, именно Лобачевский первый предложил исследовать звездный треугольник для экспериментального решения вопроса.

Другой, более ощутимый, но в то же самое время и более гипотетический аспект проблемы состоит в следующем. Форма Земли была определена в восемнадцатом столетии путем весьма обширных геодезических измерений, организованных для того, чтобы решить спор между декартовой и ньютоновской теориями тяготения. Видел ли Гаусс возможность того, что эти измерения не достигают цели, если наша геометрия неевклидова? Новое обсуждение основ теории Ньютона, несомненно, никак не входило в то, чего Гаусс мог ожидать.

У Гаусса было несколько причин помалкивать о своих убеждениях и не вступать в публичную дискуссию. Самым важным мотивом могло быть нежелание вмешиваться в то, что, на его взгляд, было совершенно пустой философской дискуссией по вопросу, который он должен был считать в сущности неразрешимым.* По-настоящему интересным для Гаусса было то, что физическое пространство внезапно оказалось не обязательно евклидовым. Едва ли есть хоть малое сомнение в том, что Гаусс развил бы соответствующую теорию, если бы были хоть какие-то экспериментальные результаты или выполнимые программы наблюдений. Многие из (часто фрагментарных) вычислений Гаусса, опубликованных посмертно, связаны с "трансцендентальной тригонометрией"; они показывают, как стремился Гаусс понять последствия отказа от аксиомы о параллельных. Его взгляд на проблему очень отличался от нашего; он уподоблял геометрию механике, называя ее, на тогдашнем уровне ее развития, экспериментальной наукой и подчеркивая важную роль интуиции.[12] Несмотря на сильный интерес к этому вопросу, Гаусс не мог ожидать, что его можно будет решить экспериментально. В письмах он выражал убеждение, что более совершенные существа, чем мы, люди, могли бы быть способны интуитивно видеть, какова реальная геометрия, – быть может, даже мы, смертные, получаем эту способность после смерти.[13]

Первое математически корректное и весьма "полное" изложение свойств неевклидовой геометрии было опубликовано в 1831 году. Его автором был Янош Бояи, сын друга Гаусса. Статья Яноша вышла как приложение к учебнику (Tentamen), написанному его отцом, немедленно после выхода пославшим книгу в Гёттинген.[14] Реакция Гаусса весьма характерна: он признает математические успехи Яноша и его храбрость, проявившуюся в публикации такого дискуссионного материала, но обходит полным молчанием центральный вопрос о том, какую из различных потенциальных геометрий следует выбрать.

Последние важные заявления Гаусса по этому вопросу были реакцией на публикации Лобачевского (1841–1846). Некоторые статьи Лобачевского Гаусс читал по-русски, другие по-немецки; он немедленно признал их важность и оригинальность. В письме к Шумахеру он подчеркнул их "подлинно геометрический" характер (см. с. 155).

Начиная с 1815 года позиция Гаусса во всей дискуссии становится странно застывшей и безразличной; кажется, он ограничивается вариациями на тему о том, что все, что присылают ему, он уже давно знает. Особенно обижен был Янош Бояи, когда Гаусс написал его отцу, что знает результаты Яноша вот уже 30–35 лет, что вводило в заблуждение, если вообще

---

*Здесь представляется уместным кратко пояснить знаменитое заявление Гаусса в письме к Бояи, что он молчит потому, что боится "крика беотийцев" (das Jeschrei der Böotier). Это не следует понимать как заносчивое пренебрежение мнениями остальной части человечества, потому что именно это выражение, видимо, употребляли Гаусс и его друзья в студенческие годы. "Беотийцы" – это необразованные, и слова эти выражают презрение к необоснованным аргументам и дискуссиям.

было верно. Именно здесь (в письме к Бояи от 6 марта 1832 года) фигурирует недостойное высказывание Гаусса о том, что он не должен хвалить работу Яноша, потому что "хвалить ее значило бы хвалить самого себя".[15]

Интерес Гаусса к неевклидовой геометрии, как мы видели, получил новый импульс во время его геодезической работы. Есть связи, хотя и не прямые, между геодезической съемкой и основаниями геометрии; похожие связи имеются и с работой Гаусса по дифференциальной геометрии и по конформным отображениям, причем работа в двух последних направлениях фактически началась под влиянием геодезических работ и испытывала их сильное влияние. Две важнейшие статьи на эти темы называются "Решение в общем виде задачи: изображение частей заданной поверхности на другой заданной поверхности с сохранением подобия в бесконечно малых частях" (Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, Собрание трудов, VI, 1822) и "Общие исследования о кривых поверхностях" (Disquisitiones generales circa superficies curvas, Собрание трудов, IV, 1827). Первая из этих двух статей была представлена на конкурс Датской академии наук, и мы будем называть ее "Работой на Копенгагенскую премию".*

Аналитическая геометрия, как мы знаем, развивалась одновременно с дифференциальным и интегральным исчислением. Первые важные шаги в дифференциальной геометрии сделал Эйлер, из его ближайших последователей самый крупный – Лежандр. К числу первых проблем, вставших в дифференциальной геометрии, относятся развертка двумерных поверхностей (например цилиндров) на плоскость и общая проблема картографии, то есть поиск наилучшей проекции Земли на плоскость.

Гаусс активно участвовал в решении обеих проблем, но исторически наиболее важный его вклад в дифференциальную геометрию состоит в идентификации и исследовании некоторых инвариантов, внутренне присущих геометрическим объектам; самый важный из них – кривизна. Идеи Гаусса привели к совершенно новому взгляду на объекты дифференциальной геометрии, впоследствии названному "внутренней дифференциальной геометрией". Свои основные результаты в этой области Гаусс опубликовал сам; материал, опубликованный посмертно, не стоит обсуждать.

Исходный вопрос, который "Работа на Копенгагенскую премию" призвана была решить, состоял в выводе всех возможных проекций, могущих быть полезными при составлении карт. Говоря точнее, задача состояла в том, чтобы отобразить произвольную заданную область в другую область таким образом, чтобы "образ был похож на оригинал в своих мельчайших

*После предложения Шумахера Гаусс сам сформулировал тему этой работы, однако воздерживался от участия в конкурсе в течение двух лет. Но серьезных соперников не было, и он, наконец, представил свою работу; она была награждена по справедливости.

частях". Частными решениями были стереографическая проекция сферы, известная еще с античности, и проекция Меркатора. Для отображения сферы (глобуса) на плоскость проблема уже была решена во всей общности Ламбертом. В своем труде Гаусс дает полное решение, выводя общий критерий конформности для отображений из произвольных областей в произвольные. Его основными средствами служат интегральные преобразования, нужные, чтобы привести квадрат линейного элемента к виду, знакомому по исследованиям Эйлера и Лагранжа.

Ход рассуждений Гаусса прям и начинается со следующего условия сходства (§ 4): ". . . чтобы все бесконечно малые линии, начинающиеся в некоторой точке первой области и целиком содержащиеся в ней, были пропорциональны соответствующим линиям во второй области; и, во-вторых, чтобы первые линии образовали такие же углы, что и вторые". Среди прочих результатов, Гаусс получил простое условие того, что две области могут быть развернуты друг на друга. Работа на Копенгагенскую премию заканчивается обсуждением трех примеров: конформного отображения плоскостей в плоскости, конформного отображения сферы в плоскость и конформного отображения эллипсоида вращения на плоскость.

Аналитические средства, применяемые в этой работе, – это так называемые уравнения Коши–Римана[16] и уже упомянутые преобразования квад-

Гаусс в 1828 году (литография С. Бендиксена) ратов линейных элементов в соответствующих областях. В ней впервые конформные отображения рассматриваются в общем виде; при этом дается много примеров и есть зачатки теории изометрических отображений.

Основная работа Гаусса по дифференциальной геометрии – это "Общие исследования о кривых поверхностях" (закончена в 1827 году, опубликована в 1828 году). При всем своем значении, эта статья все же слишком мала, чтобы сравниться с "Арифметическими исследованиями" и их ролью в развитии теории чисел, несмотря на сходство заглавий. В ней Гаусс ввел несколько новых концепций, в том числе уже упомянутую меру кривизны и развитую в § 13 основу для важного нового направления в дифференциальной геометрии – внутренней дифференциальной геометрии. Двумя главными источниками вдохновения Гаусса, как он сам писал, были астрономические соображения, включая сферическую тригонометрию, и теоретическая геодезия. Вся работа относится только к трем измерениям и к евклидову пространству E^3. Астрономические конструкции Гаусса привели его к следующему определению меры кривизны $K(A)$ в точке A поверхности M в E^3:

$$K(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\text{площадь } (\zeta(D_\epsilon))}{\text{площадь } (D_\epsilon)} \quad [\text{"гауссова кривизна"}], \qquad (*)$$

где D_ϵ – компактная ϵ-окрестность точки A в M, а $\zeta(D_\epsilon)$ – соответствующая гиперповерхность на S^2; фактически, это – полная кривизна (curvatura totalis или integra) рассматриваемой поверхности. Это модернизованная формулировка, особенно формула (*). Формулу меры кривизны поверхности, которую дал Гаусс, можно найти в секции 10 "Общих исследований ...":

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2},$$

где A, B, C и D, D', D'' означают некоторые дифференциалы. Запись эта, конечно, гораздо менее ясна, чем (*). Дальнейшая проблема состоит в явном вычислении кривизны; самый выдающийся результат – это знаменитое уравнение

$$4(EG - F^2)k = E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right) +$$
$$+F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp}\right)+$$
$$+G\left(\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right) -$$
$$-2(EG - F^2)\left(\frac{d^2E}{dq^2} - 2\frac{d^2F}{dpdq} + \frac{d^2G}{dp^2}\right),$$

где E, F и G – параметры, характеризующие исследуемую поверхность. Это уравнение называется "уравнением Гаусса". Оно применимо к любой области M, являющейся образом вложения f: $U \to E^3$, где U – открытое подмножество R^2. Геометрический смысл этого уравнения выражает знаменитая "теорема чести" (theorema egregium) Гаусса:

Если область в E^3 можно развернуть (то есть изометрично отобразить) в другую область в E^3, то значения гауссовой кривизны в соответствующих точках равны.

Эта теорема привела к знаменитой и влиятельной программе Гаусса по развитию внутренней дифференциальной геометрии. Процитируем итог, подведенный самим Гауссом (Собрание трудов, том IV, с. 344–345):

Эти теоремы ведут к новому взгляду на теорию кривых поверхностей и открывают широкую, совершенно неизведанную область для исследования. Если интерпретировать эти области не как границы твердых тел, а как пленки, которые можно изгибать, но не растягивать, то становится видно, что надо рассматривать два типа существенно различных соотношений, а именно те, которые предполагают определенную форму поверхности в пространстве, и те, что независимы от формы поверхности. Здесь обсуждаются последние. Согласно сказанному выше, кривизна принадлежит к их числу. Легко видеть, что фигуры на поверхности, их углы, их площади и полная кривизна, кратчайший путь между точками и т.п., попадают в эту же категорию. Все эти исследования основаны на том факте, что природа кривой поверхности дана неопределенным линейным элементом вида $\sqrt{(Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2)}$.[17]

Дальнейшие результаты Гаусса связаны со свойствами некоторых геодезических на гиперповерхности в E^3, в том числе известная лемма Гаусса о существовании ортогональной сети кривых на M. В сводке Гаусс указывает еще и на тот факт, что полная кривизна "геодезического треугольника" равна тому, на сколько сумма его углов превосходит 180°. Это знаменитое утверждение известно теперь как теорема Гаусса – Бонне. Заканчиваются "Общие исследования . . ." обобщением теоремы Лежандра о соотношении между углами сферического треугольника; Гаусс исследовал это соотношение и для несферических треугольников. Одно потенциально важное приложение касалось геодезических треугольников: Гаусс рассмотрел в качестве примера свой большой "проверочный треугольник" (из своего геодезического исследования) Брокен – Хохенгаген – Инзельберг, для которого вычислил необходимые поправки. Сам Гаусс вполне сознавал тот факт, что это только теоретическое упражнение; 1 марта 1827 года он писал Ольберсу следующее:

В практическом отношении это, однако, совершенно неважно, потому что на самом деле даже для самых больших треугольников, которые можно измерять на Земле, эта неравномерность в распределении незаметна, но честь науки требует ясного понимания природы этой неравномерности . . .[18]

Достаточно странно, что в опубликованной статье он приводит это соображение лишь в завуалированной форме.

Быть может, стилистически "Общие исследования . . ." – самая совершенная из коротких работ Гаусса: изложение аналитично, прямолинейно и очень четко. Гаусс имел все основания считать ее вполне законченным и в разумном смысле полным выражением своих геометрических идей. Часто жалеют о том, что там не упоминается неевклидова геометрия; однако, эта работа и так весьма насыщена содержанием: здесь Гаусс черпал из всех источников, питавших его геометрическую интуицию, — анализа, астрономии, сферической тригонометрии и геодезии; результатом явился ряд понятий и теорем, отразивший весь диапазон его геометрических идей и оказавший решающее влияние на дальнейшее развитие предмета.

По сравнению с Эйлером, самым важным своим предшественником в дифференциальной геометрии, Гаусс продвинулся намного дальше. Хотя Эйлер употреблял термин "мера кривизны", в его работе это — глобальное свойство, неприменимое, скажем, к описанию кривизны Земли. Мотивация работы Гаусса в дифференциальной геометрии прочно коренится в его геодезической работе, хотя по степени общности она намного превзошла свой источник.

Рассмотрим здесь же работу Гаусса в родственной области математики, вариационном исчислении. Это направление начало развиваться в восемнадцатом веке в связи с решением экстремальных проблем математической физики; по физическим, так же как и по математическим и философским причинам, вариационное исчисление было центральной темой математики восемнадцатого века.

Средства решения экстремальных задач — это интегрирование по частям и интегральные преобразования. Трудности при этом двоякие. Во-первых, математическая формулировка экстремальной задачи часто неясна, и может быть неочевидно, какой из нескольких возможных подходов приведет к решению. Особенно трудно подобрать правильные или наилучшие граничные условия. Вторая из основных проблем состоит в разработке, в рамках дифференциального и интегрального исчисления, адекватного и математически корректного метода для определения вариаций и работы с ними. Исторически, было два принципиально различных подхода: вариация области интегрирования и вариация независимой переменной. Первый метод математически проще, но бесполезен, если нужно решать геометрическую задачу. Лагранж нашел основную формулу для вариации независимой переменной; проблема состоит в варьировании выражения

$$J = \iint V(x, y, z, p, q, \ldots)dx\,dy,$$

где z — функция независимых переменных x, y, а p, q, ... — частные производные.

При некоторых упрощающих предположениях Лагранж вывел формулу

$$\delta J = \iint \Omega\omega dx\,dy + \iint \left(\frac{\partial(A + V\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(B + V\delta y)}{\partial y} \right) dx\,dy,$$

где

$$\delta \int z = \int \delta z, \qquad \delta dx = d\delta x, \qquad \delta d^2 x = d^2 \delta x$$

(формальное дифференцирование по $x, y, z, dx, dy, dz, \ldots$) и

$$\omega = \delta z - p\delta x - p\delta y, \qquad \Omega = N - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$A = P\omega + \ldots, \qquad B = Q\omega + \ldots,$$

где

$$\frac{\partial V}{\partial z} = N, \quad \frac{\partial V}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial V}{\partial q} = Q.$$

Ни одна из статей Гаусса не посвящена прямо и специально вариационному исчислению; важнейший его вклад в эту дисциплину дан в работе "Общие принципы теории фигуры жидкости, находящейся в состоянии равновесия" ("Principa generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, 1829–30), которую естественно отнести к математической физике, и в "Общих исследованиях о кривых поверхностях" (1828), его основной статье по дифференциальной геометрии, разработанной выше. Из обеих статей видно, как хорошо был знаком Гаусс с теорией и практикой интегрирования и какие средства у него были, чтобы прямо браться за вариационные задачи.

Математически, основная задача "Общих принципов . . ." сводится к варьированию выражения

$$W = \frac{1}{2} \iint [z^2 - g^2(x, y)]\, dx\, dy +$$

$$+ (\alpha^2 - 2\beta^2) \iint \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dx\, dy + \alpha^2 \iint [z - g(x, y)]\, dx\, dy, \qquad (*)$$

где α, β – константы, а функция $z = g(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема, и выражения

$$S' = \iint [z - g(x, y)]\, dx\, dy, \qquad (**)$$

где надо варьировать и z и область интегрирования.

Лагранж пользовался δ-символом так же свободно, как и его предшественники (особенно Эйлер), и не определял его корректно в общем виде. Его результаты были правильны, но ему приходилось работать при очень узких ограничениях, чтобы обеспечить их законность. В 1816 году Пуассон, наконец, сумел дать непротиворечивое и общее определение δ-символа (не покидая известной области частных производных, подстановок и т.п.), но работа Гаусса, хотя и более поздняя, видимо, независима от результатов Пуассона.

Физически (*) означает следующее. Надо минимизировать выражение W относительно всех инфинитезимальных перемен формы постоянного объема жидкости. Формула (**) выражает объем рассматриваемой жидкости. Конкретно имеется в виду однородная несжимаемая жидкость в сосуде, условия равновесия которой выводятся из принципа виртуальных перемещений.

Хотя вариационным исчислением занимались много, Гаусс дает минимум исторических объяснений; не обсуждает он и современную работу Ома, разработавшего в деталях теорию вариаций в области интегрирования.[19]

Решение проблемы, данное Гауссом, состоит из трех шагов:

(1) Формулировка первой вариации.

(2) Преобразование первой вариации путем интегрирования по частям.

(3) Вывод уравнения в частных производных и его граничных условий.

Что касается физического смысла, то центральная задача состоит в оптимизации поверхности U, заданной функцией $z(x, y)$ в декартовых координатах. Ход мысли Гаусса крайне прям и глубоко геометричен: U варьируется путем замены каждой точки (x, y, z) другой точкой в ее окрестности. Введение направляющих косинусов ξ, η, ζ внешней нормали к U позволяет записать:

$$\delta U = \int dU\left((\eta^2+\zeta^2)\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \zeta\eta\frac{\partial\delta y}{\partial x} - \zeta\xi\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right) +$$

$$+ \int dU\left(-\xi\eta\frac{\partial\delta x}{\partial y} + (\zeta^2+\xi^2)\frac{\partial\delta y}{\partial y} - \eta\zeta\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right). \qquad (***)$$

Причина того, что эта формула так сложна, состоит в том, что Гаусс взялся сразу за два дела, соединив первую вариацию с вычислением площади гиперповерхности. В своем выводе Гаусс не расчленял эти две различные и независимые проблемы; конечно, можно прийти к тому же самому решению, если начать с формул для площади кривой поверхности, которые Гаусс доказал гораздо раньше, в 1813 году. Аналогичные прямые идеи Гаусс применял, когда требовались другие первые вариации. Вычисления ясны и легки для понимания.

Второй шаг состоит в преобразовании равенства (***) путем интегрирования по частям. Можно прямо получить

$$\partial U = \iint\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)dx\,dy + \iint C\,dx\,dy, \qquad (****)$$

где A, B, C — однородные функции x и y. С помощью чисто геометрических аргументов можно преобразовать первое слагаемое в (****) в интеграл вдоль границы области U; фактически это обобщение теоремы Грина, известное как теорема Гаусса о дивергенции.*[20]

В третьей части "Общих принципов . . ." рассматриваются получившиеся дифференциальные уравнения и их граничные условия. Нам она здесь неинтересна, и мы ее обсуждать не будем.

Наш обзор может показаться совершенно неудовлетворительным по тем же (надеемся) причинам, почему работа Гаусса в этой области не сказала большого исторического влияния. Вразрез с общим развитием этой области (и в противоположность тому, как написаны "Общие исследования . . .") Гаусс не отделил здесь общую теорию от частной задачи; со своей технической виртуозностью он, видимо, наслаждался трудностями, встававшими на его пути, избегая всякого обращения к общей теории, уже известной в то время.

На этом мы закончим наш беглый обзор; Больца в своем очерке, опубликованном в Собрании трудов, том X, 2, дает гораздо больше информации; особенно примечателен его анализ "Общих исследований . . .", о которых мы больше говорить не будем. Что касается "Общих принципов . . .", то мы еще вернемся к их физическому содержанию, обсуждая физические работы Гаусса.

ГЛАВА 10

ПРИГЛАШЕНИЕ В БЕРЛИН И ОБЩЕСТВЕННАЯ РОЛЬ ГАУССА. КОНЕЦ ВТОРОГО БРАКА

Геодезическая деятельность Гаусса раздвинула его репутацию за пределы узкого круга профессиональных астрономов и математиков. Но это не единственная причина того, почему было бы неправильно рассматривать эту деятельность как трату времени и отход от главного. Так же, как астрономы считают Гаусса одним из своих, геодезисты считают Гаусса одним из великих геодезистов, человеком, установившим новые стандарты эф-

*Явная формула Гаусса, включающая в себя теорему Грина как частный случай, имела вид

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx\,dy = \int (AY - BX)\,dP, \qquad (*****)$$

где P – кривая, служащая границей U. В этом смысле теория Гаусса зависит от конкретной формы U; кроме того, A, B (и C в (****)) суть функции U, но (*****) совпадает с теоремой Грина, если U – двумерная плоскость.

фективности в наблюдениях и точности в теории. Работа Гаусса стала образцом для всех последующих начинаний; его дотошность, его неустанное преодоление крупных препятствий, его изобретательность, в частности изобретение гелиотропа, вызывали всеобщее восхищение.

"Астрономический журнал" (Astronomische Zeitschrift) Шумахера* был важным средством выражения для Гаусса в этот период. Со своими астрономическими и геодезическими статьями Гаусс был довольно частым его автором; кроме того, он часто консультировал Шумахера и рецензировал рукописи. Косвенно это было полезно Гауссу, потому что он узнавал через Шумахера о свежих начинаниях, важных слухах и деятельности других астрономов. Шумахер затеял свой журнал в период роста научных контактов. В 1824 году Гаусс использовал этот журнал для несколько иной, "социальной" цели, опубликовав заявление в защиту (Ehrenerklärung) венгерского астронома Паскича.[2] Паскич, директор обсерватории в Будапеште, был обвинен в фальсификации результатов наблюдений. Это обвинение, первоначально выдвинутое одним из его ассистентов, было поддержано несколькими видными коллегами, вероятно, по личным мотивам. Моральная и научная репутация Паскича была под угрозой и ему грозило позорное увольнение. Гаусс, чье мнение, будучи выраженным, стало бы решающим, тщательно изучил ситуацию. Когда он публично выразил убеждение, что Паскич был оболган, другие астрономы быстро к нему присоединились, и репутация Паскича была восстановлена без дальнейших дискуссий. Для Гаусса это было исключительный шаг: дело не касалось его ни лично, ни профессионально, и Паскич был лишь посредственным ученым. Но, обсудив это дело с Ольберсом, Шумахером и Бесселем, Гаусс быстро преодолел свой стереотип и смог сделать публичное заявление по спорному и, строго говоря, ненаучному вопросу.**

Между 1822 и 1824/25 годами состоялся второй раунд серьезных переговоров с Берлином. Движущими силами с прусской стороны были по-прежнему братья Гумбольдты: Александр, ученый и исследователь, и Вильгельм, просвещенный политик и придворный.*** Вторая жена Гаусса, Минна, и ее родня всегда тянулись в Берлин и подталкивали его к переезду. В это время ситуация была особенно благоприятной, потому, что кончина постоянного секретаря[3] естественно-научного отделения Академии позволила предложить Гауссу подобающую и хорошо оплачиваемую должность. Пруссия была наиболее передовым и энергичным из германских государств, и представлялось только естественным, чтобы ведущий немецкий мате-

Кроме "Астрономического журнала", выходившего очень часто, Шумахер основал еще "Астрономические труды" (Astronomische Abhandlungen), задуманные как ежегодный отчет.[1]

** Великодушие Гаусса мало помогло Паскичу – он все же потерял свою должность. Однако ему было позволено с почетом уйти в отставку и получить пенсию.

*** Этот старомодный эпитет здесь вполне уместен. Прусская система правления, несмотря на нововведения 1810–1815 годов, оставалась по существу феодальной в смысле 17-го и 18-го веков.

матик и ученый обосновался в Берлине. Переговоры были медленными и сложными, отчасти из-за медлительности берлинских чиновников, отчасти потому, что Гаусс в них прямо не участвовал. Их вел от его имени фон Линденау, бывший директор Зеебергской обсерватории, а теперь первый министр маленького княжества в Саксонии. Задача Линденау была незавидной, потому что Гаусс никогда не говорил прямо, чего он ожидает или требует; в Берлине, с другой стороны, с трудом приходили к каким-нибудь решениям. Обо всем важном, даже (и особенно) о жалованье Гаусса, приходилось спрашивать у короля.[4] В письме к Линденау, написанном незадолго до окончания переговоров, прусский генерал фон Мюффинг так определил положение, которое предстояло занять Гауссу:

С тем, что он не должен быть занят в университете, мы все согласились. Но так как министр, чтобы достать сумму, которой пока еще не хватает для его должности, должен иметь формальное основание, то он подал прошение королю, которое поддержал и я, о том, чтобы Гаусс помогал ему, министру, во всем, что касается математических занятий, советов и руководства общественными делами или учреждениями, такими как обсерватория, политехнические институты и т.п., и брал это на себя. Это также одобрено, и министр получил для этого согласие на 600 – 700 рейхсталеров, так что с этой стороны нет больше препятствий. Дополнительно будут отпущены достаточные средства на транспорт и на вступление в должность.

Что касается должности, то я думаю, что, кроме звания академика, никакое положение не было бы более почетным. Если надворный советник Гаусс сработается с министром, то он будет иметь большое влияние на всю систему математического образования в государстве, где для него также найдется обширное поле деятельности, и он сможет стать исключительно полезен. Он будет пользоваться огромным доверием министра и первых советников, а все остальное зависит от него самого. К тому же предстоит строительство политехнического института, план которого я уже составил, на который он будет иметь большое влияние, и это в то же время даст возможность для его усовершенствования. . .[5]

После того как предложение Берлина с окончательными условиями было принято, Гаусс конфиденциально информировал Ганноверское правительство, чтобы посмотреть, готово ли оно на равноценное предложение. В этот момент казалось вероятным, что Гаусс поступит на прусскую службу. Но вышло другое. Поупрямившись некоторое время, Ганновер увеличил его жалованье до суммы, предложенной Берлином; это, вместе с заверениями о дальнейшей заботе о нем и об обсерватории, решило дело, и Гаусс остался в Гёттингене. Такой исход удивил и разочаровал многих из его друзей-"патриотов", в том числе Ольберса, Бесселя и, конечно, Линденау. По их мнению, подходящим местом для Гаусса был Берлин. Предметом их стремлений была прогрессивная и процветающая Пруссия, представлявшаяся единственной надеждой на создание единого германского государства.

Уже тогда, а тем более впоследствии, мотивы Гаусса многими понимались неверно. Куммер несколькими годами спустя считал, что Гаусс не поехал в Берлин из-за разницы в несколько талеров.[6] Есть свидетельства того, что Гаусс поехал бы, если бы Берлин действовал быстрее и, что еще важнее, Ганновер был бы менее отзывчив. Помимо этого очевидно, что многие аспекты положения в Берлине должны были доставить Гауссу большие неудобства. Берлин был заинтересован в его имени и его престиже, возможно, в его способности стимулировать и вдохновлять младших коллег. Он был приглашен стать организатором и реформатором, поднять высшее образование до уровня вызывавших восхищение французских школ. Однако было ясно, что Гауссу лучше было оставаться в Гёттингене. Это избавляло его от утомительного переезда с неизбежными перерывами в научной работе, и здесь он мог рассчитывать на бо́льшую независимость и на лучшую жизнь при условии улучшения некоторых деталей в его материальном положении. Именно это и произошло, но позиции, которую занял Гаусс, неясной уже для его современников, суждено было стать еще менее приемлемой для последующих поколений, научившихся верить в достоинства организованного высшего образования и прогрессивных организаторов.[7]

Показателен для общей ситуации еще один аспект этой истории. Прусская бюрократия была исключительно неэффективна в своих переговорах с Гауссом; Ганновер же, при всем своем реакционном консерватизме, был гораздо более гибок и отзывчив. Требования Гаусса нуждались в одобрении кабинета в Лондоне, но положительный ответ пришел немедленно, безо всех околичностей и неловкостей, свойственных прусской государственной машине. В очередной раз старая система показала свое превосходство, а претензии Берлина на лучшую организацию и бо́льшую эффективность проявили свою несостоятельность. В ретроспективе можно даже удивляться тому, что Гаусс вообще серьезно заинтересовался берлинским предложением, но таким предложением нельзя было пренебречь; еще одним фактором могли быть требования и заботы семьи.[8] Как мы увидим ниже, Гаусс не был вполне свободен от искушений и увлечений своего времени, нуждавшегося в организаторах и администраторах. Когда Гаусс принял окончательное решение, пересилили его первоначальные инстинкты; социально и политически Гаусс был прочно привязан к миру, существовавшему в первые двадцать лет его жизни.

Благодаря его репутации, у Гаусса часто просили совета по поводу вакантных должностей.[9] Такая просьба была типичной в те (и более поздние) времена, и он проявлял немалый интерес к карусели вакансий и к устройству своих учеников. Благодаря тесной связи с Шумахером он был в курсе общего положения, но влияние и уважение, которыми он пользовался, конечно же, были не единственными причинами того, что к его советам, как правило, прислушивались. Суждения Гаусса были, насколько мы знаем, справедливы и точны. Он принимал во внимание не только научную квалификацию кандидата, но и его способности и умения как педагога и организатора. Таким образом, Гаусс оказывал значительное влияние на развитие немецких университетов (и особенно обсерваторий при них) в самый критический период. Как раз в это время происходило резкое расширение системы высшего образования, общий уровень, особенно преподавания, поднимался, и германская система выходила на ведущее место в Европе. Стандарты строгости и точности, установленные Гауссом, стали общепринятыми к середине столетия, и можно не сомневаться, что этому в значительной мере способствовало его прямое влияние.

Личное влияние Гаусса, вместе с влиянием опубликованных им работ, помогло заложить прочную основу не только для расширения научной деятельности, но и для технологического и экономического прогресса последних двух третей столетия. Хотя Гаусс оставался в маленьком, изолированном Гёттингене, его реальное влияние было не меньше, чем если бы он отправился в Берлин, чтобы начать новую карьеру в Пруссии.

Где Гаусс действительно превратился в "сына своего времени" – это в частной жизни. Мы уже описали обстоятельства, приведшие к его быстрому второму браку. Хотя было бы неправильно назвать этот брак несчастливым, его, конечно, нельзя сравнить с браком с Иоганной, а еще меньше – с воспоминаниями Гаусса о нем. После появления трех детей в период с 1811 по 1816 год Минна Гаусс потеряла здоровье, а в большой мере – и способность вести хозяйство и активный образ жизни. Она все больше переходила на постельный режим, и в 1831 году серьезно заболела, вероятно, – туберкулезом легких. В начале супружеской жизни Минна была очень независимой: она была хорошо образована, по общественному положению превосходила своего мужа, и была для него единственной надеждой вернуть душевное равновесие и домашнее счастье. Эта последняя надежда так и не осуществилась, будь то из-за долгой болезни Минны, проблем с детьми или, скорее всего, просто невозможности вернуть первое счастье юности. Мир Минны был внове для Гаусса, но он адаптировался к нему быстро и полностью. В 1811 году, когда они поженились, Гаусс был еще способным молодым ученым низкого происхождения, полным благодарности к государю, чьему великодушию он, казалось, был обязан всем. Второй брак сделал его зятем маститого профессора права, дал ему материально независимую жену и прочное положение в обществе.[10] Во многих отношениях Гаусс не менялся никогда, однако второй брак оставил на нем неизгладимый след. Ниже мы вернемся к его финансовым сделкам, связанным в основном с правительственными и частными железнодорожными бонами, о которых мы читаем в переписке с Шумахером и Герлингом.[11]

Более заметны были заботы Гаусса о карьере его сыновей, когда в нем проявилось то, что у немцев называется "чувством семьи" (Familiensinn). Впрочем, усилия Гаусса имели лишь частичный успех, а подчас и терпели горькие и унизительные поражения. Старший сын Иосиф, видимо, способный инженер, проделал часть Ганноверского исследования как помощник своего отца, а потом некоторое время сам возглавлял его. Впоследствии он поступил в Ганноверскую армию, но надежд у него там было мало, и даже неоднократные усилия отца не смогли обеспечить ему хотя бы запоздалого повышения по службе.[12] Консервативная ориентация правительства не оставляла никакой надежды на существенное дальнейшее продвижение;

Иосиф подал в отставку и поступил в частную железнодорожную компанию в Ганновере. Хотя он встречался с отцом лишь от случая к случаю, Гаусс старший издали восхищался своим сыном и его (довольно ограниченными) успехами и неоднократно упоминал о нем в своей переписке. Вот любопытный штрих для характеристики их взаимоотношений в поздние годы: в качестве подходящего подарка к 75-летию Иосиф преподнес отцу портрет маслом своего единственного сына, которому тогда было три и три четверти года.[13] Взаимоотношения с другими двумя сыновьями были не столь безоблачными и нарушали модный тогда идеал семейной гармонии.* И Евгений и Вильгельм после затяжных конфликтов с отцом уехали в Северную Америку. Разрыв и разлука были болезненны, особенно с Евгением, старшим из них, которого отец принуждал учиться юриспруденции, не привлекавшей одаренного юношу. Видимо, он не смог прямо отказать отцу; конфликт возник из-за разгульной жизни Евгения, когда он, будучи студентом в Гёттингене, наделал долгов из-за азартной игры. В 1830 году, когда настал кризис, Евгений отчаялся и уехал из Гёттингена в неизвестном направлении. Последняя встреча отца с сыном произошла в Бремене, где Евгений нашелся, но она, очевидно, была безрезультатной. Эмиграция показалась обоим лучшим выходом, и Евгений отплыл в Филадельфию.** Этот последний разговор, должно быть, причинил отцу страшную боль; до этого времени он, видимо, избегал прямых конфронтаций и берег свои чувства. Он не раз советовался со своим добропорядочным, но, безусловно, не слишком проницательным другом Герлингом, полагаясь на его советы больше, чем на свою интуицию.[14] Когда читаешь переписку Гаусса с Евгением, а позже с Вильгельмом по поводу их взаимоотношений, возникает ощущение полного бессилия: Гаусс не мог и не хотел понять проблемы своих детей. Его самого воспитывали совершенно иначе, но теперь он стал пленником того социального мира, в который он попал, и его ценностей. Гаусс стремился к тому, чтобы его семья соответствовала идеалам укреплявшегося среднего класса, хотя они должны были быть совершенно чужды ему самому. Он испытывал разочарование от того, что младшие сыновья не находили возможным для себя оправдать надежды отца.

Возвращаясь из Бремена домой, Гаусс захотел повидаться со своим сыном Иосифом, находившимся тогда вместе с Ганноверской армией в городке Пейне вблизи Ганновера. Конфликт с Евгением усугубила болезнь Минны, которой недавно стало хуже; прикованная к постели, она умоляла

---

*Период между наполеоновскими войнами и революцией 1848–1849 годов в Германии принято называть "обывательским" (Biedermeier). Это что-то вроде английского викторианства, только раньше и на немецкий лад.

**Наши источники крайне неполны, потому что некоторые письма, которые могли бы внести ясность, уничтожены или пропали; в других Гаусс пишет загадками. Его позиция неясна, но, видимо, он требовал либо эмиграции, либо полной и унизительной (без выплаты игровых долгов) покорности. Евгений выбрал первое и эмигрировал в Америку – обычная тогда участь блудных сыновей.

мужа отправиться навестить младшего сына Вильгельма.* Вильгельм тянулся к сельскому хозяйству – что не вызывало восторга у его родителей – и работал в то время учеником в одном из крупных ганноверских имений. Хотя работа ему нравилась, Вильгельму было несладко ни в одном из разных мест, где он нанимался, и хозяевам было несладко с ним. Вильгельм нуждался в постоянном внимании, и из переписки Гаусса с Герлингом мы знаем о все новых попытках устроить на работу эмоционального и взбалмошного сына. Надежды добиться независимости и приобрести хорошую ферму у Вильгельма не было, и он, наконец, решился попытать счатья в новом мире. Он эмигрировал в 1832 году, женившись на племяннице Бесселя, что для его отца было полной неожиданностью, и не особенно приятной.[15] Отъезд Евгения был бурным и оставил горький осадок с обеих сторон; на этот же раз никакого открытого конфликта не произошло. В обоих случаях эмиграция, как предполагалось и оказалось на деле, означала разлуку навсегда – отец никогда больше не увиделся с сыновьями, – хотя была некоторая переписка через Атлантику, даже с Евгением.[16] Одной из причин того, что конфликт с Евгением был так тяжел, было то, что он происходил во время последней стадии роковой болезни Минны; конец брáка совпал с крушением планов и надежд относительно будущего детей от этого брака. Младшая дочь Минны, Тереза, оставалась с отцом и вела его хозяйство до его смерти в 1855 году; только двое детей от первого брака, Иосиф и Минна, вели упорядоченную и размеренную жизнь, на которую родители надеялись для всех своих детей. Второй брак Гаусса, как мы видели, был омрачен конфликтами с детьми, а еще больше – долгой болезнью жены. Несомненно, ее болезнь была отчасти психологического происхождения; хотя внешне Минна была более независима, чем Иоганна, у нее никогда не было такой уверенности в себе и счастливой независимости ума. И любопытно и больно следить за тем, как постоянная тревожность отравляла всю жизнь Минны, вызывая у нее все более глубокое отчаяние. Приведем отрывки из двух писем, иллюстрирующие этот процесс: одно от 1811 года, года ее замужества, когда Гаусс ездил к Линденау (письмо к мужу от 30 сентября 1811 года), другое от 1830 года, когда Гаусс ездил в Бремен встречаться с Евгением. Сначала первое:

Твое письмо доставило детям много радости. Иосиф раз десять спросил о своем отце: когда он вернется? Минна, видимо, тоже очень этим интересуется, она специально спрашивала: привезет ли мне папа что-нибудь?

Если бы я могла сказать тебе, дорогой мой мальчик, сколько печальных моментов я пережила, пока тебя не было, не считая папиной болезни. Карл, мой Карл, ты действительно любишь меня? Я чувствую это: мои частые недомогания, наверное, часто обижают тебя, но клянусь Богом, я не мог с ними справиться; – и эта преувеличенная раздражительность, я не могу ее преодолеть, конечно – о конечно же, это следствие повышенной чувствительности нервов, но она изменится, она должна измениться, потому что, клянусь Богом, я сама чувствую себя крайне несчатной из-за нее. Только потерпи, мой хороший, не переставай меня любить из-за нее, она изменится, она должна измениться, в таком расстройстве я не хочу жить.

*Мы процитируем это письмо ниже, см. с. 122.

Как хорошо, что окончание каникул и присутствие твоей матери возвращают тебя нам, а то, я боюсь, ты столько увидишь и услышишь у Линденау, что можешь забыть о возвращении. Но не верь, что я тебе завидую, я так от души радуюсь, когда тебе хорошо, а я уверена, что тебе там хорошо. О, Боже небесный, – если бы я только могла дать тебе то счастье, которого ты от меня ожидаешь, Бог свидетель, чего мне не хватает, – это не доброй воли, а силы, только бы небо даровало детям вырасти хорошими людьми, тогда бы я сделала в жизни хоть часть того, что мне суждено. . .[17]

Теперь второе письмо:

Хотя я должна была дать Химли честное слово не писать совсем, я не могу его не нарушить ради тебя, дорогой Карл. – Как мне невыразимо посчастливилось, что ты чувствуешь себя неплохо, ах, теперь это лучшее, что у меня есть. Мое здоровье в общем много лучше, но ты все же не надейся, что благодаря этому я выгляжу много лучше. Печаль и болезнь так сильно подействовали на меня, что пройдет еще некоторое время, прежде чем мои глубокие морщины исчезнут. – Но это произойдет. – То, что ты пишешь о Евгении, было таким утешением для меня, Бог хорошо заботится о нас, по крайней мере я так ему была благодарна, узнав, что он помог тебе найти корабль, как мы могли ожидать найти такой корабль, совершенно готовый к отплытию. – Ах, это последнее, что ты смог сделать для него. – Бог да пребудет с ним. Я снова чувствую, что он не умер для нас, он блудный сын. Я понимаю, дорогой Карл, что тебе надо было еще остаться, не думай, что ты должен сообщать мне заранее, когда ты вернешся, этот день будет праздником, он принесет свет в темную ночь, окружающую меня. Теперь еще одна просьба, добрый, добрый Карл, не откажи в этом, устрой свое возвращение так, чтобы повидать Вильгельма. Иссен писала, так настойчиво об этом просила, и она и ее муж убеждены, что это хорошо на него подействует, тебя тоже обрадует встреча с ним, Карл. Карл, сделай это мне в утешение, мы в нем оба очень нуждаемся. – С Иосифом не бывает хлопот, он воспитан и брав и хорош, а Вильгельму надо еще повзрослеть. . . Он писал тебе письмо, полное самых святых уверений, что его самым пылким желанием было бы радовать тебя и меня. Иссены уверяют нас, что теперь будут заботиться о нем еще лучше. Карл, можешь ли ты отказать мне в просьбе? Боже, я была так подавлена, так глубоко, я умоляю тебя, не откажи в том, что ты можешь сделать так легко. – Бог свидетель, я сделаю все, что в моих силах, чтобы подняться из этой смертельной ночи, ночи, полной печали. Я не могу продолжать, да поможет тебе Бог – Карл, Карл, не откажи мне в моих мольбах.*[18]

Для Гаусса кончина Минны представляла нечто совсем иное, чем положение, в котором он оказался 22 года назад, когда умерла Иоганна. Тогда пришел конец многим его мечтам и надеждам, что вызвало его беспомощное отчаяние, – теперь же не было ни места, ни причины для неумеренных чувств. Четыре дня спустя после смерти Минны Гаусс писал Ольберсу следующее:

Тяжелым временем для моего дома были все месяцы, прошедшие после моего последнего письма вам. Ах, как долго и как тяжело должна была страдать бедная женщина, прежде чем ее сердце могло сломиться. Наконец, оно сдало. Вечером двенадцатого она оставила земные заботы, и сегодня земля приняла обратно ее смертные останки.

Обе мои дочери были и есть настоящая опора для меня; моего старшего сына, который сейчас дополняет и продолжает прошлогодние наблюдения в Люнебурге, я надеюсь видеть здесь через пару недель. Мой младший сын в Поппенхагене начинает поправляться от почти роковой болезни, которую он подхватил шесть надель назад.

* Из имеющихся данных не вполне ясен повод этого письма, но представляется очевидным, что оно было написано тогда, когда Гаусс ездил в Бремен на последнюю встречу с Евгением.

Со мной советовались по поводу прежней должности Боненбергера, и я предложил Герлинга, который, в свою очередь, получил приглашение в Тюбинген на очень выгодных условиях. . .[19]

В 1809 году, когда умерла Иоганна, будущее было гораздо менее ясным для Гаусса, чем теперь, 22 года спустя. В 1809 году Гаусс только что начал свою карьеру и мог ждать исполнение многих надежд. Лишь за два года до этого он стал директором Гёттингенской обсерватории; его слава неуклонно росла; ему было обещано спроектировать и построить новую обсерваторию, причем в соответствии с его требованиями и планами; новый социальный порядок, хотя и не был в его личном вкусе, аплодировал ему и дал ему всю научную и социальную свободу, какая ему была нужна; его работа и его исследования гармонично сочетали чистую математику и приложения. Однако ситуация была непрочной, более непрочной, чем мог думать сам Гаусс: обсерватория еще не была построена, и ее построению суждено было стать много более долгим, чем предполагалось; правление короля Жерома в Вестфалии было шатким, и само его существование зависело от дальнейших военных успехов Наполеона. Было неясно, как будут развиваться научные интересы Гаусса и каковы будут запросы общества.

Ситуация в 1831 году была иная. Теперь будущее выглядело определенным и предсказуемым. Перемены произошли без особенно активного участия Гаусса. Многое произошло за двадцать лет второго брака, и Гаусс адаптировался к этим событиям, видимо, озабоченный больше, чтобы ему не мешали вести ту научную работу, которую ему случалось вести (или которую ему поручали), чем активным выбором областей исследования Самым значительным сдвигом в социальном плане после поражения Наполеона было возникновение в Германии буржуазии как политической и социальной силы; этому вполне под стать флирт Гаусса с поднимающимся средним классом и попытки усвоить его ценности и убеждения, характерный для периода его второго супружества. Конфликты с двумя младшими сыновьями имеют ту же природу, равно как и интерес и внимание к берлинскому предложению. Трудно сказать, что произошло бы, если бы Гаусс принял этот пост, и функции и общий дух которого были так непохожи на то, что его всегда привлекало. Быть может, он бы не особенно изменился; он бы выполнял свои новые обязанности так же пунктуально и добросовестно, как поручения Ганноверского правительства, когда ежегодно тратил все лето на геодезические работы.* Эти работы, сначала вызвавшие у него интерес, быстро превратились в бесконечную однообразную поденщину. Письма этого периода полны жалоб; ирония в том, что редко это жалобы на работу как таковую, – чаще на погоду (жара ему особенно докучала), плохие транспорт и помещения, и очень часто – на здоровье.

* Хотя отчет об этих работах много обширнее других работ Гаусса, они были не единственным его официальным поручением. Позже ему поручили еще менее интересную работу по стандартизации Ганноверских мер и весов.

Изредка встречается робкая жалоба на здоровье Минны, бывшее в эти годы одной из главных забот и печалей.[21]

По обычным меркам, этот второй брак был благополучен и даже мог быть назван счастливым, но невозможно сказать, в какой мере хвори Минны препятствовали близости супругов. Во втором из двух писем, цитированных выше, проскальзывает проявление некоторого чувства вины в связи с болезнью; быть может, муж винил ее в недостаточном сопротивлении болезни.

Здесь не место для психологических гипотез, но несомненно, что тон смирения и подавленности преобладает в последние годы этого брака и в течение всего этого периода жизни Гаусса. Это помогает объяснить странное впечатление бесцветности, которое производит его жизнь этого периода. Внешне это был период непрестанной активности, наполненный плодотворной теоретической и практической работой, различными путешествиями и поездками. В 1815 году Гаусс ездил в Мюнхен со своим сыном Иосифом и ассистентом, чтобы встретиться с мастерами, у которых он покупал приборы для новой обсерватории. Были еще поездки в Бремен, в Берлин и в южную Германию. Дома большая перемена произошла в 1817 году, когда престарелая и почти слепая мать Гаусса переехала в Гёттинген к своему знаменитому сыну и его семье (отец умер в 1808 году). Однако все эти события происходят как бы за вуалью, и сцена не становится живее, даже когда узнаешь детали, как в случае конфликта с Евгением. Даже в этом случае Гаусс предстает скорее пассивным зрителем, чем активным участником; это показывает его беспомощность и желание положиться на советы друзей. Процитируем письмо к Герлингу, написанное 13 ноября 1831 года, через несколько месяцев после смерти Минны:

Я утратил все желание и волю жить и не знаю, вернутся ли они когда-нибудь. Что меня так подавляет – это взаимоотношения с шалопаем в А[мерике], который позорит мое имя. Вы знаете, какое известие я получил от него четыре месяца назад. Я вижу, как было бы хорошо, если бы я тогда ответил ему так, как Вы советовали, чтобы сразу отвергнуть все его ожидания; но я вообще не сумел ему ответить. Теперь от него пришло новое послание. Бесценно было бы для меня, если бы Вы, дорогой друг, были поблизости как по многим другим причинам, так и для того, чтобы Ваша испытанная дружба и Ваш ясный ум могли дать мне точку опоры в моих затруднениях. Но судьба не захотела даровать мне этой радости в жизни. Поэтому позвольте мне как можно лучше воспользоваться Вашей дружбой на расстоянии, потому что я, по очевидным причинам, не могу посоветоваться здесь ни с кем, подходящим для этого. Прилагаю его письмо. Прошу Вас, дражайший Герлинг, сказать мне Ваше мнение прямо; и я умалчиваю, чтобы услышать Ваше беспристрастное суждение, о том впечатлении, которое оно произвело на меня...[22]

Смерть второй жены, фактически ее медленное умирание в течение более чем десяти лет, разрыв с Евгением и утрата Вильгельма окончательно поставили крест на всех надеждах, какие мог питать Гаусс после смерти Иоганны в 1809 году.

Быть может, это не совсем случайность, что переписка с Бесселем замерла и дружба с ним оборвалась очень скоро после смерти Минны. Мы не знаем точно, что произошло, но знаем, что Гаусс обиделся на то, что Бессель не выразил ему своего соболезнования (чего тот не делал никогда, из принципа). Бессель был странным человеком, неровным и трудным в общении, и не следует винить в их разрыве одного Гаусса. Но Гаусс становился все более обидчивым, и меньше чем когда-либо был готов признать кого бы то ни было равным партнером в научной дискусии. Из всех регулярных корреспондентов Гаусса только Бессель и Ольберс спорили с ним и критиковали его. Но Ольберс был стар, обезоруживающе скромен и любезен. Гаусс многим был обязан ему и никогда не забывал об этом. Бессель же сам многим был обязан Гауссу; однако он был упрям, и переписка с ним была утомительной и опасной.[23] Во многих отношениях Бессель выражал тенденции и дух девятнадцатого столетия; он был изобретателен в усилиях привлечь Гаусса в Берлин для участия в прогрессивном научном развитии Пруссии. В своем желании отгородиться от опасных эмоциональных переживаний, Гаусс порвал дружбу с Бесселем, в то же самое время он нашел необходимым фактически порвать отношения со своим сыном Евгением, попросившим у отца помощи (и денег) вскоре после своего приезда в США*.

В общем, Гаусс свел свои личные контакты к минимуму, представляя собой типичную фигуру сурового отца, жестокого и неприступного ради блага своего ребенка. И в этом тоже Гаусс полагался на советы и помощь своего друга Герлинга. Эта отключенность от всего, что могло обеспокоить его, внешняя невозмутимость, доставались Гауссу дорогой ценой, и другие интересы и заботы должны были занять пустующее место.[24] Теперь он много сил уделял интроспекции: присутствие матери (пережившей свою вторую сноху почти на восемь лет) помогало ему вспоминать детские годы и успехи. Хотя нет прямых доказательств этой перемены в позиции и взглядах, многое на нее указывает, например, склонность к тому, чтобы беседовать с восхищенными посетителями о своей жизни и занимать их анекдотами о своем детстве.[25] Теперь все чаще случалось так, что Гаусс обрывал разговоры о новых математических результатах, полученных другими, заявляя, что он уже давно знает все это и просто не позаботился опубликовать. Подобные заявления он делал, в частности, по поводу работ Абеля, Яноша Бояи, Эйзенштейна и Якоби[26]. Необходимо указать на то, что посмертная публикация незаконченных работ и записных книжек Гаусса в удивительно большой мере подтвердила подобные заявления с его стороны. Тем не менее, его широкие претензии часто чрезмерны – он неточно вспоминает то, до чего дошел в своей работе, указывает неверные даты или не осознает (математические, т.е. внутренние, а не внешние)

---

* Евгений поступил в армию США и просил у отца денег, чтобы иметь возможность уйти в отставку, не выслужив полных пяти лет. Гаусс не дал ему денег.

причины того, почему он не опубликовал тот или иной результат или теорию.[27]

К концу периода, который мы рассматриваем, растущая ригидность Гаусса, усиливающееся чувство неудовлетворенности становились все более очевидными, так же, как и его желание, чтобы его оставили одного. Скоро мы увидим, что были сдвиги и в другом направлении, которые помогли ему отчасти вернуть себе энтузиазм и способность к творчеству; здесь мы хотели только показать причины для его отчужденности, самоуверенности и пренебрежения к работам младших колллег, в чем его часто обвиняют. Одна из причин всего этого – то, что Гаусс был глубоко несчастлив и потерял надежду, после чего ему все казалось безразличным и не стоящим больших усилий. Однако жизнь Гаусса шла вперед, и в ней произошло еще много такого, о чем стоит рассказать.

ГЛАВА 11

ФИЗИКА

В 1831 году профессором физики в Гёттингенском университете, на одном факультете с Гауссом, стал Вильгельм Вебер. Впервые Гаусс встретил Вебера в 1828 году, на ежегодном съезде германских ученых и врачей в Берлине. В то время Вебер не был еще профессором: он преподавал в университете в Галле в должности приват-доцента. Хотя во время встречи Веберу было всего двадцать четыре года, Вебер в разговоре с Гауссом так понравился ему, что после кончины Тобиаса Майера младшего Гаусс назвал его как первого кандидата на освободившееся место.[1]

Приезд Вебера был удобен для Гаусса и в научном и в личном плане. Вебер ввел Гаусса в новые области исследования и привлек его к различным физическим исследованиям, в основном экспериментальным. Их сотрудничество было очень плодотворным, и присутствие Вебера превратило период, который мог стать эмоционально трудным и научно бесплодным, в эру активных исследований и радостных открытий.

Гаусс всегда интересовался физикой, но бóльшая часть его ранних исследований, кроме непосредственно связанных с его астрономической и геодезической работой, были чисто теоретическими.[2] Две самые важные из его ранних работ, вышедшие в 1829 году, – это "Об одном новом общем принципе механики" (Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik) и "Общие принципы теории формы жидкости, находящейся в состоянии равновесия" (Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii). Есть, как мы увидим и более поздние важные теоретические работы, но уже в связи с экспериментами широкого диапазона и масштаба. Гаусс проявил большой интерес к организации таких больших экспериментов с их сложной и дорогостоящей организацией; для девятнадцатого века такой интерес гораздо более характерен, чем для восемнадцатого.*

"Об одном новом общем принципе механики" – очень теоретическая работа. В ней всего четыре страницы, и она впервые появилась в "Журнале чистой и прикладной математики" (Journal für reine und angewandte Mathematik), недавно основанном Креллем. Разрабатывая идеи, восходящие к Мопертюи и Даламберу, Гаусс выводит новый всеобъемлющий экстремальный принцип механики, "принцип наименьшего принуждения". Основное положение статьи состоит в том, что всякое движение механической системы в любой момент времени максимально уподобляется свободному движению; другими словами, принуждение всегда минимально. Этот подход дал Гауссу возможность единого подхода к статическим и динамическим проблемам механики. Мерой принуждения системы в данный момент времени служит сумма произведений квадратов перемещений всех точек на их массы. Все понятия, которыми пользуется Гаусс, тщательно определены; кроме того, он устанавливает связь между своим принципом и принципом виртуальных перемещений Даламбера, который близок к его принципу, но слабее. Из введения Гаусса видно, как он интересовался экстремальными проблемами; в нем он обсуждает имевшиеся к тому времени принципы и дает неформальную мотивацию своего подхода. Статья заканчивается удивительным замечанием об аналогии между его новым принципом и методом наименьших квадратов, то есть аналогии между законами природы и деятельностью математика-вычислителя. Статья, как должно быть ясно из сказанного, представляет значительный интерес для теоретической механики (см. с. 145).

Вторая работа 1829 года, "Общие принципы. . .", не столь фундаментальна. Это теоретическая статья, не связанная ни с каким экспериментом. Сам Гаусс называл ее упражнением в теоретической физике; здесь, как и в других статьях, одной из целей, видимо, является показать, как много может сделать математика для понимания и объяснения природы. Тема "Общих принципов. . ." – это обсуждение сил притяжения (молекулярных сил), действующих на малых расстояниях и объясняющих капиллярные явления. Здесь предшественником Гаусса был Лаплас, и Гаусс ссылается на его работу, замечая, что теория Лапласа опирается на два фундаментальных предположения, а именно на некоторое дифференциальное уравнение, описывающее равновесие жидкости, и на то, что в состоянии равновесия поверхность жидкости соприкасается со стенкой сосуда под определенным углом. Дифференциальное уравнение Лаплас вывел, а второе свое

*Конечно, это замечание поверхностно, и ему не следует придавать слишком большого значения. Во многих областях, во всяком случае в тех, где работал Гаусс, состояние дел требовало дорогостоящих экспериментов. Гаусс никогда не давал воли причудам и не тратил денег зря; он не стал организатором науки, но ему, несомненно, очень нравилось проектировать дорогостоящие эксперименты и руководить их проведением, даже если их осуществление, как в случае геодезического исследования, порождало огромные проблемы и требовало от Гаусса постоянного внимания.

предположение он не смог доказать и оставил его в виде правдоподобной эвристической догадки. Целью Гаусса было вывести результаты Лапласа строго и совершенно иным путем. Его метод – это, в сущности, применение его принципа наименьшего принуждения к виртуальным перемещениям в том обобщенном виде, какой им придал Фурье (от уравнений к неравенствам). Математически эта статья есть приложение вариационного исчисления; физически она доказывает, что принцип Гаусса фактически сильнее, чем принцип Даламбера, хотя сам Гаусс, кажется, не заметил этого логического следствия из нее. Процитируем формулировку Гауссом одного из его наиболее интересных результатов, данную в поучительной сводке, приготовленной им для "Гёттингенских научных сообщений" (Göttingche Gelehrte Anzeigen):

Пусть s – объем жидкости, h – высота ее центра масс над произвольной горизонтальной поверхностью, T – площадь той части поверхности жидкости, которая прикасается к сосуду, и U – площадь остальной (свободной) части поверхности; тогда в состоянии равновесия минимально выражение

$$sh + (\alpha\alpha - 2\beta\beta)\,T + \alpha\alpha U,$$

где α и β – определенные константы, зависящие от отношения веса к интенсивности молекулярного притяжения частиц жидкости друг к другу и стенок сосуда к жидкости. Итак, здесь мы видим, что в результате трудного и тонкого исследования получается выражение закона равеновесия, которое, будучи доступно общему пониманию, делает очевидным разрешение конфликта между различными силами, вступающими здесь в игру. Если бы действовала только сила тяжести, то при равновесии центр масс жидкости занял бы самое низкое возможное положение, то есть h было бы минимально. Если бы можно было пренебречь силой тяжести и притяжением сосуда и учитывать только взаимное притяжение частиц жидкости, то они приняли бы идеальную сферическую форму, то есть $T + U$ было бы минимально. Наконец, если бы не было ни силы тяжести, ни взаимного притяжения между частицами жидкости, то жидкость растеклась бы по поверхности сосуда, так что T было бы максимально, а T – минимально. Вполне естественно, что совместное действие всех трех сил минимизирует некоторую комбинацию этих трех параметров, хотя само собой разумеется, что настоящее обоснование этого закона должно быть основано на совершенно строгих математических рассуждениях, существенно зависящих от природы молекулярного притяжения.[3]

В качестве легкого следствия отсюда получаются формулы подъема и опускания жидкости в капиллярах. Гаусс также исследовал влияние трения, более сложной формы сосудов и т.п.

Мы уже говорили, что, будучи рассмотрена как математическая, статья "Общие принципы..." должна быть причислена к работам Гаусса по вариационному исчислению. Кроме того, в ней есть интересные результаты по теории потенциала. Таким образом, эту статью следует рассматривать в контексте других работ Гаусса.

Приход Вебера знаменует начало систематических занятий Гаусса физикой. Теперь он заинтересовался экспериментальными и практическими вопросами, требовавшими решения конкретных технических и инженерных задач. Однако его деятельность сохраняла свою теоретическую ориентацию, так же как раньше его астрономическая и геодезическая работа сопровождалась глубокими теоретическими исследованиями. Естественно, прежняя работа Гаусса в математической физике имела много связей с его новыми исследованиями; общим знаменателем служит возможность интерпретации этой работы как применения теории потенциала к природным явлениям, главным образом к геомагнетизму и к теории электричества. Сам Гаусс употреблял выражение "теория потенциала"[4] и пришел, как мы увидим, к признанию, что она, в частности закон Кулона, является одним из основных средств математического и научного понимания природы, сравнимым с методом наименьших квадратов. Есть очень интригующая аналогия с математической астрономией, где движения планет, управляемые законами Кеплера, – важнейший пример в натуральной философии (почти точного) объяснения нетривиального научного явления.

Есть и другие причины того, почему теория потенциала стала таким мощным орудием в руках Гаусса. Мы неоднократно указывали на то, как свободно Гаусс владел интегрированием сложных выражений, интегральными преобразованиями и тому подобной техникой. Эта техника оказалась особенно плодотворна в теории потенциала, где Гаусс соединил свое мастерство в этой области с мощной геометрической интуицией. Он умел ставить корректные и предельно прямые вопросы и применять к ним свою аналитическую технику. Проиллюстрируем это одной деталью из "Теории притяжения. . .". В ходе своих исследований Гаусс столкнулся с необходимостью определить силу взаимного притяжения двух эллипсоидов.[5] Вместо прямого вычисления он показал, что произвольные эллипсоиды без потери общности можно заменить конфокальными. Решение Гаусса быстрее и проще, чем работа его предшественников; более того, это первое строгое решение, потому что Гаусс сумел избежать некоторых расходящихся рядов, возникавших в прежних доказательствах. Разложение в ряд – частый и важный прием в теории потенциала. Поэтому неудивительно, что сферические функции, впервые введенные Лежандром, были для Гаусса полезнейшим средством. Гаусс интересовался не только ими, но и другими специальными функциями; в одной из статей, опубликованных посмертно, дана геометрическая интерпретация сферических функций (см. Собрание трудов, том V), которую Гаусс развил в связи с электродинамическими соображениями. Он замечает, что члены разложения сферической функции можно интерпретировать как вклад диполя, квадруполя и т.д. Плодотворная связь теории потенциала с комплексным анализом не установлена явно, хотя Гаусс знал теорему, равносильную интегральной теореме Коши. Этому не следует удивляться, учитывая, что Гаусс хорошо владел различными основными интегральными теоремами в действительной области, а также геометрическим представлением комплексной плоскости. До Гаусса было отнюдь не ясно, что закон Кулона столь фундаментален и управляет всеми видами различных потенциалов. Гаусс понимал это уже гораздо лучше, хотя все же не полностью, как показывают его сложные электромагнитные формулы (см. ниже).

Этой темой занимался уже Лаплас. Гаусс впервые строго доказал (в статье "Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния" (Allgemeine Lehrsätze..., 1840), что

$$V = \begin{cases} 0 \text{ вне,} \\ -4\pi\rho \text{ внутри тела с массой } M \text{ и плотностью } \rho. \end{cases}$$

Можно не сомневаться в том, что Гаусс не был знаком со статьей Грина "О применении математического анализа к теории электричества и магнетизма" (An Essay on the Applications of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, 1828).[6] Работы Пуассона Гауссу были известны, но первое строгое доказательство дал, конечно, Гаусс.

В 1832 году Гаусс начал свои исследования магнитного поля Земли. Изучение земного магнетизма было одним из центров внимания тогдашней науки; Гаусс уже проявлял к нему некоторый интерес, но без активного участия. Инициатива в этом случае, кажется, исходила не от Вебера, а от Александра фон Гумбольдта, старавшегося заручиться участием Гаусса в своем проекте: установить сеть наблюдательных пунктов по всему земному шару. План Гумбольдта был первой попыткой такого "глобального" эксперимента; он первый увидел ясно необходимость всеобщего стандарта измерительных средств, точности и надежности. Можно было надеяться, что по результатам этих наблюдений удастся судить о распределении земного магнетизма, локальных и временных переменах интенсивности и склонении и наклонении; наконец, можно было надеяться, что эти результаты прольют свет на происхождение земного магнетизма и дадут основу для построения удовлетворительной теории. Такой программой Гаусс увлекся сразу.

Поскольку теоретические соображения оказывали глубокое влияние на его экспериментальную работу, мы начнем с объяснения теоретических основ геомагнитных исследований Гаусса. Важны все три статьи Гаусса на эту тему; они называются:

"Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере" (Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata, 1832), "Общая теория земного магнетизма" (Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus, 1839) и "Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния" (Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im vergehrsten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirgenden Anziehungs- und Abstossungskräfte, 1840). Упомянем также монументальный атлас земного магнетизма, который в 1840 году издали Гаусс и Вебер в соавторстве с К.Б. Гольдшмидтом, ассистентом Гаусса.

Ограничимся рассмотрением "Общей теории земного магнетизма", потому что обзор этой статьи даст нам достаточное представление о технике Гаусса. Она начинается с обсуждения современных теорий земного магнетизма, в том числе предположения о существовании одного магнита в центре Земли или двух отдельных магнитов где-то внутри Земли. Гаусс не вступает в подробное обсуждение этих теорий; сказав о них вкратце, он дает "эмпирическое" определение земного магнетизма как той силы, которая толкает магнитную стрелку в определенном направлении.

Пусть μ – магнитный поток на расстоянии ρ от источника магнитной силы. Магнитный потенциал V определяется как

$$V = -\int \frac{d\mu}{d\rho}. \qquad (*)$$

Кроме этой формулы, Гаусс выводит для V несколько других выражений, тоже в интегральной форме, и дает интуитивную интерпретацию тех значений, которые V принимает на поверхности Земли. После этого Гаусс дает определение магнитных полюсов и показывает, что их может быть только два. За этим следует обсуждение и аналитическое определение линий магнитного поля. Во всем этом еще нет новых результатов, но работа Гаусса существенно проясняет и упрощает имевшиеся теории и их концептуальные рамки. До этого не было даже ясно, почему должно быть только два магнитных полюса, и многие из тогдашних теорий предполагали, что их более двух. Следующая теорема Гаусса была новой и очень важной для экспериментаторов. Она относилась к определению величины горизонтальной компоненты магнитного поля вместе с углом наклона; этим определяется магнитное поле. Гаусс специально показывает, что можно вычислить западную (соответственно восточную) компоненту магнитной интенсивности по ее северной (соответственно южной) компоненте, если последняя известна на всей поверхности Земли. Обратное верно с дополнительным условием, что северная (соответственно южная) компонента известна хотя бы на одной кривой, соединяющей северный и южный полюса. Гаусс получил эти (удивительные) результаты, выражая горизонтальные компоненты как функции от географической долготы и широты. Отсутствие симметрии объясняется тем, что меридианы сходятся на полюсах, а параллели нигде не сходятся. Этот результат не был понят современниками: например, Гумбольдт долгое время считал наблюдения Гаусса неполными.[7]

Гаусс вычислил вертикальную компоненту магнитного потенциала V, разлагая ее в ряд по степеням величины, обратной радиусу Земли. Получаются сферические функции, которые можно оценить с помощью уравнения Лапласа

$$0 = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2},$$

где x, y, z — прямоугольные координаты произвольной точки. Основное предположение, делающее рассуждение возможным, относится к источнику магнитной силы, который следует обнаружить где-то внутри Земли. Тогда, по Гауссу, вертикальная компонента — это функция расстояния от поверхности Земли. Знание магнитного потенциала на поверхности Земли достаточно для вычисления потенциала в произвольной точке; далее, как указывалось выше, потенциал полностью определен своей долготной горизонтальной компонентой (соответственно широтной компонентой и долготной компонентой в одной точке). Этим завершается теоретическая часть статьи; из практических выводов упомянем только то, что Гаусс смог вычислить, опираясь на свою теорию, местоположение Южного магнитного полюса (конечно, близкое к географическому Северному полюсу). В 1841 году американский исследователь капитан Уилкс достиг его в точке, очень близкой к предсказанной Гауссом. "Общая теория..." заканчивается обширными таблицами результатов наблюдений и графических изображений магнитного поля.

"Общая теория..." — центральная работа Гаусса по теории магнетизма. Его прежняя статья, хотя и представляющая интерес для специалиста, изучающего развитие Гаусса как ученого, менее ясна и более зависима от работ других ученых, особенно Пуассона. В "Общей теории..." Гаусс излагает предмет последовательно и без сюрпризов; теория магнетизма предстает здесь в гораздо большей мере, чем в прежней работе, как математическая теория, а конкретнее — как применение теории потенциала. Из того, что мы объясняли выше, очевидно, как Гаусс использовал свою превосходную математическую технику, как только основные определения и факты были ясны. Работа "Интенсивность земной магнитной силы..." содержит самый оригинальный и, быть может, самый известный вклад Гаусса в теорию магнетизма в узком смысле — определение абсолютной меры для магнитной силы. За отправную точку Гаусс берет то обстоятельство, что магнетизм (магнитная жидкость, как он выражается) может (и должен) быть описан своими эффектами; он переходит к определению единицы магнитной жидкости как такой величины, которая отталкивает другую единицу магнитной жидкости на единичном расстоянии с единичной силой. Именно в этой статье впервые в литературе объясняется необходимость такого определения; в ретроспективе эта необходимость очевидна или даже тривиальна, но она была отнюдь не очевидна для современников Гаусса. Они были слишком заняты своими попытками понять природу самого явления магнетизма и найти концептуальную основу для удовлетворительной теории.

По эстетическим и практическим мотивам Гаусс был заинтересован в построении эффективной теории; как и в астрономии и в геодезии, его теоретическая работа сопровождалась широкими наблюдениями и измерениями. Эта практическая работа началась до приезда Вебера, а после его приезда выросла в самое интенсивное и плодотворное подлинное сотрудничество в жизни Гаусса.

Первые наблюдения Гаусса относились к местному склонению в Гёттингене и его изменению во времени. Как мы уже объясняли, надо было определить горизонтальную компоненту $\mathfrak{H}$ магнитной интенсивности. Фактически измерение проводилось косвенно, путем наблюдения величины $\mathfrak{H}\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ – магнитный момент. Гаусс избрал этот подход, потому что в этом случае физические параметры магнитной стрелки не входят явно в вычисления.

Произведение $\mathfrak{H}\mathfrak{M}$ можно определить по продолжительности τ колебаний стрелки, которая предполагается свободно вращающейся на вертикальной оси. Величину τ можно измерить точно; Гаусс даже учитывает (обычно игнорируемое) влияние кручения той нити, на которой подвешена стрелка. Для определения $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ нужна вторая, вспомогательная стрелка, тоже свободно вращающаяся на вертикальной оси. Величина $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ определяется по отклонению первой стрелки, вызванному присутствием второй. Этим объясняется предпочтение, которое отдавал Гаусс тяжелым стрелкам с долгими временами колебаний – фактически, это была единственная важная деталь техники Гаусса, от которой экспериментаторы впоследствии отказались.*

Непостоянство во времени интенсивности земного магнетизма было новым и еще необъясненным явлением. Исследование Гаусса, как и его современников, имело целью составить карту магнитного поля Земли и собрать информацию о локальных, глобальных и временных изменениях и возмущениях. Поэтому А. фон Гумбольдт предложил установить календарь наблюдений, определявший даты систематических измерений магнитного склонения как можно большим числом станций. Гаусс согласился участвовать; вскоре он взял инициативу в свои руки и существенно изменил первоначальный план Гумбольдта.

Эта деятельность Гаусса привела к созданию магнитной обсерватории, основанию "Магнитного союза" (Magnetischer Verein) и его журнала и к составлению и публикации атласа земного магнетизма. Уже эти три конкретных результата участия Гаусса в проекте показывают, почему Гёттинген стал признанным центром международных исследований земного маг-

* Из-за этой второстепенной детали была желчная полемика между обычно мягким Вильгельмом Вебером и физиком Ламонтом. Гаусс работал со стрелками весом примерно в 25 фунтов, Ламонт настаивал на работе со стрелками весом в 2 г или меньше. Шумахер, будучи, естественно, на стороне своего учителя, делал все, чтобы разжечь страсти и подтолкнул Вебера к резкому ответу.[8]

нетизма в период деятельности Гаусса. Увидев магнитную обсерваторию Гумбольдта в Берлине, Гаусс стал настаивать на создании магнитной обсерватории в Гёттингене и спроектировал ее; в 1833 году она была построена в удобной близости от астрономической обсерватории; все, что обычно делается из железа, было в ней медным, включая гвозди, так как медь не намагничивается. Во избежание сквозняков, все окна и двери закрывались очень плотно. В таком здании, со своей обычной аккуратностью и техникой обработки данных наблюдений, Гаусс немедленно смог дать своим коллегам немало надежных результатов. Вскоре после завершения лаборатории Гаусс взялся за улучшение процедур и техники Гумбольдта. Гумбольдт предлагал измерения, длившиеся 44 часа и повторявшиеся каждые двадцать минут; Гаусс ввел вместо них такие, где интервалы составляли всего пять минут, и общее время было меньше. Эта перемена резко упростила эксперименты, и результаты стали точнее; лишь теперь стало возможно зарегистрировать много мелких, но интересных и важных местных возмущений. В результате усилий Гаусса по установлению по всему миру сети наблюдательных пунктов был образован "Магнитный союз". В 1837 году Гаусс и Вебер начали издавать свой собственный ежегодник "Результаты наблюдений Магнитного союза" (Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins), в котором публиковались соответствующие наблюдения. На основе этих данных Гаусс и Вебер впоследствии составили атлас земного магнетизма. Всего вышло шесть выпусков ежегодника, с 1836 по 1841 год.

В ходе исследования магнетизма Гаусс был очень активен как корреспондент и организатор, еще более активен, чем в годы геодезических работ. Он постоянно обменивался опытом с другими наблюдателями, совещался об оптимальной организации экспериментов, обсуждал и исправлял ошибки. Гаусс хорошо сознавал свое превосходство в знаниях и способностях; это влияло на его поступки и бросается в глаза при чтении следующего его письма к почтенному А.фон Гумбольдту, написанного в 1833 году, когда магнитная обсерватория еще строилась:

. . .Что те незначительные эксперименты, которые я имел удовольствие проводить пять лет назад, когда я был у вас, побудили меня заняться магнетизмом, я не могу сказать с определенностью, так как на самом деле мой интерес к нему так же стар, как и мои занятия точными науками вообще, то есть ему больше сорока лет; только у меня есть тот недостаток, что мне нравится со всем усердием взяться за какое-либо дело, только если в моем распоряжении есть средства проникнуть глубоко, а раньше это было не так. Дружеские отношения, в которых я состою с нашим замечательным Вебером, та необычайная любезность, с которой он предоставил все средства физического кабинета в мое распоряжение и поддерживает меня со всем богатством своих практических идей, сделали возможными мои первые шаги, а первый импульс к этому исходил от Вас, благодаря письму к Веберу (в конце 1831 года), в котором вы упомянули станции, устроенные под Вашим руководством для наблюдения ежедневных изменений.[9]

Следует сказать еще об одном важном утверждении, или, вернее, предположении Гаусса. В "Интенсивности земной магнитной силы. . .", равно как и в "Общей теории земного магнетизма", делается явное утверждение о том, что распределение данной массы по некоторой площади определяет потенциал этой массы во всех точках площади единственным образом. Риман назвал эту гипотезу "принципом Дирихле", и под этим названием она стала известна в литературе. Гаусса, конечно, не волновали все те проблемы существования,[10] которые так горячо обсуждались впоследствии, и он не считал нужным доказывать свое предположение.

Когда Гаусс заинтересовался магнетизмом, его исследование дополнило и продолжило его прежнюю геодезическую работу, добавив еще одну важную деталь к еще не законченному научному описанию Земли. Добавочным стимулом послужили важные и увлекательные работы Эрстеда, Био и Савара, Ампера и Фарадея. Результаты их исследований заложили основы новой всеобъемлющей теории: электромагнетизма. Когда Гаусс вступал в эту область, теория заметно отставала в объяснении всех только что открытых явлений.

Работа Гаусса в области теоретической электродинамики не очень хорошо известна, но было бы неправильно не обсудить ее. Во второй части своего письма к Гумбольдту, процитированного выше, Гаусс сообщает о самом знаменитом из своих экспериментов с Вебером, электромагнитном телеграфе. Фактически Гаусс и Вебер построили телеграфы двух видов: один, для которого необходимую разность потенциалов обеспечивала гальваническая цепь, и другой, работавший с помощью магнитного индуктора. Вторая система была более стабильна, с ясными и различимыми реакциями магнитной стрелки. Первый их действующий телеграф, построенный в 1838 году, соединял астрономическую обсерваторию с лабораторией Вебера и имел в длину примерно 5000 футов. Гаусс ясно понимал практические перспективы этого изобретения, но так и не смог осуществить ни одного из тех крупномасштабных экспериментов, которые могли быть ему интересны. Его планы были реалистичны и дальновидны: он предложил протянуть телеграфные линии вдоль железной дороги, возможно, используя один из рельсов как проводник (что технически было непригодно).*

Гаусс не проник глубоко в электродинамическую теорию – он относился к ней как заинтересованный неспециалист, очарованный этим новым научным направлением. Он обсуждал с Вебером различные электромагнит-

*Не следует забывать, что идея передачи сигналов на большие расстояния была не чужда Гауссу; во время геодезического исследования он много экспериментировал с акустическими и оптическими сигналами. Работа Гаусса и Вебера по созданию телеграфа не была оригинальной (как часто заявляют). Были более ранние попытки и эксперименты, начиная с последнего десятилетия восемнадцатого века, и даже идея Гаусса о проведении телеграфных линий связи в обширной Российской империи не была новой. Друзья называли эксперименты Гаусса и Вебера "ложным путем" (Irrweg) и считали их поверхностными и ненаучными.[11]

ные явления и их теоретические объяснения и делал далеко идущие замечания в письмах и заметках, но не выдвинул единой теории, подобной той, которую он так успешно построил для земного магнетизма. Переписка, особенно с Ольберсом, показывает, как интересовали его обильные открытия новых явлений; есть, например, обсуждение возможности электромагнитного мотора, о котором Ольберс прочел в газетных статьях и которую Гаусс считал весьма сомнительной.*[12] Есть также разрозненные исследования природы электромагнитного поля, в ходе которых Гаусс внес некоторый вклад в теорию электромагнитного дальнодействия; на эту точку зрения позже встали Вебер и Карл Нейман. Впоследствии ее отменила и вытеснила теория Максвелла. В начале нашего столетия Шварцшильд показал, что линия мысли Гаусса фактически представляла заслуживающую внимания альтернативу, которую можно было развить в последовательную и эффективную теорию.[13] В основе соображений Гаусса лежит формула, которая описывает, хотя не вполне правильно, влияние двух электрических зарядов друг на друга в виде дифференциального уравнения в частных производных. Рассуждение очень беглое, и заметки никогда не предназначались к публикации, но видно, как Гаусс старался применить свое знание теории потенциала к электромагнитным явлениям, не вдаваясь в физические детали.[14]

ДОПОЛНЕНИЕ VIII

ЛИЧНЫЕ ИНТЕРЕСЫ ГАУССА ПОСЛЕ КОНЧИНЫ ЕГО ВТОРОЙ ЖЕНЫ

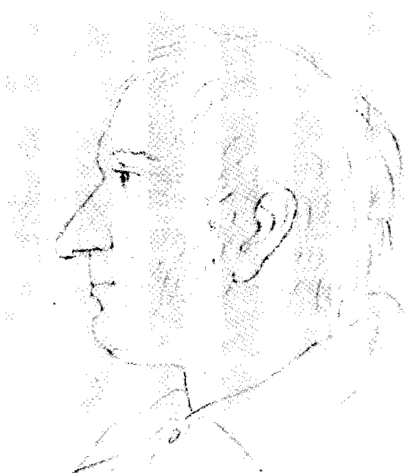
Как и следовало ожидать, кончина второй жены не оторвала Гаусса от кропотливой проработки деталей экспериментальных исследований. Погружение в эту техническую деятельность было благотворно для Гаусса, и он отдавал ей бóльшую часть тех сил, какие мог найти для напряженной научной работы. Но, несмотря на свою погруженность в работу, Гаусс отнюдь не был односторонен. Сестра Вебера, которая вела холостяцкое хозяйство своего брата, рассказывает, что великий человек к тому времени уже научился вращаться в обществе, быть вежливым и вести себя как джентльмен. Он включался в беседы на разные темы и настаивал на том, чтобы разговор не сводился на научные темы в ее присутствии. "Таким светским человеком он был", – замечает она.[1]

Сегодня, спустя много времени, трудно различить, каковы были действительные интересы Гаусса и были ли его реплики, известные нам из не-

*Вероятно, это были сообщения об экспериментах, проводившихся тогда в Америке. Гаусс отнесся к ним скептически; допуская теоретическую возможность построения, он не верил, что электромагнитный мотор может быть сильнее мыши.

реписки и рассказов посетителей, просто реакцией на определенные внешние стимулы или выражением подлинного интереса. Есть лишь немного ситуаций, где можно с уверенностью говорить о подлинном эмоциональном возбуждении, – кажется, Гаусс старался избегать его, насколько возможно. Мы уже говорили о двух конфликтах, в которых Гаусс проявил крайнюю раздражительность: один с его сыном Вильгельмом, другой с Александром фон Гумбольдтом при обсуждении оптимальной стратегии геомагнитных измерений. Мягкая и дружелюбная натура Вильгельма помогла ему избежать открытой ссоры, но его независимость и упрямство, очевидно, обижали отца. Их отношения были неровными все время, пока Вильгельм не эмигрировал и не поселился в Луизиане, чтобы начать новую жизнь в качестве фермера; В 1838 году Гаусс старший с удовольствием и гордостью мог сообщить Ольберсу, что у него родился первый внук, гражданин нового света.[2]

В то самое время, когда Гаусс стремился избежать угрозы своему душевному равновесию вследствие конфликта с одним из сыновей, он яростно сражался против проектов магнитных экспериментов, выдвинутых Гумбольдтом, в первую очередь в переписке с Шумахером.[3] Дело не в том, был ли Гаусс прав – в сущности он был прав – а, скорее, в том, что некоторые детали проекта экспериментов были так важны для Гаусса, что он открыто и очень эмоционально нападал на человека, который был (и оставался) для него дорогим другом и авторитетным коллегой.



Гаусс в возрасте около 55 лет (набросок И.Б. Листинга; архив Гаусса)

Хотя он не был полностью погружен в эксперименты, они теперь представляли для Гаусса самый сильный научный интерес. Как ни интересовался он другими областями человеческой жизни и видами деятельности, он в определенных случаях проявлял очевидную уклончивость и старался сделать так, чтобы его не отвлекали и не вмешивали в дела, требующие слишком много времени. Гаусс никогда не был политически активен и даже воздерживался от открытых политических высказываний. Трудно сказать, каковы были его политические и, шире, философские мнения и убеждения, но на основе его реакций и отдельных замечаний в переписке можно составить о них хотя бы приблизительное представление. Несомненно, первое, что бросается в глаза, — это крайний политический оппортунизм. Гаусс никогда не расставался со своими юношескими впечатлениями того, как великодушие государя позволило ему стать ученым и помогло оставить позади узкий и безнадежный мир, в котором он родился. Гаусс, конечно, видел ограниченность и недостатки феодальной системы — они были слишком вопиющи, чтобы их не заметить; столь же очевидна была польза лично для него от реформ, которые были прямым или косвенным следствием Французской революции. Его отношение к эпохе, в которую он жил, было забавной смесью противоречивых симпатий. Он с благодарностью относился к старому порядку, что сочеталось с некоторым старомодным германским патриотизмом. (Его отрицательное отношение ко многим новым политическим веяниям было вызвано тем, что они пришли из Франции, и притом в связи с унизительными наполеоновскими войнами.) Другим фактором, определявшим политические позиции Гаусса, и приводившим к противоречивым последствиям, была здоровая и твердая самооценка. Его самоуверенность росла с годами, но она была удивительно большой даже в начале научной деятельности. Он был признанным князем математиков и легко принял это звание.

Позиция Гаусса, в сущности аристократическая, проявляется в этом отношении открыто и свободно. Примерами служат его оценки чужих работ или его требования об обеспечении приборами и о финансировании дорогостоящих экспериментов. Гаусс выдвигал свои требования без ложной скромности, был настойчив, когда необходимо, и иногда не оставлял своему правительству почти никакого иного выбора, кроме как последовать его совету.*[4]

Все это очень противоречиво и не складывается в цельный и последовательный характер. Видимо, различные черты характера брали верх в различных ситуациях; то, что мы видим в его "публичных" лекциях, могло

*Это больше, чем что-либо другое, помогает объяснить решение Гаусса не принимать приглашения в Берлин. Гаусс благоразумно (с его точки зрения) не участвовал в переговорах лично, но он не мог не чувствовать, что торговля и перебранка об его жалованье и других деталях его положения очень унизительны. В конечном счете, его пленили великодушие и быстрота аристократического Ганноверского правительства. В этом смысле Куммер был прав, говоря, что Гаусс не поехал в Берлин из-за разницы в несколько талеров.

проявляться совершенно иначе в личных контактах и в приватных суждениях.

Мы уже видели, каким было официальное отношение Гаусса как гражданина и как ученого к своему правительству. Оно определялось его первоначальной благодарностью и сильным желанием быть хорошим и полезным гражданином. К своим коллегам Гаусс был в общем безразличен – он был слишком уверен в превосходстве своего гения, чтобы слишком много спорить или слишком многого ожидать. Видимо, это же самое убеждение повлияло на его позицию в семейных конфликтах, и хотя работали также и другие психологические механизмы, они не представляют для нас интереса. Политические взгляды Гаусса обычно расценивают как консервативные по причинам, обрисованным выше, но также и из-за его антифранцузских чувств, которые он никогда не скрывал. Упомянем еще его пассивность во время протеста "Гёттингенской семерки" в 1837–1838 годах, которую мы обсудим ниже, и обычное непонимание позднейшими поколениями того, что означали в тот период германский национализм и консерватизм.

Эта картина непоследовательного поведения Гаусса, которую мы старались обрисовать, не должна быть сюрпризом даже для нас, приученных верить в преимущества сильного, законченного, цельного характера. Есть, конечно, общие принципы, от которых Гаусс не отходил никогда. Их обсуждение немедленно привело бы нас к запутанным и бесплодным дискуссиям об исторической ситуации. Такие дискуссии излишни, потому что весьма сомнительно, чтобы эпоха, в которую жил Гаусс, могла сделать цельную личность из человека с его положением и воспитанием. Взгляды Гаусса, по-нынешнему говоря, были фрагментарны или даже беспорядочны, но в его характере была большая (и необходимая для самосохранения) доля эгоизма. Характерным для Гаусса было и желание, чтобы его оставили одного, желание избежать проблем и конфликтов. Мы уже видели проявления этого желания в семейных конфликтах и мы встретимся с ними еще при обсуждении политической конфронтации 1837–1838 годов.[5]

Среди любимых современных писателей Гаусса были Вальтер Скотт, а из немцев – популярный романист Жан Поль. В свете вышесказанного, интерес Гаусса к современной литературе может показаться удивительным, но он станет понятнее, если заметить, что и Скотт и Жан Поль искусно избегали современных проблем. В особенности это относится к поздним романам Жан Поля; его творческий путь можно понимать как эволюцию от революционной активности к квиетистскому идиллизму, которую облегчал и смягчал резко ироничный юмор сомнительной мотивации.[6] Подход Жан Поля, очевидно, удовлетворял нужды его читателей, которым он давал отстраненную и (на поверхности) благодушную интерпретацию тех бурных перемен, которые проносились над страной и радикально меняли политическую и социальную жизнь. Гаусс совершенно не интересовался произведениями так называемых классической и романтической школ в немецкой литературе – и эмоциональный энтузиазм романтической школы, и элитарность верхней части среднего класса, характерная для классической школы, были совершенно чужды его миру и его жизненному опыту.*

ГЛАВА 12

ГЁТТИНГЕНСКАЯ СЕМЕРКА

Политически, времена, последовавшие за поражением Наполеона и установлением Системы европейской безопасности на Венском конгрессе в 1814–1815 годах, были тихие. Одним из первых крупных потрясений была буржуазная Французская революция 1830 года, во время которой Карл X был смещен и заменен Луи-Филиппом. Беспокойство во Франции вызвало отзвуки в нескольких других странах Европы и привело к образованию независимого королевства Бельгии, бывшей раньше частью Нидерландов. В Гёттингене, как и в других германских городах, было некоторое беспокойство, но оно мало касалось Гаусса. Он, конечно, не симпатизировал буйным студентам и их общественной активности, в успех которой он не верил.[1]

Но Гаусс оказался неправ. Протесты в Гёттингене и в других частях королевства были услышаны и в Ганновере, и в Лондоне. Без особого сопротивления правительство издало новую конституцию, гораздо более либеральную и демократичную, чем прежняя. Это поставило Ганновер вровень с большинством германских государств, тогда как раньше он, несмотря на связь с Англией, был самым реакционным в конфедерации германских государств (Deutscher Bund), сменившей Священную Римскую империю.

Новая конституция вызвала кризис 1837 – 1838 годов и повела к важным переменам в жизни Гаусса. В 1837 году король Англии Вильям IV умер, не оставив законного наследника. В Англии на трон взошла королева Виктория, но престолонаследие в Ганновере, согласно Салическому закону, не допускало женщин к управлению. В результате союз между

---

*Социальное происхождение Жан Поля примерно такое же, как у Гаусса, хотя в их развитии есть важные различия. Выйдя из низов, Жан Поль был беден, почти нищ в первые тридцать лет своей жизни. Он зарабатывал на жизнь как школьный учитель, и его первые публикации не имели успеха. Они были политически прогрессивны и несли следы влияния Руссо и французской революции. Впоследствии Жан Поль отошел от активизма; благодаря своим идиллическим и непристойным романам он стал любимцем литературных салонов и образованной публики.

Англией и Ганновером распался, и один из дядей королевы, герцог Камберленд, стал новым королем Ганновера.*

Кризис нарастал быстро, но все же не настолько быстро, чтобы помешать отпраздновать столетие университета в присутствии нового короля. Были речи, службы и вручение наград; однако во всех описаниях этого праздника проглядывает предчувствие неминуемой катастрофы, сопровождавшее все торжества. Вскоре после юбилея король отменил конституцию и аннулировал присягу, принесенную ей гражданскими служащими страны, в том числе профессором Гёттингенского университета. Причины этих поступков короля не вполне ясны; впрочем, в конституции был по меньшей мере один пункт, неприемлемый для него: этот пункт запрещал коронование принца, если у того был крупный физический недостаток, тогда как единственный сын короля был слепым.[2]

Высокомерный поступок Эрнеста Августа немедленно привел к конфронтации с народом, становившимся все более и более напористым; университет быстро превратился в один из центров протеста. Семь профессоров, в том числе востоковед Эвальд, женатый на дочери Гаусса Минне, и Вильгельм Вебер, подписали формальный протест, объявляя, что король не может отменить присягу, принесенную ими конституции 1831 года. Все семеро потеряли свои посты, а зачинщики из их числа (к которым Эвальд и Вебер не относились) были принуждены на следующий же день покинуть страну. По всей Германии прокатилась волна протеста, и все семеро получили приглашения на новые должности в других университетах. Вебер вернулся в свою родную Саксонию, в Лейпциг, а Эвальд, после двух лет работы в Лондоне, в конце концов принял приглашение в Тюбинген, в южной Германии. Даже Пруссия не осталась безучастной и привлекла выдающихся братьев Гримм в Берлин, а профессора права Альбрехта – в Кёнигсберг.[3] Эрнест Август отнесся к происшедшему спокойно, заметив, что ему нанимать университетских профессоров так же легко, как балетных танцоров.

То, что Гаусс остался безучастным к этому конфликту, истолковывалось по-разному: либо как проявление консерватизма, либо как предательство друзей и коллег. Сначала протестующие надеялись, что он присоединится к ним; его голос придал бы их протесту широкий резонанс и гораздо бóльшую силу. Но надежда эта была совершенно нереалистична, независимо от политических убеждений Гаусса. Он бы ни за что не выставил себя напоказ и не поставил бы свой авторитет на службу дела, столь далекому от его основных забот. Утрата Вебера была, очевидно, невос-

*Его тень над английским троном была главной причиной того, что рождение принцессы Виктории было встречено в Англии всеобщим вздохом облегчения. Герцог Эрнест (Август) был самым несимпатичным из вообще несимпатичных сыновей Георга III. Новый король был отъявленным реакционером, и его восшествие на английский престол могло бы привести к кризису, в котором сам монархический принцип мог пошатнуться. Сравните, например, биографию королевы Виктории, написанную Литтоном Стречи [Лондон, 1921].

полнимой, но даже это никогда бы не оправдало в глазах Гаусса использование его имени для посторонних и неподходящих целей.

Переписка с Шумахером дает хорошее представление об отношении Гаусса к этому конфликту. В этом отношении Шумахер не был настоящим единомышленником Гаусса. Он был гораздо более консервативен, чем Гаусс, в современном смысле этого слова, и неоднократно прямо называет действия протестующих безрассудными. Гаусс выражается гораздо сдержаннее. Впрочем, предметом их переписки служат не столько сами события, сколько то, какие последствия они могут иметь для самого Гаусса. Шумахер был встревожен известием о том, что Гаусс якобы готовился покинуть Гёттинген и принять должность в Париже; вот ответ Гаусса:

На Ваше письмо от 8-го, мой дражайший друг, которое, однако, попало в мои руки только сегодня, спешу ответить так же быстро, что касающаяся меня газетная статья (. . .) в этом отношении одна ложь из многих, наполняющих нынешние газеты, потому что в действительности я до сих пор никому не говорил, что я собираюсь или не собираюсь делать. Я желаю и надеюсь, что университет как организация не захочет вмешиваться в политическую неразбериху. Между тем Вы знаете, что два человека, стоящие очень близко ко мне, оказались втянуты в нее постольку, поскольку позволили склонить себя участвовать в подписи известного заявления. Расследование, проводимое в этой связи университетским судом, касается лишь, если мои сведения верны, распространения его без разрешения, а к этом те двое, на кого я намекнул, заведомо не имеют ни малейшего отношения. Поэтому я не могу поверить, что их подписи будут иметь для них нежелательные последствия, и пока эти два мощных магнита незыблемы и невредимы, Гёттинген останется для меня гораздо привлекательнее Парижа. Ну а если бы возникли обстоятельства, в силу которых я не смог бы жить в Гёттингене, то вопрос о том, предпочел ли бы я Париж другим местам, сейчас незачем обсуждать . . . [4]

Надежда Гаусса, что Эвальд и Вебер смогут остаться, была тщетной; в следующем письме к Шумахеру, написанном неделю спустя, Гаусс принимает неизбежное и указывает дату наблюдения звезды 57 δ Ариетис. Нет ни намека о намерении покинуть Гёттинген. Гаусс, однако, все же постарался косвенно ходатайствовать за своих двух друзей, но без успеха. Условия, выставленные королем для их восстановления, были слишком унизительными, чтобы их принять, и следует указать, что Гаусс никогда не побуждал Эвальда и Вебера открыто отречься или действовать против своих убеждений. Не следует забывать, что когда разразился этот кризис, Гауссу было уже шестьдесят и от младших коллег его отделяло целое поколение.[5]

Из поведения Гаусса во время конституционного кризиса не следует автоматически, что в политике он был консерватором, и есть ситуации, где он предстает в другом свете. Он выразил интерес и одобрение, когда в 1833 году Марбургский университет послал Герлинга как своего представителя в местный парламент в Касселе[6]; впоследствии, уже в старости, он не проявил никаких симпатий к революции 1848–1849 годов, но старался защитить Эйзенштейна и Якоби, проявивших активность на стороне либералов.[7] Не разделял Гаусс и антисемитизма Шумахера, хотя и не возражал на его злобные высказывания, даже когда они относились к Якоби, о котором Гаусс был высокого мнения. В общем, Гаусс, видимо, был чужд националистических предрассудков; даже его ненависть к Наполеону и к французскому господству в Европе не влияла на его оценки работ французских коллег и не развилась в отвращение ко всему, приходящему из-за Рейна.

ДОПОЛНЕНИЕ IX

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Итак, период неожиданной продуктивности и плодотворного сотрудничества с Вильгельмом Вебером оборвался в конце 1837 года. Гаусс и Вебер продолжали сотрудничать как редакторы своего журнала по геомагнетизму, но отсутствие личных контактов прекратило подлинный обмен идеями. В 1849 году, после очередного политического переворота, Вебер вернулся в Гёттинген; но к этому времени Гаусс уже состарился и не вел активных исследований. В последние восемнадцать лет своей жизни Гаусс был избавлен от тех болезненных потрясений, которые зачастую отравляли его прежние годы, но эти последние годы не были и продуктивными в строгом смысле, хотя Гауссу нельзя было отказать в активности. Ниже мы расскажем о научной работе Гаусса в этот период, но сначала, пожалуй, уместно обсудить то, в каком свете Гауссу виделись его собственные исследования и какие философские понятия были с этим связаны. В этот период жизни Гаусса они окончательно оформились и стали гораздо яснее, чем прежде.

Одним из наиболее эффективных средств, применявшихся Гауссом в его исследованиях, был метод наименьших квадратов. Впервые он возник в работе Гаусса в последние годы 18-го века; тогда Гаусс не придал ему особого значения; впоследствии Гаусс вспомнинал, что был уверен в том, что его предшественник по астрономической обсерватории в Гёттингене, Тобиас Майер старший, уже знал этот метод. Просмотрев бумаги Майера, Гаусс убедился в обратном; но и тогда он еще не мог решиться объявить себя автором этого метода. Таким образом, формально приоритет принадлежит Лежандру, опубликовавшему его в 1806 году впервые, хотя Гаусс, несомненно, неоднократно применял этот метод задолго до этой даты.[1]

Гаусс обосновывал и выводил метод наименьших квадратов несколькими существенно различными способами. Мы сосредоточим свое внимание на наиболее "зрелом" из его подходов, представленном в работе "Теория комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам" (Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae), части I и II

(1821, 1823). Часть I посвящена систематическому и теоретическому построению теории ошибок на основе теории вероятностей. Из двух принципиально различных видов ошибок – систематических и случайных (последние он называет Zufallsfehler) здесь рассматриваются лишь случайные ошибки; в некоторых случаях им может быть приписана определенная вероятность. Формально, Гаусс определяет функцию $\varphi(x)$ как относительную ошибку при наблюдении x. Тогда $\varphi(x)dx$ выражает вероятность ошибки между x и $x+dx$, причем φ нормализована условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1. \qquad (*)$$

Решающее требование состоит в том, чтобы интеграл

$$\int x^2 \varphi dx$$

достигал минимума. Идея этого условия состоит в том, что самый подходящий вес для ошибки – это ее квадрат. Вот почему метод Гаусса называется методом наименьших квадратов; в вычислительном отношении он, очевидно, совершеннее первоначального метода Лапласа.

Когда концептуальная основа теории была сформирована, надо было найти подходящую функцию φ. Вообще говоря, распределение ошибок неизвестно заранее, и приходится выбирать среди произвольных функций ψ, подчиняющихся единственному требованию (*). В этом месте Гаусс, после некоторых эвристических приготовлений, вводит экспоненту e^{-x^2} ("нормальное распределение") как особенно естественный закон распределения ошибок наблюдения. Гаусс заключает первую часть статьи некоторыми сложными соображениями, которые мотивированы астрономическими проблемами и нам здесь неинтересны.

Вторая часть "Теории комбинаций . . . " содержит приложения метода наименьших квадратов, по большей части к проблемам, возникшим из астрономии. Кроме того, Гаусс описывает сложную, хотя и нетрудную, процедуру отбрасывания, чтобы определить лучшие наблюдения. Другая проблема связана со включением новых экспериментальных данных в процесс вычислений. Гаусс показывает, как пользоваться новыми данными, не отбрасывая уже проделанных вычислений. Статья заканчивается обсуждением соотношения между ошибками наблюдения и ошибками вычисления и о точности, с которой можно определить среднюю ошибку.

Приложение посвящено одной геодезической проблеме. В нем рассматривается ситуация, когда не известно, как наблюдаемые параметры зависят от некоторых других, тоже неизвестных величин; явно задана только зависимость между ними. Гаусс решает эту проблему, снова применяя метод наименьших квадратов; в сущности, это тот же подход, что и раньше. В этом же приложении подробно описаны два примера из геодезии, в которых Гаусс использует свои данные и данные датской триангуляции;

он не упускает случая отметить, как важно пользоваться реальными данными; так, он подчеркивает, что практическое измерение трех углов треугольника не дает в сумме 180°.

Ни в одной своей статье Гаусс не упомянул ни разу о возможности иных статистических распределений, чем нормальные. При тех весьма удовлетворительных результатах, которые он получал, пользуясь экспоненциальным распределением, он не чувствовал нужды в поисках других подходов.

В общей сложности Гаусс дал три различных вывода метода наименьших квадратов, первый из них – в "Теории движения . . . ". Лежандр, впервые опубликовавший этот метод в 1806 году в работе об орбитах комет, видимо, исходил из чисто вычислительных соображений, и таков же был, вероятно, и первоначальный подход Гаусса. Вскоре после того, как Лежандр опубликовал этот метод, Лаплас сумел связать его с вероятностными соображениями, но мы не знаем, опирался ли Гаусс на работу Лапласа или развил основания метода независимо. Есть некоторые соображения в пользу второго предположения; во всяком случае, Гаусс пошел дальше Лапласа, и вероятностные соображения придали методу больше цены в глазах Гаусса.

Метод наименьших квадратов был для Гаусса необходимым теоретическим средством в экспериментальных исследованиях; он все больше и больше укреплялся в мысли, что метод этот – самое важное свидетельство связи математики с природой. Его эффективность была нагляднейшим подтверждением того факта, что природное явление можно с успехом исследовать математическими методами. Гаусс шел в этом отношении еще дальше: он был убежден, что математика управляет природными явлениями, вследствие чего степень математизации естественных наук есть мера понимания законов природы.

Мы уже видели, что у Гаусса были и другие математические средства, которые он находил полезными в своем желании понять природные явления и процессы. К ним относятся: теория потенциала, включая закон Кулона, экстремальные принципы и вариационное исчисление. Гауссу было известно даже одно применение теории чисел: он знал, что кристаллические структуры можно описывать с помощью тернарных форм.[3] Эти примеры укрепили убеждение Гаусса в математическом характере природы; эта вера коренилась в восемнадцатом веке, но Гаусс сделал многое для ее укрепления.

Есть несколько явных замечаний Гаусса о том, как он понимал природу и роль математики в физических науках. Процитируем здесь последний параграф его статьи об экстремальном принципе в механике:

Весьма примечательно, что свободные движения, если они несовместимы с соблюдением необходимых условий, изменяются Природой в точности таким же образом, каким математик-вычислитель, применяющий метод наименьших квадратов, примиряет наблюдения, которые связаны друг с другом необходимыми зависимостями. Эту аналогию можно было бы продолжить, но сейчас я не намерен это делать.[4]

В томе XII Собрания трудов Гаусса опубликована обширная лекция под названием "Вводная лекция по астрономии" (Astronomische Antrittsvorlesung). Точно датировать ее мы не можем, но ясно, что Гаусс написал ее в очень ранние годы. В ней обсуждаются различные вопросы, подходящие для такой лекции, и в первую очередь различные мотивы того, почему нужно изучать астрономию. Практическая польза астрономии, хотя она несомненна, для Гаусса – всего лишь второстепенный мотив. Бескорыстный поиск истины – вот главное, что делает астрономию таким благородным объектом исследования. Высшая награда астронома – это удовлетворение от того, что он смог созерцать те чудесные принципы, по которым организован мир, и переживать то чувство уверенности, которое возникает, когда распознаешь гармонию творения.*

Из замечаний, содержащихся в переписке Гаусса, можно узнать больше о его мнениях и убеждениях. Время от времени он отваживался на суждения о философии, выражая презрение к расплывчатости большинства философов. Есть пренебрежительные замечания о Платоне, Вольфе и современниках Шеллинге и Гегеле.[6] В своей диссертации Гаусс приводил абсурдные астрономические домыслы Гегеля как пример тупости такого рода. Кант и его работа ценятся высоко, что, конечно, не относится к его геометрическим идеям (Кант доказывал "необходимость" евклидова пространства) и, что еще важнее, к его априорной характеристике математики как синтетической науки. Кроме того, мы знаем, что Гаусс восхищался работой И.Ф. Фриза (1773–1843), одного из немногих философов того времени, серьезно интересовавшегося экспериментальными наука-

*В этой лекции Гаусс делает одно "политическое" заявление, которое может вызвать удивление. Он спорит с узко утилитарной точкой зрения; цитируем:

Подобные суждения свидетельствуют не только о нашем убожестве, но в равной мере и о мелком узком и ленивом мышлении; они выдают тенденцию всегда трусливо вычислять наперед плату за каждое усилие, холодное сердце и нечувствительность ко всему великому и почетному для человека. К сожалению, нельзя закрывать глаза на то, что такой образ мыслей очень распространен в наш век, и совершенно несомненно, что весь образ мыслей находится в очень тесной связи с тем несчастьем, которое поразило многие страны в последнее время; поймите меня правильно, я говорю не о столь частом недостатке, как простое непонимание науки, а о источнике, из которого все это вытекает, о тенденции всегда сначала спрашивать о выгоде и все соотносить с физическим благополучием, о безразличии к великим идеям, об отвращении ко всякому усилию, порожденному чистым энтузиазмом: я думаю, что такая тенденция, если она одерживает верх, может играть решающую роль в катастрофах того рода, что мы пережили.[5]

Этот последний намек, видимо, относится к наполеоновским войнам и к поражениям германских государств и Пруссии. Самая поздняя возможная дата этой лекции – это 1815 год (год окончательного поражения Наполеона), но она может относиться к и 1808 году. В случае этой, более ранней даты, это было смелое и открытое политическое заявление.

ми, в частности астрономией. В философском плане Фриз работал в кантовской традиции, но старался включить в свою философскую систему элементы современного позитивизма. Особенно нравилась Гауссу написанная Фризом история философии.* [7] В общем, Гаусс не интересовался философскими спорами, и в этом он больше похож на современного ученого, чем на склонного к философии математика или на естествоиспытателя восемнадцатого столетия.

ГЛАВА 13

РАБОТА С ЧИСЛАМИ. ДИОПТРИКА

В предыдущем дополнении мы говорили о взглядах Гаусса на роль математики в естественных науках. Теперь перейдем к теме, "внутренней" для математики: любви Гаусса к численным расчетам и его мастерстве в этом.

Было бы неправильно рассматривать огромный объем работы Гаусса с числами как трату времени, не имеющую отношения к его теоретической работе, или как досадную помеху, навязанную Гауссу нуждой и социальным положением. Работа Гаусса с числами составляла неотъемлемую часть его "теоретических" исследований и нередко служила первым толчком к открытиям и догадкам. Гаусс неоднократно проводил обширные вычисления; быть может, он провел больше вычислений, чем любой другой выдающийся математик из всех тех, чьи работы нам известны. Обработка экспериментов требовала огромных вычислений; поистине, репутация и эффективность Гаусса как ученого неотделимы от его казавшейся безграничной способности "сгущать" данные своих наблюдений и очищать их с помощью метода наименьших квадратов. Теоретическая сторона работы с числами часто недооценивается, быть может, вследствие современного тяготения к "строгим" и нечисловым рассуждениям. Но само это тяготение стало возможным благодаря работе, проделанной Гауссом и последующими поколениями математиков, находившихся под его влиянием. Лишь в начале нашего столетия, с развитием численного анализа, количественные соображения того рода, что применял Гаусс, получили твердую основу и стали общепринятыми. Теперь, с появлением электронных вычислительных устройств, эта область снова играет большую роль внутри математики.

---

* Фриз, никогда не бывший особенно популярным, был забыт вскоре после его смерти. В 20-х годах нашего века философ Леонард Нельсон (1882–1929) положил начало возрождению Фриза в своей попытке найти некоторое новое направление между феноменализмом Гуссерля и тогда сильной неокантианской школой. Нельсон был внук Дирихле, преподавал в Гёттингене и был очень популярен среди математиков школы Гильберта.

Для Гаусса работа с числами была несомненной и подлинной частью математики. Что отличает его работу от работы его современников и предшественников – это критическая оценка результатов и проведение строгого различия между эвристическими ("индуктивными") и строгими выводами. Типичный случай – то, как пользовался Гаусс критериями сходимости для бесконечных рядов. Фактически о сходимости идет речь только в "теоретической" статье о гипергеометрической функции; она не обсуждается в других местах, даже в тех многих случаях, когда Гаусс суммирует бесконечные ряды и вычисляет оценки. Должно быть, в этих случаях сходимость казалась Гауссу либо несущественной, либо очевидной.

Нам трудно даже представить себе сегодня тот объем вычислений, который Гауссу приходилось производить для своей математической и научной работы. Следует иметь в виду, что в своих обширных вычислениях Гаусс мог пользоваться только логарифмическими и немногими другими таблицами. Логарифмических линеек и других механических средств не было.*[1]

Как ни необходимо было Гауссу его мастерство вычислителя для работы в прикладной математике, чистая математика, видимо, выиграла от него еще больше. Особенно примечательно то, что работа Гаусса в теории чисел глубоко и прямо связана с числовыми рассмотрениями. Эти рассмотрения восходят к его юношеской, как будто бесцельной, игре с натуральными числами. Примеры работ, особенно близких к их численным истокам, – это первое доказательство закона квадратичной взаимности и, что более типично, – связь между арифметико-геометрическим средним и эллиптическими интегралами. Мы приводим эти примеры, только чтобы проиллюстрировать нашу мысль; они типичны. Работа Гаусса, на каждом ее шаге, была близка к "числовой реальности"; ее направляло глубокое знакомство Гаусса с натуральными числами.

Особенно любил Гаусс таблицы, с помощью которых можно было упрощать громоздкие вычисления. Несколько важных таблиц есть в "Арифметических исследованиях", есть они и в других работах Гаусса. В своих рецензиях на выходившие тогда книги Гаусс любил подчеркивать важность таблиц и обсуждать эффективные способы их организации.[2]

В своем очерке, опубликованном в X томе Собрания трудов, П. Менхен анализирует взаимодействие теоретической и численной работы Гаусса, обращая особое внимание на теорию чисел. Именно в этой области Гаусс выдвинул свое наиболее известное предположение. Это была теорема о простых числах – результат, который он получил еще в очень ранние годы как эмпирическое наблюдение.[3] Вследствие непрестанных и неутомимых вычислений, многие числа обладали для Гаусса индивидуально-

*Гаусс проявлял интерес к первым образцам вычислительных машин, но не участвовал в работе над ними. Вероятно, он встречался с Беббиджем, когда посещал Гумбольдта в Берлине, но мы не знаем каких-либо его высказываний о машинах Беббиджа.

стью, почти как живые существа. Он мог воспользоваться неочевидными арифметическими свойствами, чтобы упростить и укоротить вычисления, называя получавшиеся при этом способы, почти трюки, своими "хитростями" (artificia).

Несмотря на "хитрости" и на свой громадный опыт и сноровку, Гаусс отнюдь не был застрахован от ошибок. Ошибки, чаще всего мелкие, нередки в его обработке астрономических и геодезических измерений; довольно странно то, что Гаусс часто выполнял вычисления с бóльшим числом десятичных знаков, чем это было разумно для его экспериментов. Способствовало появлению ошибок и то, что Гаусс никогда не проверял ни результаты, ни сами вычисления; какова бы ни была причина этого, он и здесь предстает скорее как наблюдающий математик, чем как вычисляющий наблюдатель.

Когда просматриваешь записные книжки Гаусса и тот отрывочный материал, который был опубликован посмертно в последних томах его Собрания трудов, видишь, какое удовольствие доставляли ему манипуляции с конкретными числами и погружение в обширные вычисления. Иногда кажется, что именно это и было главным мотивом Гаусса, а не желание узнать результат.

В переписке Гаусс обсуждает выступления нескольких "феноменальных вычислителей", демонстрировавших публике свои таланты.[4] Они не произвели на него особого впечатления, потому что работали, видимо, по памяти, не пользуясь сколько-нибудь примечательными "хитростями". Когда один из них, З. Дазе, спросил Гаусса, как ему следует применить свой талант, Гаусс посоветовал ему расширить таблицу множителей. Дазе последовал совету и впоследствии опубликовал полезные таблицы для чисел от 7 000 000 до 9 000 000.

Если вычисления были самой "фундаментальной" и "бескорыстной" частью работы Гаусса, служа основой как для теоретических, так и для прикладных исследований, то его практическая работа в оптике была самой специальной областью эмпирических исследований, в которой Гаусс когда-либо работал. Его диоптрические исследования, как он называл их, относились к форме, устройству и дефектам оптических линз. То, что Гаусс занялся этой областью, вполне естественно; фактически, каждый астроном-наблюдатель того времени вынужден был справляться с проблемами, возникавшими из-за неудовлетворительного качества тогдашнего стекла и технических ограничений их разрезания и шлифовки и из-за недостаточного знания теории телескопов. Все эти факторы менялись на протяжении жизни Гаусса, и сам Гаусс много сделал для прогресса в этой области. Самый главный недостаток в работе Гаусса никогда не принимался им во внимание вообще: Гаусс подходил ко всем оптическим проблемам с позиций наивной корпускулярной теории света и не проявил никакого интереса к теории распространения света Фраунгофера.[5]

Гаусс активно занялся диоптрикой в 1807 году, когда Репсольд, прославленный мастер инструментов из Гамбурга, спросил его о линзах для ахроматического двойного объектива.[6] Гаусс немедленно занялся этим вопросом, хотя проблемы такого рода были новы для него. Контакты с отцом и сыном Репсольдами продолжались много лет, но Гаусс вскоре пошел своим путем и начал независимое исследование. Самая примечательная его работа была связана с линзами, минимизирующими хроматическую аберрацию. Он обсуждал эти проблемы с другими астрономами, в том числе с Бесселем и Ольберсом, и с мастерами инструментов, в том числе со знаминитыми Утцшнайдером, Фраунгофером и Штайнхайлем, которые все работали в Мюнхене, но в разных мастерских. Чтобы проследить за работой Гаусса, надо изучить его переписку и некоторые учебники астрономии, основанные на его лекциях.[7] Есть еще несколько коротких статей, опубликованных самим Гауссом. Его вклад в диоптрику оказал значительное влияние на развитие оптической индустрии в Германии,* но сегодня устарел, так как Гаусс исходил из корпускулярной теории света. Самая важная статья Гаусса по оптике называется "Диоптрические исследования" (Dioptrische Untersuchungen); она вышла в 1840 году. В ней детально исследуется путь луча света через систему линз, толщиной которых нельзя пренебречь. Основной результат Гаусса – это сведение такой сложной системы к одной, бесконечно тонкой линзе. Даже здесь мы видим, как Гаусс сводит физическую проблему к математической и развивает математическую теорию вместо того, чтобы дать ряд технических инструкций или писать учебник физики.

Из переписки упомянем забавную дискуссию о влиянии близорукости при наблюдениях в телескоп. Гаусс, сам близорукий, приходит к (неверному) заключению, что результатом близорукости является бо́льшая степень увеличения.[8]

В сущности, исследования Гаусса продолжали работу Эйлера и Лапласа. Они не дали драматического прорыва в новую область, но прояснили то, что было известно, и были на уровне технологического развития своего времени. Они, как мы видели, не изолированы от всей работы Гаусса, и в них проявились не только его научные интересы, но и его готовность сотрудничать с практиками и делиться с ними своими теоретическими и практическими соображениями. Математически "Диоптрические исследования" настолько элементарны, что Гаусс даже не хотел ее публиковать.

Было бы неверно считать, что Гаусса интересовала лишь теоретическая сторона вопроса. Он постоянно занимался переустройством инструмента-

---

*В ходе девятнадцатого столетия Германия выдвинулась как ведущий мировой поставщик точных оптических инструментов, опередив в этом качестве Англию. В первой половине века возникли мастерские Рейхенбаха, Фраунгофера и Штайнхайля; несколькими десятилетиями позже возникла мастерская Карла Цейса в Йене, ставшая самой знаменитой из оптических мастерских. Кстати, Эрнст Аббе, научный директор фирмы Цейс (Zeiss-Werke) был учеником Римана.

рия обсерватории и обсуждал с друзьями многие проблемы, связанные с требовавшими времени техническими процедурами: например, как лучше протянуть нити через окуляр телескопа. Кроме этого, Гаусс проявлял подлинный и оригинальный интерес к технологическому прогрессу; одним из самых приятных путешествий в его жизни было посещение в 1815 году нескольких мастерских в Мюнхене и его окрестностях, чтобы обсудить оборудование для его новой обсерватории в Гёттингене.

ГЛАВА 14

1838–1855 ГОДЫ

Образ Гаусса, каким мы его видим в период с 1838 по 1855 год, еще бледнее, чем в прежние годы. Есть несколько воспоминаний очевидцев – студентов и посетителей, но и они мало что меняют.[1] Бóльшая часть писем этого периода адресована Шумахеру, ставшему его основным корреспондентом, но и они скользят по поверхности, создавая образ постоянно занятого человека, интересующегося многим и разным, но по большей части без особого увлечения. Гаусс был все еще очень активен в своих астрономической и магнитной обсерваториях, но у него было много и других занятий. Его интересовали задачи элементарной математики, в том числе комбинаторные задачи, поставленные Шумахером[2], экспериментальная и теоретическая физика и снова иностранные языки.

Даже в переписке этих лет с Шумахером встречается очень мало нового, неожиданного, показывающего Гаусса с новой стороны. Так, в декабре 1824 года (# 228а от 23 декабря) он упрашивает Шумахера не увольнять молодого ассистента Клаузена, по неловкости уронившего ценный барометр. Гаусс призывает Шумахера к снисходительности и пишет:

. . . В то время, как Вы, как я надеюсь, примете его обратно, меня заботит его будущее. Случай с барометром, быть может, и не единственный заставляет меня бояться, что он недостаточно искусен, чтобы быть астрономом-практиком. Однако либо это, либо преподавание – вот в настоящее время в Европе единственные способы для необеспеченного математика заработать на жизнь. Вы знаете, как устроены наши теперешние учебные заведения: только если бы он совершил нечто совершенно выдающееся, была бы некоторая надежда на то, что он когда-нибудь найдет хорошее место в одном из них, и даже тогда можно будет ставить 99 против одного, что он его не получит. Я не знаю, сможет ли он когда-нибудь стать преподавателем, – вам виднее. Но если вы боитесь, что он и для этого не годится, то, может быть, ему было бы лучше всего заняться каким-нибудь другим делом: например, поступить в армию или куда-то еще, где он смог бы в свободное время заниматься математикой. Если уж приходится работать для заработка, то довольно безразлично – кем: преподавать ли новичкам основы наук или тачать сапоги. Важно только одно: на какой работе остается больше и более свободного от забот времени. . . [3]

Этот отрывок характерен для Гаусса в последние тридцать–сорок лет его жизни. Он старался быть мягким и понимающим, и, хотя это не всегда ему удавалось, это, видимо, было подлинным выражением его взгляда на вещи в этот период.

В начале 1840-х годов Гаусс, после короткого флирта с санскритом, который он счел не особенно подходящим для себя, принялся изучать русский язык. Он продолжал интересоваться английской литературой; он торжествовал и немедленно сообщил об этом Шумахеру, когда заметил и исправил фразу "на северо-западе поднимается полная луна" в одном из романов своего любимого Вальтера Скотта.[4] Внимание Гаусса к деталям не должно нас удивлять. Он неустанно интересовался фактической информацией, будь то важной или нет. Эта его особенность видна и в математических исследованиях: они всегда были индуктивны, направлены от конкретных фактов к общим утверждениям; он избегал тех абстракций, без которых можно обойтись. Именно это побудило его избегать введения каких-либо алгебраических концепций в "Арифметических исследованиях", хотя фактически он развивал их в ходе своих рассуждений, лишь не давая им явных определений. В предыдущей части этой книги мы неоднократно указывали на математический характер работы Гаусса в естественных науках; однако не следует упускать из виду и "естественно-научный", часто экспериментальный характер его работы в математике. Мышление Гаусса было индуктивным в исключительной степени; отсюда его голод на факты, его любовь к деталям, будь то в математике, в естественных науках или в любой другой сфере интеллектуальной жизни. Именно в этом свете мы должны видеть его неустанное участие в обсуждении астрономических или геодезических измерений и его эксперименты по поручению Ганноверской комиссии мер и весов, так же как и его бесконечные вычисления, его интерес к таблицам простых множителей или его определение путем вычислений одного из периодов лемнискаты.

В 1842 году, хотя и не проведя ни единой ночи вне своего дома за последние десять с лишним лет, Гаусс вступил в переговоры с Веной, где ему была предложена должность в университете. Если его переговоры с Берлином двадцатью годами раньше были довольно бесцельными, то недолгие переговоры с Веной – тем более, и вскоре они прервались.[5]

В годы, следовавшие за отъездом Вебера, Гаусс был глубоко несчастлив. Он избежал того крайнего унижения, которое часто сопровождает старость, но было бы самообманом воображать себе безмятежный вечер продуктивной и плодотворной жизни. В начале 1838 года уехал Вебер, к которому Гаусс относился во многом как к родному сыну; незадолго перед этим эмигрировал Вильгельм; еще несколько раньше Вебера Гёттинген покинули Минна Эвальд и ее муж. В 1839 году скончалась старая и слепая мать Гаусса; за ней в 1840 году последовала ее внучка Минна, неполных 33 лет. Эта последняя потеря была очень болезненной: она и Иосиф была "залогами любви", оставшимися от первого брака. Минна, которую отец любил больше всех своих детей, как говорили, была очень похожа на мать. Из друзей Гаусса чтимый им Ольберс умер в 1840 году, Бессель – в 1846. Переписка с последним снова была обильной, но без прежней интимности. Иногда Гаусс упоминал о своих недомоганиях: в 1838 году его поразила временная глухота непонятного происхождения, постоянно ухудшалась память и зрение, все меньше оставалось зубов. Но, несмотря на все это, механические обязанности астронома-наблюдателя и различные другие интересы давали Гауссу возможность активности, в которой он нуждался.

Между поведением Гаусса в начале и в конце 1830-х годов не обнаруживается резкой разницы. Внешне на него как будто не повлияли те болезненные потрясения, которые ему пришлось пережить; что наблюдается – это медленный упадок, чувствовать который, вероятно, было мучительно самому Гауссу. Но ничего иного и не следовало, в общем, ожидать – Гаусс научился не искать счастья. На смену дружбе и научному сотрудничеству пришли награды, медали и другие почести. Якоби, Дирихле и Эйзенштейн, – быть может, самые одаренные германские математики двух поколений после Гаусса, выражали ему свое почтение, но с ними не установилось ни длительных, ни личных контактов.*[6] В 1838 году Королевское научное общество в Лондоне присудило Гауссу медаль Копли; позже он получил прусский орден "За заслуги" (pour le mérite).

Из ближайших членов семьи в Гёттингене осталась только дочь Тереза. Она не была замужем и в 1838 году начала управлять хозяйством отца. Хотя Гаусс очень любил ее, между отцом и дочерью было, кажется, мало общего: только взаимная высокая оценка, связывавшая их, благодарность со стороны отца и восхищение со стороны дочери.**

Воспоминание некоторых студентов, слушавших лекции Гаусса в последние годы его жизни, показывают, что теперь Гаусс полюбил преподавание и чтение лекций гораздо больше, чем в ранние годы,[7] и стал хорошим и компетентным педагогом. Одной из причин перемены его отношения к преподаванию могло быть то, что студенты стали гораздо лучше подготовлены и больше интересовались учебой. В числе последних студентов Гаусса были Г. Кантор, известный как автор обширной истории математики, и Р. Дедекинд, знаменитый своими работами по теории чисел и алгебре. Процитируем воспоминания Дедекинда, написанные в 1901 году (переведены в [Даннингтон])[8]:

---

* Гаусс следил за их работой и положением с большим интересом. Для Эйзенштейна он написал очень лестное предисловие к изданию его статей по теории чисел.

** У нашего рассказа о Терезе есть иронический постскриптум. Когда умер отец, она вначале была безутешна. В 1856 году, всего год спустя после смерти отца, она вышла замуж за театрального режиссера и актера, с которым поддерживала романтическую переписку с начала пятидесятых годов. Этот шаг был встречен с неодобрением другими членами семьи, во всяком случае Иосифом, видимо, потому, что они восприняли его как мезальянс, осквернивший семейное имя и память о великом человеке.

. . . обычно он сидел в удобной позе, смотря вниз, слегка ссутулившись, с руками, сложенными на груди. Он говорил совершенно свободно, очень ясно, просто и прямо; но когда он хотел подчеркнуть новую точку зрения, когда он употреблял особенно характерное слово, он внезапно поднимал голову, поворачивался к одному из сидевших прямо перед ним и пристально смотрел на него своими прекрасными проницательными голубыми глазами, пока произносил то, что выделял интонацией. . . Если он переходил от объяснения принципов к выводу математических формул, то вставал и, стоя величественно и очень прямо, писал на черной доске, стоявшей рядом с ним, своим прекрасным почерком; благодаря экономии места и хорошему расположению материал ему всегда удавалось обойтись довольно небольшой площадью. Для численных примеров, тщательному выполнению которых он придавал особое значение, он приносил с собой необходимые данные, записанные на маленьких листочках бумаги.

Когда просматриваешь список тех курсов, которые читал Гаусс, видно, что большая их часть была по астрономии и лишь немногие – по теории чисел и другим областям чистой математики. Очень часто он читал лекции о методе наименьших квадратов и его применениям в науке. Фактически, Гаусс читал лекции по теории чисел один единственный раз – в 1807/08 году, в первый год своего профессорства в Гёттингене.[9]

Гаусс начал заниматься конкретными экспериментальными вопросами, как мы знаем, еще в начале столетия. Это побудило его к сотрудничеству с другими астрономами; бо́льшая часть друзей, приобретенных им в зрелые годы, стали таковыми в ходе астрономической работы. Но Гаусс никогда не забывал оборотной стороны этой деятельности – того, что она мешала углублению в чистую математику, его первую любовь, о которой он всегда помнил.

В 1838 году, в тот год, когда Веберу пришлось покинуть Гёттинген, Гауссу исполнился 61 год. Он терял единственного коллегу в Гёттингене, с которым у него когда-либо установились подлинные и взаимообогащающие творческие взаимоотношения. На адекватное продолжение этого сотрудничества нельзя было надеяться, и все же Гаусс мог беспрепятственно продолжать свои наблюдения, пополнять начатую коллекцию геомагнитных данных, переписываться с Шумахером, Герлингом, Ольберсом и Бесселем по астрономическим и другим вопросам. Мы видим благотворный аспект практической работы: Гаусс мог вносить полезный вклад в науку в том возрасте, когда его оригинальная математическая продуктивность, возможно, уже прекратилась бы, и при этом, несмотря на те различные личные несчастья, которые ему пришлось пережить после 1809 года, он не только не утратил своей способности работать и вносить существенный вклад в науку, но работа фактически помогала ему сохранять самообладание и избегать тяжелых и бесплодных конфронтаций. Выше мы видели другую сторону этого: неотзывчивую и негибкую позицию Гаусса в конфликтах с сыновьями и прекращение глубоких математических исследований вскоре после 1810 года, но эти жертвы, возможно, были необходимы для того, чтобы он вообще мог продолжать работу. Поэтому механическая, автоматическая сторона экспериментальной деятельности представляла огромную ценность, была спасением, и не может рассматриваться просто как вредная помеха более творческим и "высшим" видам деятельности.

Сказанное выше не следует понимать так, что Гаусс полностью перестал интересоваться высшей математикой. Даже в последние пятнадцать лет жизни, через двадцать или тридцать лет после последнего его оригинального исследования, в переписке Гаусса еще встречается много ценных замечаний и наблюдений, свидетельствующих об интересе к предмету. Так, Гаусс находил время вполне серьезно заниматься двумя темами, которыми он уже давно очень интересовался.

Он был одним из первых математиков в Западной Европе, кто понял и оценил исследования Лобачевского по невклидовой геометрии. Лобачевский излагал свои результаты в очень трудной, пожалуй даже темной, форме, и первые его статьи, включая те, которые выходили в Германии, не встретили отклика.[10] В 1846 году (27 ноября) Гаусс имел основания для следующих замечаний в письме к Шумахеру:

Недавно у меня был повод заново просмотреть брошюру Лобачевского ["Геометрическое исследование по теории параллельных линий" (Geometrische Untersuchung zur Theorie der Parallelinie). – Берлин, 1844]. Она содержит элементы той геометрии, которая должна была бы иметь место, и строго последовательно могла бы иметь место, если бы евклидова не была истинной. Некий Швайкардт назвал такую геометрию астральной геометрией, Лобачевский называет ее воображаемой геометрией. Вы знаете, что я придерживаюсь этого самого убеждения вот уже 54 года (с 1792 года) (с некоторым известным дальнейшим расширением, в которое я не хочу здесь вдаваться). Нового для себя материала я, таким образом, не нашел у Лобачевского, но он строит ее способом, отличным от моего, и делает это мастерски, в истинно геометрическом духе. Я считаю, что Вам следует обратить внимание на эту книгу, она несомненно доставит Вам изысканное наслаждение.[11]

В этом отрывке, интересном по нескольким причинам, есть утверждение, очевидно ошибочное, о том, что возможность существования неевклидовых геометрий была ясна Гауссу уже в пятнадцать лет.

Именно в связи с работой Лобачевского Гаусс начал учить русский язык. Он не ограничился математическими текстами и в письме к Шумахеру жаловался, что выбор русской литературы в местной библиотеке крайне скуден. Его любимым поэтом, кажется, был Пушкин.[12]

В 1849 году Гёттингенский университет отпраздновал пятидесятилетие доктората Гаусса, его золотой юбилей.* Главным событием была церемония, в которой Гаусс представил усовершенствованный вариант своей докторской диссертации, снова рассмотрев основную теорему алгебры. Ее отличия от прежнего варианта не очень глубоки; самое примечатель-

* В Германии было, и остается, обычаем отмечать это событие, если докторская диссертация стала началом выдающейся и исключительной академической карьеры. Годовщина Гаусса праздновалась в Гёттингене, потому что Гельмштедтский университет, где Гаусс получил степень доктора философии, был закрыт и прекратил существование.

ное из них – это явное использование комплексной области, вовсе не упоминавшейся в первоначальной диссертации пятидесятилетней давности, хотя "неявно" Гаусс ею пользовался. Эта статья показывает, как прочно Гаусс владел предметом: он все еще был активным и компетентным математиком. Математика все еще была для него "игрой ума" (jeux d'esprit), как он сам назвал ее в одном из писем этого периода.[13]

Самая оригинальная работа Гаусса в эти годы посвящена расчету пенсий вдов профессоров Гёттингенского университета. Гаусса попросили составить этот отчет в 1845 году, когда постепенное увеличение числа вдов поставило под угрозу сохранение существующего размера пенсий. Надо было принять во внимание уставы, условия, пособия и страховые выплаты. Система, которую исследовал Гаусс, пополняла свои средства из (очень скромных) членских взносов и из различных приносящих прибыль пожертвований. Размер пенсий колебался и определялся в зависимости от финансового положения со страхованием. Общий предмет исследований Гаусса, первый анализ фонда, был связан с последствиями предполагавшегося крупного увеличения числа членов, вкупе с просьбами об увеличении пенсий. Гаусс использовал недавние таблицы смертности и имевшуюся историческую информацию, касающуюся страховки. Он проделал длинные вычисления, используя имевшиеся справочники и все фактические данные, какие смог собрать. Удивительное заключение, к которому он пришел в 1851 году после шести лет работы, состояло в том, что система работает хорошо и что существующие пенсии можно даже увеличить. Далее, Гаусс рекомендовал остановить рост числа членов; если же имеющий место рост числа членов сохранится еще двадцать-тридцать лет, то потребуется радикальный пересмотр системы.[14]

Вычисления Гаусса детальны и тщательны (хотя, как обычно, не лишены числовых ошибок); они показывают знакомство не только с математической теорией страховки, но и с чисто экономическими аспектами, такими, как оценка бонов, находящихся во владении фонда, и необходимых капиталовложений, таких, как ремонт зданий, принадлежащих фонду. И опять задача оказалась гораздо обширнее, чем предполагалось, но Гауссу эта работа, кажется, нравилась. В переписке Гаусса есть детальные описания этой работы, показывающие, как он был занят ею и увлечен. В том, что касается страховки, анализ Гаусса был бесценен; самому Гауссу, должно быть, было приятно, что он смог, несмотря на свой финансовый консерватизм, предложить временно увеличить пенсии.*

Одной из причин того, почему Гаусс так увлекся этим финансовым исследованием, было то, что оно дало ему повод применить свои практические финансовые знания и умения. В своей брошюре "Памяти Гаусса"

---

*Первый редактор Собрания трудов Шерлинг и Х.А. Шварц были в числе тех более поздних гёттингенских математиков, кому тоже пришлось заниматься этим фондом.

Сарториус пишет, что Гаусс без труда мог бы управлять финансами своей страны; он действительно, как показывают его денежные дела, был очень умелым дельцом и оставил значительное состояние, в основном в бонах[15] (менее надежных, но дававших бо́льший процент, чем сегодня), частью частных компаний, в том числе железнодорожных, частью различных государств, причем не только немецких. В вопросах купли и продажи Гаусс, кажется, не советовался ни с кем из друзей; в переписке мы лишь изредка находим просьбы о помощи, когда требовалось выкупить какие-либо бумаги или взыскать проценты. В остальном мы мало что знаем о деталях его сделок – лишь то, что в целом они были успешны. Есть одно примечательное исключение – в одном письме он много пишет на эту тему, проявляя большой интерес и даже волнение. В 1844 году Гаусс внес депозит за боны новой линии железной дороги в северном Гессе (Дармштадт). Когда были опубликованы ее уставные нормы, вклад Гаусса потерял более 90% своей стоимости, потому что правительство имело право национализировать эту железную дорогу в любой момент. Гаусс очень резко критиковал участвовавшие в этом банки, иронически замечая, что ведущую роль в этом деле играли христианские фирмы, а не еврейские.[16] Шумахер встречал эти жалобы с симпатией и терпением. Здесь мы внезапно видим Гаусса в необычной для него роли свободомыслящего, полного достоинства гражданина, готового отстаивать свои взгляды – в полную противоположность его поведению во время политического кризиса 1837–1838 годов или во время переворотов наполеоновского и посленаполеоновского времени со всеми их неприятностями и унижениями.

В последние пятнадцать лет жизни Гаусс, кажется, прекрасно вписался в образ жизни горожанина среднего достатка, не вступающего в глубокие конфликты и потрясения. В этой картине есть правда, но было бы совершенно неправильно объяснять эту эволюцию лишь свойствами личности Гаусса. Как мы видели, было несколько причин постепенного угасания и утраты целостности в его деятельности; цену, которую заплатил Гаусс, не следует обязательно считать слишком высокой, и уж конечно же так не считали восхищавшиеся им современники. Годы с 1815 по 1848 не были временем для героев вообще, а в Германии особенно. Политически они были отмечены преобладанием консерватизма реакционного толка, наиболее явным выражением которого было существование и политика Священного союза; социально, для них было характерно, во всяком случае в Германии, постепенное формирование подлинного среднего класса. К середине столетия средний класс стал играть политическую роль, в сущности, развивая принципы классического либерализма.[17] Гаусс был частью этого процесса, но не его основного течения, и он так и не смог адаптироваться к современным политическим убеждениям своего класса. На этом фоне становится ясной важность его финансовых сделок и его разочарования судьбами младших сыновей. В своих социальных амбициях и мечтах Гаусс был очень типичен для своего времени и места, но только в этой неполитической области он и мог идентифицироваться со своим новым классом. В 1848 году, когда либерализм впервые заявил о себе в политической жизни Германии, Гаусс отверг его.

И это тоже был вопрос поколений: не просто возраста самого Гусса, а и того, что он должен был считать свою принадлежность к среднему классу своим личным достижением, тогда как большинство вождей восстания сами происходили из среднего класса. Мы видим здесь сочетание обстоятельств, похожее на то, что было с Гауссом пятьдесят лет назад, когда мы пытались понять его отношение к Французской революции и к движению романтизма в Германии.

Религиозные убеждения Гаусса были тесно связаны с его политическими и социальными взглядами. Несмотря на свою сильную зависимость от Просвещения, Гаусс не был атеистом; скорее, он был очень неортодоксальным деистом, неортодоксальным даже по сравнению с очень либеральными взглядами тогдашней протестантской церкви. Опять же, мы не знаем многих деталей. Есть лишь разрозненные замечания в письмах и один очень любопытный документ – заметки, которые физиолог Р. Вагнер сделал после нескольких "метафизических" разговоров с Гауссом в последние два месяца 1854 года, незадолго до его смерти.

Судя по письмам, Гаусс не верил в Бога как личность. Принципиальной частью его веры была уверенность в гармонии и целостности общего проекта творения. Математика была ключом к усилиям человека получить хотя бы приблизительное представление о плане бога. Очевидно, убеждения Гаусса очень походили на систему Лейбница, хотя они были гораздо менее систематичными и явными. Типичны убеждение Гаусса в существовании иной духовной жизни, основанное на статистических соображениях, и предположение, что после смерти у человека может резко улучшаться геометрическая интуиция, позволяя ему непосредственно видеть, какая из возможных геометрий правильна (предположительно и желательно гиперболическая, а не евклидова). В переписке с Герлингом несколько раз встает вопрос о тогдашних мистических экспериментах вроде столоверчения; Гаусс их полностью и решительно отвергает.[18]

Вагнер, консервативный и благочестивый человек, вложивший много сил в борьбу с материализмом в науке, несколько раз разговаривая с Гауссом, о чем хотел публиковать статью после смерти Гаусса. Вследствие энергичных протестов друзей Гаусса и членов его семьи – Тереза прямо назвала текст Вагнера "мазней" (Sudelei) – Вагнер решил не печатать статью, и лишь недавно были найдены его рукописи. Это буквальные записи нескольких кусков разговоров. Трудно вообразить, как Вагнер мог надеяться убедительно использовать Гаусса для своих целей, так необычны его мнения. Но идейная позиция Вагнера была безнадежной. и он мог предпочесть деизм атеизму. Эти записи показывают, что Гаусс был убежден в бессмертии души и некоторого рода жизни после смерти, но безусловно не в таком смысле, который можно было бы истолковать как христианский. Процитируем характерные высказывания, начиная с комментариев Гаусса к составленному им списку цитат из Библии:

Вот цитаты, касающиеся бессмертия. Прямо сейчас я не могу сказать вам, откуда эта подборка. Но я не нахожу их все такими уж убедительными и последовательными. Вообще, дорогой коллега, я вижу, что Вы верите в Библию гораздо сильнее, чем я, и вы гораздо счастливее меня. Должен сказать, когда я так часто в прежние времена видел людей скромного звания, простых мастеровых, которые могли верить всем сердцем, – я всегда им завидовал. Скажите же, как это начинается?. . . Быть может, Вам посчастливилось иметь верующего отца или мать?[19]

ГЛАВА 15

СМЕРТЬ ГАУССА

Мало что можно сказать о последних пяти годах жизни Гаусса. Он продолжал по мере сил наблюдения и переписку. Два его старых друга, Шумахер и Линденау, умерли в 1850 году. Гаусс в последний раз видел Линденау во время юбилея за год до этого. Из старых друзей оставались доступны только Герлинг и живой как ртуть – "летучая мышь", как он сам называл себя, – Александр Гумбольдт. Хотя Гумбольдт был значительно старше Гаусса, он пережил его и умер в 1859 году в возрасте 90 лет.[1] Наблюдая за собой, Гаусс жаловался на постоянную физическую и умственную деградацию, но новых крупных недомоганий не было, только ухудшение памяти и способности к сосредоточению и работе. Много времени он проводил за чтением газет и легкой современной литературы. Но даже в этом преклонном возрасте в жизни Гаусса были памятные и вдохновляющие события, наиболее примечательное из которых – лекция Римана "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" (Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen), прочитанная в 1854 году, за год до смерти Гаусса. Риман читал ее, выполняя обычное требование при получении разрешения читать лекции (venia legendi) в Гёттингенском университете. Из трех тем, которые Риман представил на выбор, Гаусс указал на вторую, а не первую, чем нарушил обычай и ожидания Римана. Очевидно, Гаусса особенно интересовала эта тема, и Вебер сообщает, в каком возбуждении Гаусс шел домой с лекции и как он ее хвалил.*[2]

Гаусс не мог не почувствовать важность речи Римана и ее связь со многими сторонами своей собственной работы более чем пятидесятилетней

*Хотя Риман учился некоторое время в Гёттингене, его нельзя назвать прямым учеником Гаусса. Решающее влияние на него оказал Берлин, а точнее его учителя Якоби, Эйзенштейн и Дирихле.

давности, но, кажется, не сделал существенных замечаний. Это не должно удивлять нас: Якоби, по общему признанию острый на язык, заметил уже в 1849 году, как мало интереса – и, видимо, способности к участию – было у Гаусса к концентрированным математическим дискуссиям.[3] Якоби, в числе небольшого числа немецких математиков, приехал в Гёттинген поздравить Гаусса с его юбилеем. Фактически последний научный разговор Гаусса шел о варианте маятника Фуко[4] – снова практические и конкретные вопросы были для Гаусса легче и доступнее, чем абстрактные и усложненные идеи Римана.

В январе 1854 года Гаусс прошел полный врачебный осмотр. У него нашли расширение сердца, что означало, что долго он не проживет. Затем его здоровье снова улучшилось; именно в этот период Риману была дана возможность прочесть лекцию. Кроме того, Гаусс присутствовал на церемонии открытия железной дороги, связавшей Гёттинген и Ганновер. К началу августа его здоровье снова ухудшилось, и с тех пор он уже не мог выходить из дома; даже по дому ему трудно было двигаться, так как он едва ходил на распухших ногах. Седьмого декабря казалось, что пришел конец, но Гаусс снова оправился. Он скончался рано утром 23 февраля 1855 года после нараставшего упадка сил, начавшегося в середине января. Говорят, что через несколько минут после его смерти остановились его часы.

Гаусс похоронен в Гёттингене. На похоронах, где присутствовали высшие чины правительства и университета, его зять Эвальд назвал гений Гаусса единственным и несравненным. Сарториус приводит эту речь в брошюре "Памяти Гаусса". В числе несших покров был Рихард Дедекинд, в то время двадцатичетырехлетний студент-математик. Для Дедекинда, как и для его и предыдущего поколений, память о Гауссе была источником вдохновения на всю жизнь. В нескольких приложениях к лекциям своего учителя Дирихле Дедекинд объясняет и расширяет последние четыре секции "Арифметических исследований". Последнее издание этих "Лекций по теории чисел" (Vorlesungen über Zahlentheorie) вышло в 1893 году.[5]

Большинство ученых, присутствовавших на похоронах, не были математиками; младшие коллеги и ученики, бывшие близки к Гауссу, больше интересовались прикладными исследованиями, чем чистой математикой. Это, конечно, отражает склонности Гаусса в его поздние годы, но и практический дух времени. В числе представителей младшего поколения, присутствовавших на похоронах, были астроном Клинкерфюс, геолог Сарториус и несравненный Вебер.

Мозг Гаусса с его, как оказалось, исключительно глубокими и многочисленными извилинами, был включен в анатомическую коллекцию Гёттингенского университета.

ЭПИЛОГ

Ultima latet.*

Математиков в качестве героев биографий выбирают редко. Те, кто пишет в этом жанре, больше интересуются так называемыми историческими личностями – политиками, военными, а также людьми искусства. Хотя такие биографии содержат некоторый исторический фон, он не считается особенно необходимым. Принято думать, что мы интуитивно понимаем проблемы политики, войны или искусства и, что самое главное, можем непосредственно общаться с автором и его героем.

Гаусс одновременно и достаточно удален от нас, и близок к нашему мышлению, чтобы вызвать исторический интерес и любопытство. Очевидно, что любая научная работа, даже работа такого вдохновенного гения, как Гаусс, может быть понята только в современном ему научном контексте; я надеюсь, читателю ясно, что усилия, потраченные на то, чтобы понять жизнь и деятельность Гаусса, вознаграждаются щедро в современном контексте. Внимательный читатель имеет право сказать, что из этой биографии он не узнал достаточно подробно о жизни и работе Гаусса или о жизни и работе его современников и (научных) предшественников. Хотя, быть может, я и упростил свою задачу чрезмерно, возможно, что фактически описать жизнь Гаусса проще, чем жизнь менее крупного математика или ученого. Его исключительный гений выходит за рамки своего времени; он охватывает века и освещает наш путь в непроходимом и темном лабиринте исторических деталей.

Мы всегда смотрим на прошлое через призму настоящего. Наш интерес к прошлому питают постоянные, часто бессознательные сопоставления с проблемами нынешнего дня. Недоразумений (и анахронизмов) трудно избежать, а часто они полезны и до некоторой степени необходимы: должна же быть какая-то связь с нашими собственными заботами, с вопросами и требованиями нашего века. В принципе может показаться – и, быть может, справедливо – невозможным примирить конфликтующие требования исторической честности и законного исторического интереса, но мы имеем право на очередную попытку разрешить это старое противоречие.

Противоположностью историка в том смысле, в каком мы употребляем это слово, является антиквар, стремящийся реконструировать мелочи прошлого. Он живет в библиотеках в духе Борхеса и корпит над картами, соответствующими внешнему миру один к одному, даже по величине. Такую биографию Гаусса вполне можно написать, потому что есть гигантское количество деталей, в которых может копаться всякий, кто хочет совершенствовать свои исторические миниатюры. И рассказ о собранных деталях может получиться вполне занимательным.

---

* Последнее скрыто (*лат.*). – *Примеч. пер.*

История, как мы понимаем ее, должна совершать отбор – слово, чуждое и враждебное убежденному антиквару. Но и искушение субъективного эклектизма должно быть преодолено тоже.

Существующий широкий интерес к истории математики, в основе своей антикварный, трудно понять. По большей части, исторический материал неинтересен и непоучителен: происхождение большинства математических теорий темно и трудно для понимания. Часто современное изложение классической темы гораздо доступнее и четче, чем оно могло быть в процессе развития. Идеи Гаусса, являющиеся темой этой книги, интересны не потому, что им много лет, а потому, что Гаусс был замечательным математиком и ученым. Многие его идеи еще сегодня живы и служат источником вдохновения. Таким образом, эта биография, хотя и историческая по форме, мотивирована нашим современным интересом.

Из сказанного должно быть ясно, что история математики использует те же методы, подходы и аргументы, что и история вообще. Точно так же, как нельзя быть политическим историком без понимания политической истории рассматриваемого периода, необходимо понимание математики того периода, математическую историю которого изучаешь. Вполне возможно, что мне это не удалось, потому что биограф должен знать очень многое. Основная проблема, влияющая на эту биографию или любую подобную попытку, – это то, что реальная, серьезная история математики, особенно восемнадцатого и девятнадцатого столетий, до сих пор не написана. Существуют лишь разрозненные исследования деталей и частных вопросов, но нет обзора происхождения наших современных математических идей. Если бы такая история существовала, она должна была бы быть написана недавно; каждое поколение (математических идей, а не математиков) должно было бы переписывать ее. Среди рудиментов таких попыток лучшим образцом служат лекции Феликса Клейна о развитии математики в девятнадцатом столетии, но и они написаны неровно, подчас бегло и, естественно, отражают взгляды 1900-х годов, если не личные пристрастия Клейна. В некотором смысле, это исторический документ, выражающий точку зрения образованного и выдающегося математика, а не руководство того типа, о котором говорилось выше. Действительно, лекции Клейна, при всей их занимательности и ценности, иногда поражают своими странностями и трудностью для понимания – они доносят до нас предмет уже через некоторый исторический слой (хорошо, если только один), небезынтересный, но служащий помехой, – вроде семи слоев почвы, отделяющих от нас античную Трою.

Эта биография – лишь фрагмент, моментальный снимок, быть может, только один шажок на пути к всеобъемлющей и убедительной "Жизни Гаусса" – которая, скорее всего, никогда не будет написана. Быть может, она даст некоторый материал для не написанной еще интеллектуальной истории последних двухсот лет, но она годится для этого лишь в наивном смысле. Историки могут поддаться искушению использовать эту книгу как вторичный источник, но она не дает безусловной исторической интерпретации. Окончательная "Жизнь Гаусса" будет обширной. Гений Гаусса не имел равных и был вне рамок времени, и его окончательная "Жизнь" вполне может оказаться вне времени – ознаменовать конец истории математики.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ОРГАНИЗАЦИЯ СОБРАНИЯ ТРУДОВ ГАУССА

На то, чтобы собрать и отредактировать труды Гаусса, потребовалось несколько десятилетий. В процессе этой работы обнаруживался новый материал, менялись редакторы и их установки. Первоначальный план – расположить материал по темам – никогда не отменялся, но осуществить его полностью оказалось невозможным. Этот план удалось осуществить для первых шести томов: первые два тома посвящены теории чисел, третий анализу и т.д. Тома VII–XII содержат дополнительный материал. С самого начала было ясно, что в этом издании нельзя ограничиваться тем, что опубликовал сам Гаусс, и уже в томе II есть рукописи из архива (Nachlass) Гаусса; однако критерии того, что следует включить в издание, постепенно расширялись от тома к тому. Это постепенное расширение, наряду с открытием новых материалов и лучшим пониманием старого материала, привело к большому числу дополнительных томов. В последних томах опубликована бо́льшая часть важных для науки отрывков из переписки Гаусса. Для удобства читателя перечислим подзаголовки томов; в приложении С мы дадим детальный указатель работ Гаусса, который должен помочь читателю найти любую статью.

Том I. "Арифметические исследования" (Disquisitiones Arithmeticae).

Том II. Высшая арифметика (Höhere Arithmetik).

Том III. Анализ (Analysis).

Том IV. Исчисление вероятностей и геометрия (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie).

Том V. Математическая физика (Mathematische Physik).

Том VI. Астрономические работы и статьи (Astronomische Abhandlungen und Aufsätze).

Том VII. Теоретическая астрономия (Theoretische Astronomie).

Том VIII. Арифметика, анализ, исчисление вероятностей, астрономия (Arithmetik, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Astronomie).

Том IX. Геодезия (Geodäsie).

Том X, 1. Арифметика, алгебра, анализ, геометрия, дневник (Arithmetik, Algebra, Analysis, Geometrie, Tagebuch).

Том X, 2. Очерки о научной деятельности Гаусса в области чистой математики и механики (Abhandlungen über Gauss'wissenschaftliche Tätigkeit auf den Gebieten der reiner Mathematik ünd Mechanik).

Том XI, 1. Дополнительные статьи по физике, хронологии и астрономии (Nachträge zur Physik, Chronologie und Astronomie).

Том XI, 2. Очерки о научной деятельности Гаусса в области геодезии, физики и астрономии (Abhandlungen über Gauss'wissenschaftliche Tätigkeit auf den Gebieten der Geodäsie, Physik und Astronomie).

Том XII. Разное. Атлас земного магнетизма (Varia. Atlas des Erdmagnetismus).

Тиражирование Собрания трудов Гаусса несколько лет назад было прекращено, но можно сделать перепечатку его и большей части переписки Гаусса. В библиографии те книги, которые есть еще в продаже, отмечены знаком (*). Различные тома переписки редактировались без общего плана и без единых критериев; к сожалению, надежный и удобный указатель есть только для переписки с Бесселем. Недавно Гёттингенская библиотека издала два дополнительных тома объемом в 244 и 124 страницы, содержащие не публиковавшуюся до сих пор переписку с Шумахером и Герлингом. Это важный материал; он проливает новый свет на некоторые интересные аспекты частной жизни Гаусса, особенно на его конфликты с сыновьями Евгением и Вильгельмом; но все же драматических сюрпризов он не преподносит. Некоторые из этих писем лишь недавно были найдены, другие отвергались прежними редакторами как содержащие слишком личный или непригодный для публикации материал. Недавно Курт-Р. Бирман превосходно переиздал переписку Гаусса с братьями Гумбольдт. К сожалению, многие письма Гумбольдтов утрачены, но сохранившийся материал представляет большой научный и исторический интерес. Бирман сумел составить полный и надежный перечень переписки с Александром фон Гумбольдтом, включая утраченные письма.

Брошюра "Памяти Гаусса" (Gauss zum Gedächtnis), вышедшая вскоре после кончины Гаусса, не есть первоисточник в полном смысле этого слова, но заслуживает упоминания, потому что это единственный крупный рассказ "очевидца" – одного из непосредственных современников и друзей Гаусса. Читать ее следует очень критически, потому что ее автор, геолог Сарториус [фон Вольтерсгаузен] плохо понял деятельность и личность Гаусса. Брошюра похожа на пыльную, выцветшую фотографию – но это фотография, а не картина.

Есть много других источников дополнительного оригинального материала, хотя их значение второстепенно. Некоторые из них указаны в библиографии; см. также замечания в приложении В. Журнал "Известия Гауссовского общества" (Mittielungen der Gauss-Gesselschaft) следует упомянуть как важнейшее современное издание, посвященное памяти Гаусса. Он публикует новые первичные материалы, в частности, не изданные еще письма, очерки и интересные репродукции малоизвестных изображений Гаусса и его окружения.

Не следует ожидать, что открытие и публикация новых документов скажут что-то существенно новое о научной или личной жизни Гаусса. Последним новым документом такого рода был дневник, найденный в 1898 году. Опубликованные источники дают обильный материал для широкого и полного изучения Гаусса.

Практически все первоисточники собраны и легко доступны в "Нижнесаксонской государственной и университетской библиотеке" (Neidersächsische Staats- und Universität- bibliothek) в Гёттингене. Испытываешь сильное впечатление, когда просматриваешь книги, где Гаусс записывал свои астрономические наблюдения, видишь его гигантские вычисления, а рядом – "шалости" и другие, менее сознательные проявления его личности. Но все это мало что прибавляет к тому, что мы уже знаем. Некоторые второстепенные материалы находятся в других местах – в музее Брауншвейга, в архивах Санкт-Петербургской академии наук и, возможно, в Берлине, но, в общем, они представляют лишь сентиментальный или антикварный интерес и нужны лишь тем, кого интересуют определенные специфические детали.

Все основные свои статьи Гаусс публиковал по-латыни. Уже в его время это было несколько старомодно, а для большинства современных математиков это делает их недоступными. Полезны резюме на немецком языке, которыми Гаусс снабдил многие из своих коротких статей; в приложении С знаком † отмечены статьи, снабженные таким резюме. В течение девятнадцатого века большинство крупных статей было переведено на немецкий, а некоторые – и на английский и французский (и другие языки). Французское издание "Арифметических исследований" вышло уже в 1807 году; это наводит на мысль, что латынь уже тогда не выполняла функций всеобщего языка науки, каким ее принято считать. Сегодня "Арифметические исследования" можно прочесть по-немецки и по-английски.*

Впервые "Арифметические исследования" были изданы на немецком языке в книге, озаглавленной "Исследования по высшей арифметике" (Untersuchungen über höhere Arithmetik), содержавшей также переводы других статей Гаусса по теории чисел, опубликованных при его жизни. Недавнее английское издание (Иель, 1966) не очень надежно.

"Теория движения. . ." также переведена на немецкий, английский и французский.** Английский перевод и предисловие к нему принадлежат контр-адмиралу Ч.Х. Девису; это издание вышло в 1857 году (Dover Publications, Inc.) и еще недавно было доступно. Есть французский, немецкий и английский переводы "Общих исследований о кривых поверхностях" – основной статьи Гаусса по дифференциальной геометрии***, и французский, немецкий и русский переводы работы "Интенсивность земной магнитной

* Есть русский перевод, см. с. 203

** Есть русский перевод, см. с. 203

*** Есть русский перевод, см. с. 203

силы, приведенная к абсолютной мере".* Допечатка их всех прекращена.

Несколько работ Гаусса малого объема изданы на немецком в серии "классических" научных трудов, которую основал и возглавлял до первой мировой войны химик-позитивист В. Оствальд (Ostwald's klassiker). Одна из этих брошюр содержит различные доказательства квадратичного закона взаимности, другая – статью Гаусса о методе наименьших квадратов. Недавно эта серия была возобновлена, но брошюры со статьями Гаусса еще не переизданы. Математический дневник Гаусса недавно издан отдельной книгой; кроме того, он издан в X томе Собрания трудов, где обстоятельно прокомментирован.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ОБЗОР ВТОРИЧНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Научная литература последних двух веков изобилует ссылками на работу Гаусса, интерпретациями, комментариями и т.п. Тщетно пытаться обсудить их все; даже в библиографии мы укажем лишь небольшую их часть. Два сборника очерков занимают выдающееся положение во вторичной литературе благодаря своему качеству и доступности.[1] Один из них – это тома X, 2 и XI, 2 Собрания трудов Гаусса (см. приложение А), другой – это сборник "К.Ф. Гаусс. 1777–1877" (C.F. Gauss: 1777–1877), изданный в 1957 году, по следам столетия со дня смерти Гаусса, под редакцией В. Рейхардта. Здесь мы кратко опишем эти работы.

Начнем с более старых очерков, вышедших в Собрании трудов.

1. Бахман. О работах Гаусса по теории чисел (Bachmann. Ueber Gauss' zahlentheoretische Arbeiten). Бахман был эрудированным специалистом по теории чисел. Его очерк надежен и полезен. Примерно две трети его составляет тщательный анализ "Арифметических исследований". Остальная часть посвящена сравнению различных доказательств закона квадратичной взаимности и высших законов взаимности. Несколько страниц посвящены вкладу Гаусса в аналитическую теорию чисел.

Работа Бахмана написана тщательно, осторожно и изобилует замечаниями о работе последователей Гаусса, но содержит сравнительно мало о предшественниках Гаусса. Работа Дирихле–Дедекинда, возможно, предпочтительнее работы Бахмана в той части, где их предмет совпадает, потому что в ней лучше прослежены связи между работой Гаусса и работой его последователей.[2] Все же очерк Бахмана заслуживает изучения. Он рассчитан на математика, интересующегося историей, и не содержит постороннего, чисто биографического материала. Главный его недостаток, с сегодняшней точки зрения, тот, что он написан еще до первой мировой войны, и не отражает

---

*Есть русский перевод, см. с. 203.

исследований и результатов последних шести десятков лет. Конечно, это относится ко всем очеркам в Собрании трудов Гаусса, но в теории чисел отсутствие упоминаний о современных исследованиях является особенно большим недостатком.

2. Шлезингер. О работах Гаусса по теории функций (Schlesinger. Ueber Gauss'Arbeiten zur Funktionentheorie).

Этот очерк, вышедший впервые в 1912 году, претендует на большее, чем очерк Бахмана. Шлезингер старается описать работы Гаусса по действительному и комплексному анализу как можно более последовательно и связать их с другими работами. Основные темы – это *agM* (арифметико-геометрическое среднее), эллиптические функции, гипергеометрическая функция и конформные отображения. Главная трудность Шлезингера состояла в том, что ему пришлось сравнительно много домысливать на основе незаконченных, фрагментарных статей. Несмотря на большое количество спорных деталей и предположений, этот очерк можно считать стандартным источником и справочником по работе Гаусса в данной области. Второе крупное возражение, которое можно сделать Шлезингеру, связано с тем, что его подход крайне неисторичен; он реконструирует работу Гаусса так, как будто тот – его современник, разделяющий современную концепцию анализа. Очерк Маркушевича в издании Рейхардта, о котором мы скажем ниже, отчасти компенсирует этот недостаток очерка Шлезингера, хотя отличается от него лишь в деталях и фактически основан на работе Шлезингера. Самые смелые предположения Шлезингер делает о том, как Гаусс исследовал θ-функции и модулярные формы; эти две темы были в центре внимания на рубеже веков. Почти наверное, Шлезингер переоценивает степень овладения Гауссом этих двух теорий.

Очерк Шлезингера – один из немногих, снабженных обширным и полезным указателем. Поскольку Шлезингер понимает свою тему очень широко, его очерк сильно перекрывается с очерком Бахмана (теория чисел) и очерком Штекеля (геометрия).

3. Островский. О первом и четвертом доказательствах Гаусса основной теоремы алгебры (Ostrowski. Ueber den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra). Эта статья очень непохожа на другие очерки. Ее предмет – два "аналитических" доказательства основной теоремы. Главная цель Островского – показать, что не вполне строгие доказательства Гаусса можно исправить и что они приемлемы с точки зрения сегодняшних критериев строгости. В диссертации Гаусса основная теорема алгебры впервые была доказана по-настоящему.

4. Штекель. Гаусс как геометр (Stäckel. Gauss als Geometer). Этот очерк, впервые опубликованный в 1917 году, по своему подходу и целям похож на очерк Шлезингера, но не так широк в своих обобщениях и выводах. Штекель располагает материал не в хронологическом порядке; он начинает с оснований геометрии и заканчивает другой областью, где вклад Гаусса особенно примечателен, – дифференциальной геометрией. В остальных главах говорится о том, как Гаусс геометрически интерпретировал "нгео-

метрические" математические проблемы и его занятиях элементарной геометрией и (сферической) тригонометрией. Описание Штекеля очень достоверно, только он, кажется, недооценивает роль геометрического мышления в работе Гаусса, быть может, введенный в заблуждение утверждением Сарториуса.[3] Штекель не прослеживает связей между различными областями геометрии, в которых работал Гаусс, что особенно заметно в случае дифференциальной геометрии и оснований геометрии. Вероятно, под влиянием интересов своего времени, Штекель сравнительно много места уделяет изложению идей Гаусса в области топологии (geometria situs), где сам Гаусс не сделал ничего систематического. Впрочем, Гаусс мог повлиять на развитие топологии через своих учеников Листинга, Мёбиуса и, быть может, Римана.

5. Больца. Гаусс и вариационное исчисление (Bolza. Gauss und Variationsrechnung). Этот обстоятельный отчет дает прекрасное представление о вкладе Гаусса в область, бывшую при его жизни в центре внимания. Больца описывает не только деятельность Гаусса, но и ее историческое место по отношению к деятельности современников, предшественников и последователей. Основной предмет рассмотрения Больца – три статьи: "Общие принципы теории формы жидкости, находящейся в состоянии равновесия", "Общие исследования о кривых поверхностях" и "Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния". Обсуждение "Общих принципов. . ." дает Больца удобный повод описать историю вариационного исчисления вплоть до 1850 года. В этом описании, кроме деятельности Гаусса, особенно интересны история теоремы Грина и δ-символа. Рассказ Больца об "Общих исследованиях. . ." строго классичен. Теперь, вследствие изменения взглядов на дифференциальную геометрию, обзор Больца не вполне удовлетворяет нас: сегодня работа Гаусса представляет больший интерес, чем можно судить на основании очерка Больца. Что в "Общих теоремах. . ." особенно поражает сегодня, – это использование Гауссом того, что Риман называл принципом Дирихле. Больца заканчивает свое обсуждение замечанием, что заключения Гаусса не выдерживают той критики, которую впервые сформулировал Вейерштрасс. Хотя область, о которой пишет Больца, не так значима для деятельности Гаусса, как теория чисел, он дает превосходный и характерный ее обзор, объясняя место Гаусса в истории этого направления и его математическое мышление.

6. Меннхен. Гаусс как вычислитель (Maennchen. Gauss als Zahlenrechner). Это систематический очерк, в котором автор старается проложить пути к пониманию корней гения Гаусса. Меннхена интересуют не детали вычислений Гаусса, а его отношение к числам и вычислениям. Хотя и несколько предположительные, заключения Меннхена о взаимодействии между вычислениями и "теоретической" теорией чисел представляются достаточно убедительными. Особенно интересны наблюдения Меннхена о том, что многие конкретные числа обладали своеобразными индивидуальностями для Гаусса.

7. Гепперт. О работах Гаусса по механике и теории потенциала (Geppert. Ueber Gauss' Arbeiten zur Mechanik und Potentialtheorie). Это последний очерк в томе XI, 1 Собрания трудов, и он завершает рассказ о теоретической деятельности Гаусса. Гепперт рассматривает математические аспекты исследований Гаусса о вращении Земли, его принцип наименьшего принуждения, статью о притяжении эллипсоидов, его вклад в теорию потенциала и механику. Очерк Гепперта не дает исторической ретроспективы; это очень сжатый отчет, подходящий для первоначального ознакомления с предметом. В большей своей части он перекрывается очерком Больца; в остальном его темы довольно периферийны, за исключением статьи Гаусса о принципе наименьшего принуждения в механике.

8. Галле. О геодезических работах Гаусса (Galle. Ueber die geodätischen Arbeiten von Gauss). Это ценный обзор, где Гаусс выступает не как знаменитый математик, а как выдающийся геодезист, имевший большое влияние на эту область. Кроме детального описания истории геодезической деятельности Гаусса, здесь излагается метод наименьших квадратов, а в приложении описываются различные конструкции гелиотропов, изобретенные Гауссом.

9. Шефер. О физических работах Гаусса (магнетизм, электродинамика, оптика) (Schaefer. Ueber Gauss' phisikalische Arbeiten (Magnetismus, Elektrodynamik, Optik)). Здесь описывается вклад Гаусса в экспериментальную и теоретическую физику; много биографической информации, но мало исторической. В своей теоретической части очерк перекрывается с некоторыми другими, особенно с очерком Больца. Главные темы – это магнетизм, "гальванизм" и теория электричества, включая описание телеграфов Гаусса–Вебера (с двумя иллюстрациями), и оптика (теория телескопов, систем оптических линз). Заслуживает упоминания детальное и тщательное описание фрагментов Гаусса по электродинамике.

10. Брендель. Об астрономических работах Гаусса (Brendel. Ueber die astronomischen Arbeiten von Gauss). Это хороший очерк, богатый научной и биографической информацией. Впридачу к наблюдениям, Брендель описывает инструменты, с которыми работал Гаусс. Вторая половина очерка посвящена описанию работы Гаусса в теоретической астрономии. Самые важные темы – это (очень ранняя) теория Луны, предложенная Гауссом, различные стадии развития Гаусса от вычисления орбиты Цереры в 1801 году до методов "Теории движения. . ." (1809) и теория возмущений, где особенно важны возмущения Паллады.

Сборник "Памяти Гаусса" 1957 года издания содержит статьи различных направлений, представляющие для нас неравный интерес. Мы упомянем лишь те из них, которые дополняют те, что включены в Собрание трудов, и дают что-либо для нашего современного понимания. В этом сборнике есть также несколько прекрасных, сравнительно малоизвестных иллюстраций, в том числе хорошая цветная карта геодезического исследования

Гаусса (перепечатанная из IX тома Собрания трудов). Вот статьи, которые мы назовем в первую очередь:

11. Ригер. Теория чисел в трудах Гаусса (Riger. Die Zahlentheorie bei Gauss). Это идеальное дополнение к бо́льшему по объему очерку Бахмана, во многих деталях опирающееся на него. Ригер прослеживает связи между работами Гаусса и нынешними исследованиями, а также описывает многие результаты Гаусса в современных нам терминах. Прекрасная библиография содержит более ста названий, включая статьи Гильберта, Минковского, Тагака, Деринга, Хассе и Вейля.

12. Кохендорфер. Алгебраические работы Гаусса (Kochendörffer. Gauss'algebraische Arbeiten). Быть может, самое ценное в этой короткой статье – это раздел, описывающий алгебраические понятия, зародыши которых имеются в работах Гаусса. Конечно, алгебра – это та область, где отвращение Гаусса к излишним абстракциям особенно характерно и имело особенно важные последствия.

13. Статьи Бляшке (Blaschke) и Клингенберга (Klingenberg) о геометрических исследованиях Гаусса лишены исторической перспективы. Они описывают научные направления, у истоков которых стоял Гаусс.[4]

14. Маркушевич. Работы К.Ф. Гаусса по теории функций (Markuschewitsch. Die Arbeiten von C.F. Gauss über Funktionentheorie). Это полезное дополнение к очерку Шлезингера, хотя в нем нет новых фактов. Достоинством статьи является ее историческая ориентация; кроме того, Маркушевич более осторожен, чем Шлезингер, в своих предположениях о фрагментарных и посмертно опубликованных работах Гаусса. Очерк содержит поучительное разъяснение аналитических доказательств Гаусса основной теоремы алгебры.

15. Гнеденко. О работах К.Ф. Гаусса по исчислению вероятностей (Gnedenko. Ueber die Arbeiten von C.F. Gauss zur Warscheinlichkeitsrechnung). Это полезное описание вклада Гаусса в теорию вероятностей и статистику; в Собрании трудов вообще не было очерка на эту тему. Дана обширная библиография.

16. Очерк Фолька (Volk) описывает деятельность Гаусса в астрономии и геодезии. Он краток, полезен и особенно хорош в той своей части, где подробно говорится о возмущениях Паллады.

17. Фалькенхаген. Основной вклад К.Ф. Гаусса в физику (Falkenhagen. Die wesentlichsten Beiträge von C.F. Gauss aus der Physik). Дается подробная сводка работ Гаусса по геомагнетизму; удачная иллюстрация показывает обстановку магнитной обсерватории Гаусса. Кратко описывается развитие в этой области после Гаусса и дается хороший обзор влияния Гаусса на теорию и практику. Кратко излагаются другие физические работы Гаусса.

Лучшим суммарным описанием научной деятельности Гаусса до сих пор остается то, которое дал Феликс Клейн в своих "Лекциях о развитии математики в XIX столетии".* Его недостатки аналогичны тем недостаткам очерка Шлезингера, о которых говорилось выше; см. также Введение.

Из крупных биографий Гаусса исключительно важна та, которую написал Даннингтон. Его значение — в огромном количестве материала, и как справочник она незаменима. Перечислим некоторые из включенных в нее материалов:

(1) Прекрасные иллюстрации с портретами Гаусса, членов его семьи и многих его коллег и учеников.

(2) Очерк (не очень проясняющий дело) о детях Гаусса и их потомках.

(3) Список книг, которые Гаусс брал в библиотеке университета за годы учебы (за исключением одного семестра, записи которого утрачены). Этот список очень полезен и содержит как научные книги и журналы, так и беллетристику.

(4) Список курсов, которые Гаусс читал в Гёттингене между 1808 и 1854 годами.

(5) Полная хронологическая библиография работ Гаусса.

(6) Полезная, хотя несколько неразборчиво составленная библиография вторичной литературы; см. мои замечания в библиографии в конце книги.

(7) Завещание Гаусса; любопытный, но не имеющий большого значения документ.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

УКАЗАТЕЛЬ РАБОТ ГАУССА

Это приложение содержит объединенный список названий и ключевых слов для Собрания трудов Гаусса. Статьи, опубликованные или по меньшей мере названные самим Гауссом, приведены под этими названиями; малые фрагменты часто названы по темам, а не так, как из назвали редакторы. Для дополнительных справок следует использовать первый и второй заголовки в таблицах содержания индивидуальных томов.

Детального и всеобъемлющего указателя работ Гаусса не существует. Нет и удовлетворительного указателя переписки.

Обозначения: * опубликовано посмертно,
† снабжено резюме на немецком языке.

*См. выходные данные русского издания на с. 203.

*ПРИМЕЧАНИЯ**

Глава 1

1.1. Существует много "апокрифических" историй о детстве Гаусса, не поддающихся проверке. Сравнительно достоверный источник в этом отношении – сборник "Памяти Гаусса" Сарториуса, должно быть, слышавшего многие из этих историй от самого Гаусса.

1.2. Приложение E в книге [Даннингтон] содержит семейное древо, охватывающее восемь поколений и начинающееся с поколения отца Гаусса.

1.3. Происхождение Гаусса со стороны отца прослеживается до 1600 года. Фамилия Gauss и ее варианты Goos или Gooss распространены к северу от Брауншвейга. О предках Гаусса со стороны матери мы знаем меньше, хотя сам он, кажется, больше интересовался своей родней с этой стороны и иногда общался с некоторыми родственниками по матери. См. [Борд], [Даннингтон] и [Хензельман].

1.4. Многое из того, что мы знаем об отце Гаусса, содержится в письме, которое Гаусс написал в 1810 году Минне Вальдек, впоследствии его второй жене. См. с. 73.

1.5. Дед Гаусса начал этот сложный процесс, приобретя очень маленький домик в черте города. Вскоре он его продал и использовал вырученную сумму как задаток за дом побольше, который он купил, взяв крупный заем у бургомистра Брауншвейга. В 1800 году отец Гаусса, наконец, вернул этот долг, продав дом за 1700 талеров. На оставшиеся деньги он купил другой дом, который уже принадлежал ему полностью. (Согласно [Даннингтон].)

1.6. Видимо, существует только одна фотография дома, в котором родился Гаусс. Ее приводят [Даннингтон] и [Райх].

1.7. Конечно, возможно, что Гаусс исключительно хорошо помнил свое детство. Во всяком случае, искать "достоверные" факты, видимо, тщетно.

1.8. Система образования в Пруссии была лучшей среди крупных германских государств, хотя она не сразу достигла высокого уровня.

1.9. Утверждения этой и предыдущей фраз – часть фольклора о Гауссе; вероятно, они исходят от самого Гаусса.

1.10. Одна из детских историй заканчивается высказыванием на местном диалекте "Вот же это лежит" (Dar licht se), с которым маленький Гаусс вручил свое решение математического задания.

1.11. Два наиболее известных учебных заведения – это Шульпфорта (Schulpforta) в Саксонии и Штифт (Stift) в Тюбингене (Вюртемберг). Первое тесно связано с развитием просвещения в Германии, второе – с романтическим движением.

---

* Курсивом набраны номера, под которыми приводятся цитаты из Гаусса.

1.12. См. примечание (4).

1.13. Дополнительную информацию можно найти в любой достаточно подробной истории немецкой литературы или в содержательных очерках Арно Шмидта "Рассказы о книгах и людях" (Arno Schmidt. Nachrichten von Bücher und Menschen, I).

1.14. В столбце "Новые открытия" (Neue Entdeckungen) в номере от 1 июня 1796 года.

Дополнение I

I.1. См., например, роман Морица "Антон Рейзер" (см. ниже).

I.2. Переписка с Герлингом, письма # # 285–387 от 1853 года.

I.3. В католических германских государствах университеты оставались под контролем церкви до конца 18-го столетия, и примерно так же обстояло дело в тех государствах, где господствовало ортодоксальное протестантство. Система финансируемых и контролируемых государством начальных и средних школ сложилась в ходе 18-го столетия.

I.4. Берлин, 1785-й и последующие годы.

I.5. См. К.-Р. Бирман, "Отношения между К.Ф. Гауссом и Ф.В. Бесселем" (Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft, 3, 1966).

I.6. Гёте в юности тоже был близок к движению "Бури и натиска", но впоследствии отвергал и презирал романтическое направление, слишком иррациональное для него.

I.7. Не будем обсуждать этот обширный и сложный вопрос.

Глава 2

2.1. Видимо, это часть фольклора о Гауссе; я не смог найти авторитетного источника.

2.2. Есть немало литературы, где говорится о возникновении и развитии Гёттингенского университета. Вероятно, лучший справочник – это "История Университета Георга-Августа" Г. фон Зелле (G. von Selle, Geschichte der George-August-Universität), 1933. Дополнительная информация есть в [Дю Мулен–Эккардт] и еще более важная – в [Сменд] (см. библиографию).

2.3. Такая карикатура была в числе памятных предметов, которые Бояи послал Сарториусу после смерти Гаусса. Она воспроизведена в [Райх].

2.4. См., например, письмо Гаусса Ольберсу от 24 июля 1804 года (# 43).

2.5. Приложение *G* в [Даннингтон] содержит список книг, которые Гаусс брал в университетской библиотеке.

2.6. Включено в переписку Гаусса и Бояи.

2.7. . . . und ich mit dem damals dort [i.e., Göttingen] studierenden Gauss bekannt wurde, mit dem ich noch heute in Freundschaft bin, obgleich weit entfernt mich mit ihm messen zu können. Er war sehr bescheiden und zeigte wenig; nicht drei Tage, wie mit Plato, jahrelang konnte man mit ihm zusammensein, ohne seine Grösse zu erkennen. Schade, dass ich dieses titellose, schweigsame Buch nicht aufzumachen und zu lesen verstand. Ich wusste nicht, wieviel er wusste, und er hielt, nachdem er meine Art sah, viel von mir, ohne zu wissen, wie wenig ich bin. Uns verband die (sich äusserlich nicht zeigende) Leidenschaft für die Mathematik und unsere sittliche Übereinstimmung, so dass wir oft mit einander wandernd, jeder mit den eigenen Gedanken beschäftigt, stundenlang wortlos waren. [Из автобиографического очерка который Бояи написал для Венгерской Академии наук.]

2.8. Ср., например, переписку Гаусса с Бояи, с. 153.

2.9. Кестнера не интересовало доказательство Гаусса возможности построения 17-угольника – видимо, он считал ее очевидной.

2.10. Переписка Гаусса и Бояи, письмо # II от 22 апреля 1799 года.

2.11. Видимо, Кестнер думал, что аксиома о параллельных не независима от остальных аксиом Евклида.

Дополнение II

II.1. Хотя Гауссу было очень интересно прослеживать путь своего развития и ход своих открытий, он никогда не занимался этим систематически, и его замечания на этот счет нельзя принимать буквально, хотя они почти всегда верны в некотором смысле.

II.2. В основном в Гёттингене. Некоторый материал есть в Брауншвейге и в Ленинграде (Санкт-Петербурге).

II.3. См. переписку с Бесселем; эти письма были написаны в 1811 году.

II.4. Это часто цитируемое утверждение можно найти в некрологе Эвальда, опубликованном в [Сарториус].

Глава 3

3.1. Использовать индексы означает пользоваться представлением циклической группы примитивных классов вычетов с помощью конкретного генератора.

3.2. Результат Гаусса включает теорему Вильсона как частный случай, но это не первое доказательство этой теоремы.

3.3. Это формализм не Гаусса, а Лежандра. Гаусс никогда не пользовался им в своих публикациях и, хотя он, конечно, был знаком с ним, никогда явно не ссылался на него. Указывая в § 76 "Арифметических исследований" на то, что теоремы должны следовать из понятий, а не из обозначений, он сделал это в связи со своим доказательством теоремы Вильсона и ссылаясь на замечание Варинга. Лишь в нескольких фрагментах, опубликованных посмертно, Гаусс использует формализм Лежандра.

3.4. Другие доказательства Гаусса тоже элементарны, но не столь прямолинейны.

3.5. Кронекер назвал это доказательство пробным камнем (Prüfstein) гения Гаусса.

3.6. Дыра в доказательстве Лежандра состоит в предположении, доказанном лишь значительно позже Дирихле, что всякая арифметическая прогрессия $ax + b$, где $(a, b) = 1$, содержит бесконечно много простых чисел.

3.7. Бинарные квадратичные формы Лежандра были определены как

$$ax^2 + bxy + cy^2.$$

Для вычислений удобно вводить множитель 2 в коэффициент среднего члена.

3.8. Гаусс называет эту функцию *детерминантом.*

3.9. Из литературы, например из [Эдвардс], можно узнать об этом больше.

3.10. Гауссу было бы трудно ограничиться теорией бинарных квадратичных форм. Лишь много позже, более чем через сто лет после публикации "Арифметических исследований", было найдено элементарное доказательство утверждения § 287, ради которого и делался экскурс в теорию тернарных форм.

3.11. По мере переизданий этой книги Дедекинд добавлял к ней все новые приложения и специально ввел теорию идеалов в арифметику. Пять глав книги Дирихле – Дедекинд посвящены следующим теоремам: делимость, конгруэнтность, квадратичные вычеты, квадратичные формы и числа классов. Четыре добавления посвящены делению круга, уравнению Пелля, композиции форм и теории алгебраических чисел.

3.12. В предисловии к книге Кронекера "Лекции по теории чисел" К. Гензель писал:

"... Gauss hat die Arithmetik zum Range einer Wissenschaft erhoben, aber erst Dirichlet gab ihr, wie schon Kronecker mit Recht hervorhob, wirklich eigentliche Metoden, indem er zeigte, dass und wie man ganze Klassen arithmetischer Probleme entweder lösen, oder wenigstens die arithmetiche Schwierigkeit auf eine analytishe reduzieren kann. Die Methoden Dirichlet's beruhen wesentlich auf der Einführung des Grenzbegriffes in die Arithmetik..."

3.13. ... Was da... [§ 356]... steht ist streng dort bewiesen, aber was fehlt, nämlich die Bestimmung des Wurzelzeichens, ist es gerade, was mich immer gequält hat. Dieser Mangel hat mir alles Ubrige, was ich fand, verleidet, und seit vier Jahren wird selten eine Woche hingegangen sein, wo ich nicht einen oder den anderen vergeblichen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht hätte besonders lebhaft nun auch wieder in der letzten Zeit. Aber alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal wieder die Feder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist es mir gelungen–aber nicht meinem mühsamen Suchen sondern bloss durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte–und dem, wodurch es gelang nachzuweisen. . .

3.14. См., например, письма к Бесселю от 28 июня 1820 года (# 45) и от 12 марта 1826 года (# 58) или письма к Дирихле от 2 ноября 1838 года.

3.15. Во втором томе Собрания трудов Кронекера есть исторический обзор квадратичного закона взаимности. Относительно хвалебные отзывы о неполном доказательстве Лежандра можно найти в приложении Гаусса к "Арифметическим исследованиям" и в его работе "Новое доказательство арифметической теоремы" (Theorematis arithmetici demanstratio nova) 1808 года.

Глава 4

4.1. Письма # I к Бояи от 29 сентября 1797 года и # III от 30 сентября 1798 года.

4.2. См., например, [Даннингтон].

4.3. Von meinem Herzog habe ich Ursache zu hoffen, dass er seine Unterstützung auch in der Folge noch fortsetzen werde, bis ich eine bestimmte Lage erhalte. Eine gewisse lucrative habe ich verfehlt. Es hält sich hier ein russischer Gesandter auf dessen zwei junge, sehr geistreiche Töchter ich in der Mathematik und Astronomia hatte unterrichten sollen. Weil ich aber zu lange ausblieb, so hat ein französischer Emigrant das Geschäft schon übernommen.

4.4. Письмо # V к Бояи от 29 ноября 1798 года.

4.5. [Сарториус], как ни странно, категорически отрицает ту помощь Пфаффа в написании диссертации Гаусса, о которой говориться в биографии Пфаффа.

4.6. Der Titel gibt ganz bestimmt die Hauptabsicht der Schriftan, indessen ist zu dieser nur ungefähr der 3te Theil des Ganzen verbraucht, das übrige enthält vornehmlich Geschichte und Kritik der Arbeiten anderer Mathematiker (namentlich d'Alembert, Bougainville, Euler, de Foncenex, Lagrange und die Compendienschreiber – welche letztere aber wol eben nicht sehr zufrieden sein werden) über denselben Gegenstand nebst mancherlei Bemerkungen über die Seichtigkeit die in unserer heutigen Mathematik so herrschend ist. [Письмо # XVIII к Бояи от 16 декабря 1799 года.]

4.7. Норвежский математик Вессель и швейцарский ученый Д'Арган независимо друг от друга открыли геометрическое представление комплексной области.

4.8. Судя по переписке (они ни разу не встретились) у Гаусса были особенно хорошие взаимоотношения с Н. фон Фуссом, секретарем Академии, ведшим переговоры с русской стороны.

4.9. Гаусс получил некоторые средства для приобретения нескольких хороших инструментов, но конкретных планов построения регулярной обсерватории никогда не было. См. также письмо Гаусса # XXIII к Бояи от 20 июня 1803 года.

4.10. . . . Sie kennen, liebster Freund, obgleich Mathematik und Astronomie nicht Ihr Fach ist, den grossen Ruhm, den sich Dr. Gauss in Braunshweig erworben hat. Dieser Ruhm ist vollkommen verdient, und der junge Mann von 25 Jahren geht schon allen seinen mathematischen Zeitgenossen vor. Ich glaube, dies einigermassen beurtheilen zu können, da ich nicht nur seine Schriften gelesen habe, sondern auch seit dem Anfange dieses Jahres mit ihm in vertrautestem Briefwechsel stehe. Seine Kenntnisse, seine ausserordentliche Geschicklichkeit im analytischen und astronomischen Calcul, seine unermüdliche Thätigkeit und Arbeitsamkeit, sein ganz unvergleichbares Genie haben meine höchste Bewunderung erregt, und immer vermehrt, je mehr er mir in dem Laufe unsers Briefwechsels von seinen Ideen mettheilte. Dabey liebt er die Sternkunde, vorzüglich die practische Sternkunde enthusiastisch, so wenig er auch aus Mangel and Instrumenten bisher Gelegenheit gehabt hat, letztere zu treiben. Für eine mathematische Lehrstelle hat er eine ganz entschiedene Abneigung: sein Lieblibgswunsch ist, Astronom bei irgend einer Sternwarte zu werden, um seine ganze Zeit zwischen Beobachtungen und seinen tiefsinnigen Untersuchungen zur Erweiterung der Wissenschaft theilen zu können... [Письмо к Хеерену от 3 ноября 1802 года].

Глава 5

5.1. Видимо, социальное положение семьи Иоганны было выше, чем у ее мужа. Ольберс знал ее девушкой.

5.2. Gestern Mittag, Freitags, bin ich hier nach einer sehr beschwerlichen Reise angelangt: dir liebes Hannchen, gehört meine erste Feder. Das abscheuliche Wetter, dem ich von Mittwoch Abends um 9 bis Donnerstag Morgens um 12 beständig ausgesetzt war, der durch Chenille, Schlafrock, zwei Kleider und Hemd endlich doch bis auf die Haut durchdringende Regen haben mir diese Art Reisen sehr verleidet: glücklicherweise hat es mir aber doch gar nichts geschadet, und ich bin mit der vorübergehenden Ungemächlichlichkeit davon gekommen. Schwierigkeiten andrer Art habe ich gar keine gehabt: sicher sind die Wege hier völlig, und nach meinem Passe ist nirgends einmal gefragt. Olbers habe ich nicht ganz wohl getroffen, er hat die Rose auf einer Backe, und darf sich jetzt nicht gut der Luft aussetzen übrigens befindet er und seine Familie sich wohl, alle grüssen dich herzlich. Bis jetzt (Vormittags 9 Uhr) habe ich noch keine neue Bekanntschaft gemacht als die von Dr Focke und dessen kleinen Wilhelm, ein allerliebstes sehr gesundes Kind von zwei Jahren, mit 10 Monat hat er schon ganz sicher gelaufen. Bessel hoffe ich noch heute zu sehen.

Wegen der Angelegenheit in Göttingen räth mir Olbers sehr zu, auf die Sicherheit des Engagements glaubt er könne ich mich völlig verlassen. Sollte aber auch Ernst mit der Sache werden so würde ich es doch wahrscheinlich so einzurichten suchen, dass ich nicht um Michaelis, sondern erst im Laufe des Herbst oder um Neujahr anträte, eben weil ich im nächsten Winter mich auf Vorlesungen nicht wohl würde einlassen können. Mit unsrer Wohnung bleibt es also auf alle Fälle noch beim Alten. Umsonst liebes Hannchen habe ich heute einen Brief von Dir erwartet: ich hoffe, dass nichts widriges vorgefallen ist und ihr alle wohl seid. Schreib mir ja bald wie es dir geht, ob deine gute Mutter ihre Rose wieder los ist (mit Olbers ist es auf der Besserung, ohne dass er etwas braucht, als sich zu schonen) was unser süsser Joseph macht, wie du mit seiner neuen Wärterin zufrieden bist. Hast du Hrn Mengen seinen Wein bezahlt, vielleicht hast du die Summe nicht mehr gewusst, ich meine es war 1T 14 ggr. 9d.

5.3. Ein wunderschönes Madonnengesicht, ein Spiegel des Seelenfriedens und der Gesundheit, zärtliche, etwas schwärmerische Augen, ein tadelloser Wuchs, das ist etwas, ein heller Verstand und eine gebildete Sprache, das ist auch etwas, aber nun eine stille, heitre, bescheidene, keusche Engelsseele, die keinem Wesen wehe thun kann, die ist das beste.

5.4. См. переписку Гаусса с Бесселем, особенно письмо Бесселя # 34 от 19 октября 1810 года и последующие письма.

5.5. Том III содержит "Определение притяжения...", том VI – вычисление параметров Паллады на 1803–1805 и 1807–1809 годы и том VII – обширные дополнительные фрагменты, относящиеся к возмущениям Паллады.

Одно из наиболее интересных открытий Гаусса связано с тем фактом, что отношение средних движений Юпитера и Паллады рационально и составляет в точности 7 : 18. Это показывает, что Юпитер влияет на движение Паллады аналогично тому, как Земля влияет на движение Луны. Гаусс упоминает о своем открытии в письме к Бесселю от 5 мая 1812 года; некоторый дополнительный материал есть в заметках Гаусса, посмертно опубликованных в VII томе. Этот эффект называется либрацией.

5.6. Летом 1803 года Гаусс выполнял с Цахом некоторую практическую работу.

5.7. Der Spiegel des 10 f. Teleskops, den ich nun zurückerhalten habe, scheint jetzt recht gut geworden zu sein; viel Proben damit anzustellen verhindert det Platz; auch habe ich zum genauen Centrieren jetzt keine Zeit und Lust. Es ist leicht möglich, dass dies Instrument nach meiner Abreise hier in sehr schlechte Hände kommt.

5.8. Письмо # 306 к Шумахеру от 6 июля 1840 года.

5.9. Neulich habe ich die Freude gehabt, einen Brief von einem jungen Geometer aus Paris LeBlanc zu erhalten, der sich mit Enthusiasmus mit der höheren Mathematik vertraut macht, und mir Proben gegeben hat, dass er in meine *Disquis. Arith.* tief eingedrungen ist . . .

5.10. Meine *Disqu. Arith.* haben mir unlängst eine grosse Uberraschung veranlasst. Habe ich Ihnen nicht schon einigemale von einem Pariser Korrespondenten LeBlanc geschrieben, der mir Proben gegeben hat, dass er sich alle Untersuchungen dieses Werkes auf das Vollkommenste zu eigen gemacht hat? Dieser LeBlanc hat sich neulich mir näher zu erkennen gegeben. Dass LeBlanc ein bloss fingierten Name eines jungen Frauenzimmers Sophie Germain ist, wundert Sie gewiss ebenso sehr als mich.

5.11. Одно из доказательств, опирающихся на теорию биквадратичных вычетов.

5.12. См., например, [Эдварс].

5.13. Письмо # XXIX к Бояи от 20 мая 1808 года.

5.14. Временами между Гауссом и Гардингом бывали трения, вызванные, вероятно тем, что осталось навсегда неясным, какова была позиция Гардинга, когда Гаусс приехал в Гёттинген. По крайней мере, вначале Гардинг считал себя более независимым, чем Гаусс готов был позволить.

Дополнение IV

IV.1. Во время Семилетней войны.

IV.2. Прусская армия рассчитывала на победу, но она была дезорганизована и лишена четкого руководства. Старый герцог не справился с навязанной ему ролью главнокомандующего.

IV.3. В то время адрес Гаусса был Штейнвег, 22, очень близко к городским воротам.

IV.4. Брат Наполеона Жером получил в управление вновь созданное королевство Вестфалию, занимавшее буферное положение между Францией и Пруссией. Вообще, Жерома не принято считать способным или эффективным правителем, но это суждение вполне может быть несправедливым. Жером правил менее десяти лет.

IV.5. Вопросу о присяге суждено было приобрести большое значение в 1837 году, во время протеста Гёттингенской семерки. Обычно каждый немецкий гражданский служащий, включая учителей и профессоров, должен быть дать присягу верности своему князю или, впоследствии, конституции своего государства.

IV.6. Этот вопрос несколько раз встает в переписке с Герлингом. Иосиф рано ушел в отставку, чтобы поступить в одну из новых железнодорожных компаний, где служил вполне успешно.

IV.7. Вестфалия подражала Франции, где Наполеон раздавал титулы графов, герцогов и князей.

IV.8. Г.Э. Лессинг – самый значительный немецкий писатель и поэт 18-го века. Он жил в Гамбурге, пока не принял предложения приехать в Вольфенбюттель.

IV.9. Он сильно повлиял на положение знати, утратившей большую часть своего политического влияния.

IV.10. Стать юристом было весьма престижно для внука чернорабочего. Такое предположение кажется убедительным, хотя мы не знаем деталей.

IV.11. См., например, книгу Голо Манна "Немецкая история 19- и 20-го столетий" (Golo Mann. Deutsche Geschichte des 19. und 20. Jahrhunderts), Франкфурт, 1958 г.

IV.12. Одним из первых глашатаев германской национальной литературы был Мартин Оптиц, который жил в 17-м веке. Впоследствии сопротивление иностранным влияниям стало постоянной темой в Германии, кульминацией чего явились националистические движения "Буря и натиск" и романтизм. Классическая поэзия Виланда, Гердера, Шиллера, Гёте была по духу интернационалистической.

IV.13. См. поэму Гёльдерлина "Эмпедокл – немцам" (Empedokles – An die Deutshen).

IV.14.. Уланд "Старое доброе право" (Das alte gute Recht) в книге "Песни отечества" (Vaterländische Gesänge).

Глава 6

6.1. См. письмо Иоганны Гаусс от 21 ноября 1807 года к ее подруге Кюппе. Оно перепечатано в [Мак].

6.2. Словом Biedermaier, невыясненного происхождения, принято характеризовать первые десятилетия 19-го века в Германии. О его смысле легко догадаться, если учесть, что Maier – обычная немецкая фамилия, а bieder означает прямой и спокойный.

6.3. . . . Herzlich leid mein süsser Liebling thut es mir, das mein Schweigen Dich unruhig gemacht hat, alles in unsern Hause gieng den gewöhnlichen Gang; ich befand mich ausser der Sehnsucht nach Dir sehr wohl, der Josepf entbehrte nichts, sondern war sehr Lustig, seine neue Wärterin, wie ich Dir schon gemeldet habe, kam am Freitag an, es ist eine sehr rechtliche stille Person, zwar eine alte Jungfer, aber so kinderlieb, das der Josepf schon am ersten Tage heymisch bey ihr war, jetzt ist er völlig so gern bey ihr als bey seiner Mutter, dies dünkt mir ist mir Bürge, das ich ihn ihr unbedingt anvetrauen kann. er geht täglich spazieren und besucht mit ihr entweder unsere Verwanten oder seine Vorgänger, deren eine ziemliche Menge sind, dies behagt ihn so sehr, das er es durch zeigen auf die Thür und durch ampeln nach derselben sehr deutlich macht, wenn seine Lust im Zimmer zu bleiben aus ist, seine Lebhaftigkeit hat sehr zugenommen, jeder freut sich über ihn und will es nach der Ebeling (der Wärterin) ihrer Versicherung nicht glauben, das dies zarte feine Gesicht einem Knaben gehöre, am 26. ist ohne alle Umstande der 7te Zahn angekommen, dafür aber hat der arme Schelm sein grösstes Gut am Sontage eingebüsst, ich bin, so oft ich daran dencke, unbeschreiblich traurig, doch war ich zu diesem schnellen Entschlusse genötigt, da die Ebelibgen nur auf unbestimmte Zeit bleiben kann . . . meine Unentschlossenheit, wann ich es thun wolle, war vorzüglich Schuld, das ich Dir am Freitage nicht schrieb, auch glaubte ich, das Briefe an Dich kommen würden, welches aber erst ungewöhnlich spät nach $\frac{1}{2}$ 10 gescha, die möglichkeit, das Harding früher als Du eintreffen könne, bewog mich Dir den Brief zu schicken, vergieb meiner Eile das kunfuse Cuvert. [Письмо от 30 июня 1807 г.]

6.4. Alle Stunden mein theuerstes Hannchen, wo ich keine besondere Beschäftigung habe, weiss ich nicht angenehmer anzuwenden, als wenn ich mich mit Dir unterhalte, wenn ich gerade nichts von Bedeutung zu melden habe. Ich fahre also fort dir zu erzählen, wie ich bisher meine Zeit in Bremen zugebracht habe . . . [Письмо от 1 июля 1807 г.]

6.5. Dein lieber Brief vom 30., welchen ich soeben erhalte, macht mir ausnehmend viel Freude. Es ist ein unschätzbares Glück, dass unser süsser Joseph den kritischen Zeitpunkt in so guten und zuverlässigen Händen abwarten kann; wenn Du diesen Brief erhältst, ist vermuthlich das schlimmste schon vorbei. Studiert er die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung noch fleissig? Die Beschwerden meiner Reise haben meiner Gesundheit nichts geschadet, aber die so sehr veränderte Diät (ich esse hier zuverlässig viermal so viel als zu Hause und doch beschwert man sich noch über meinen wenigen Appetit) hat anfangs einige Obstructionen zugezogen, denen aber duch ein Digestivpulver bald abgeholfen wurde, jetzt fange ich an der epicureischen Lebensart gewohnt zu werden. Olbers glaubt nicht, dass gegen meine Magenschwäche, Blähungen und Obstructionen die Apotheke etwas gründliches vermöge, eher der Keller. Die Diät und Lebensart müssten bei dieser Art von Übel das Beste thun. Unsere gewöhnliche Sorte Rothwein, die Tavelle, hält er für ungesund und glaubt, dass er, wenn auch nicht mein öftres Herzklopfen allein hervorbringen, es doch sehr befördern könne. Sehr gut für den Magen sei zuweilen ein Glas Madera, zur Beförderung der Öffnung empfielt er mir eine Pfeife täglich früh zum Kaffee, übrigens Bewegung u.s.w. Sehr gut würde mir aber vorzüglich zuweilen ein laues Bad sein; dem von Zeit zu Zeit wiederhohlten Gebrauche einer Brunnencur schreibt er die heilsamsten Wirkungen zu; wer weiss, ob wir nicht übers Jahr einander in Rehburg ein Rendesvous geben können. Sehr grosse Lust hat Olbers auch, dereinst einmal mit mir eine Reise nach Paris zu machen, da wir alle beide deas französische Theater u. dergl. Narrenpossen eben nicht zu schätzen wissen, so würden wir beide in ein paar Wochen das meiste uns sehenswürdige abthun und in etwa 5 Wochen die ganze Reise vollenden können.

Die Nachricht von dem Waffenstillstande zwischen den Franzosen und Russen scheint sich zu bestätigen und auf einen naher Frieden zu deuten, unterdess sind nun aber die Engländer in Schwedischpommern gelandet. Es sind tolle Zeiten.

Es wird hohe Zeit mich anzukleiden: ich muss also eilig schliessen. Viele Grüsse an deine gute Mutter, sowie an alle unsre Freunde, ebenso als hätte ich sie namentlich und einzeln genannt.

6.6. Альбрехт фон Галлер (1708–1777) вошел в историю немецкой литературы благодаря эпической поэме "Альпы", выразившей новое отношение к природе и повлиявшей на "Бурю и натиск" и романтические движения. До и после пребывания в Гёттингене фон Галлер жил в своей родной Швейцарии, родине нескольких крупных немецко язычных поэтов этого периода.

6.7. См. дополнительную информацию в [Сменд]. В его статье описано, как была учреждена академия, через 14 лет после основания университета, как специальное заведение для интеллектуального общения составлявших ее знаменитостей.

6.8. В Германии господствовала философия Меттерниха. Положение изменилось лишь после 1848 года, когда Меттерних вынужден был уйти в отставку, а Луи-Филипп был свергнут.

6.9. См. Гёте, Фауст, часть I.

6.10. Он закончил свою карьеру как глава административной власти (Regierungspräsident) в Датмольде. Эту должность можно сравнить с должностью префекта во Франции.

6.11. Рудольф Борхардт (Rudolf Borchardt) интересно описывает эти события в очерке "Немецкие памятные речи" в книге "Проза III", Штутгарт, 1960.

6.12. Зюсмильх был под сильным влиянием работы, проделанной ранее в Англии. Для Англии был традиционен бóльший интерес к эмпирическим статистическим исследованиям, чем для континента.

6.13. Es ist dem Menschen nichts angenehmers, als die Gewissheit der Erkenntnis, und wer einmal dieselbe geschmeckt, der bekommt einen Eckel für allem, wo er nichts als Ungewissheit siehet. Aus dieser Ursache ist es kommen, dass die Mathematici, welche beständig mit gewisser Erkenntnis umgegangen, einen Eckel vor der Philosophie und andern Dingen bekommen, und nichts angehmers gefunden, als dass sie ihre genutzte Zeit mit Linien und Buchstaben zubringen können.

6.14. Гёте, не принявший теорию Ньютона по философским причинам, развил свою, сложную и оригинальную, теорию цвета. Гаусс никогда особенно не интересовался поэзией Гёте (хотя она ему нравилась), а научный дилетантизм Гёте никак не импонировал Гауссу. Друг с другом они никогда не встречались, но мы знаем, что Гёте восхищался Гауссом и хранил его автограф в своей коллекции.

Глава 7

7.1. ... Glücklich fliessen die Tage in dem einförmigen Gange des häuslichen Lebens hin: wenn das Mädchen einen neuen Zahn kriegt, oder der Junge ein paar neue Wörter gelernt hat, so ist das fast ebenso wichting, als wenn ein neuer Stern oder eine neue Wahrheit entdeckt ist... (Письмо # XXX к Бояи от 2 сентября 1808 г.)

7.2. Sie luden mich so freundlich ein, Sie zu besuchen, wenn meine Frau sich wohl befände. Jetzt befindet sie sich wohl. Gestern Abend um 8 Uhr habe ich ihr die Engelsaugen, in denen ich seit 5 Jahren einen Himmel fand, zugedrückt. Der Himmel gebe mir Kraft, diesen Schlag zu tragen. Erlauben Sie mir jetzt, theurer Olbers, bei Ihnen ein paar Wochen in den Armen der Freundschaft Kräfte für das Leben zu sammeln, das jetzt nur noch als meinen drei unmündigen Kindern gehörend Werth hat. Erlaubt es der Arzt, so komme ich vielleicht diesem Briefe schon in ein paar Tagen nach. (Письмо # 101 к Ольберсу от 12 октября 1809 г).

7.3. Эта рукопись, в числе других семейных бумаг, перешла к внуку Гаусса Карлу Августу Гауссу. Хотя ее трагический смысл очевиден, все же трудно сказать, в какой мере она является непосредственным выражением чувств, а в какой – данью общепринятому способу оплакивания. Учтем, что времена были сентиментальные. См., например, "Жизнеописание" Юнг-Штиллинга (Jung-Stilling, Lebensgeschichte), том I, 1777 г.

7.4. Siehst Du Geliebter Schatten meine Thränen? Du kanntest ja, so lange ich dich die meine nannte, keinen Schmerz, als den meinigen, und brauchtest zu Deinem Glücke Nichts, als nur mich froh zu sehen! Selige Tage! Ich armer Thor konnte ein solches Glück für ewig halten, konnte wähnen, Du einst verkörperter und jetzt wieder neu verklärter Engel seyst bestimmt, mein ganzes Leben hindurch alle die kleinlichen Bürden des Lebens mir tragen zu helfen? Womit hatte ich denn dich verdient? Du bedurftest nicht des Erdenlebens, um besser zu werden. Du tratst nur ein ins Leben, um uns vorzuleuchten. Ach ich war der Glückliche, dessen dunkle Pfade der Unerforschliche von deiner Gegenwart, von deiner Liebe, von deiner zärtlichsten und reinsten Liebe erhellen liess. Durfte ich dich für meines Gleichen halten? Theures Wesen. du wustest selbst nicht, wie einzig du warst. Mit der Sanftmuth eines Engels ertrugst du meine Fehler. O wenn es den Seligen vergönnt ist noch unsichtbar uns armen im Lebensdunkel irrenden nahe zu seyn, verlass mich nicht. Kann deine Liebe vergänglich seyn? Kannst Du sie dem armen, dessen Höchstes Gut sie war entziehen? O du beste, bleib meinem Geiste nah Lass deine selige Seelenruhe, die dir den Abschied von deinen Lieben tragen half, sich mir mittheilen; hilf mir, deiner immer würdiger zu seyn! Ach was kann den theuren Pfändern unsrer Liebe dich, deine mütterlichen Sorge, was dein Vornbild ersetzen, wenn du mich nicht stärkst und veredelst. für sie zu leben, und in meinem Schmerze nicht zu versinken!

25 Okt. Einsam schleiche ich unter den fröhlichen Menschen, die mich hier umgeben. Machen sie mich meinen Schmerz auf Augenblicke vergessen. so kommt er nachher mit verdoppelter Stärke zurück. Ich tauge nicht unter eure frohe Gesichter. Ich könnte hart gegen euch werden, was ihr nicht verdient. Selbst der heitere Himmel macht mich nur trauriger. Jetzt hättest du theure nun dein Lager verlassen, jetzt wandeltest du an meinem Arme unsern Liebling an der Hand und freutest dich deiner Genesung und unsers Glücks, das wir jeder im Spiegel der Augen des andern läsen. Wir träumten von einer schönen Zukunft. Ein neidischer Dämon–nein kein neidischer Dämon, der Unerforschliche hat es nicht gewollt. Du Seelige schauest nun schon die dunkeln Zwecke, die durch die Zertrümmerung meines Glücks erreicht werden sollen, in Klarheit an. Ist ts dir denn nicht vergönnt dem Verlassenen einige Tropfen Trost und Resignation ins Herz zu flössen? Du warst ja schon im Leben so überreich an beiden. Du hattest mich so lieb. Du wolltest so gern bei mir bleiben. Ich sollte mich doch nicht zu sehr dem Gram überlassen, waren beinahe deine letzten Worte. Ach wie fange ich es an ihm zu entgehen. Ach erbitte dir von dem Ewigen–könnte er dir alles abschlagen? – nur das Einzige, dass deine unendliche Seelengute mir stets recht lebendig vorschwebe, damit ich, so gut ich armer Erdensohn kann, dir nachstrebe.

7.5. О прежней помолвке упоминает Гаусс в своем первом письме к Минне Вальдек.

7.6. Времена были романтические, и было бы удивительно, если бы Минна не ждала каких-то бурных проявлений от своего будущего мужа.

7.7. . . Mit klopfendem Herzen schreibe ich Ihnen diesen Brief, von dem das Glück meines Lebens abhängt. Wenn Sie ihn empfangen, sind Sie schon bekannt mit meinen Wünschen. Wie werden Sie, Beste, sie aufnehman? Werde ich Ihnen nicht in einem nachtheiligen Lichte erscheinen, dass ich, noch kein halbes Jahr nach dem Verluste einer so geliebten Gattinn, schon an eine neue Verbindung denke? Werden Sie mich deshald für leichtsinnig oder noch schlimmer halten?

Ich hoffe, Sie werden es nicht. Wie könnte ich auch den Muth haben, Ihr Herz zu suchen, wenn ich mir nicht schmeichelte, in Ihrer Meinung so gut zu stehen, dass Sie mich keiner Motive fähig halten könnten, für die ich erröten müsste.

Ich ehre Sie viel zu sehr, um es Ihnen verschweigen zu wollen, dass ich Ihnen nur ein getheiltes Herz anzubieten habe, in welchem das Bild des verklärten Schattens nie erlöschen wird. Aber wenn Sie wüssten, Sie Gute, wie sehr die Verewigte Sie liebte und achtete, Sie würden mich ganz verstehen, dass ich in diesem wichtigen Augenblicke, wo ich Sie frage, ob Sie sich entschliessen können den von der Verewigten verlassenen Platz anzunehmen, diese lebendig vor mir sehe, freudig meinen Wünschen zulächelnd und mir und unsern Kindern Heil und Segen wünschend.

Aber, Theuerste, ich will Sie nicht bestechen bei der ernstesten Angelegenheit Ihres Lebens. Dass eine Selige mit inniger Freude auf die Erfüllung meiner Wunsche herabsehen würde; dass Ihre Mutter, die ich damit bekannt gemacht habe (sie selbst wird Ihnen sagen was mich dazu vermocht hat) – dass Ihr Vater, welcher durch Ihre Mutter darum weiss, meine Absichten billigen und unser aller Glück davon hoffen; dass ich, dem Sie theuer waren vom ersten Augenblicke an wo ich Sie kennen lernte, überglücklich dadurch werden würde, diess alles erwähne ich bloss darum, um Sie zu bitten, um Sie zu beschwören, darauf keine Rücksicht zu nehmen, sondern bloss Ihr eignes Glück und Ihr eignes Herz zu Rathe zu ziehen. Sie verdienen ein ganz reines Glück und mussen sich durchaus durch keine Nebenrücksichten, die ausserhalb meiner Persönlichkeit liegen, von welcher Art sie auch sein mögen, leiten lassen. Lassen Sie mich Ihnen auch ganz offen gestehen, dass, so bescheiden und genügsam ich sonst in meinen Ansprüchen an das Leben bin, es in dem engsten häuslichen Verhältnisse keinen Mittelzustand für mich geben kann, und dass ich da entweder höchst glücklich oder sehr unglücklich seyn muss: und glücklich würde mich selbst die Verbindung mit Iben nicht machen, wenn Sie es dadurch nicht ganz würden. . .

7.8. Письмо от 15 апреля – один из основных источников всего, что мы фактически знаем о родителях Гаусса и о том, какими он их видел.

7.9. Doch Ein Wort noch: der Grund, warum ich nicht an meine Mutter geschrieben habe, ist weil ich sie gerne überraschen möchte; aber der Grund, warum ich Sie nicht habe schreiben lassen wollen, ist–weil meine Mutter Geschriebnes nicht lesen kann, und Sie es doch nicht wünschen würden, Ihre schöne Seele vor Personen, denen es nicht bestimmt war, ganz gezeigt zu haben.

7.10. В Лилиентале, близ Бремена, была хорошая (частная) обсерватория, вероятно, вторая в Германии после Зееберга. Ее владелец, Шрёдер, был богатым юристом, увлекавшимся астрономией.

7.11. Феликс Клейн очень интересовался этим вопросом и обсуждал его с неодобрением по отношению к 18-му веку.

7.12. См., например, письма Гаусса # 24 от апреля 1816 года, # 348 от 11 декабря 184? года, # 370 от 20 сентября 1843 года.

7.13. Это могло быть причиной возражений Кронекера, смотревшего на работу Гаусса иначе.

7.14. . . Sie sind ganz im Irrthum wenn Sie glauben, dass ich darunter nur die letzte Politur in Beziehung auf Sprache und Eleganz der Darstellung verstehe. Diese kosten vergleichsweise nur unbedeutenden Zeitaufwand; was ich meine, ist die *innere* Vollkommenheit. In manchen meiner Arbeiten sind solche Incidenzpunkte, die mich jahrelanges Nachdenken gekostet haben und deren in kleinem Raum concentrirter Darstellung nachher niemand die Schwierigkeit anmerkt, die erst überwunden werden muß.

7.15. [Сарториус], с. 82. См. также письмо # 123 к Шумахеру от 12 февраля 1826 года.

Дополнение VI

VI.1. Собрание трудов, том XII, с. 57 и далее.

VI.2. См. письмо # 27 к Бесселю от 13 ноября 1814 года или письмо # 98 к Ольберсу от 3 декабря 1808 года. Гаусс изменил свое мнение по отношению к Линденау. Сначала он не принимал его всерьез, но позже признал как друга и коллегу. (См. письмо # 61 к Ольберсу от 2 июля 1805 года.)

VI.3. Точное название журнала: Commentationes societatis regiae scientarum Göttingensis recentiores.

VI.4. . . . Da in dem angeführten Werke die Untersuchung so weit bereits geführt, und nur die Bestimming des Zeichens für irgend einen Werth von k noch übrig war: so hätte man glauben sollen, dass nach Beseitigung der Hauptsache diese nähere Bestimmung sich leicht wüde ergänzen lassen, um so mehr, da die Induction dafür sogleich ein äusserst einfaches Resultat gibt: für $k = 1$, oder für alle Werthe, welche quadratische Reste von n sind, muss nemlich die Wurzelgrösse in obigen Formeln durchaus positiv genommen werden. Allein bei der Aufsuchung des Beweises diser Bemerkung treffen wir auf ganz unerwartete Schwierigkeiten, und dasjenige Verfahren, welches so genugthuend zu der Bestimmung des absoluten Werths jener Reihen führte, wird durchaus unzureichend befunden, wenn as die vollständige Bestimmung der Zeichen gilt. Den *metaphysischen* Grund dieses Phänomens (um den bei den Französischen Geometern üblichen Ausdruck zu gebrauchen) hat man in dem Umstande zu suchen, dass die Analyse bei der Theilung des Kreises zwischen den Bögen $\omega, 2\omega, 3\omega \ldots$ $\ldots (n-1)\omega$ keinen Unterschied macht, sondern alle auf gleiche Art umfasst; und da hiedurch die Untersuchung ein neues Interesse erhält: so fand Hr. Prof. Gauss hierin gleichsam eine Aufforderung, nichts unversucht zu lassen, um die Schwierigkeit zu besiegen. Erst nach vielen und mannigfaltigen vergeblichen. Versuchen ist ihm dieses auf einem auch an sich selbst merkwürdigen Wege gelungen. . . (Собрание трудов, II, с. 156.)

VI.5. Соответствующие обзоры изданы в томе IV Собрания трудов.

VI.6. См. том XII Собрания трудов.

VI.7. "Исследования о свойствах положительных тернарных квадратичных форм" (Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen): обзор Гаусса издан в томе II Собрания трудов.

VI.8. "Арифметические исследования", § 272.

Глава 8

8.1. Хотя "Теория движения. . ." – не столь значительная работа в астрономии, как "Арифметические исследования" – в теории чисел, все же их функции аналогичны. Этот труд Гаусса оказался намного влиятельнее других сделанных тогда попыток представить имевшиеся в астрономии знания в систематическом виде.

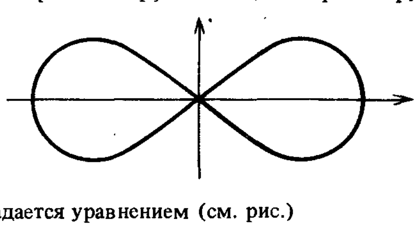
8.2. Вопрос о приоритете метода наименьших квадратов породил обширную литературу. Для нас обоснование, вывод и систематическое применение этого метода представляются более интересными, чем то, кому случилось первым его открыть, применить и опубликовать.

8.3. Интересно, что Гаусс не обсуждает подробно вопроса, интересовавшего и занимавшего его в течение многих лет.

8.4. См. соответствующие замечания в очерке Бренделя в томе XI, 2 Собрания трудов.

8.5. В "Лекциях о развитии математики в XIX столетии".

8.6. Есть убедительные свидетельства того, что Гаусс интересовался agM уже в начале 1790-х годов (см. [Шлезингер] в томе X, 2 Собрания трудов).



8.7 Лемниската задается уравнением (см. рис.)

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

В очерке Маркушевича в [Рейхардт] проводится поучительное сравнение свойств тригонометрических функций и лемнискаты.

8.8. В числе прочих Гаусс изучил функции $\theta_{00}(\psi | x)$, $\theta_{01}(\psi | x)$, $\theta_{10}(\psi | x)$, $\theta_{11}(\psi | x)$ и много соотношений между ними (ср. его посмертно опубликованную статью "Сто новых теорем. . ." (Hundert neue Theoreme. . .) в томе III Собрания трудов).

8.9. Письмо = 61 к Бесселю от 30 марта 1828 года.

Дополнение VIII

VII.1. См. [Шлезингер] с. 102 в томе X, 2 Собрания трудов. См. также Собрание трудов, том VIII, с. 103.

VII.2. Гаусс знал геометрический смысл подстановок $t + i$ и $1/t$.

VII.3. Мы уже говорили, что Гаусс хорошо сознавал теоретико-групповую структуру классов в "Арифметических исследованиях", но никогда не обсуждал ее в явном виде.

VII.4. См. публикации Эйлера в "Исследованиях по интегральному исчислению, II" (Institutiones calculi integralis II) и в "Новых петербургских известиях, XII" (Nova Acta Petropolitana XII).

Глава 9

9.1. В противоположность теории Декарта, согласно которой Земля должна быть сжата по экватору.

9.2. Гаусс написал несколько писем, чтобы получить данные о точках Эпиналя. Наконец, с помощью Лапласа ему это удалось, но оказалось, что большинство столбов, поставленных Эпиналем, уже нельзя найти.

9.3. См. письмо # 20 к Шумахеру от 12 августа 1818 года.

9.4. . . . Ich habe hier von einem Tag auf den andern auf Ihren Besuch gehofft und hoffe noch darauf, da ich unter 8 Tagen nicht von hier weg kann; es werden noch zwei Richtungen festgelegt werden müssen, die nach Wulsode, wo H. Müller jetzt ist, und die nach Kalbsloh, wohin er von da in einigen Tagen abgehen wird. Letztere ist deswegen nothwendig, weil die Möglichkeit des Durchhaus von Hauselberg nach Scharnhorst noch sehr problematisch ist, indem vielleicht das Terrain des Hassels selbst noch zu hoch ist. Von Kalbsloh aus ist diese Möglichkeit viel wahrscheinlicher, allein ich substituire doch ungern Kalbsloh für Hauselberg, da man am ersten Platze Wulfsode nicht sehen kann.

Wohin ich von hier gehe, ist noch ungewiss; ich hätte mich daher erst gern noch hier mit Ihnen besphochen. Nach meiner vorläufigen Rechnung liegt Wilsede 12,3 Meter über dem Fussboden der Göttinger Sternwarte. Haben Sie die Zenithdistanzen auf Michaelis gemessen, so können Sie nun schon vorläufig alles auf die Meeresfläche beziehen. Die Distanz Wilsede von Hamburg wird 42454 Meter ± seyn.

9.5. [Рейхардт] приводит полную карту треугольников Гаусса (из тома IX Собрания трудов).

9.6. В письме к Сарториусу, перепечатанному в переписке Гаусса и Бояи.

9.7 . . . Du willst nun mein aufrichtiges unverholenes Urtheil. Und dies ist, dass Dein Verfahren mir noch nicht Genüge leistet. Ich will versuchen, den Stein der Anstosses, den ich noch darin finde (und der auch wieder zu derselben Gruppe von Klippen gehört woran meine Versuche bisher scheiterten) mit so vieler Klarheit als mir möglich ist ans Licht zu ziehen. Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden. Indess habe ich jetzt so manche andere Beschäftigungen vor der Hand. . . (Письмо # XXVII к Бояи от 25 ноября 1804 г.)

9.8. Указания на это можно найти в переписке с Герлингом и в меньшей степени с Шумахером.

9.9. См. цитату на с. 111.

9.10. В разделе "Трансцендентальная эстетика"Критики чистого разума" Канта.

9.11. Письмо # 359 к Герлингу от 23 июня 1846 года.

9.12. Письмо # 147 к Ольберсу от 28 апреля 1817 года.

9.13. Там же.

9.14. Письмо Бояи # XXXIII от 20 июня 1831 года.

9.15. Письмо # XXXIV к Бояи от 6 марта 1832 года.

9.16. Можно спорить о том, много ли нового содержит Работа на Копенгагенскую премию, но в ней, по-видимому, впервые Гаусс использовал комплексные соотношения, чтобы сформулировать условие того, когда отображение конформно.

9.17. ... Diese Sätze führen dahin, die Theorie der krummen Flächen aus einem neuen Gesichtspunkt zu betrachten, wo sich der Untersuchung ein weites noch ganz unangebautes Feld öffnet. Wenn man die Flächen nicht als Grenzen von Körpern, sondern als Körper, deren eine Dimension verschwindet, und zugleich als biegsam, aber nicht als dehnbar betrachtet, so begreift man, dass zweierlei wesentlich verschiedene Relationen zu unterscheiden sind theils nemlich solche, die eine bestimmte Form der Fläche im Raume voraussetzen, theils solche, welche von den verschiedenen Formen, die die Fläche annehmen kann, unabhängig sind. Die letztern sind es, wovon hier die Rede ist: nach dem, was vorhin bemerkt ist, gehört dazu das Krümmungsmaass; man sieht abe leicht, dass eben dahin die Betrachtung der auf der Fläche construierten Figuren, ihrer Winkel, ihres Flächeninhalts und ihrer Totalkrümmung, die Verbindung der Punkte durch kürzeste Linien u. dgl. gehört. Alle solche Untersuchungen müssen davon ausgehen, dass die Natur der krummen Fläche an sich durch den Ausdruck eines unbestimmten Linearelements in der Form $\sqrt{(Edp^2 + 2F dp.dq + G dq^2)}$ gegeben ist...

9.18. ... In praktischer Rücksicht ist dies zwar ganz unwichtig, weil in der That bei den größten Dreiecken, die sich auf der Erde messen lassen, diese Ungleichheit in der Vertheilung unmerklich wird, aber die Würde der Wissenschaft erfordert doch, daß man die Natur diser Ungleichheit klar begreife...

9.19. Большим недостатком метода Ома является его неприменимость к геометрическим проблемам. (См. дополнительные детали в очерке [Больца] в томе X, 2 Собрания трудов.)

9.20. Доказательство формулы Грина, данное Гауссом, было первым. Хотя работа Грина и вышла немногим позже, она была совершенно неизвестна за пределами Англии.

Глава 10

10.1. Проспект Шумахера, объявляющий о двух его новых журналах и описывающих их, включен в изданную переписку Гаусса и Шумахера (июнь 1821 года). Кроме того, Шумахер начал издавать ежегодник (Jahrbuch), о котором есть много упоминаний в дальнейшей переписке.

10.2. См. переписку Гаусса с Шумахером, Ольберсом и Бесселем весной 1824 года.

10.3. Траллес, физик.

10.4. Бережливый и недалекий князь Фридрих Вильгельм III интересовался в первую очередь практическими вопросами – покроем мундиров его солдат и тому подобным.

10.5. ... Darüber, dass er bei der Universität nicht angestellt wird, waren wir bereits alle einig. Da nun aber der Minister zur Herbeischaffung der Somme, welche noch an seiner Stellung fehlt, einen Titel haben muss, so hat er den Antrag an den König gemacht, den ich auch unterstützt habe, dass der Hr. Gauss ihm, dem Minister, in allem, was das mathematische Studium betrifft, rathgebend oder leitend für öffentliche Angelegenheiten oder Institute, als Observatorien, polytechnische Institute p.p. beistehe und sich unterzöge. Dies ist auch genehmigt, und der Minister hat dafür die Bewilligung auf 6 bis 700 Rthlr. erhalten, so dass von dieser Seite nun nichts mehr entgegensteht. Ausserdem würde noch eine billige Reise-und Versetzungskostenwergütung zu erlangen sein.

Was die Stellung betrifft, so glaube ich, dass neben der als Akademiker *sich keine ehrenvollere finden lässt*, und wenn der Hofrath Gauss sich mit dem Minister zu benehmen weiss, so bekommt er einen grossen Einfluss auf das ganze mathematische Unterrichtswesen des Staates, wo er also ein grosses Feld hat und ausserordentlich nützlich werden kann. Der Minister und die ersten Räthe werden ihm mit grossem Vertrauen entgegenkommen, alles übrige hängt von ihm selbst ab. Kommt es dazu, ein polytechnisches Institut zu bilden, wozu ich einen Plan entworfen habe, so würde er einen grossen Einfluss darauf üben, und dies ist zugleich eine Gelegenheit zu seiner Verbesserung... (Письмо от 28 ноября 1824 г.)

10.6. См. его некролог (Gedächtnisrede) Дирихле, перепечатанный во втором томе его трудов.

10.7. Феликс Клейн любил подчеркивать этот аспект обязанностей современного ученого.

10.8. Видимо, Минна Гаусс (-Вальдек), как и ее мать, тяготела к Берлину.

10.9. Даже тогда, более ста лет назад, ситуация напоминала усложненный вариант размещения оркестрантов. Речь шла, в числе прочего, о Мангейме, Дюссельдорфе, Тюбингене, Берлине и Зееберге.

10.10. История семьи Вальдек совершенно не исследована, хотя результаты могли бы быть интересными. Мы знаем о шурине Гаусса, который был офицером и был убит во время наполеоновских войн.

10.11. Например, см. письмо # 435 к Шумахеру от 9 июля 1845 года.

10.12. См. примечание 6 к дополнению IV.

10.13. Письмо # 383 к Герлингу от 30 декабря 1852 года.

10.14. Сохранились не все письма к Герлингу, касающиеся этого вопроса. Некоторые опубликованы в недавно вышедшем дополнительном томе переписки Гаусса и Герлинга (см. библиографию).

10.15. Письмо # 245 к Герлингу от 19 марта 1836 года.

10.16. Имеющиеся письма перепечатаны в [Мак], очень ценном справочнике.

10.17. ... Dein Brief machte auch den Kindern große Freude, Joseph fragte wol 10 mal, von Vater, wann kommt er wieder? auch Minna schien grossen Theil daran zu nehmen, die fragt aber besonders, bringt mir Vater auch etwas mit?

Könnte ich es Dir sagen lieber Junge, wie manchen traurigen Augenblick ich schon während Deiner Abwesenheit gehabt habe, auch abgerechnet Vater seine Krankheit. Carl–bester Carl, hast Du mich auch wahrlich lieb? ich fühle es, meine öftere Verstimmung muss Dich oft kränken; aber bei Gott es liegt nicht bei mir sie zu verbannen; – auch diese übertriebene Empfindlichkeit, ich kann nicht Herr ihrer werden, gewiss – o gewiss es (ist) jetzt Folge zu grosser Reizbarkeit der Nerven, aber es wird, es muss anders werden, denn bei Gott, ich fühle mich selbst höchst unglüchlich dadurch. Habe nur noch Geduld guter Junge und entzieh mir Deine Liebe darum nicht, es wird, es muss anders werden, mit diesem trüben Sinn mag ich nicht leben.

... Ein Glück, dass der Schluss der Ferien und Deine Mutter Dich wieder hier zu uns treiben, sonst fürchte ich giebt Dir H von Lindenau so viel zu schauen und zu horchen, dass Du darüber das Wiederkommen vergessen könntest. Glaube aber ja nicht, dass ich es Dir missgönne, ich freus mich so herzlich, wenn Du zufrieden bist, und das bist Du dort gewiss. O Gott im Himmel vermöcht ich Dich doch ganz so glücklich zu machen, wie Du es von mir erwartetest, bei Gott, mir fehlte nicht der Wille – aber die Kraft, möge der Himmel mir geben, dass die Kinder gute Menschen werden, so habe ich wenigstens einen Theil meiner Bestimmung erfüllt...

10.18. Obgleich ich Himly fest in die Hand habe versprechen müssen, gar nicht zu schreiben, so kann ich es mir doch ohnmöglich versagen, an Dich, guter Carl, mein Versprechen zu brechen. – Wie unaussprechlich hat es mich beglückt, dass Deine Gesundheit leidlich ist, ach es ist ja jetzt mein höchstes Gut. Meine Gesundheit ist in den Hauptpunkten bedeutend besser, aber deswegen darfst Du nicht darauf rechnen mich im Äusseren eben verändert zu finden. Kummer und Krankheit haben mich zu tief heruntergebracht, als dass nicht erst eine längere Zeit dazu gehören sollte, bevor die tiefen Furchen wieder ausgeglichen sind. – Aber es wird auch kommen. – Was Du über Eugen schreibst, hat mich recht getröstet, Gott nimmt sich unserer noch an, wenigstens hab ich es mit dem heissesten Dank gegen Gott erkannt, dass er Dich ein Schiff finden liess, wie konnten wir es denn erwarten, dass sich gerade ein gleich Seegel fertiges fand. – Ach ja es ist das Letzte was Du für inh thust. – Gott stehe ihm bei. Ist es mir doch als fühlte ich es ganz neu, es ist kein gestorbener, es ist ein verlorner Sohn Dass Du Dich mein bester Carl da etwas länger aufhalten musst, begreife ich wol, glaube nicht, dass Du erst den Tag Deiner Wiederkunft schreiben musst, der Tag Deiner Wiederkehr ist mir immer ein Festtag und wird Lich in diese dunkle Nacht bringen, die mich umgiebt. Nun noch eine Bitte, guter guter Carl, schlag sie nicht ab, richte Deine Reise so ein dass Du Wilhelm besuchst, die Ihssen hat geschrieben, so dringend darum gebeten, sie und iehr Mann wären überzeugt, dass es so gut auf ihn würken wurde, Du würdest Dich auch über ihn freun, Carl, Carl, thue es mir zum Trost, wir bedürfen ihn ja wol beide. – Joseph kann kein Hindernis geben, der ist erzogen und brav und gut, – aber Wilhelm soll erst noch werden. . . Er hat an Dich geschrieben, ein Brief voll der heiligsten Betheurungen, win es ein heisses Bestreben sein sollte Dir und mir Freude zu machen. Ihssens versichern, wie sie sich jetzt doppelt seiner annehmen wurden. Ach Karl könntest Du meine Bitte abschlagen? Gott bin so tief so tief gebeugt, ach ich flehe zu Dir, versage nicht was Du so leicht erfüllen kannst. – Bei Gott, ich will ja dann auch thun was in meinen Kräften ist, um mich aus dieser Kummer vollen Grabesnacht zu erheben. Ich kann nicht mehr bester Carl, Gott nehme Dich in seinen Schutz–Carl, Carl verwirf mein Flehen nicht.

10.19. Eine schwere Zeit für mein Haus sind alle die Monate gewesen, die seit meinem letzten Briefe an Sie verflossen sind. Ach wie lange und wie hart hat die arme Dulderin gedrückr werden mussen, bis ihr Herz brechen konnte. Endlich ist es gebrochen. Am 12. Abends ist sie von dem Jammer des Lebens geschieden, und heute hat die Erde ihre irdischen Überreste wieder aufgenommen. Meine beiden Töchter waren und sind mir eine wahre Stütze, meinen ältesten Sohn, welcher jetzt im Lüneburgischen eine Nachlese zu den vorjährigen Messungen hält, hoffe ich in ein paar Wochen hier zu sehen. Mein jüngster Sohn in Poppenhagen fängt eben an, sich von einer lebensgefährlichen Krankheit, die ihn vor etwa 6 Wochen befiel, zu erholen. Wegen der Wiederbesetzung von Bohnenbergers Stelle hatte man um meinen Rath ersucht, ich hatte Gerling dazu vorgeschlagen, welchem auch unter sehr vortheilhaften Bedingungen die Vokation nach Tübingen zugekommen ist. (Письмо к Ольберсу от 16 сентября 1831 г.)

10.20. См. детали в переписке с Шумахером, в основном за 1828–1831 годы.

10.21. Особенно в переписке с Ольберсом.

10.22. . . . Lebensfreude und Lebensmut waren schon lange von mir gewichen, und ich weiss nicht, ob sie je wiederkehren werden. Was mich so schwer drückt ist das Verhältnis zu dem Taugenichts in A(merika), der meinen Namen entehrt. Sie wissen, welche Nachricht ich vor 4 Monaten von ihm erhalten habe. Ich sehe, dass es wohl gut gewesen wäre, wenn ich ihm damals in dem Sinne geantwortet hatte, wie Sie rieten, um ihm sofort jede Erwartung abzuschneiden; aber ich vermochte nicht, ihm überhaupt zu antworten. Jetzt ist nun eine neue Epistel angekommen. Unschätzbar ware es, wenn ich Sie, mein teurer Freund, zur Stelle hätte, wie in so vielen anderen Rücksichten, so auch in der, dass Ihre bewährte Freundschaft und Ihr ungetrübter Blick meinem befangenen einen Stützpunkt geben könnte. Aber das Schicksal hat es nicht gewollt, mir diese Lebensfreude zu gewähren. Lassen Sie mich dann aber doch aus der Ferne, so gut es geht, Ihre Freundschaft in' Anspruch nehmen, da aus naheliegenden Gründen hier niemand sich dazu eignet, mich darüber zu beraten. Ich lege den Brief selbst bei. Ich bitte Sie, liebster Gerling, mir Ihre Ansicht offen mitzuteilen, und enthalte mich, um Ihr Urteil ganz unbefangen zu erhalten, den Eindruck anzugeben, den er bei mir gemacht hat. . .

10.23. После начала 1820-х годов письма Гаусса к Бесселю становятся заметно более сдержанными, чем к другим корреспондентам. Одной из причин этого могла быть та настойчивость, с которой Бессель старался привлечь Гаусса в Берлин на прусскую службу.

10.24. Такая позиция, видимо, была очень характерна для того времени. Гёте реагировал подобным же образом, и в гораздо более крайней форме, чем Гаусс.

10.25. Одним из посетителей был известный бельгийский ученый Кетле, написавший о своем визите отчет, дошедший до нас.

10.26. В основном в переписке с Шумахером.

10.27. Наиболее известны замечания Гаусса о неевклидовой геометрии; другой пример – замечание Гаусса, что работа Абеля избавила его от забот по публикации, быть может, трети его собственных результатов. Согласно биографии Римана, написанной Дедекиндом, аналогичное замечание Гаусс сделал по поводу диссертации Римана.

Глава 11

11.1. Гаусс дал справедливую оценку возможных кандидатов в своей записке для университетской администрации, расхвалив Вебера как исключительно одаренного молодого исследователя. В числе кандидатов был Герлинг.

11.2. См. также главу 10, где мы упоминаем работу Гаусса для Ганноверской комиссии мер и весов.

11.3. . . . Wenn man durch s das Volumen der Flüssigkeit, durch h die Höhe ihres Schwerpunkts über einer beliebigen horizontalen Ebene, durch T den Inhalt desjenigen Theils der Oberfläche der Flüssigkeit, welche das Gefäss berührt, und durch U den Inhalt des anderen (freien) Theiles dieser Oberfläche bezeichnet: so ist im Zustande des Gleichgewichts das Aggregat

$$sh + (\alpha\alpha - 2\beta\beta)\,T + \alpha\alpha U$$

ein Minimum, wo α und β gewisse Constanten bedeuten, welche von dem Verhältniss der Schwere zu der Intensität der Molecularanziehung der Theile der Flüssigkeit gegen einander und der Theile des Gefässes gegen die Flüssigkeit abhängen. Wir sehen hier also, als die Frucht einer schwierigen und subtilen Untersuchung einen Ausdruck für das Gesetz des Gleichgewichts hervorgehen, der, selbst dem gemeinen Verstande begreiflich, die Vermittlung des Conflicts zwischen den verschiedenen hier ins Spiel tretenden Kräften klar vor Augen legt. Wäre die Schwere die einzige wirkende Kraft, so würde beim Gleichgewicht der Schwerpunkt der ganzen Flüssigkeit so tief wie möglich liegen, also h ein Minimum sein müssen. Setzt man hingegen die Schwere und die Anziehung des Gefässes ganz bei Seite, so dass bloss die gegenseitige Anziehung der Theile der Flüssigkeit selbst in Betracht kommt, so muss diese eine sphärische Gestalt annehmen, also $T + U$ ein Minimum sein. Wäre endlich weder Schwere noch gegenseitige Anziehung der Flüssigkeitstheile vorhanden, so würde die Flüssigkeit sich über die ganze Oberfläche des Gefässes verbreiten, also T ein Maximum oder $-T$ ein Minimum sein müssen. Man findet es begreiflich, dass beim Zusammenwirken der drei Kräfte ein aus jenen drei Grössen-Zusammengesetztes ein Kleinstes werden soll, wiewohl sich von selbst versteht, dass die eigentliche feste Begründung jenes Lehrsatzes nur auf die vollständigen strengen mathematischen Schlussreihen gestützt werden kann, die von der Natur der Molecularanziehung wesentlich abhängig sind.

11.4. [Больца] приводит больше деталей истории этого выражения. Кажется, оно появилось еще в схоластической философии.

11.5. Задача Гаусса состояла в вычислении взаимного притяжения двух произвольных сферических эллипсоидов. Переход к конфокальным эллипсоидам возможен благодаря теореме Маклорена.

11.6. См. примечание 20 к главе 9.

11.7. Это могло быть одной из причин увеличивавшегося (временного) отчуждения между Гауссом и Гумбольдтом в начале 1830-х годов.

11.8. Ламонт впоследствии стал известен как один из ведущих исследователей магнетизма в мире. О его забавной и интересной карьере см. статью Lamont в одном из старых изданий Британской энциклопедии.

11.9. . . . Das die unbedeutenden Versuche, die Ich vor 5 Jahren bei Ihnen zu machen das Vergnügen hatte, mich der Beschäftigung mit dem Magnetismus zugewandt hätten, kann ich zwar nicht eigentlich sagen, denn in der That ist mein Verlangen danach so ält, wie meine Beschäftigung mit den exacten Wissenschaften übedhaupt, also weit über 40 Jahr; allein ich habe den Fehler, dass ich erst dann recht eifrig mich mit einer Sache beschäftigen mag, wenn mir die Mittel zu einem rechten Eindringen zu Gebote stehen und daran fehlte es früher. Das freundschaftliche Verhältniss, in welchem ich zu unserm trefflichen Weber stehe, seine ungemein grosse Gefälligkeit, alle Hülfsmittel des Physkalischen Cabinets zu meiner Disposition zu stellen und mich mit seinem eignen Reichtthum an praktischen Ideen zu unterstützen, machte mir die ersten Schritte erst möglich, und den ersten Impuls dazu haben doch wieder Sie gegeben, durch einen Brief an Weber, worin Sie (Ende 1831) der unter Ihren Auspicien errichteten Anstalten für Beobachtung der täglichen Variation erwähnen. . . (Письмо от 13 июня 1833 г.)

11.10. Работа Гаусса обоснована хотя и гораздо лучше, чем работа его предшественников, но все же не вполне строго. В частности, Гаусс делал вывод о существовании минимума, если существовала нижняя грань. В этом суть принципа Дирихле; Гаусс, конечно, не доказывал его и не видел нужды в этом.

11.10. Такое замечание сделал Гумбольдт в письме к Бесселю.

11.12. См. письмо # 333 к Ольберсу от 1 ноября 1837 года, а также последующие письма к Ольберсу.

11.13. S c h w a r z s c h i l d K. Zur Elektrodynamik. – I – III// Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. – Phys. Kl., 1903.

11.14. Этот фрагмент опубликован в томе V Собрания трудов.

Дополнение VIII

VIII. 1. Цитируем по [Даннингтон].

VIII. 2. Письмо # 347 к Ольберсу от 8 марта 1839 года.

VIII. 3. См. письма к Шумахеру # 225 от 15 марта 1836 года и # 226 от 21 марта 1836 года. См. также письмо # 439 от 22 сентября 1845 года.

VIII. 4. См. меморандум (pro memoria) Гаусса о Ганноверском исследовании в томе IV Собрания трудов.

VIII. 5. Здесь снова некоторое сходство с Гёте и с его реакциями.

VIII. 6. См. дополнительные детали в книге В. Хариха "Революционная поэзия Жана Поля" (W. Harich. Jean Pauls Revolutionsdichtung), Берлин, 1974 г.

Глава 12

12.1. Письмо # 171 к Шумахеру от 28 января 1831 года.

12.2. Этот вопрос усложнился в 1866 году, когда королевство Ганновер было ликвидировано и включено в состав Пруссии. Вебер, родом из Саксонии, другой жертвы энергичного экспансионизма Пруссии, стал пылким патриотом Ганновера и никогда не простил пруссакам их преступления.

12.3. В 19-м веке университеты были признанными убежищами либерализма в Германии. Хотя германские князья того времени были вообще реакционны, деспотический поступок короля Эрнста Августа был из ряда вон выходящим.

12.4. Auf Ihren Brief vom 8. mein theuerster Freud, der aber erst heute in meine Hände gekommen ist, eile ich Ihnen sogleich zu antworten, dass der mich betreffende Zeitungsartikel (. . .), insofern eine der vielen Unwahrheiten ist, die jetzt die öffentlichen Blätter füllen, als ich mich wirklich bisher gegen Niemand übr das geäussert habe, was ich zu thun oder nicht zu thun willens sei. Ich wünsche und hoffe, dass die Universität als Corpus, sich in die politischen Wirrnisse nicht mischen möge. Indessen wissen Sie, dass zwei mir sehr nahe stehende Personen insofern hineingezogen sind, als sie sich haben bewegen lassen, die bekannte Vorstellung mit zu unterzeichnen. Die deshalb beim Universitätsgericht eingeleitete Untersuchung betrifft indessen nur, wenn ich recht berichtet bin, die unbefugte Verbreitung, und an dieser haben die zwei angedeuteten gewiss auch nicht den entferntesten Theil gehabt. Ich kann daher nicht glauben, dass jene Unterzeichnung für sie unangenehme Folgen haben werde, und so lange diese zwei kräftigen Magnete unverrückt und unbeschädigt sind, behält Göttingen für mich viel mehr Reiz als Paris. Ob aber, wenn je Umstände eintreten sollten, die mir das Leben in Göttingen verbitterten, ich Paris anderen Orten vorziehen würde, ist etwas was jetzt hier nicth in Frage zu kommen braucht.... (Письмо # 263 к Шумахеру от 13 декабря 1837 г.)

12.5. Таким образом, Гаусс сделал гораздо больше, чтобы удержать своих друзей в Гёттингене, чем принято думать. Единственный шаг (хотя критический), которого он не хотел делать и фактически не сделал, – это открытое высказывание. Это было бы против всех его понятий. В 1838 году, видимо, чтобы загладить разрыв, Гаусс был выбран ректором университета, но отказался от этой должности.

12.6. Письмо # 221 (от Гаусса к Герлингу) в переписке с Герлингом (28 июня 1833 года).

12.7. Есть несколько упоминаний об этом в переписке с А. фон Гумбольдтом и Шумахером.

Дополнение IX

IX.1. См. примечание (2) к главе 8.

IX.2. Такова оценка самого Гаусса.

IX.3. См. примечание (7) к дополнению VI.

IX.4. Es ist sehr merkwürdig, dass die freien Bewegungen, wenn sie mit den nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der Kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf unter einander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Grössen beziehen. Diese Analogie liesse sich noch weiter verfolgen, was jedoch gegenwärtig nicht zu meiner Absicht gehört. (Собрание трудов, V, с. 28.)

IX.5. Aber nicht bloss unsere Armuth documetrt eine solche Art zu urtheilen, sondern zugleich eine kleinliche, engherzige und träge Denkungsart, eine Disposition, immer, den Lohn jeder Kraftäusserung ängstlich zu calculiren, einen Kaltsinn und eine Gefühllosigkeit gegen das Grosse und den Menschen Ehrende. Man kann es sich leider nicht verheelen, dass man eine solche Denkungsart in unserm Zeitalter sehr verbreitet findet, und es ist wohl völlig gewiss, dass gerade deiese Denkart mit dem Unglück, was in den letzten Zeiten so viele Staaten betroffen hat, in einem sehr genauen Zusammenhange steht; verstehen Sie mich recht, ich spreche nicht von dem so häufigen Mangel an Sinn für die Wissenschaften an sich, sondern von der Quelle, woraus derselbe fliesst, von der Tendenz, überall zuerst nach dem Vortheil zu fragen, und alles auf physisches Wohlsein zu beziehen, von der Gleichgültigkeit gegen grosse Ideen, von der Abneigung gegen 'Kraftanstrengung blosse aus reinem Enthusiamus für eine Sache an sich: ich meine, dass solche Characterzüge, wenn sie sehr vorherrschend sind, einen starken Ausschlag bei den Katastrophen, die wir erlebt haben, gegen haben können. (Собрание трудов, XII, с. 192).

IX.6. См., например, письмо # 321 к Ольберсу от 20 января 1835 года или письмо к философу Фризу, датированное 11 мая 1841 года. Есть несколько интересных замечаний в переписке с Шумахером. О. Гегеле см. в письмах # 333 от 23 января, # 334 от 25 января и # 335 от 2 февраля 1842 года. О. Вольфе см. письмо # 412 от 1 ноября 1844 года.

IX.7. Ср. предыдущее примечание 6. В томе XII Собрания трудов приведено письмо от Вебера к Фризу, где сообщается о высокой оценке Гауссом работы Фриза.

Глава 13

13.1. По его собственной оценке, Гауссу пришлось иметь дело более чем с миллионом чисел в одном только геодезическом исследовании. Кроме того, ему пришлось выполнить громадные вычисления при обработке астрономических данных.

13.2. См. в качестве примера его обзор таблиц делителей Буркхардта в томе II Собрания трудов.

13.3. У нас нет фактической возможности установить, индуктивным ли путем Гаусс получил свои оценки. Хотя нет указаний на то, как он мог вывести их, но представляется неправдоподобным, чтобы он не использовал при этом никаких теоретических соображений.

13.4. См. письмо Гаусса Энке от 11 марта 1851 года.

13.5. Гаусс сделал несколько замечаний о "волновой теории" света, но он никогда не занимался этим вопросом. Следует иметь в виду, что Гаусс был знаком с Фраунгофером со времени своей поездки в Мюнхен в 1816 году. См. также письмо # 411 к Шумахеру, где Гаусс обсуждает статью, которую Гершель послал в один из журналов Шумахера.

13.6. Дополнительную информацию о первых контактах между Гауссом и Репсольдом можно найти в очерке Шефера в томе XI.2 Собрания трудов, с. 152 и далее.

13.7. Например, [Клинкерфюс].

13.8. См. обсуждение этого вопроса в очерке [Шефер] с. 182 и далее.

Глава 14

14.1. Есть воспоминания Кантора (историка математики), Дедекинда, Якоби и других.

14.2. В том числе задачу о восьми ферзях (см. переписку с Шумахером или с. 18 и далее тома XII Собрания трудов). Любопытно, что Гаусс применял к этой задаче комплексную плоскость.

14.3. ... Indessen, wenn Sie, wie ich hoffe, ihn auch jetzt wieder annehmen, so bin ich doch in Sorge, was einmal künftig aus ihm werden soll. Die Geschichte mit dem Barometer, die vielleicht nicht die einzige ist, lässt mich fürchten, dass es ihm an Geschick für praktische Astronomie fehlt. Diese aber under Lehrstand sind ja jetzt in Europa fast das Einzige, wie ein Mathematiker, der keine eigenen Mittel hat, seine Subsistenz sichern kann. Sie wissen, wie unsere Akademien jetzt beschaffen sind, and nur wenn er etwas ganz Eminentes leistete, wäre einige Hoffnung, das er einmahl in einer Akademie eine Versorgung finde, und selbst dann ist 99 gegen 1 zu wetten, dass das nicht glückt. Ob er nun einmahl ein Professorenamt bekleiden kann, weiss ich nicht; Sie werden dies besser beurtheilen können. Fürchten Sie aber, dass er auch dazu sich nicht eignet, so weiss ich nicht, ob er nicht am besten thäte, irgend einen andern Beruf zu erwählen, z.B. als Militär oder sonst, und dann seine Musse nach Gefallen der Mathematik widmete. In der That, wenn man einmal einen Brotberuf dabei nöthig hat, so ist es ziemlich einerlei, welcher es ist, ob man Anfängern das abc der Wissenschaften vorträgt, oder Schuhe macht. Die Frage bleibt eigentlich nur, bei welcher Arbeit man die meiste und sorgenfreieste Zeit übrig behält...

14.4. Письмо # 374 к Шумахеру от 12 октября 1843 года.

14.5. Письмо # 342 к Шумахеру от 16 сентября 1842 года.

14.6. Согласно Рудио, Эйзенштейн приезжал в Гёттинген в 1844 году; это было его первое путешествие по окончании учебы в гимназии в Берлине. (См. Эйзенштейн, Собрание трудов, том II.)

14.7. Наш лучший источник – это [Дедекинд в].

14.8. Дедекинд. "Труды", том II. Ср. [Дедекинд в].

14.9. См. в [Даннингтон] список курсов, читавшихся Гауссом.

14.10. Гаусс был хорошим и эффективным пропагандистом работы Лобачевского в Германии.

14.11. . . . Ich habe die Veranlassung gehabt, das Werkchen von Lobatschefski (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinie. Berlin 1840, bei G. Funcke. 4 Bogen stark) wieder durchzusehen. Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die Statt finden müsste, und streng consequent Statt finden könnte, wenn die Euclidische nicht die wahre ist. Ein gewisser Schweikardt nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, Lobatschefsky imaginäre Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe (mit einer gewissen späteren Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will). Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschefsky'schen Werke nicht gefunden, aber die Entwickelung ist auf anderem Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschefsky auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste, Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiss ganz exquisiten Genuss gewähren wird.

14.12. У Гаусса было несколько книг Пушкина; особенно ему нравился "Борис Годунов". См. письма Гаусса # 283 и 308 к Шумахеру (от 17 августа 1839 и 8 августа 1840 года).

14.13. См. письмо # 218 к Шумахеру от 27 сентября 1835 года.

14.14. См. отчет Гаусса в томе IV Собрания трудов.

14.15. Минна Вальдек была весьма состоятельной невестой, и Гаусс позаботился о раздельном ведении счетов. Минна Гаусс оставила отдельное завещание (с условиями о том, когда Евгений сможет получить свою долю), и, сравнивая завещания жены и мужа, можно увидеть рост семейных финансов.

14.16. См. письмо # 412 к Шумахеру от 1 ноября 1844 года.

14.17. – и казалось, что все идет хорошо.

14.18. Письмо # 386 от 21 апреля 1853 года и последующие письма в переписке с Герлингом.

14.19. . . . Es sind die Stellen, die sich auf Unsterblichkeit beziehen. Ich kann Ihnen jetzt nicht sagen, woher die Zusammenstellung. Aber ich finde sie doch alle nicht so schlagend und zusammenhängend. Überhaupt, lieber College, ich glaube, Sie sind viel bibelgläubiger als ich und Sie sind viel glücklicher als ich. Ich muß sagen, wenn ich so öfters in früheren Zeiten Leute in niederen Ständen, simple Handwerker, gesehen, die so recht von Herzen glauben konnten: Ich habe sie immer beneidet. Sagen Sie mir doch, wie fängt man dieß an? . . . Haben Sie vielleicht das Glück gehabt, einen glübigen Vater zu haben, oder eine Mutter? (Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, Phill.-hist. Klasse. 1975. – № 6.)

Глава 15

15.1. В письме от 7 декабря 1853 года Гаусс поздравляет Александра фон Гумбольдта с достижением ньютоновского возраста, а именно 30766 дней – комплимент либо бессмысленный, либо грандиозный.

15.2. См. в Собрании трудов Римана его краткую биографию, написанную Дедекиндом.

15.3. Письмо Якоби к брату от 1 сентября 1849 года.

15.4. Это тема нескольких писем в переписке Гаусса и Герлинга за 1853 год.

15.5. Будучи учеником Дирихле, Дедекинд может быть назван математическим "внуком" или, точнее, "внучатым племянником" Гаусса.

Приложение В

В.1. Некоторые из очерков, помещенных в томах X.2 и XI.2, были сначала опубликованы отдельно как издания Гёттингенского королевского общества; в некоторых случаях есть существенные и интересные различия между изданиями.

В.2. К сожалению, история развития теории чисел в 19-ом веке еще не написана.

В.3. В "Памяти Гаусса".

В.4. Эти две статьи резко отличаются от остальных. Они менее исторически ориентированы, но богаты материалом.

БИБЛИОГРАФИЯ

Часть А

[Даннингтон] содержит хронологический список работ Гаусса. Мы ограничиваемся наиболее важными ссылками. За дальнейшей информацией следует обратиться к Собранию трудов Гаусса, в частности к очеркам, помещенным в томах X, 2 и XI, 2.

Собрание трудов: Carl Friedrich Gauss. Werke, I–XII. Редакция и публикация Königliche Gesellsehaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1863–1933 гг. В 1973 году это издание было перепечатано издательством: Georg Olms Verlag, Hildesheim / New York.

В статье Ожиговой "О научных связях Гаусса с Петербургской Академией наук"* говорится об одной статье Гаусса, не вошедшей в Собрание трудов (см. ее обсуждение на с. 84).

Переписка

Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel / Ed. G.F. Auwers. – Leipzig, 1880. Reprint: Hildesheim; N.Y., 1975.

Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und Wolfgang Bolyai / Ed. F. Schmidt und P. Stäckel. – Leipzig, 1899. Reprint: N.Y.; London, 1972.

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling / Ed. C. Schaefer. – Berlin, 1927. Reprint: Hildesheim; N.Y., 1975.

Christian Ludwig Gerling und Carl Friedrich Gauss. Sechzig bisher unveröffentlichte Briefe / Ed. T. Gerardy. – Göttingen, 1964.

Cinque lettres de Sophie Germain à C.F. Gauss / Ed. B. Boncampagni, Berlin, 1880.

Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauss / Ed. K. Bruhns. – Leipzig, 1877.

Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauss / Ed. K.-R. Biermann. – Berlin, 1977.

Briefe von C.F. Gauss an B. Nicolai / Ed. W. Valentiner. – Karlsruhe, 1877.

Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss / Ed. C. Schilling. – Berlin, 1900/1905. Reprint: Hildesheim; N.Y., 1976.

Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher / Ed. C.A.F. Peters. – Altona 1860–1865. Reprint: Hildesheim; N.Y., 1975.

Nachträge zum Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Heinrich Christian Schumacher/ Ed. T. Gerardy. – Göttingen, 1969.

---

*См. выходные данные в списке литературы на русском языке на с. 203 под номерами 7 и 13.

Другие важные источники: том XII Собрания трудов; Abh. Bayr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Abt. – 1955. – Bd. 71; Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft e.V. Göttingen.

Переписку Эйзенштейна с Гауссом можно найти в томе 2 Собрания его трудов. Другие письма к различным корреспондентам публиковались в разных местах; много ссылок есть в [Даннингтон] и в издании Бирмана переписки с А.Ф. Гумбольдтом.

Часть B

Bieberbach L. Carl Friedrich Gauss, ein deutsches Gelehrtenleben. – Berlin, 1938.

Biedermann K. Deutschland im 18. Jahrhundert. 1854. – Reprint Aalen, 1969.

Biermann K.-R. (a) DDR-Schrifttum über C.F. Gauss // Mitteilungen Math. Ges. DDR. – 1974. – Bd 4.

Biermann K.-R. (b) Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810–1920. – Berlin, 1973.

Biermann K.-R. (c) Martin Bartels – eine Schlüsselfigur in der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie? // Mitteilungen der Leopoldina Halle, 1975.

Black M. The Nature of Mathematics. – N.Y., 1952.

Bourbaki N. Eléments d'histoire de mathématique. – Paris, 1960.

Bruford K. Germany in the 18th Century. – Cambridge, 1935.

Crowe M.J. A History of Vector Analysis. – South Bend, 1967.

Dedekind R. (a) Vorlesungen über Zahlentheorie von P.G.L. Dirichlet. – Braunschweig 1863[1], 1871[2], 1879/80[3], 1894[4].

Dedekind R. (b) Gauss in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate. – Berlin, 1901.

Dieudonné J. L' oeuvre mathématique de C.F. Gauss // Conférence du Palais de la Découverte D. 79. – Paris, 1962.

Dombrowski P. Differentialgeometrie. . . (Lecture, Braunschweig, 1977).

Du Moulin-Eckart R. Geschichte der deutschen Universitäten. – Stuttgart, 1929.

Dunnington G.W.C.F. Gauss, Titan of Science. – N.Y., 1955.

Edwards H.M. Fermat's Last Theorem. – N.Y., 1977.

Fries J. Die Geschichte der Philosophie. . . – Halle 1837–1840.

Gerth H. Die sozialgeschichtliche Lage der bürgerlichen Intellegenz um die Wende des 18. Jahrhunderts. – Frankfurt, 1935.

Goldstine H.H.A. History of Numerical Analysis. – N.Y., 1977.

Hadamard J. The Psychology of Invention in the Mathematical Field. – Princeton, 1945.

Hänselmann L. Carl Friedrich Gaussh, zwölf Kapitel aus seinem Leben. – Leipzig, 1878.

Hall T. Gauss. – Cambridge, 1970.

Jones E. Das Problem Paul Morphy // Psychoanalytische Bewegung. – 1931. – Bd. 3.

Klein F. Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I. – Berlin, 1925.

Klinkerfues W. Theoretische Astronomie. – Braunschweing, 1871.

Koenigsberger L. Zur Erinnerung an Jacob Friedrich Fries // Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturw. Klasse. – Heidelberg, 1911.

Kronecker L. Vorlesungen über Zahlentheorie I. – Leipzig, 1901. Reprint: Berlin, 1978.

Kronecker L. Gesammelte Werke II. – Berlin, 1897.

Leiste C. – Die Arithmetik und Algebra. – Wolfenbüttel, 1790.

Mack H.C.F. Gauss und die Seinen. – Braunschweig, 1927.

Mitgau J.H. Familienschicksal und soziale Rangordnung. – Leipzig, 1928.

Möbius P.J. Über die Anlage zur Mathematik. – Leipzig, 1900.

Möser J.J. Sämtliche Werke. – Oldenburg, 1944.

Moritz K.F. Anton Reiser. – Berlin, 1785 ff.

Paulsen F. (a) Das deutsche Bildungswesen. – Leipzig, 1906.

Paulsen F. (b) Geschichte des gelehrten Unterrichts auf den deutschen Schulen und Universitäten vom Ausgang des Mittelalters bis zur Gegenwart. – Leipzig, 1885.

Reich K. Carl Friedrich Gauss 1777/1977. – Bonn; Bad Godesberg, 1977.

Reichardt H. (Ed.) C.F. Gauss Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 25. Februar 1955. – Leipzig 1957.

Reichardt H. Gauss und die nicht-euklidische Geometrie. – Leipzig 1976.

Riecke E. Wilhelm Weber. – Göttingen 1892.

Rosen V.H. On mathematical 'illumination' and the mathematical thought process // The Psychoanalytic Study of the Child. – 1953. – V. 8.

Scharlau W., Opolka H. Von Fermat bis Minkowski – Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung. – Heidelberg, 1980.

Schmidt A. Nachrichten von Büchern und Menschen I. – Frankfurt, 1971.

Sheynin O.B. Gauss and the Theory of Errors // Archive for History of Exact Sciences. –, 1979. – V. 20.

Smend R. Die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften in Festschrift zur Feier des zweihundertjährigen Bestehens der Akademie der Wissenschaften in Göttingen I. – Berlin, 1951.

Wagner R. Gespräche mit Carl Friedrich Gauss in den letzten Monaten seines Lebens // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Phil. hist. Klasse, 1975, – N 6.

Weil A. Two lectures on number theory, past and present // Enseign. Math. – 1974. – V. 20.

Weber H. Lehrbuch der Algebra. – Leipzig, 1894– 1908.

Whitehead A.N. Science and the modern world. – London, 1925.

Wolff C. Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften. Frankfurt, 1750–1757.

Worbs E. Carl Friedrich Gauss: Ein Lebensbild. – Leipzig, 1955.

Добавлено в корректуре: Carl Friedrich Gauss: A Bibliography. – Wilmington (Del.), 1981.

Основные издания на русском языке трудов Гаусса и трудов, посвященных его жизни и творчеству*

1. *Гаусс К.Ф.* Труды по теории чисел. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. *Гаусс К.Ф.* Избранные геодезические сочинения, ч. I, II. – М.: Изд-во геодезич. лит-ры, 1957.
3. *Гаусс К.Ф.* Избранные труды по земному магнетизму. – М.: Изд-во АН СССР, 1952.
4. *Гаусс К.Ф.* Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям. – М., 1861.
5. Геодезические исследования Гаусса, Бесселя и Ганзена. – СПб., 1866.
6. *Гаусс К.Ф.* Общие исследования о кривых поверхностях. – Казань, 1895.
7. *Гаусс К.Ф.* Теоретическая астрономия. Лекции, читанные в Гёттингене в 1820–1821 гг., записанные Купфером. – Пг., 1919.
8. *Гаусс К.Ф.* Пояснение возможности построения семнадцатиугольника // Историко-математические исследования, вып. 21. – М.: Наука, 1976.
9. Из переписки П.С. Лапласа, К.Ф. Гаусса, Ф.В. Бесселя и других с академиком Ф.И. Шубертом // Научное наследство. Естеств. научн. серия, т. I. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
10. Неопубликованное письмо К.Ф. Гаусса // Вестн. АН СССР. – 1955. – Вып. 4. – С. 109–111.
11. Карл Фридрих Гаусс. Сборник статей к 100-летию со дня смерти. – М.: Изд-во АН СССР, 1955.
12. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука, 1989.
13. *Маркушевич А.И.* Очерки по истории теории аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1951.

---

* Добавлено при переводе (за исключением пп. 7 и 13).

14. *Ожигова Е.П.* О научных связях Гаусса с Петербургской академией наук // Историко-математические исследования, вып. 21. – М.: Наука, 1976.
15. *Бирман К.Р.* Гаусс и Гёте // Историко-математические исследования, вып. 21. – М.: Наука, 1976.
16. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. – М.: Наука, 1981.
17. *Каган В.Ф.* Лобачевский. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – Гл. 28, 29.
18. *Симонов И.Н.* Записки и воспоминания о путешествии по Англии, Франции, Бельгии и Германии в 1842 году. – Казань, 1844.
19. *Кольман Э.Л.* Неопубликованное письмо Гаусса // Тр. Ин-та истории естеств. и техники. – 1955. – Т. 5. – С. 385–394.
20. *Радовский М.И.* Гаусс и его связи с Россией // Природа. – 1964. – № 8. – С. 108–109.
21. Заседание, посвященное Гауссу // Вестн. АН СССР. – 1948. – Вып. 1.
22. Протоколы заседаний конференции имп. Академии Наук, т. IV, 1786–1803. – СПб., 1911.
23. *Бобынин В.В.* Карл Фридрих Гаусс. Очерк его жизни и деятельности с приложением списка сочинений // Биографии знаменитых математиков. – Вып. 5. – М., 1889.

УКАЗАТЕЛЬ

N.B. Этот указатель не содержит ссылок на предисловие, приложения и библиографию.

Цена 1 р.